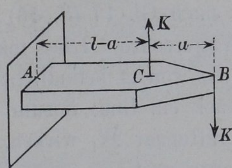
$y = f$ für $x = l$ giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3}\frac{\sigma}{E}\frac{l}{h}, \quad \text{oder wegen} \quad \sigma = \frac{Kl}{J_1}\frac{h}{2}:$$

22)
$$f = \frac{2}{3}\frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 44).

Fig. 61.



γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\varrho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{Ka}$$

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar Ka belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter ϱ, so wird die Durchbiegung des Endpunktes B werden

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{Kal^2}{2EJ_1},$$

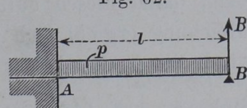
wenn J_1 das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist $h = 2$ cm, $\sigma = 700$ at, $E = 2000000$ at, so wird der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{2000000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857$ cm $= 28{,}57$ m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

Der Balken rage bei A (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt B liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles. Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck B mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegungsmoment und Spannungen unbestimmt. Es liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegungslehre zur Lösung.

Fig. 62.



Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zunächst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns einmal bei A den oberen Theil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei A nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Grösse f nach Gl. 16 (S. 46) durch und hat an beiden Enden eine Neigung α nach Gl. 17 (S. 46) gegen die Wagerechte. Lässt man an dem links von A befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes Kräftepaar $\mathfrak{M}_1$ wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrössert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Grösse von $\mathfrak{M}_1$ wird die Biegungslinie bei A genau wagerecht sein. Man kann daraus schliessen, dass die wagerecht einspannende Wand neben dem Auflagerdruck A noch ein Einspannungsmoment $\mathfrak{M}_1$ auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lothrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei von einander unabhängige Gleichgewichts-Gleichungen aufstellen, da zu der Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben. Zur Bestimmung der Auflagerkräfte A, B und des Momentes $\mathfrak{M}_1$ (Fig. 64) hat man also nur zwei Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung; die eine fehlende dritte Gleichung muss aus der Biegungslehre genommen werden; man nennt daher diesen Fall: einfach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergiebt sich in diesem Falle sehr einfach. Die Kraft B würde den Endpunkt des bei A wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 44 in die Höhe biegen um $\frac{B l^3}{3 EJ}$. Wäre die Stütze B nicht vorhanden, so würde die Belastung den Endpunkt um $\frac{p l^4}{8 EJ}$

Fig. 63.

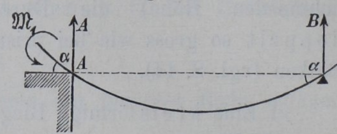
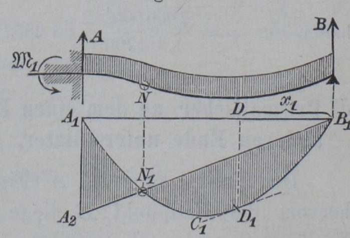


Fig. 64.



abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt B in gleicher Höhe mit A liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

$$\frac{B l^3}{3 E J} = \frac{p l^4}{8 E J} \quad \text{oder}$$

1) $$\boldsymbol{B = \frac{3}{8} p l}; \quad \text{somit}$$

2) $$A = {}^5/_8\, p l \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_1 = {}^1/_2\, p l^2 - {}^3/_8\, p l^2 = {}^1/_8\, p l^2.$$

Diese Werthe gelten aber nur, wenn die an die Biegungslinie bei A gelegte Tangente genau durch den Punkt B geht; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben grossen Einfluss auf die Auflagerkräfte.

In einem Abstande x von B ist das Biegungsmoment

3) $$\mathfrak{M} = B x - {}^1/_2\, p x^2 = {}^3/_8\, p l x - {}^1/_2\, p x^2.$$

Fügt man ${}^1/_8\, p l x$ mit $+$ und $-$ hinzu, so kann man auch schreiben:

$$\mathfrak{M} = {}^1/_2\, p l x - {}^1/_2\, p x^2 - {}^1/_8\, p l x$$

4) $$= {}^1/_2\, p x (l - x) - {}^1/_8\, p l x.$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 33) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64) von der Pfeilhöhe ${}^1/_8\, p l^2$. Das zweite Glied wird durch die Gerade $A_2 B_1$ dargestellt, wenn $A_1 A_2 = {}^1/_8\, p l^2$. Von den Ordinaten der Parabel muss man diejenigen der Geraden abziehen, um $\mathfrak{M}$ zu erhalten. Die lothrechte Schraffirung giebt die Veränderlichkeit des Momentes an.

