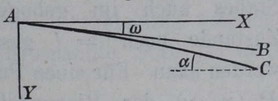
Setzt man dies $= \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$, so hat man, weil $\frac{\mathfrak{M}}{J}$ eine Funktion von x, eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegungslinie vorkommen. Eine solche Gleichung heisst Differentialgleichung; sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die meisten Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Lässt sich die x-Achse so legen, dass sie mit der Mittellinie AB des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel ω bildet (Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegungslinie AC gegen die x-Achse, d. h. $dy : dx$, durchweg nur klein sein. Daher kann man in solchen Fällen $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mit der Einheit vertauschen. Würde z. B. der grösste Werth von $dy : dx = 0{,}1$ (entsprechend einem Winkel $\alpha = 6^0$) so würde doch $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ höchstens $1 + 0{,}01$, worin man $0{,}01$ gegen 1 vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 40) liefert nämlich nicht sehr genaue Werthe für die Biegungslinie, weil darin z. B. der Einfluss der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl E für einen vorliegenden Balken meist nicht auf 1 % genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 8) lassen darauf schliessen, dass sie nur Mittelwerthe sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbeträchtlich abweichen. Solch grosse Werthe von $dy : dx$ kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich $\frac{1}{\varrho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzen; dann wird

Fig. 54.



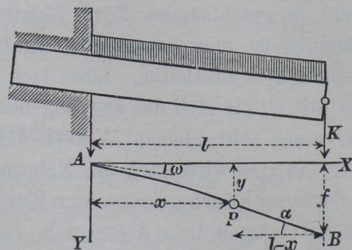
$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}. \tag{3}$$

Diese im Jahre 1826 von Navier (! 1785 Dijon, † 1836 Paris) angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu $dy : dx$ und nach nochmaliger Integration zu $y = f(x)$, der Gleichung der Biegungslinie.

a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw, der Allgemeinheit wegen, nicht völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung ω abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmässig mit p für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft K lothrecht belastet. In dem unteren Theile der Fig. 54 ist die Kurve AB die Biegungslinie, AX wagrecht, AY lothrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, dass die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch $= l$ gesetzt werden kann. Für einen Punkt P (x, y) der Biegungslinie ist das Biegungsmoment, wenn man das Stück rechts von P betrachtet,

Fig. 55.



$$\mathfrak{M} = K(l - x) + \frac{p\,(l - x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit $EJ\,dx$ multiplicirt,

$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = K(l - x)\,dx + \frac{p}{2}(l^2 - 2\,lx + x^2)\,dx.$$

Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4)\qquad EJ\frac{dy}{dx} = K\left(lx - \frac{x^2}{2}\right) + \frac{p}{2}\left(l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3}\right) + C.$$

Die Integrations-Konstante C muss so bestimmt werden, dass für $x = 0$ $dy : dx = \omega$ wird (entsprechend der Einspannung und indem man $\operatorname{tg}\omega$ mit ω vertauscht). Daraus folgt $EJ\omega = C$. Für das Neigungsverhältnis $\operatorname{tg}\alpha = \alpha$ am freien Ende ergiebt sich (mit $x = l$) $EJ\alpha = {}^1/_2\,Kl^2 + {}^1/_6\,pl^3 + EJ\omega$, also

$$5)\qquad \alpha = \frac{Kl^2}{2\,EJ} + \frac{p\,l^3}{6\,EJ} + \omega.$$

Multiplicirt man aber Gl. 4 mit dx und integrirt wiederum, so ergiebt sich

$$EJy = K({}^1/_2\,lx^2 - {}^1/_6\,x^3) + {}^1/_2\,p\,({}^1/_2\,l^2x^2 - {}^1/_3\,lx^3 + {}^1/_{12}\,x^4) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegungslinie liegt, so wird $C_1 = 0$. Bezeichnet man die Ordinate des Endpunktes B der Biegungslinie (für $x = l$) mit f, so wird

$$EJf = {}^1\!/_3\, Kl^3 + {}^1\!/_8\, pl^4 + EJ\omega l, \quad \text{mithin}$$

6) $$f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, dass auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegungslinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen (K, p und ω) sich unabhängig von einander über einander lagern und summiren, wie S. 31 für die Biegungsmomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegungsmomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der wagerecht eingespannte Stab ($\omega = 0$) nur durch K belastet ($p = 0$), so wird

