Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, dass $\sigma = 700^{\text{at}}$; $l : e = 20$, so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00175 = 0^0\,6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ist (Gl. 18 und 19):

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00233 = 0^0\,8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00072.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen bei gleichförmiger Belastung und bei Einzellast zu einander wie $5 : 4 = 1{,}25 : 1$. Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also $^2/_3$ bezw. $^1/_2\, \mathfrak{M}_{max}$, verhalten sich demnach wie $4 : 3 = 1{,}33 : 1$.

Bei sehr dünnwandigen I-Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegungslinie ist allgemein $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sigma}{Ee}$ (S. 40, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle v und $e = {}^1/_2\, v$, so wird, weil jetzt σ überall gleich,

$$20) \qquad \frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v}.$$

α) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe $v = h$ gegeben, so wird nach Gl. 20 auch ϱ überall gleich, d. h. die Biegungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{Eh}{2\sigma}$ (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 43), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{dx^2}$ setzt und 2mal integrirt.

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{h}; \quad \frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma}y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0; \quad \frac{E}{\sigma}f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E}\frac{l}{h} \text{ oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1}\frac{h}{2},$$

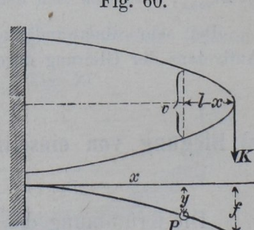
wenn $\mathfrak{M}_1$ und J_1 sich auf irgend einen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen: $f = \dfrac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2EJ_1}$.

Erfolgt die Biegung durch eine am äusseren Ende wirkende Kraft K, so ist $\mathfrak{M}_1 = Kl$ und

21) $$f = \frac{Kl^3}{2EJ_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50) $1\frac{1}{2}$ mal so gross wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 43).

Fig. 60.



β) Ist die Höhe v nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49, S. 37), so wird $v^2 : h^2 = (l - x) : l$ und aus Gl. 20:

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h}(l - x)^{-1/2} \text{ (Fig. 60).}$$

Multiplicirt man mit $dx = -d(l - x)$, so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma}\frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h}2\sqrt{l - x} + C$$

und, weil für $x = 0$ auch $\dfrac{dy}{dx} = 0$ ist,

$$C = \frac{2l}{h}, \quad \text{daher}$$

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma}\frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l}\sqrt{l - x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4}\frac{E}{\sigma}y = l \cdot x + \frac{2}{3}\sqrt{l}(l - x)^{3/2} + C_1$$

$$\text{mit } C_1 = -\frac{2}{3}l^2 \text{ wegen } y = 0 \text{ für } x = 0.$$

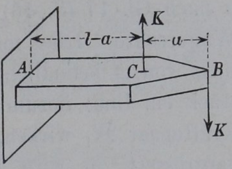
$y = f$ für $x = l$ giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3}\,\frac{\sigma}{E}\,\frac{l}{h}, \quad \text{oder wegen} \quad \sigma = \frac{Kl}{J_1}\,\frac{h}{2}:$$

22) $$f = \frac{2}{3}\,\frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 44).

Fig. 61.



γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\varrho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{Ka}$$

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar Ka belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter ϱ, so wird die Durchbiegung des Endpunktes B werden

$$f = \frac{l^2}{2\varrho} = \frac{Kal^2}{2EJ_1},$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist $h = 2$ cm, $\sigma = 700$ at, $E = 2000000$ at, so wird der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{2000000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857$ cm $= 28{,}57$ m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

Der Balken rage bei A (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt B liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles. Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck B mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegungsmoment und Spannungen unbestimmt. Es liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegungslehre zur Lösung.

Fig. 62.