Von B_1 (wo $\mathfrak{M} = 0$) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle D_1, wo die Parabel $\parallel$ der Geraden $A_2 B_1$, ein analytisches Maximum $\mathfrak{M}_{max}$, nimmt dann wieder ab, wird bei N_1, wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den grössten negativen Werth $-\mathfrak{M}_1 = -{}^1/_8\, p l^2$ an der Einspannungsstelle.

Die Funktion von der Form $\mathfrak{M} = B x - {}^1/_2\, p x^2$ erreicht, wie schon S. 35 gefunden (dort war A statt B gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2 p} \quad \text{für} \quad x_1 = \frac{B}{p};$$

das giebt für $B = {}^3/_8\, p\, l$ (Punkt D_1):

$$5)\qquad \mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128}\, p\, l^2 \quad \text{und} \quad x_1 = {}^3/_8\, l\,.$$

$B x - {}^1/_2\, p\, x^2$ wird aber zu Null für $x = 0$ (Punkt B_1) und für $x = \frac{2\,B}{p} = {}^3/_4\, l$ (Punkt N_1).

Es findet sich also $\mathfrak{M}_{max}$ mitten zwischen den beiden Momenten-Nullpunkten. Einem Momente $= 0$ entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment $J > 0$ hat, eine Krümmung $= 0$, und ein Krümmungshalbmesser $\varrho = \infty$ der Biegungslinie. N_1 entspricht daher einem Wendepunkte N der Biegungslinie. Rechts von N kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten $\smile$, wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links von N ist die Krümmung $\frown$ und damit auch das Moment entgegengesetzt.

Solche Querschnitte, an denen das Biegungsmoment grösser ist als zu beiden Seiten daneben, heissen *gefährliche* Querschnitte. Hier giebt es deren zwei, nämlich D und A. Beide sind aber nicht in gleichem Maſse gefährlich; denn die entsprechenden Momente ${}^9/_{128}\, p\, l^2$ und ${}^1/_8\, p\, l^2 = {}^{16}/_{128}\, p\, l^2$ verhalten sich wie $9:16$. An der Einspannungsstelle herrscht also das grösste Moment, und dies ist auch ebenso gross, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das grösste Moment hat sich daher in Folge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende A verschoben.

Eine *Verminderung* des grössten Momentes lässt sich aber erreichen, wenn man die Stütze B um ein gewisses Maſs nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrössert man den Stützendruck B; in Folge dessen wird in $\mathfrak{M}$ (Gl. 3, S. 51) das positive Glied vergrössert, hierdurch das bisher kleinere Moment $\mathfrak{M}_{max}$ vergrössert und der absolute Werth des negativen Momentes $\mathfrak{M}_1$ vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für $\mathfrak{M}$, der von der Höhenlage des Punktes B noch unabhängig ist, $\mathfrak{M} = B x - {}^1/_2\, p\, x^2$, die Grösse ${}^1/_2\, p\, l\, x$ mit $+$ und $-$ hinzufügt, dann kann man ordnen:

$$6)\qquad \mathfrak{M} = {}^1/_2\, p\, x\, (l - x) - ({}^1/_2\, p\, l - B)\, x\,.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate $A_1 A_2$ nun aber $= (\frac{1}{2} p l - B) l$, d. h. von B abhängig ist, und zwar bedeutet $A_1 A_2$ wiederum den absoluten Werth $\mathfrak{M}_1$ des Einspannungsmomentes. Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut grösste Moment so klein wie möglich ist, könnte man nun schon zeichnerisch durch Probiren finden, indem man die Gerade $B_1 A_2$ solange um B_1 drehte, bis die beiden lothrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ entsprechen, gleich geworden wären. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von $B_1 A_2$ würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrössern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur $A_1 A_2 = (\frac{1}{2} p l - B) l$ zu setzen und hat damit B bestimmt. Der Weg der Rechnung bedingt, dass man das analytische Maximum von $\mathfrak{M}$, nämlich $\frac{B^2}{2p} = \mathfrak{M}_1 = \frac{p l^2}{2} - B l$ setzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen $B = p l (-1 \pm \sqrt{2})$, von denen nur der positive Werth

