

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern $\frac{2}{3}r$ als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 18) ist O der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle G derselben. Gemäss Gl. 2, S. 19 ist mithin

$$1) \quad \varrho = \frac{E e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich e' und σ' beziehen. Aus dieser Gleichung folgt das für das Weitere wichtige Ergebnis, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung $1 : \varrho$ daher klein ausfällt. Bei Stabeisen wird σ' höchstens 1000^{at} , mithin $E : \sigma' = 2000$ und $\varrho = 2000 e'$ oder für $e' = \frac{1}{2}h$, $\varrho = 1000 h$; an allen Stellen, an denen σ kleiner ist, wird ϱ noch grösser. Ein I-Träger von $0,2^m$ Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens 200^m . Für Holz ist σ' höchstens 100^{at} , mithin $\varrho = 1200 e' = 600 h$, d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannung Null, ist $\varrho = \infty$ oder die Krümmung $= 0$.

Da nach Gl. 3 (S. 21) $\sigma' = \mathfrak{M} e' : J$, so wird auch

$$2) \quad \varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$

Setzt man dies $= \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$, so hat man, weil $\frac{\mathfrak{M}}{J}$ eine Funktion von x , eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegelinie vorkommen. Eine solche Gleichung heisst Differentialgleichung; sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die meisten Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Lässt sich die x -Achse so legen, dass sie mit der Mittellinie AB des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel ω bildet

(Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegelinie AC gegen die x -Achse, d. h. $dy:dx$, durchweg nur klein sein. Daher kann man

in solchen Fällen $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ mit der Einheit vertauschen. Würde z. B. der grösste Werth von $dy:dx = 0,1$ (entsprechend einem Winkel $\alpha = 6^\circ$) so würde doch $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$ höchstens $1 + 0,01$, worin man 0,01 gegen 1 vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 40) liefert nämlich nicht sehr genaue Werthe für die Biegelinie, weil darin z. B. der Einfluss der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl E für einen vorliegenden Balken meist nicht auf 1% genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 8) lassen darauf schliessen, dass sie nur Mittelwerthe sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbeträchtlich abweichen. Solch grosse Werthe von $dy:dx$ kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich $\frac{1}{0} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzen; dann wird

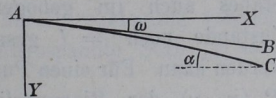
$$3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Diese im Jahre 1826 von Navier (!1785 Dijon, †1836 Paris) angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu $dy:dx$ und nach nochmaliger Integration zu $y = f(x)$, der Gleichung der Biegelinie.

a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw., der Allgemeinheit wegen, nicht

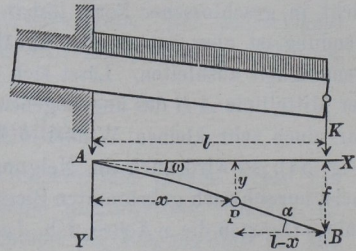
Fig. 54.



völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung ω abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmässig mit p für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft K lothrecht belastet. In dem unteren

Theile der Fig. 54 ist die Kurve AB die Biegelinie, AX wagrecht, AY lothrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, dass die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch $= l$ gesetzt werden kann. Für einen Punkt $P(x, y)$ der Biegelinie

Fig. 55.



ist das Biegemoment, wenn man das Stück rechts von P betrachtet,

$$\mathfrak{M} = K(l - x) + \frac{p(l - x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit $EJ dx$ multiplicirt,

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = K(l - x) dx + \frac{p}{2} (l^2 - 2lx + x^2) dx.$$

Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4) \quad EJ \frac{dy}{dx} = K \left(lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{p}{2} \left(l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Die Integrations-Konstante C muss so bestimmt werden, dass für $x = 0$ $dy : dx = \omega$ wird (entsprechend der Einspannung und indem man $\text{tg } \omega$ mit ω vertauscht). Daraus folgt $EJ\omega = C$. Für das Neigungsverhältnis $\text{tg } \alpha = \alpha$ am freien Ende ergibt sich (mit $x = l$) $EJ\alpha = \frac{1}{2} Kl^2 + \frac{1}{6} pl^3 + EJ\omega$, also

$$5) \quad \alpha = \frac{Kl^2}{2EJ} + \frac{pl^3}{6EJ} + \omega.$$

Multiplicirt man aber Gl. 4 mit dx und integrirt wiederum, so ergibt sich

$$EJy = K \left(\frac{1}{2} lx^2 - \frac{1}{6} x^3 \right) + \frac{1}{2} p \left(\frac{1}{2} l^2 x^2 - \frac{1}{3} lx^3 + \frac{1}{12} x^4 \right) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für $x = 0$ auch $y = 0$ sein muss, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegelinie liegt, so wird $C_1 = 0$. Bezeichnet

man die Ordinate des Endpunktes B der Biegelinie (für $x = l$) mit f , so wird

$$EJf = \frac{1}{3} Kl^3 + \frac{1}{8} pl^4 + EJ\omega l, \text{ mithin}$$

$$6) \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, dass auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegelinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen (K , p und ω) sich unabhängig von einander über einander lagern und summieren, wie S. 31 für die Biegemomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegemomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der wagerecht eingespannte Stab ($\omega = 0$) nur durch K belastet ($p = 0$), so wird

$$7) \quad a = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmässig belastet ($K = 0$), so wird

$$8) \quad a = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich)

$$a = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die biegende Wirkung eines am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkenden Kräftepaars \mathfrak{M} untersucht werden (Fig. 56). Es ist

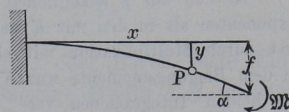
$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M};$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x + C \text{ mit } C = 0;$$

$$9) \quad a = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

$$10) \quad EJy = \frac{1}{2} \mathfrak{M}x^2 + C_1 \text{ (mit } C_1 = 0):$$

$$11) \quad f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$



Um diese Grössen für a und f würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrössern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar \mathfrak{M}

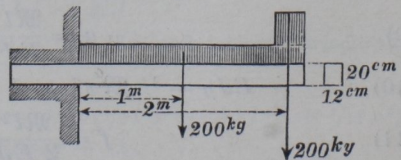
am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ als Biegelinie des Falles der Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung $\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}$ (S. 40) würde für unveränderliches \mathfrak{M} ein unveränderliches ϱ , d. h. eine kreisförmige Biegelinie ergeben. Die Vertauschung von $\frac{1}{\varrho}$ mit $\frac{d^2y}{dx^2}$ hat also denselben Erfolg wie die Vertauschung eines Kreises von grossem Halbmesser ϱ mit einer Parabel vom Parameter ϱ .

Die einzelnen Einflüsse von K , p , \mathfrak{M} und ω auf a und f stellen wir (nach A. Ritter, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit tabellarisch zusammen:

Einfluss von	auf a	auf f
K	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
p	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
\mathfrak{M}	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
ω	ω	$l\omega$

In den auf p bezüglichen Gliedern erscheint l mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit K behafteten, weil p noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge denselben Rang bekommt wie K . In dem Biegemomente war K mit einer linearen Grösse multiplicirt; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Grösse in eine Grösse zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von l in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerthe.

Fig. 57.



Beispiel: Ein Balkenträger rage aus einer Hauswand auf $l = 2\text{ m} = 200\text{ cm}$ wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast

$K=200$ kg, und ausserdem seien $p l=200$ kg gleichmässig über die Balkenlänge l vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung σ und die Durchbiegung f des hölzernen Balkens ($E = 120000$ at) vom Querschnitte $d = 12$ cm, $h = 20$ cm?

