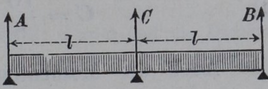
der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

Wir betrachten nur den Fall, dass die 3 Stützen gleiche Entfernung l haben. Für einen solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

Fig. 66.



1) $A + C + B = 2pl$

und in Bezug auf C: $Al - Bl = 0$ oder

2) $A = B$.

Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegungslehre geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze C liege um c unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann c beliebig $\gtreqless 0$ gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich endlich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), es wird $A = B = pl$, $C = 0$ sein. Schiebt man aber den Punkt C weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken endlich nur auf C schweben, es wird $C = 2pl$, und $A = B = 0$ sein. Die Biegungslinie muss in allen Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte wagerecht sein (Fig. 69).

Fig. 67.

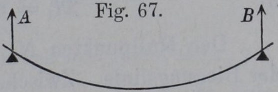


Fig. 68.

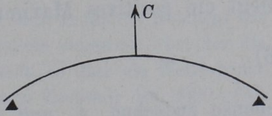
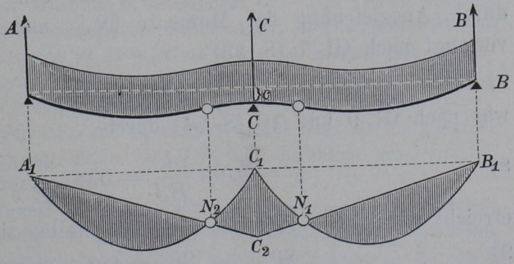


Fig. 69.



Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 45) die linke Hälfte wagerecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtsseitige Hälfte CB in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 54), so dass die sämmtlichen Untersuchungen von S. 52—54 sich hier verwerthen lassen. Es wird

$$c = \frac{B l^3}{3 EJ} - \frac{p l^4}{8 EJ}, \quad \text{mithin}$$

3) $$\boldsymbol{B = \frac{3}{8} pl + \frac{3 EJc}{l^3} = A} \quad \text{und}$$

4) $$\boldsymbol{C = \frac{10}{8} pl - \frac{6 EJc}{l^3}}.$$

Auch die Momentenfläche wird für die rechtsseitige Hälfte ebenso, wie in Fig. 64 (S. 50) gezeigt, und für die linksseitige Hälfte dazu symmetrisch. $\mathfrak{M}_1$ wird hier das Moment über der Mittelstütze

5) $$\mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = (\tfrac{1}{2} pl - B)\, l.$$

Den Nullpunkten N_1 und N_2 entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), ausserhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen B_1 und N_1 liegt ein positives Maximalmoment

6) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p},$$

ebenso zwischen A_1 und N_2.

Für $c = 0$, d. h. für Stützen in einer Flucht, wird $B = \tfrac{3}{8} p l$. $\mathfrak{M}_{max} = \tfrac{9}{128} p l^2$; $\mathfrak{M}_1 = \tfrac{1}{8} p l^2$. Eine Senkung der Mittelstütze um c vergrössert B, vergrössert $\mathfrak{M}_{max}$ und verkleinert gleichzeitig $\mathfrak{M}_1$.

Die günstigste Anordnung für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ erreicht. Dies verlangt nach Gl. 7 (S. 53)

7) $$B = 0{,}414\, p l,$$

was nach Gl. 9 und 10 (S. 54) durch

8) $$\frac{c}{l} = 0{,}013 \frac{p l^3}{EJ} = 0{,}151 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}$$

erreicht wird. Die grössten Momente stellen sich dann auf

9) $$\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, p l^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht $\mathfrak{M}_1 = 0{,}125\, p l^2$ sein würde.

Beispiel: Ein Holzbalken von $2\,l = 10^{\,\mathrm{m}} = 1000^{\,\mathrm{cm}}$ Länge, im Querschnitte $15^{\,\mathrm{cm}}$ breit und $16^{\,\mathrm{cm}}$ hoch, werde von drei Arbeitern A, C und B getragen. Es soll die Gewichtsvertheilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat $10 \cdot 0{,}16 \cdot 0{,}15 = 0{,}24^{\,\mathrm{cbm}}$ Inhalt; wiegt $1^{\,\mathrm{cbm}}$ $600^{\,\mathrm{kg}}$, so wird das Gesammtgewicht $2\,p\,l = 144^{\,\mathrm{kg}}$; $p = 0{,}144^{\,\mathrm{kg/cm}}$. Es ist $J = {}^1\!/_{12}\, 15 \cdot 16^3 = 5120$; $\mathfrak{W} = 640$; $E = 120\,000^{\,\mathrm{at}}$, $l = 500^{\,\mathrm{cm}}$.