7) $$\alpha = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmässig belastet ($K = 0$), so wird

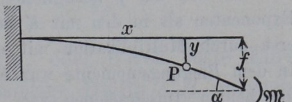
8) $$\alpha = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich)

$$\alpha = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die biegende Wirkung eines am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkenden Kräftepaares $\mathfrak{M}$ untersucht werden (Fig. 56). Es ist

Fig 56.



$$EJ\frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M};$$

$$EJ\frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x + C \text{ mit } C = 0;$$

9) $$\alpha = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

10) $$EJy = {}^1\!/_2\, \mathfrak{M}x^2 + C_1 \text{ (mit } C_1 = 0\text{)};$$

11) $$f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$

Um diese Grössen für α und f würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrössern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar $\mathfrak{M}$

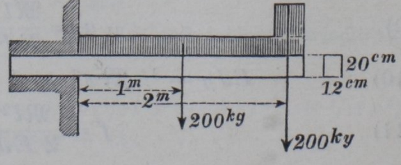
am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ als Biegungslinie des Falles der Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung $\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ (S. 40) würde für unveränderliches $\mathfrak{M}$ ein unveränderliches ϱ, d. h. eine kreisförmige Biegungslinie ergeben. Die Vertauschung von $\frac{1}{\varrho}$ mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat also denselben Erfolg wie die Vertauschung eines Kreises von grossem Halbmesser ϱ mit einer Parabel vom Parameter ϱ.

Die einzelnen Einflüsse von K, p, $\mathfrak{M}$ und ω auf a und f stellen wir (nach A. Ritter, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit tabellarisch zusammen:

Einfluss von	auf a	auf f
K	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
p	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
ω	ω	$l\omega$

In den auf p bezüglichen Gliedern erscheint l mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit K behafteten, weil p noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge denselben Rang bekommt wie K. In dem Biegungsmomente war K mit einer linearen Grösse multiplicirt; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Grösse in eine Grösse zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von l in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerthe.

Fig. 57.



Beispiel: Ein Balkonträger rage aus einer Hauswand auf $l = 2^{\mathrm{m}} = 200^{\mathrm{cm}}$ wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast

$K = 200$ kg, und ausserdem seien $pl = 200$ kg gleichmässig über die Balkenlänge l vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung σ und die Durchbiegung f des hölzernen Balkens ($E = 120\,000$ at) vom Querschnitte $d = 12$ cm, $h = 20$ cm?

Das grösste Moment an der Wand beträgt

$$\mathfrak{M} = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 = 60\,000 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment

$$\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \cdot 20^2 = 800, \quad \text{daher}$$

$$\sigma = 60\,000 : 800 = 75 \text{ at}.$$

Das Trägheitsmoment ist $J = \mathfrak{W} \cdot 10 = 8000$, daher

$$f = \frac{Kl^3}{3\,EJ} + \frac{pl^4}{8\,EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120000 \cdot 8000}$$

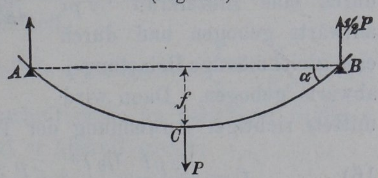
$$= 0{,}76 \text{ cm} = 1 : 263 \quad \text{der Länge.}$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht K aufwärts, p abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegungslinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte bei C wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei C erzwungen wird; ob durch den Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte CB ansehen als bei C aus einer einspannenden Wand wagerecht um ${}^1/_2\, l$ hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft ${}^1/_2\, P$ aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt B um f höher liegt als der Punkt C. Man kann daher für f die Grundformel $\frac{Kl^3}{3\,EJ}$ anwenden, muss nur K mit ${}^1/_2\, P$, l mit ${}^1/_2\, l$ vertauschen. Dann wird

(Fig. 58.)



$$f = \frac{{}^1/_2\, P \cdot {}^1/_8\, l^3}{3\,EJ} = \frac{Pl^3}{48\,EJ}. \tag{12}$$