Das grösste Moment an der Wand beträgt

$$M = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 = 60000 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 20^2 = 800, \text{ daher}$$

$$\sigma = 60000 : 800 = 75 \text{ at.}$$

Das Trägheitsmoment ist $J = W \cdot 10 = 8000$, daher

$$f = \frac{Kl^3}{3 EJ} + \frac{pl^4}{8 EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120000 \cdot 8000}$$

$$= 0,76 \text{ cm} = 1 : 263 \text{ der Länge.}$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht K aufwärts, p abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegelinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte

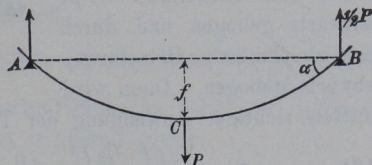
bei C wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei C erzwungen wird; ob durch den

Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte CB ansehen als bei C aus einer einspannenden Wand wagerecht um $\frac{1}{2}l$ hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft $\frac{1}{2}P$ aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt B um f höher liegt als der Punkt C . Man kann daher für f die Grundformel $\frac{Kl^3}{3 EJ}$ anwenden,

muss nur K mit $\frac{1}{2}P$, l mit $\frac{1}{2}l$ vertauschen. Dann wird

$$12) \quad f = \frac{\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{8}l^3}{3 EJ} = \frac{Pl^3}{48 EJ}.$$

(Fig. 58.)



Ebenso gilt für die Neigung α am Ende nach der Formel $\frac{Kl^2}{2EJ}$.

$$13) \quad \alpha = \frac{1/2 P \cdot 1/4 l^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung σ einzuführen. Für diese gilt nach S. 21 und 28:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

Hiermit wird aus Gl. 12 und 13: $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma l^2}{E e}$, oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Grössen zu haben:

$$14) \quad \frac{f}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma l}{E e} \quad \text{und}$$

$$15) \quad \alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma l}{E e}.$$

Einen gleichmässig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei C wagerecht eingespannt, im Abstände $1/2 l$ durch eine Einzelkraft $1/2 pl$ aufwärts gebogen und durch eine gleichmässige Belastung p abwärts gebogen. Dann wird mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 44:

$$16) \quad f = \frac{1/2 pl \cdot 1/8 l^3}{3EJ} - \frac{p \cdot 1/16 l^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

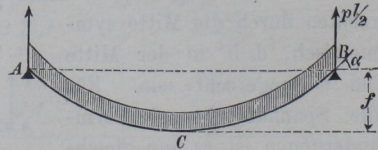
$$17) \quad \alpha = \frac{1/2 pl \cdot 1/4 l^2}{2EJ} - \frac{p \cdot 1/8 l^3}{6EJ} = \frac{pl^3}{24EJ}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 33: $\sigma \frac{J}{e} = \frac{pl^2}{8}$; setzt man also $\frac{pl^2}{8J} = \frac{\sigma}{e}$ in den Gl. 16 und 17 ein, so wird

$$18) \quad \frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma l}{E e}.$$

$$19) \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma l}{E e}.$$

Fig. 59.



Beispiel: Sind die Verhältnisse so gewählt, dass $\sigma = 700 \text{ at}$; $l : e = 20$, so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$a = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00175 = 0^{\circ} 6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ist (Gl. 18 und 19):

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00233 = 0^{\circ} 8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00072.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen bei gleichförmiger Belastung und bei Einzelast zu einander wie $5 : 4 = 1,25 : 1$. Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also $\frac{2}{3}$ bzw. $\frac{1}{2} M_{max}$, verhalten sich demnach wie $4 : 3 = 1,33 : 1$.

Bei sehr dünnwandigen I -Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegelinie ist allgemein $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ee}$ (S. 40, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle v und $e = \frac{1}{2}v$, so wird, weil jetzt σ überall gleich,

$$20) \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}.$$

a) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe $v = h$ gegeben, so wird nach Gl. 20 auch ρ überall gleich, d. h. die Biegelinie ein Kreisbogen vom Halbmesser $\frac{Eh}{2\sigma}$ (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 43), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$ setzt und 2 mal integriert.

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h}; \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma} y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0; \quad \frac{E}{\sigma} f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h} \text{ oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1} \frac{h}{2},$$

wenn \mathfrak{M}_1 und J_1 sich auf irgend einen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen: $f = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2 E J_1}$.

Erfolgt die Biegung durch eine am äusseren Ende wirkende Kraft K , so ist $\mathfrak{M}_1 = Kl$ und

$$21) \quad f = \frac{Kl^3}{2 E J_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50) $1\frac{1}{2}$ mal so gross wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 43).

