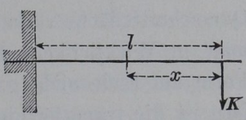
h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung σ eines Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmässig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung σ eines Querschnitts an allen Stellen des Stabes die gleiche sein, so muss das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}$ des Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ sich ändern. Ist $\mathfrak{M}_1$ das Biegungsmoment an einer bestimmten Stelle (etwa das grösste), $\mathfrak{W}_1$ das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muss

Fig. 48.



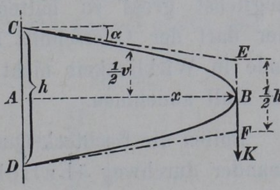
1) $$\mathfrak{W} : \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 .$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch K belastet, so ist $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$, mithin muss dann für überall gleiche Sicherheit

2) $$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}_1} = \frac{x}{l} \quad \text{sein.}$$

Je nach der Anordnung der Querschnitte sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Soll der Querschnitt ein Rechteck sein von der Breite u, der Höhe v an beliebiger Stelle, von der Breite d und der Höhe h an der Stelle $x = l$, so ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, u v^2$; $\mathfrak{W}_1 = {}^1/_6\, d h^2$, mithin nach Gl. 2

Fig. 49.



3) $$\frac{u v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l} .$$

Bei überall gleicher Breite $u = d$ wird dann

4) $$v^2 : h^2 = x : l .$$

Trägt man von der Mitte aus ${}^1/_2\, v$ nach oben und nach unten hin auf, so ergiebt sich ein parabolischer Aufriss CDB (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist $\operatorname{tg} \varphi = {}^1/_2\, dv : dx$.

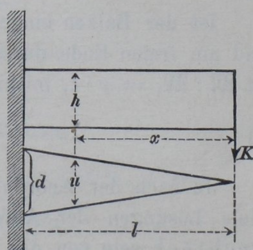
Nach Gl. 4 wird

$$2 v d v = \frac{h^2 d x}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$^1/_2 \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{v l} = \operatorname{tg} \varphi .$$

Für $x = l$ und $v = h$ wird dann $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4} \frac{h}{l}$. Legt man also in C, B und D Berührungsgeraden an die Parabel, so bekommt man das Trapez $CEFD$, wobei $EF = h - 2\,l \operatorname{tg} \alpha = {}^1/_2\, CD$. Bei überall gleichem Querschnitte $d \cdot h$ ist der Rauminhalt des Balkens $d \cdot h \cdot l$, bei der parabolischen Begrenzung ${}^2/_3\, d \cdot h \cdot l$, während die Umschliessungsform $CEFD$ den Inhalt ${}^3/_4\, d \cdot h \cdot l$ hat. Die parabolische Form genügt wohl den Zug- und Druckspannungen, nicht aber den Schubspannungen. Denn auch an dem Ende B, wo der Querschnitt $= 0$ ist, herrscht eine Querkraft K, die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher kann man in Wirklichkeit der parabolischen Form am Ende nicht ganz folgen. In so fern ist die trapezförmige Umschliessung besser als die Parabelgestalt.

Fig. 50.

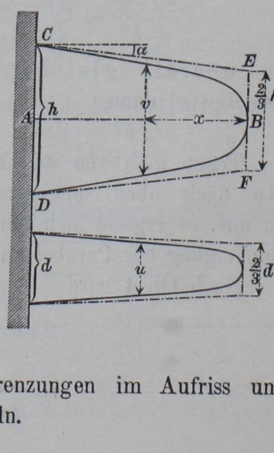


Giebt man dem Balken überall gleiche Höhe $v = h$, so wird aus Gl. 3:

5) $$u : d = x : l,$$

d. h. der Grundriss wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt ${}^1/_2\, d \cdot h \cdot l$. Diese Form ist also günstiger als die parabolische; es ist vortheilhaft, die Höhe überall möglichst gross zu halten. Auch hier darf der Querschnitt am freien Ende in Wirklichkeit nicht ganz bis auf Null abnehmen.

Fig. 51.



Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h. $u : v = d : h$, so wird aus Gl. 3:

6) $$\begin{cases} v^3 : h^3 = x : l \quad \text{und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält man (vergl. Theil 1, S. 186) als Begrenzungen im Aufriss und Grundriss Zweige von kubischen Parabeln.

Für den Aufriss gilt

$$3\,v^2 d\,v = \frac{h^3 d\,x}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\,\frac{d\,v}{d\,x} = \frac{h^3}{6\,v^2 l}$$

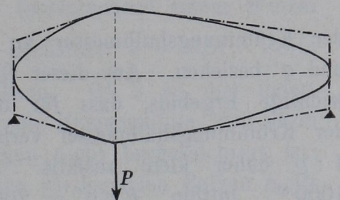
und die Neigung der Tangente im Punkt C (Fig. 51) ($x = l$; $v = h$)

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{h}{6\,l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschliessungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende $^2/_3\,h$ bezw. $^2/_3\,d$.

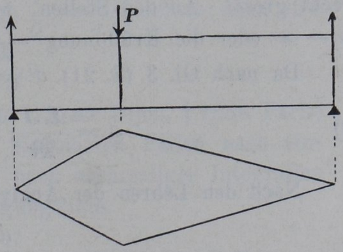
Ist bei kreisförmigem Querschnitte der Halbmesser an beliebiger Stelle v, an der Einspannungsstelle r, so wird nach Gl. 2: $^1/_4\,v^3\pi : {}^1/_4\,r^3\pi = x : l$, oder $v^3 : r^3 = x : l$. Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Fig. 52.



Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegungsmoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert; also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt $d \cdot h$, und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschliessungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe $= {}^1/_2\,h$ macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 27) hat zur Folge, dass auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

Fig. 53.



Bei gleich bleibender Höhe würde der Balken die Form der Fig. 53 (im Grundriss aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern $^2/_3\, r$ als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 18) ist O der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle G derselben. Gemäss Gl. 2, S. 19 ist mithin

1) $$\varrho = \frac{E\,e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich e' und σ' beziehen. Aus dieser Gleichung folgt das für das Weitere wichtige Ergebnis, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung $1 : \varrho$ daher klein ausfällt. Bei Stabeisen wird σ' höchstens 1000^{at}, mithin $E : \sigma' = 2000$ und $\varrho = 2000\, e'$ oder für $e' = {}^1/_2\, h$, $\varrho = 1000\, h$; an allen Stellen, an denen σ kleiner ist, wird ϱ noch grösser. Ein I-Träger von $0{,}2^{\text{m}}$ Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens 200^{m}. Für Holz ist σ' höchstens 100^{at}, mithin $\varrho = 1200\, e' = 600\, h$, d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannnng Null, ist $\varrho = \infty$ oder die Krümmung $= 0$.

Da nach Gl. 3 (S. 21) $\sigma' = \mathfrak{M}\, e' : J$, so wird auch

2) $$\varrho = \frac{\boldsymbol{EJ}}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{\boldsymbol{EJ}}.$$

Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\dfrac{d^2 y}{d x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{d y}{d x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$