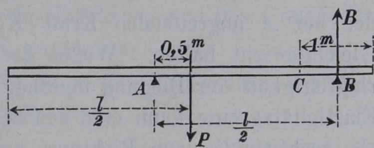
der übrigen Länge $l - 1^m$ werde in gleicher Weise eine Schneide A angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um $^1/_2{}^m$, die Schneide B um $^1/_2\,l$ von der Schneide A entfernt; der Stützendruck B wird daher

Fig. 73.



$$B = \frac{P \cdot 0{,}5}{^1/_2\,l} = \frac{P}{l},$$

d. h. das gewünschte Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide B auf die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich das Stück von 1^m Länge thatsächlich abgeschnitten, so befindet sich dieses auf der Schneide B im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide A. Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle C mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide B trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte Schienenstück von 1^m Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, S. 162.)

6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte K belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte K eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Maſs gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte K sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75).

Fig. 74.

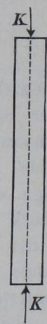


Fig. 75.

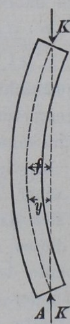


Fig. 76.

Führt man an irgend einer Stelle, wo die Ausbiegung y beträgt, einen Querschnitt durch den Stab und betrachtet das Stück unterhalb des Schnittes (Fig. 76), so müssen an dem Schnitte innere Kräfte auftreten, die der bei A angreifenden Kraft K das Gleichgewicht halten. Wegen der Geringfügigkeit der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze kann man den Schnitt als rechtwinklig zur Richtung von K annehmen. Die Richtungslinie von K geht um y an dem Schwerpunkte der Querschnittsfigur vorbei. Zur Erleichterung der Spannungsberechnung denken wir uns an einem Punkte des unteren Stabtheils 2 mit K gleiche und parallele, aber einander entgegengesetzte Kräfte so hinzugefügt, dass sie durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen; hierdurch wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert. Die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft K bilden ein Kräftepaar vom Momente Ky, welches an der rechten, konkaven Seite eine Druckspannung $\sigma = \dfrac{Kye}{J}$ hervorbringt. Die zweite hinzugefügte Kraft K aber ist eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Druckkraft und erzeugt eine gleichmässig über die Schnittfläche vertheilte Druckspannung $\dfrac{K}{F}$. Diese vereinigt sich mit der aus dem Biegungsmomente hervorgehenden Druckspannung zu der an dem Schnitt überhaupt vorkommenden grössten Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{Kye}{J} + \frac{K}{F}.$$

Nennt man f die stärkste Durchbiegung, welche in der Mitte der Länge l auftreten muss, so wird die überhaupt grösste an dem Stabe vorkommende Spannung die Druckspannung σ'', deren absoluter Werth

1) $$\sigma'' = \frac{Kfe}{J} + \frac{K}{F}.$$

Man könnte erwarten, dass die unbekannte Durchbiegung f mit Hülfe der Gleichung der Biegungslinie zu ermitteln sein würde;

doch gelingt ein derartiger Versuch nicht, wie in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, ausführlich entwickelt wird. Der Grund des Misserfolges liegt in dem Umstande, dass die Biegung nur eine Folge zufälliger Abweichungen ist, deren Grösse nicht zahlenmässig feststeht, sondern nur aus der Erfahrung und den Umständen eines bestimmten Falles ermittelt werden kann.

Bei den Belastungsfällen Fig. 58 u. 59 nun haben wir die Durchbiegung f eines Stabes auf die Form

$$f = \frac{1}{12}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{e} \quad \text{bezw.} \quad \frac{5}{48}\frac{\sigma}{E}\frac{l^2}{e}$$

(Gl. 14 und 18, S. 46) gebracht, und auf ähnliche Form lässt sie sich auch in den einfachen, in der Tabelle auf S. 44 behandelten Fällen bringen; es hat nur die Ziffer vor $\frac{\sigma}{E}$ in jedem Fall ihren besonderen Werth. Daher können wir auch bei der jetzt vorliegenden Aufgabe mit einiger Berechtigung fe verhältnisgleich mit l^2, also etwa

$$fe = al^2 \quad \text{setzen.}$$

Da bei einem nachgiebigen, wenig steifen Stoffe eine starke Durchbiegung eher erwartet werden darf als bei einem verhältnismässig starren Körper, so ist die Ziffer a eine in erster Linie von dem Material abhängige Verhältniszahl, und zwar darf der Erfahrung zufolge etwa gesetzt werden: für Stabeisen $a = 0{,}0001$, für Gusseisen und Holz $a = 0{,}0002$. Natürlich sind dies nur rohe Mittelwerthe; eingehendere Versuche haben gezeigt, dass a nicht ganz allein von dem Stoffe, sondern auch in nicht ganz einfacher Weise noch von dem Längenverhältnis abhängt, doch können wir darauf in diesem Buche nicht näher eingehen.