β) Ist die Höhe v nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49, S. 37), so wird $v^2 : h^2 = (l-x) : l$ und aus Gl. 20:

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h} (l-x)^{-1/2} \text{ (Fig. 60).}$$

Multipliziert man mit $dx = -d(l-x)$, so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h} 2\sqrt{l-x} + C$$

und, weil für $x=0$ auch $\frac{dy}{dx} = 0$ ist,

$$C = \frac{2l}{h}, \text{ daher}$$

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} \frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l} \sqrt{l-x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} y = l \cdot x + \frac{2}{3} \sqrt{l} (l-x)^{3/2} + C_1$$

mit $C_1 = -\frac{2}{3} l^2$ wegen $y = 0$ für $x = 0$.

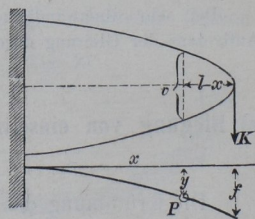


Fig. 60.

$y = f$ für $x = l$ giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}, \quad \text{oder wegen } \sigma = \frac{Kl}{J_1} \frac{h}{2} :$$

$$22) \quad f = \frac{2}{3} \frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 44).

γ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\rho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{Ka}$$

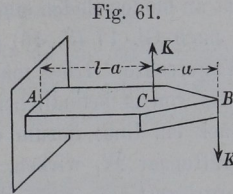


Fig. 61.

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar Ka belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter ρ , so wird die Durchbiegung des Endpunktes B werden

$$f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{Kal^2}{2EJ_1},$$

wenn J_1 das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist $h = 2$ cm, $\sigma = 700$ at, $E = 2000000$ at, so wird der Krümmungshalbmesser $\rho = \frac{2000000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857$ cm = 28,57 m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

Der Balken rage bei A (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt B liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles.

Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck B mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegemoment und Spannungen unbestimmt. Es

liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegelhre zur Lösung.

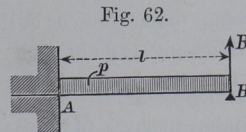
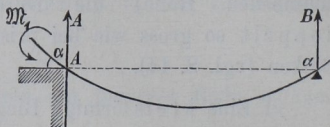


Fig. 62.

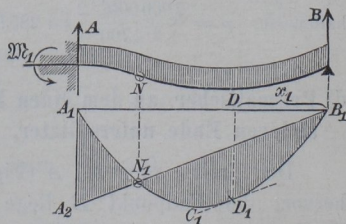
Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zunächst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns einmal bei A den oberen Theil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei A nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Grösse f nach Gl. 16 (S. 46) durch und hat an beiden Enden eine Neigung α nach Gl. 17 (S. 46) gegen die Wagerechte. Lässt man an dem links von A befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes

Fig. 63.



Kräftepaar \mathcal{M}_1 wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrößert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Grösse von \mathcal{M}_1 wird die Biegelinie bei A genau wagerecht sein. Man kann daraus schliessen, dass die wagerecht einspannende Wand neben dem Auflagerdruck A noch ein Einspannungsmoment \mathcal{M}_1 auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lothrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei von einander unabhängige Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, da zu der Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben.

Fig. 64.



Zur Bestimmung der Auflagerkräfte A, B und des Momentes \mathcal{M}_1 (Fig. 64) hat man also nur zwei Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung; die eine fehlende dritte Gleichung muss aus der Biegelohre genommen werden; man nennt daher diesen Fall: einfach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergibt sich in diesem Falle sehr einfach. Die Kraft B würde den Endpunkt des bei A wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 44 in die Höhe biegen um $\frac{Bl^3}{3EJ}$. Wäre die Stütze

B nicht vorhanden, so würde die Belastung den Endpunkt um $\frac{pl^4}{8EJ}$

abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt B in gleicher Höhe mit A liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

$$\frac{Bl^3}{3EJ} = \frac{pl^4}{8EJ} \text{ oder}$$

$$1) \quad B = \frac{3}{8}pl; \text{ somit}$$

$$2) \quad A = \frac{5}{8}pl \text{ und } \mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2}pl^2 - \frac{3}{8}pl^2 = \frac{1}{8}pl^2.$$

Diese Werthe gelten aber nur, wenn die an die Biegelinie bei A gelegte Tangente genau durch den Punkt B geht; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben grossen Einfluss auf die Auflagerkräfte.

In einem Abstände x von B ist das Biegemoment

$$3) \quad \mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2}px^2 = \frac{3}{8}plx - \frac{1}{2}px^2.$$

Fügt man $\frac{1}{8}plx$ mit $+$ und $-$ hinzu, so kann man auch schreiben:

$$4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{2}plx - \frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{8}plx \\ &= \frac{1}{2}px(l-x) - \frac{1}{8}plx. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 33) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel $A_1C_1B_1$ (Fig. 64) von der Pfeilhöhe $\frac{1}{8}pl^2$. Das zweite Glied wird durch die Gerade A_2B_1 dargestellt, wenn $A_1A_2 = \frac{1}{8}pl^2$. Von den Ordinaten der Parabel muss man diejenigen der Geraden abziehen, um \mathfrak{M} zu erhalten. Die lothrechte Schraffirung giebt die Veränderlichkeit des Momentes an.

Von B_1 (wo $\mathfrak{M} = 0$) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle D_1 , wo die Parabel \parallel der Geraden A_2B_1 , ein analytisches Maximum \mathfrak{M}_{max} , nimmt dann wieder ab, wird bei N_1 , wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den grössten negativen Werth $-\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8}pl^2$ an der Einspannungsstelle.

Die Funktion von der Form $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2}px^2$ erreicht, wie schon S. 35 gefunden (dort war A statt B gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p} \text{ für } x_1 = \frac{B}{p};$$

das giebt für $B = \frac{3}{8} p l$ (Punkt D_1):

$$5) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128} p l^2 \text{ und } x_1 = \frac{3}{8} l.$$

$Bx - \frac{1}{2} p x^2$ wird aber zu Null für $x = 0$ (Punkt B_1) und für $x = \frac{2B}{p} = \frac{3}{4} l$ (Punkt N_1).

Es findet sich also \mathfrak{M}_{max} mitten zwischen den beiden Momenten-Nullpunkten. Einem Momente = 0 entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment $J > 0$ hat, eine Krümmung = 0, und ein Krümmungshalbmesser $\rho = \infty$ der Biegungslinie. N_1 entspricht daher einem Wendepunkte N der Biegungslinie. Rechts von N kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten \smile , wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links von N ist die Krümmung \frown und damit auch das Moment entgegengesetzt.

Solche Querschnitte, an denen das Biegemoment grösser ist als zu beiden Seiten daneben, heissen gefährliche Querschnitte. Hier giebt es deren zwei, nämlich D und A . Beide sind aber nicht in gleichem Mafse gefährlich; denn die entsprechenden Momente $\frac{9}{128} p l^2$ und $\frac{1}{8} p l^2 = \frac{16}{128} p l^2$ verhalten sich wie 9 : 16. An der Einspannungsstelle herrscht also das grösste Moment, und dies ist auch ebenso gross, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das grösste Moment hat sich daher in Folge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende A verschoben.

Eine Verminderung des grössten Momentes lässt sich aber erreichen, wenn man die Stütze B um ein gewisses Mafß nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrössert man den Stützdruck B ; in Folge dessen wird in \mathfrak{M} (Gl. 3, S. 51) das positive Glied vergrössert, hierdurch das bisher kleinere Moment \mathfrak{M}_{max} vergrössert und der absolute Werth des negativen Momentes \mathfrak{M}_1 vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für \mathfrak{M} , der von der Höhenlage des Punktes B noch unabhängig ist, $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} p x^2$, die Grösse $\frac{1}{2} p l x$ mit + und - hinzufügt, dann kann man ordnen:

$$6) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} p x (l - x) - (\frac{1}{2} p l - B) x.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel $A_1 C_1 B_1$ (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate $A_1 A_2$ nun aber $= (1/2 p l - B) l$, d. h. von B abhängig ist, und zwar bedeutet $A_1 A_2$ wiederum den absoluten Werth \mathfrak{M}_1 des Spannungsmomentes. Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut grösste Moment so klein wie möglich ist, könnte man nun schon zeichnerisch durch Probiren finden, indem man die Gerade $B_1 A_2$ solange um B_1 drehte, bis die beiden lothrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche \mathfrak{M}_{max} und \mathfrak{M}_1 entsprechen, gleich geworden wären. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von $B_1 A_2$ würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrössern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur $A_1 A_2 = (1/2 p l - B) l$ zu setzen und hat damit B bestimmt. Der Weg der Rechnung bedingt, dass man das analytische Maximum von \mathfrak{M} , nämlich $\frac{B^2}{2p} = \mathfrak{M}_1 = \frac{p l^2}{2} - B l$ setzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen $B = p l (-1 \pm \sqrt{2})$, von denen nur der positive Werth

$$7) \quad B = p l (-1 + 1,414) = 0,414 p l$$

möglichst kleine Werthe der Grösstmomente liefern kann, denn der negative Werth würde $\frac{B^2}{2p}$ sehr gross machen. Da nun für diesen Auflagerdruck $B = 0,414 p l$ die Momente \mathfrak{M}_{max} und \mathfrak{M}_1 gleich werden, so berechnet man den Werth beider am einfachsten mittels der Formel für $\mathfrak{M}_1 = 1/2 p l^2 - B l = p l^2 (0,5 - 0,414) = 0,086 p l^2$. Diesem Auflagerdrucke $B = 0,414 p l$ entspricht also ein überhaupt grösstes Moment

$$8) \quad \mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0,086 p l^2,$$

während bei $B = 3/8 p l$ sich $\mathfrak{M}_1 = 1/8 p l^2 = 0,125 p l^2$ ergab. Das grösste Moment ist also bei gegebener Balkenlänge und Last

im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, die Tragfähigkeit also auf das $125 : 86 = 1,45$ fache gestiegen. Um nun diejenige Hebung f des Punktes B gegen die Einspannungsstelle A zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt man an die Biegelinie die Kraft $B = 0,414 pl$ (Fig. 65) und bekommt dann durch denselben Gedankengang, der auf S. 50/51 zur Bestimmung von B für $f = 0$ führte, jetzt

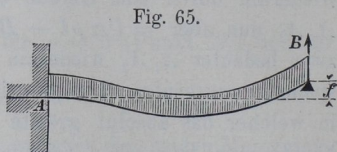


Fig. 65.

$$f = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{pl^4}{EJ} \left(\frac{0,414}{3} - \frac{1}{8} \right).$$

$$9) \quad f = 0,013 \frac{pl^4}{EJ}.$$

Um die verhältnismässige Grösse dieser Hebung einigermaßen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung σ ein, indem wir bedenken, dass das grösste Moment jetzt $0,086 pl^2 = \sigma \frac{J}{e}$, also $\frac{pl^2}{J} = \frac{\sigma}{0,086 e}$ sein muss. Führt man dies in Gl. 9 ein, so wird

$$10) \quad \frac{f}{l} = 0,151 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 47)

$$\sigma = 700; \quad E = 2000000; \quad \frac{l}{e} = 20,$$

so wird $\frac{f}{l} = 0,001057$, d. h. rund $1/1000$. Eine Hebung der Stütze B um $1/1000$ der Spannweite l genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiss mit Vortheil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müsste, so überzeugt man sich leicht, dass eine Balken-Anordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnungsmässig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch Abweichungen von der gewünschten Stützenlage leicht eine Vergrösserung

der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

Wir betrachten nur den Fall, dass die 3 Stützen gleiche Entfernung l haben. Für einen solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$$1) \quad A + C + B = 2pl$$

und in Bezug auf C : $Al - Bl = 0$ oder

$$2) \quad A = B.$$

Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegelshre geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze C liege um c unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann c beliebig ≥ 0 gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich endlich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), es wird $A = B = pl$, $C = 0$ sein. Schiebt man aber den Punkt C weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken endlich nur auf C

Fig. 66.

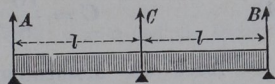


Fig. 67.

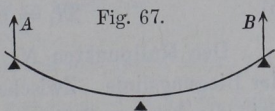


Fig. 68.

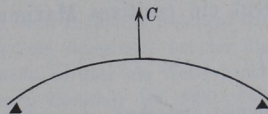
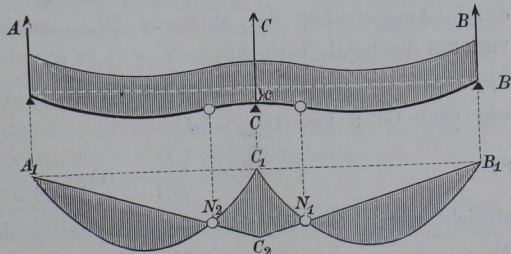


Fig. 69.



schweben, es wird $C = 2pl$, und $A = B = 0$ sein. Die Biegelshre muss in allen Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte waagrecht sein (Fig. 69).

Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 45) die linke Hälfte

wagrecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtsseitige Hälfte CB in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 54), so dass die sämtlichen Untersuchungen von S. 52—54 sich hier verwerthen lassen. Es wird

$$c = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad B = \frac{3}{8} pl + \frac{3EJc}{l^3} = A \quad \text{und}$$

$$4) \quad C = \frac{10}{8} pl - \frac{6EJc}{l^3}.$$

Auch die Momentenfläche wird für die rechtsseitige Hälfte ebenso, wie in Fig. 64 (S. 50) gezeigt, und für die linksseitige Hälfte dazu symmetrisch. \mathfrak{M}_1 wird hier das Moment über der Mittelstütze

$$5) \quad \mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = (1/2 pl - B) l.$$

Den Nullpunkten N_1 und N_2 entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), ausserhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen B_1 und N_1 liegt ein positives Maximalmoment

$$6) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p},$$

ebenso zwischen A_1 und N_2 .

Für $c = 0$, d. h. für Stützen in einer Flucht, wird $B = 3/8 pl$. $\mathfrak{M}_{max} = 9/128 pl^2$; $\mathfrak{M}_1 = 1/8 pl^2$. Eine Senkung der Mittelstütze um c vergrössert B , vergrössert \mathfrak{M}_{max} und verkleinert gleichzeitig \mathfrak{M}_1 .

Die günstigste Anordnung für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente \mathfrak{M}_{max} und \mathfrak{M}_1 erreicht. Dies verlangt nach Gl. 7 (S. 53)

$$7) \quad B = 0,414 pl,$$

was nach Gl. 9 und 10 (S. 54) durch

$$8) \quad \frac{c}{l} = 0,013 \frac{pl^3}{EJ} = 0,151 \frac{\sigma l}{E e}$$

erreicht wird. Die grössten Momente stellen sich dann auf

$$9) \quad \mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0,086 pl^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht $\mathfrak{M}_1 = 0,125 pl^2$ sein würde.

Beispiel: Ein Holzbalken von $2l = 10\text{ m} = 1000\text{ cm}$ Länge, im Querschnitte 15 cm breit und 16 cm hoch, werde von drei Arbeitern A , C und B getragen. Es soll die Gewichtsverteilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat $10 \cdot 0,16 \cdot 0,15 = 0,24\text{ cbm}$ Inhalt; wiegt $1\text{ cbm } 600\text{ kg}$, so wird das Gesamtgewicht $2pl = 144\text{ kg}$; $p = 0,144\text{ kg/cm}$. Es ist $J = \frac{1}{12} 15 \cdot 16^3 = 5120$; $\mathfrak{B} = 640$; $E = 120\,000\text{ at}$, $l = 500\text{ cm}$.

$$\text{Es wird } A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3 EJc}{l^3} = 27 + 14,746 c;$$

$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6 EJc}{l^3} = 90 - 29,492 c.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird $A = B = 72\text{ kg}$; $C = 0$ und die Durchbiegung in der Mitte

$$c = 90 : 29,492 = 3,05\text{ cm}.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Maß niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das grösste Moment in der Mitte

$$\frac{1}{8} p (2l)^2 = \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000\text{ cmkg}$$

und die Spannung $\sigma = 18\,000 : 640 = 28,1\text{ at}$.