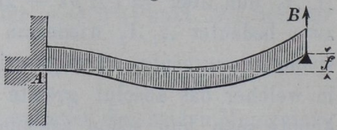
7) $$B = p l (-1 + 1{,}414) = 0{,}414\, p l$$

möglichst kleine Werthe der Grösstmomente liefern kann, denn der negative Werth würde $\frac{B^2}{2p}$ sehr gross machen. Da nun für diesen Auflagerdruck $B = 0{,}414\, p l$ die Momente $\mathfrak{M}_{max}$ und $\mathfrak{M}_1$ gleich werden, so berechnet man den Werth beider am einfachsten mittels der Formel für $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} p l^2 - B l = p l^2 (0{,}5 - 0{,}414) = 0{,}086\, p l^2$. Diesem Auflagerdrucke $B = 0{,}414\, p l$ entspricht also ein überhaupt grösstes Moment

8) $$\mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0{,}086\, p l^2,$$

während bei $B = \frac{3}{8} p l$ sich $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{8} p l^2 = 0{,}125\, p l^2$ ergab. Das grösste Moment ist also bei gegebener Balkenlänge und Last im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, die Tragfähigkeit also auf das 125 : 86 = 1,45 fache gestiegen. Um nun diejenige Hebung f des Punktes B gegen die Einspannungsstelle A zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt man an die Biegungslinie die Kraft $B = 0{,}414\, p\, l$ (Fig. 65) und bekommt dann durch denselben Gedankengang, der auf S. 50/51 zur Bestimmung von B für $f = 0$ führte, jetzt

Fig. 65.



$$f = \frac{B\, l^3}{3\, E J} - \frac{p\, l^4}{8\, E J} = \frac{p\, l^4}{E J}\left(\frac{0{,}414}{3} - \frac{1}{8}\right).$$

9) $$f = 0{,}013\, \frac{p\, l^4}{E J}.$$

Um die verhältnismässige Grösse dieser Hebung einigermafsen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung σ ein, indem wir bedenken, dass das grösste Moment jetzt $0{,}086\, p\, l^2 = \sigma \frac{J}{e}$, also $\frac{p\, l^2}{J} = \frac{\sigma}{0{,}086\, e}$ sein muss. Führt man dies in Gl. 9 ein, so wird

10) $$\frac{f}{l} = 0{,}151\, \frac{\sigma}{E}\, \frac{l}{e}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 47)

$$\sigma = 700; \; E = 2\,000\,000; \; {}^{l}/_{e} = 20,$$

so wird $\frac{f}{l} = 0{,}001057$, d. h. rund $^1/_{1000}$. Eine Hebung der Stütze B um $^1/_{1000}$ der Spannweite l genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45 fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiss mit Vortheil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müsste, so überzeugt man sich leicht, dass eine Balken-Anordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnungsmässig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch Abweichungen von der gewünschten Stützenlage leicht eine Vergrösserung der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

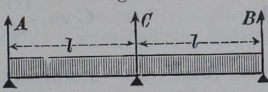
Wir betrachten nur den Fall, dass die 3 Stützen gleiche Entfernung l haben. Für einen solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

1) $$A + C + B = 2pl$$

und in Bezug auf C: $Al - Bl = 0$ oder

2) $$A = B.$$

Fig. 66.



Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegungslehre geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze C liege um c unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann c beliebig $\gtreqless 0$ gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich endlich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), es wird $A = B = pl$, $C = 0$ sein. Schiebt man aber den Punkt C weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken endlich nur auf C schweben, es wird $C = 2pl$, und $A = B = 0$ sein. Die Biegungslinie muss in allen Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte wagerecht sein (Fig. 69).

Fig. 67.

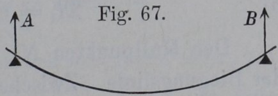


Fig. 68.

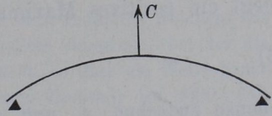
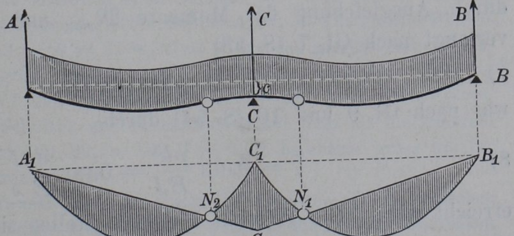


Fig. 69.



Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 45) die linke Hälfte