Hiernach wird dann aus Gl. 1:

$$\sigma'' = K\left(\frac{al^2}{J} + \frac{1}{F}\right).$$

Da der Stab die Freiheit hat, sich nach irgend einer Richtung auszubiegen, so muss man für vorstehende Gleichung den ungünstigsten Fall, d. h. für J den kleinstmöglichen Werth annehmen. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck, d die kleinere, h die grössere Seite, so ist $J = {}^1/_{12}\, hd^3$ zu setzen in Bezug auf die zur Kante h parallele Schwerpunktsachse. In der Richtung der kleineren Seite d ist dann die Ausbiegung zu erwarten. Führt man noch den zu J gehörigen kleinstmöglichen Trägheitshalbmesser i ein, indem man $J = Fi^2$ setzt, so wird

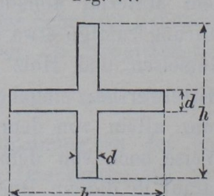
2) $$\sigma'' = \frac{\boldsymbol{K}}{\boldsymbol{F}}\left(a\,\frac{\boldsymbol{l}^2}{\boldsymbol{i}^2} + \boldsymbol{1}\right), \quad \text{oder auch mit} \quad n = \left(a\frac{l^2}{i^2} + 1\right)$$

3) $$\boldsymbol{F} = \frac{\boldsymbol{K}}{\sigma''}\cdot \boldsymbol{n} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{K} = \frac{\boldsymbol{F}\sigma''}{\boldsymbol{n}}\cdot$$

Der Klammerausdruck n wird für $l = 0$ zu Eins und wächst mit zunehmender Stablänge. Ist σ'' die zulässige Druckspannung, so würde $K : \sigma''$ der bei einer Berechnung auf reine Druckfestigkeit erforderliche Querschnitt sein. Der Zerknickungsfaktor $n = a\,\frac{l^2}{i^2} + 1$ giebt an, in welchem Verhältnisse der Querschnitt wegen der Möglichkeit des Zerknickens vergrössert werden muss.

Bei einem auf Knicken beanspruchten Stabe muss die Querschnittsform zweckmässig so gewählt werden, dass bei gegebener Fläche F das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers i möglichst gross werde. Man muss den Querschnitt so anordnen, dass zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieachsen gleich grosses Trägheitsmoment liefern. Jede Abweichung von dieser Form würde wohl in einer Richtung die Steifigkeit vergrössern, aber nur zum Schaden der Steifigkeit in anderer Richtung. Von allen rechteckigen Querschnitten verdient also das Quadrat den Vorzug. Der Kreis kommt bei den natürlichen Baumstämmen zur Anwendung. Für die Verwendung von Eisen wird man hohlen Querschnittsformen (Ring, hohlem Quadrat) und gerippten Formen, z. B. dem Kreuzquerschnitte mit gleichen Rippen (Fig. 77) den Vorzug geben.

Fig. 77.



Beispiele: Für einen Schmiedeisenstab von 100 cm Länge, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seite, ist $i^2 = 2^2 : 12$, und der Zerknickungsfaktor

$$n = 0{,}0001 \cdot \frac{100^2}{2^2} \cdot 12 + 1 = 4\,.$$

Bei 700 at zulässiger Druckspannung wird daher die zulässige Belastung

$$K = 2^2 \cdot 700 : 4 = 700 \text{ kg}.$$

Für einen kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 77) ist nach S. 24

$$J = {}^1/_{12}\, d h^3 \left(1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{d^3}{h^3}\right),$$

$$F = 2\, d \cdot h - d^2 = d \cdot h \left(2 - \frac{d}{h}\right).$$

Bei der Berechnung des Zerknickungsfaktors kann man (im Hinblick auf die Unsicherheit des Werthes α) wegen der Kleinheit von $d : h$ annähernd

$$i^2 = \frac{d \cdot h^3}{12 \cdot 2\, d \cdot h} = \frac{h^2}{24} \quad \text{setzen.}$$

Es wird dann $$n = \alpha\; 24 \frac{l^2}{h^2} + 1\,;$$

für Schmiedeisen und $l = 20\, h$ ist $n = 0{,}96 + 1$ oder rund $n = 2$. (Abrundungen sind bei der Berechnung von n sehr angebracht.) Die Fläche F ist, z. B. für $d = 2{,}5$ cm, $h = 20$, also $l = 400$ cm,

$$F = 2 \cdot 2{,}5 \cdot 20 - 2{,}5^2 = 93{,}75 \text{ qcm},$$

mit $\sigma'' = 700$ wird dann die zulässige Belastung

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{2} = 32\,813 \text{ kg}.$$

Ist der Stab von Gusseisen, so wird α doppelt so gross, daher

$$n = 1{,}92 + 1 = 2{,}92, \text{ rund } 3.$$

Nimmt man wiederum $\sigma'' = 700$, so wird

$$K = \frac{700 \cdot 93{,}75}{3} = 21\,875 \text{ kg}. \text{ —}$$

Für eine hohle Gusseisensäule von dem äusseren und inneren Halbmesser R bezw. r ist

$$J = {}^1/_4\, (R^4 - r^4)\, \pi\,; \quad F = (R^2 - r^2)\, \pi,$$

mithin $i^2 = {}^1/_4\, (R^2 + r^2)$, daher

$$n = 0{,}0002 \cdot 4 \frac{l^2}{R^2 + r^2} + 1\,;$$

mit $r = 0{,}9\, R$ wird dann

$$n = 0{,}00044 \frac{l^2}{R^2} + 1.$$

Ist dann noch $l = 40\, R$, so wird $n = 1{,}7$.

$R = 10$ cm, $l = 400$ cm und $\sigma'' = 700$ at liefert dann wegen $F = 59{,}69$ qcm

$$K = \frac{700 \cdot 59{,}69}{1{,}7} = 24\,576 \text{ kg}.$$

Weiteres über Knickfestigkeit findet man in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.