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll $A = B = C = \frac{1}{3} \cdot 144 = 48\text{ kg}$ sein, so muss die mittlere Schulter um $c = \frac{48 - 27}{14,746} = 1,42\text{ cm}$ tiefer

liegen als die anderen. In diesem Falle wird $\mathfrak{M}_{max} = \frac{48^2}{2 \cdot 0,144} = 8000$, $\mathfrak{M}_1 = (\frac{1}{2} 72 - 48) 500 = -6000$, d. h. wegen des negativen Zeichens ist \mathfrak{M}_1 , welches mit positivem Zeichen einer Biegelinie entsprach, bei der die konvexe Seite oben lag, hier ein umgekehrtes Moment, so dass ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist $8000 : 640 = 12,5\text{ at}$.

Die Spannung wird am kleinsten für

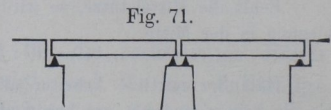
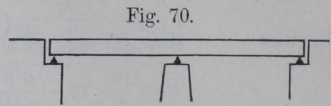
$$c = 0,013 \frac{pl^4}{EJ} = \frac{0,013 \cdot 72 \cdot 500^3}{120\,000 \cdot 5120} = 0,19\text{ cm}.$$

Dabei ist $A = B = 0,414 pl = 29,3\text{ kg}$; $C = 144 - 2 \cdot 29,3 = 84,4\text{ kg}$, so dass die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das grösste Moment wird $0,086 pl^2 = 3096$, die Spannung $3096 : 640 = 4,8\text{ at}$. — Für gleiche Höhenlage der Schultern wird $A = B = 27\text{ kg}$; $C = 90\text{ kg}$; das grösste Moment $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{8} pl^2$, d. h. $\frac{1}{4}$ so gross wie für $C = 0$, also $\mathfrak{M}_1 = 4500$, $\sigma = 7\text{ at}$. — Dagegen wird $A = B = 0$ und $C = 144\text{ kg}$ für $c = -27 : 14,746 = -1,83\text{ cm}$, d. h. wenn die mittlere Schulter um dieses Maß höher liegt als die anderen. Das grösste Moment wird nun $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} pl^2 = 0$, d. h. ebenso gross wie für $C = 0$, nämlich $18\,000$ mit $\sigma = 28,1\text{ at}$.

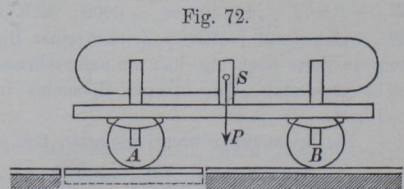
Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen $4,8$ und $28,1\text{ at}$. Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Solche Balken auf mehr als zwei

Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Oeffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler neben einander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig. 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung gerathen, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.



Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne dass eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwaage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Waage (Fig. 72) und ermittelt die Last A , verfährt dann mit der anderen Achse B in derselben Weise und erhält in der Summe $A + B$ das Gesamtgewicht P des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, dass



die Fahrbahn zu beiden Seiten der Waage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil man nicht wissen kann, ob die Achse, nachdem sie die Waage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei ihrer Stellung auf der Waage.

Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahren angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Waage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei l die Länge des ganzen Stabes oder Balkens; von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge $= 1 \text{ m}$ ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte B dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte A

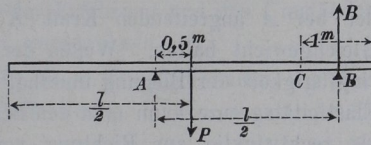
der übrigen Länge $l - 1\text{ m}$ werde in gleicher Weise eine Schneide A angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um $\frac{1}{2}\text{ m}$, die Schneide B um $\frac{1}{2}l$ von der Schneide A entfernt; der Stützendruck B wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0,5}{\frac{1}{2}l} = \frac{P}{l},$$

d. h. das gewünschte Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide B auf

die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich das Stück von 1 m Länge thatsächlich abgeschnitten, so befindet sich dieses auf der Schneide B im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide A . Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle C mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide B trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte) Schienenstück von 1 m Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, S. 162.)

Fig. 73.



6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte K belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte K eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Mafß gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte K sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75).