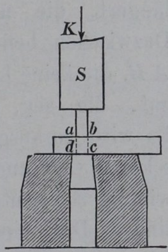
muss das linksseitige Niet an beiden Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden; bei einer solchen Zerstörung würde dann der mittlere Theil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äusseren Theile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heisst ein zweischnittiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

$$K = 2 \cdot \tau \cdot {}^1/_4\, d^2 \pi.$$

Fig. 16.



Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstossen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel S (Fig. 16) niedergedrückt, so dass er den cylindrischen Körper $abcd$ aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte $Z = D = 3500^{\text{at}}$, so ist die Scheerfestigkeit $0{,}8 \cdot 3500 = 2800^{\text{at}}$. Um ein Loch von $d = 2^{\text{cm}}$ Durchmesser durch die $h = 2^{\text{cm}}$ dicke Platte zu drücken, ist, weil die cylindrische Trennungsfläche $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$, die Kraft

$$K = 4\pi \cdot 2800 = 35\,186^{\text{kg}} \text{ erforderlich.}$$

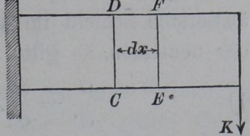
Genauere Untersuchungen zeigen, dass bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

4. Biegungsfestigkeit.

a) Grundgleichungen.

Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äusseren Ende wirke eine Kraft K, welche die Längenachse des Stabes (d. h. die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch K und die Längenachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder Balken eine Symmetrie-Ebene.

Fig. 17.



Die Erfahrung lehrt, dass der Stab unter der Last K sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte CD und EF im Abstande dx von einander, verdrehen sich gegen einander und schneiden sich in der Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Dazwischen befindet sich eine Schicht AB, die keine Längenänderung erlitten hat, die sog. neutrale Schicht. Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte CD und EF eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind. Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze den Dehnungen verhältnisgleich sind. Zeichnet man das Längentheilchen $CDFE$ des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und legt durch N eine Ebene $JK \parallel CD$, so stellen die Keile zwischen EF und JK die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabtheilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die übereinstimmende Länge $GN = dx$ hatten, so sind die Dehnungen, also auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnisgleich dem Abstande u derselben von der neutralen Schicht. Ist daher σ die Spannung im Abstande u, σ' die Spannung der äussersten Schicht im Abstande e' von der neutralen, so gilt

Fig. 18.

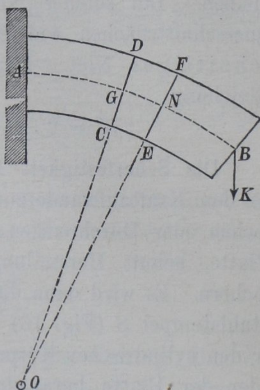
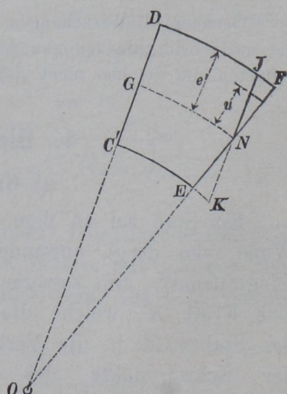


Fig. 19.



1) $$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}.$$

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke JFN und GNO

$$JF : GN = JN : GO.$$

$JF : GN$ ist aber $(= JF : DJ)$ die Dehnung $\sigma' : E$ der obersten Schicht. Setzt man $GO = \varrho$, so wird

$$\sigma' : E = e' : \varrho \quad \text{oder}$$

$$\varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}. \tag{2}$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an, σ' aus der gegebenen Kraft K zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichts-Bedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt EF in Fig. 18, so muss dieses den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, wobei angenommen wird, dass die Kraft K ihre ursprüngliche (lothrechte) Richtung beibehält und im Punkte B angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt EF auftretenden Spannkräfte unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Biegung nur gering sein wird, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also der linke Theil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Theil ist der Querschnitt.

Fig. 20.

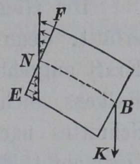
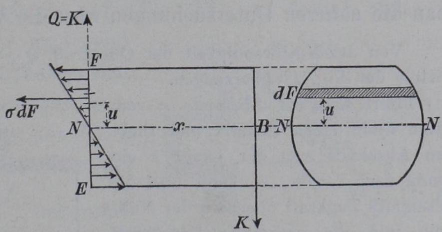


Fig. 21.



Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstande u von der neutralen Schicht NN einen Flächenstreifen dF heraus, so erfährt dieser, weil an ihm durchweg die Spannung σ auftritt, eine Spannkraft $\sigma \cdot dF$. Derartige Spannkräfte kommen über die ganze Querschnittshöhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte Null sein.

Also $\int \sigma d F = 0$. Weil nun nach Gleichung 1, S. 18, $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$, σ' und e' aber von u nicht abhängig sind, so ergiebt sich

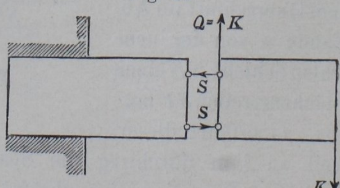
$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0 .$$

Dies bedeutet (1. Theil, S. 126), dass die Gerade NN im Querschnitt, von welcher aus die Abstände u gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muss. Die Gerade NN, in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heisst die neutrale Achse oder die Spannungs-Nulllinie (weil an ihr die Spannung $\sigma = 0$) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, dass die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt also in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lothrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft K durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft K hat ausser der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten gleiten zu lassen; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft $Q = K$, entgegen. Die aus Q sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft Q hier nicht weiter kümmern werden. In Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik findet man die näheren Untersuchungen über die Vertheilung der Querkraft.

Von der Nothwendigkeit der Querkraft $Q = K$ kann man sich auch noch mittels der Fig. 22 überzeugen.

Fig. 22.



Führt man im Abstande x vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge x ein wenig nach rechts, so kann man die gesammte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesammte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkräfte S zweier wagerechten Gelenkstangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif mit einander verbunden; die Gelenkstangen verhindern nur eine Drehung des rechtsseitigen Theiles, nicht aber eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft $Q = K$ erforderlich.

In der Gleichung der Momente in Bezug auf die Nulllinie NN (Fig. 21) haben wir dann Kx als äusseres Moment; die innere Spannkraft σdF eines Querschnitts-Theilchens hat den Hebelarm u, daher muss $0 = Kx - \int \sigma dF u$ oder nach Gl. 1, S. 18,

$$\frac{\sigma'}{e'}\int dF u^2 = Kx \quad \text{sein.}$$

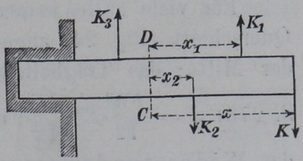
Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkräfte oder das innere Widerstandsmoment, während die rechte Seite das Moment der äusseren biegenden Kraft in Bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heisst das Biegungsmoment und wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\int dF u^2$ bedeutet nach Theil 1, S. 267 und 273 das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Nulllinie. Die Momentgleichung nimmt dann die Form an:

3) $$\frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft K und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrie-Ebene des Stabes sein soll, heisst die Biegungsebene, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. Die Nulllinie steht auf der Biegungsebene rechtwinklig.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch nichts wesentliches. An irgend einer Schnittstelle CD vertheilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 18), so dass die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form $\frac{\sigma' J}{e'}$ bekommt.

Fig. 23.



Die Querkraft Q an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegungsmoment aber wird $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2$. Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande σ'' und den Abstand von der Nulllinie e'', so ist wegen der Gl. 1 (S. 18)

$$4) \qquad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'},$$

mithin kann auch geschrieben werden nach Gl. 3

$$5) \qquad \frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

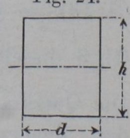
Die linke Seite der Gl. 3: $\frac{\sigma'}{e'} J$, das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor σ', während der andere Faktor $J : e'$ nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$ nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung σ', während $\frac{J}{e''}$, ebenso das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}''$ des Querschnitts für die Druckspannung σ'' ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist $e' = e''$, wofür wir dann einfach e setzen, ebenso $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es werden dann die Randspannungen $\sigma' = \sigma''$ (wofür wir σ schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung} = \frac{\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach Theil 1, S. 273) $J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{dh^3}{12}$; mithin ist, wegen $e = \frac{1}{2}h$, das Widerstandsmoment des Rechtecks

Fig. 24.



$$6) \qquad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{Fh}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt F bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts