$K = 200$ kg, und ausserdem seien $pl = 200$ kg gleichmässig über die Balkenlänge l vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung σ und die Durchbiegung f des hölzernen Balkens ($E = 120000$ at) vom Querschnitte $d = 12$ cm, $h = 20$ cm?

Das grösste Moment an der Wand beträgt

$$\mathfrak{M} = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 = 60000 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment

$$\mathfrak{W} = {}^1\!/_6 \cdot 12 \cdot 20^2 = 800, \quad \text{daher}$$

$$\sigma = 60000 : 800 = 75 \text{ at}.$$

Das Trägheitsmoment ist $J = \mathfrak{W} \cdot 10 = 8000$, daher

$$f = \frac{Kl^3}{3\,EJ} + \frac{pl^4}{8\,EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120000 \cdot 8000}$$

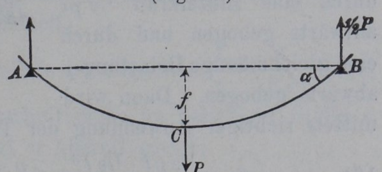
$$= 0{,}76 \text{ cm} = 1 : 263 \quad \text{der Länge}.$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht K aufwärts, p abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegungslinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte bei C wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei C erzwungen wird; ob durch den Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte CB ansehen als bei C aus einer einspannenden Wand wagerecht um $^1\!/_2\,l$ hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft $^1\!/_2\,P$ aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt B um f höher liegt als der Punkt C. Man kann daher für f die Grundformel $\frac{Kl^3}{3\,EJ}$ anwenden, muss nur K mit $^1\!/_2\,P$, l mit $^1\!/_2\,l$ vertauschen. Dann wird

(Fig. 58.)



12) $$f = \frac{{}^1\!/_2\,P \cdot {}^1\!/_8\,l^3}{3\,EJ} = \frac{Pl^3}{48\,EJ}.$$

Ebenso gilt für die Neigung α am Ende nach der Formel $\frac{Kl^2}{2EJ}$.

13) $$\alpha = \frac{{}^1\!/_2 P \cdot {}^1\!/_4 l^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung σ einzuführen. Für diese gilt nach S. 21 und 28:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

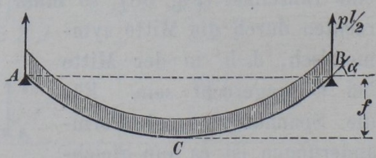
Hiermit wird aus Gl. 12 und 13: $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$, oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Grössen zu haben:

14) $$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e} \quad \text{und}$$

15) $$\alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Einen gleichmässig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei C wagerecht eingespannt, im Abstande ${}^1\!/_2\, l$ durch eine Einzelkraft ${}^1\!/_2\, pl$ aufwärts gebogen und durch eine gleichmässige Belastung p abwärts gebogen. Dann wird mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 44:

Fig. 59.



16) $$f = \frac{{}^1\!/_2 pl \cdot {}^1\!/_8 l^3}{3EJ} - \frac{p \cdot {}^1\!/_{16} l^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

17) $$\alpha = \frac{{}^1\!/_2 pl \cdot {}^1\!/_4 l^2}{2EJ} - \frac{p \cdot {}^1\!/_8 l^3}{6EJ} = \frac{pl^3}{24EJ}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 33: $\sigma \frac{J}{e} = \frac{pl^2}{8}$; setzt man also $\frac{pl^2}{8J} = \frac{\sigma}{e}$ in den Gl. 16 und 17 ein, so wird

18) $$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

19) $$\alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, dass $\sigma = 700^{\text{at}}$; $l : e = 20$, so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$\alpha = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00175 = 0^0\,6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ist (Gl. 18 und 19):

$$\alpha = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00233 = 0^0\,8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0{,}00072.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen bei gleichförmiger Belastung und bei Einzellast zu einander wie $5 : 4 = 1{,}25 : 1$. Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also $^2/_3$ bezw. $^1/_2\, \mathfrak{M}_{max}$, verhalten sich demnach wie $4 : 3 = 1{,}33 : 1$.

Bei sehr dünnwandigen I-Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegungslinie ist allgemein $\frac{1}{\varrho} = \frac{\sigma}{E e}$ (S. 40, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle v und $e = {}^1/_2\, v$, so wird, weil jetzt σ überall gleich,

$$\text{20)} \qquad \frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{v}.$$

α) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe $v = h$ gegeben, so wird nach Gl. 20 auch ϱ überall gleich, d. h. die Biegungslinie ein Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{E h}{2\sigma}$ (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 43), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2 y}{d x^2}$ setzt und 2 mal integrirt.