Das Biegungsmoment aber wird $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2$. Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande σ'' und den Abstand von der Nulllinie e'', so ist wegen der Gl. 1 (S. 18)

$$4)\qquad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'},$$

mithin kann auch geschrieben werden nach Gl. 3

$$5)\qquad \frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

Die linke Seite der Gl. 3: $\frac{\sigma'}{e'} J$, das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor σ', während der andere Faktor $J : e'$ nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$ nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung σ', während $\frac{J}{e''}$, ebenso das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}''$ des Querschnitts für die Druckspannung σ'' ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist $e' = e''$, wofür wir dann einfach e setzen, ebenso $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es werden dann die Randspannungen $\sigma' = \sigma''$ (wofür wir σ schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung} = \frac{\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

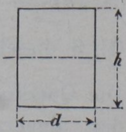
b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach Theil 1, S. 273) $J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{dh^3}{12}$; mithin ist, wegen $e = {}^1\!/_2 h$, das Widerstandsmoment des Rechtecks

$$6)\qquad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{Fh}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt F bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts

Fig. 24.



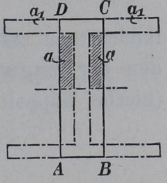
ihren Höhen h verhältnisgleich. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, dass sie stets nur in lothrechtem Sinne belastet werden, möglichst hochkantig zu stellen, d. h. h gegen d gross zu nehmen.

Für $d = 12$, $h = 24$ ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \quad 24^2 = 1152$; legt man denselben Balken aber flach, so ist $d = 24$, $h = 12$ und $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$, d. h. halb so gross wie vorher, dem entsprechend auch die Tragfähigkeit nur halb so gross.

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade ($^{\mathrm{cm}^4}$), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade ($^{\mathrm{cm}^3}$ oder $^{\mathrm{ccm}}$).

Bei gegebener Höhe $h = 2e$ liefert ein Flächentheil dF im Abstande u von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag $dFu^2 : e$. Die Flächentheile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vortheilhaft, diese Flächentheile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstande von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck $ABCD$ (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächentheile a nach a_1 zu dem I-förmigen Querschnitte.

Fig. 25.



Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man T-Eisen nannte; indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen $\left(\begin{smallmatrix}\mathsf{T}\\ \perp\end{smallmatrix}\right)$ ansah, führte man dafür den Namen Doppelt-T-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen I-Eisen.

Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke dh und $d_1 h_1$ behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äusseren Theile dienenden Mittelwand $= d - d_1$ setzt. Daher ist

7) $J = {}^1/_{12}\,(dh^3 - d_1 h_1{}^3)$

und weil $e = {}^1/_2\, h$:

8) $\mathfrak{W} = \dfrac{J}{e} = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{dh^3 - d_1 h_1{}^3}{h}$.

Fig. 26.

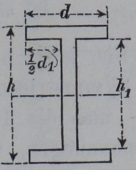
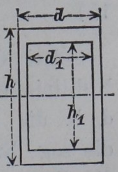


Fig. 27.



Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27).

Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lothrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt, mit

$$9)\quad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6} \quad \text{bezw.}$$

$$10)\quad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6}\,\frac{h^4 - h_1{}^4}{h}.$$

Fig. 28.

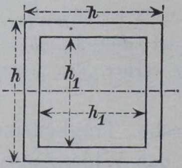
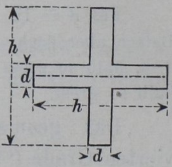


Fig. 29.



Zieht man in solchem Falle Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Es ist dann

$$11)\quad J = \frac{1}{12}(dh^3 + hd^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lothrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates $d \cdot d$ abzieht. Es wird dann

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{6}\,\frac{dh^3 + hd^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser r ist (Theil 1, S. 273)

$$12)\quad J = \frac{Fr^2}{4} = \frac{r^4\pi}{4} \quad \text{und}$$

$$13)\quad \mathfrak{W} = \frac{r^3\pi}{4}.$$

Für den Ring von den Halbmessern R und r ist

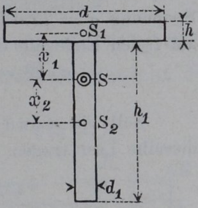
$$14)\quad J = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\,\pi,$$

$$15)\quad \mathfrak{W} = \frac{1}{4}\,\frac{(R^4 - r^4)\pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher $e' = e''$ und auch $\sigma' = \sigma''$, d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äussersten Lagen, die sog. Randspannungen, von gleicher Grösse. Bei Gusseisen, wo die Spannungen an der Elasticitätsgrenze $z : d$ sich verhalten wie $3 : 8$, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, dass die

Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso gross wird wie in der gedrückten, dass also $\sigma' : \sigma'' = 3 : 8$, also auch $e' : e'' = 3 : 8$. Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den T-Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite muss die gezogene (konvexe) werden.

Fig. 30.



Sind x_1 und x_2 die Abstände der Theilschwerpunkte S_1 und S_2 der Rechtecke $d \cdot h$ und $d_1 h_1$ vom Gesammt-Schwerpunkte S, so ist $d \cdot h x_1 = d_1 h_1 x_2$ und $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(h + h_1)$; daraus

$$16) \qquad x_1 = \frac{d_1 h_1 (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)}.$$

Das Trägbeitsmoment in Bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = \tfrac{1}{12} d \cdot h^3 + d \cdot h x_1{}^2 + \tfrac{1}{12} d_1 h_1{}^3 + d_1 h_1 x_2{}^2,$$

wofür man (nach Theil 1, S. 275, Gl. 25) auch schreiben kann

$$17) \qquad J = \frac{1}{12}(d \cdot h^3 + d_1 h_1{}^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 h_1}{d \cdot h + d_1 h_1}\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2.$$

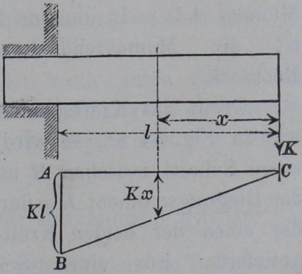
$$18) \qquad \mathfrak{W}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}'' = J : e''$$

sind hier ungleich gross.

c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegungsmomentes.

Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch $\mathfrak{W}$ überall gleich, mithin die stärkste Spannung σ an verschiedenen Schnitten verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Fig. 31.



Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last K ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstande x von K das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Kx$, dargestellt durch die Gerade CB. Die Figur ACB heisst Momentenfläche. Das grösste Moment gilt daher für die Einspannungsstelle

$$\mathfrak{M}_1 = Kl.$$