Es wird
$$A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3\,E\,J\,c}{l^3} = 27 + 14{,}746\,c\,;$$
$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6\,E\,J\,c}{l^3} = 90 - 29{,}492\,c\,.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird $A = B = 72^{\,\mathrm{kg}}$; $C = 0$ und die Durchbiegung in der Mitte
$$c = 90 : 29{,}492 = 3{,}05^{\,\mathrm{cm}}\,.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Maſs niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das grösste Moment in der Mitte
$${}^1\!/_8\, p\,(2\,l)^2 = {}^1\!/_2\, p\,l^2 = {}^1\!/_2 \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000^{\,\mathrm{cmkg}}$$
und die Spannung $\sigma = 18\,000 : 640 = 28{,}1^{\,\mathrm{at}}$.

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll $A = B = C = {}^1\!/_3 \cdot 144 = 48^{\,\mathrm{kg}}$ sein, so muss die mittlere Schulter um $c = \dfrac{48 - 27}{14{,}746} = 1{,}42^{\,\mathrm{cm}}$ tiefer liegen als die anderen. In diesem Falle wird $\mathfrak{M}_{max} = \dfrac{48^2}{2 \cdot 0{,}144} = 8000$, $\mathfrak{M}_1 = ({}^1\!/_2\, 72 - 48)\, 500 = -6000$, d. h. wegen des negativen Zeichens ist $\mathfrak{M}_1$, welches mit positivem Zeichen einer Biegungslinie entsprach, bei der die konvexe Seite oben lag, hier ein umgekehrtes Moment, so dass ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist $8000 : 640 = 12{,}5^{\,\mathrm{at}}$.

Die Spannung wird am kleinsten für
$$c = 0{,}013\,\frac{p\,l^4}{E\,J} = \frac{0{,}013 \cdot 72 \cdot 500^3}{120\,000 \cdot 5120} = 0{,}19^{\,\mathrm{cm}}\,.$$
Dabei ist $A = B = 0{,}414\,p\,l = 29{,}8^{\,\mathrm{kg}}$; $C = 144 - 2 \cdot 29{,}8 = 84{,}4^{\,\mathrm{kg}}$, so dass die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das grösste Moment wird $0{,}086\,p\,l^2 = 3096$, die Spannung $3096 : 640 = 4{,}8^{\,\mathrm{at}}$. — Für gleiche Höhenlage der Schultern wird $A = B = 27^{\,\mathrm{kg}}$; $C = 90^{\,\mathrm{kg}}$; das grösste Moment $\mathfrak{M}_1 = {}^1\!/_8\, p\,l^2$, d. h. ${}^1\!/_4$ so gross wie für $C = 0$, also $\mathfrak{M}_1 = 4500$, $\sigma = 7^{\,\mathrm{at}}$. — Dagegen wird $A = B = 0$ und $C = 144^{\,\mathrm{kg}}$ für $c = -27 : 14{,}746 = -1{,}83^{\,\mathrm{cm}}$, d. h. wenn die mittlere Schulter um dieses Maſs höher liegt als die anderen. Das grösste Moment wird nun $\mathfrak{M}_1 = {}^1\!/_2\, p\,l^2 - 0$, d. h. ebenso gross wie für $C = 0$, nämlich $18\,000$ mit $\sigma = 28{,}1^{\,\mathrm{at}}$.

Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen $4{,}8$ und $28{,}1^{\,\mathrm{at}}$. Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Solche Balken auf mehr als zwei

Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Oeffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler neben einander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig. 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung gerathen, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.

Fig. 70.

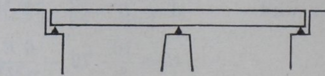
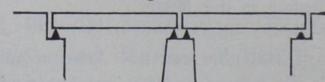
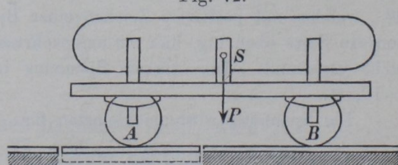


Fig. 71.



Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne dass eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwaage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Waage (Fig. 72) und ermittelt die Last A, verfährt dann mit der anderen Achse B in derselben Weise und erhält in der Summe $A + B$ das Gesammtgewicht P des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, dass die Fahrbahn zu beiden Seiten der Waage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil man nicht wissen kann, ob die Achse, nachdem sie die Waage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei ihrer Stellung auf der Waage.

Fig. 72.



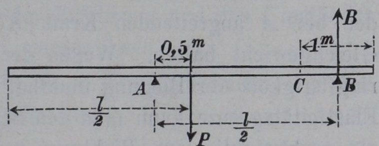
Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahreu angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Waage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei l die Länge des ganzen Stabes oder Balkens; von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge $= 1^{\text{m}}$ ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte B dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte A

der übrigen Länge l — 1 m werde in gleicher Weise eine Schneide A angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um $^1/_2$ m, die Schneide B um $^1/_2\, l$ von der Schneide A entfernt; der Stützendruck B wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0{,}5}{^1/_2\, l} = \frac{P}{l},$$

d. h. das gewünschte Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide B auf die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich das Stück von 1 m Länge thatsächlich abgeschnitten, so befindet sich dieses auf der Schneide B im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide A. Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle C mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide B trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte Schienenstück von 1 m Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, S. 162.)

Fig. 73.



6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte K belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte K eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Maſs gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte K sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75).