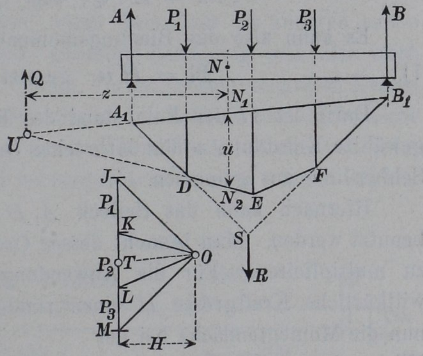
e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

In Theil 1, S. 120, wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft R der gegebenen Lasten finden kann. Man setzt die Lasten P_1, P_2, P_3 nach beliebigem Maſsstabe zu einem Krafteck JM zusammen, wählt einen beliebigen Pol O und zeichnet, in einem beliebigen Punkte A_1 der linksseitigen Auflager-Lothrechten beginnend, ein Seileck $A_1 DEFB_1$, welches die rechtsseitige Auflager-Lothrechte in B_1 schneidet. Durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der äussersten Seileckseiten $A_1 D$ und $B_1 F$ geht dann die Mittelkraft R der Lasten.

Fig. 37.



Um nun die Auflagerdrücke A und B so zu bestimmen, dass sie R das Gleichgewicht halten, hat man (nach Theil 1, S. 121) nur zu $A_1 B_1$, der Schlusslinie des Seilecks, einen Parallelstrahl OT im Krafteck zu ziehen, dann ist T der Theilpunkt der Lasten; es ist TJ der Auflagerdruck A, MT der Auflagerdruck B.

Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen P_1 und P_2 liegenden Schnitt N das Biegungsmoment bestimmen, so hat man zu bedenken, dass das Biegungsmoment die Summe der Momente der beiden Kräfte A und P_1 (links vom Schnitt) in Bezug auf N ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft $Q = A - P_1 = TK$ im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschliessenden Seileckseiten. Die einschliessenden Polstrahlen sind OT und OK, die hierzu parallelen Seiten des Seilecks $B_1 A_1$ und ED, welche sich in U schneiden. Nach dem Satze der Momente (Theil 1, S. 103) kann für die Momentensumme von A und P_1 das Moment der Mittelkraft Q gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Qz.$$

Nun ist das Dreieck $UN_1N_2 \backsim OKT$. Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie JM den Polabstand H, so gilt in den ähnlichen Dreieken, dass die wagerechten und lothrechten Abmessungen einander verhältnisgleich sind. Oder $z : N_1N_2 = H : KT$, mithin, wenn man $N_1N_2 = u$ setzt und KT mit Q vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Qz = Hu.$$

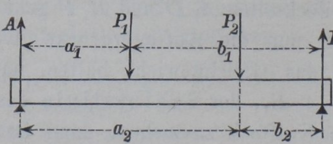
Es kann also das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Qz$ auch

1) $$\mathfrak{M} = \boldsymbol{Hu} \quad \text{gesetzt werden.}$$

Darin ist H der Polabstand des Kraftecks, d. h. eine beliebig gewählte Konstante, u die lothrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlusslinie aus gemessen.

Hiernach kann das Seileck A_1DEFB_1 als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft H zu multipliciren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, für die willkürliche Kraftgrösse H einen runden Werth zu wählen. Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muss das überhaupt grösste Biegungsmoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Fig. 38.



Sind nur zwei Lasten P_1 und P_2 auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele. Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last P_1 wird dann das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

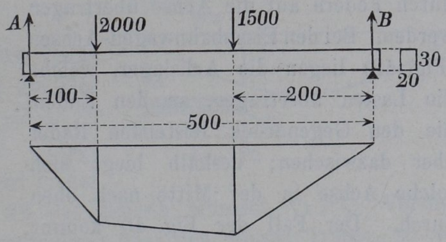
an der Last P_2 aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus 2 von einander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die

Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinige sind, so muss diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgend eine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgend einem Schnitte des Balkens ein Moment $\mathfrak{M}'$ hervor, so bildet dieses Moment $\mathfrak{M}'$ auch die Vergrösserung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgend einer Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, dass Entsprechendes auch bezüglich der Formänderungen gilt. Dies Verhalten wird die Übereinander-Lagerung oder Summirung der Wirkungen genannt.

Fig. 39.



Beispiel: Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen Centimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das grösste Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da an diesen das grösste Moment allein zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot 0{,}8 + 1500 \cdot 0{,}4 = 2200^{\text{kg}};$$

$$B = 3500 - 2200 = 1300^{\text{kg}}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000^{\text{cmkg}},$$

das andere

$$\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000^{\text{cmkg}}.$$

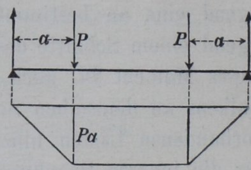
Letzteres ist mithin das grössere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man als Längenmafsstab 1 : 50 wählt, die Kräfte im Mafsstabe $1000^{\text{kg}} = 2^{\text{cm}}$ aufträgt und den Polabstand $H = 2000^{\text{kg}} = 4^{\text{cm}}$ benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmafsstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist $^1/_6\, 20 \cdot 30^2 = 3000$, mithin

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86^2/_3{}^{\text{at}}.$$

Über den Einfluss des Eigengewichtes s. S. 33.

Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten P in symmetrischer Lage, wobei jede Last um a von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muss jeder Stützendruck $= P$ sein. An einer Laststelle ist dann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_1 = Pa$, und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Werth Pa, und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluss auf das grösste Moment.

Fig. 40.



Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Strassenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die aussen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten P durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagen-Achsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die den Gegendruck leistenden Räder aber dazwischen; deshalb biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner eingleisiger Eisenbahn-Brücken. Die Lasten P werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand a möglichst klein zu machen, damit das grösste Moment Pa klein werde.

Fig. 41.

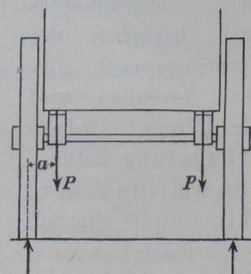
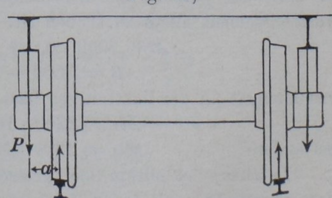


Fig. 42,



f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last.

Eine gleichmässig vertheilte Belastung erfährt schon jeder Balken durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtlos betrachtet und sein