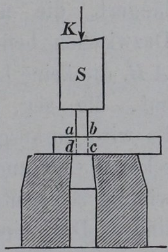
muss das linksseitige Niet an beiden Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden; bei einer solchen Zerstörung würde dann der mittlere Theil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äusseren Theile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heisst ein zweischnittiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

$$K = 2 \cdot \tau \cdot {}^1/_4\, d^2 \pi .$$

Fig. 16.



Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstossen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel S (Fig. 16) niedergedrückt, so dass er den cylindrischen Körper $abcd$ aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte $Z = D = 3500^{\text{at}}$, so ist die Scheerfestigkeit $0{,}8 \cdot 3500 = 2800^{\text{at}}$. Um ein Loch von $d = 2^{\text{cm}}$ Durchmesser durch die $h = 2^{\text{cm}}$ dicke Platte zu drücken, ist, weil die cylindrische Trennungsfläche $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$, die Kraft

$$K = 4\pi \cdot 2800 = 35\,186^{\text{kg}} \text{ erforderlich.}$$

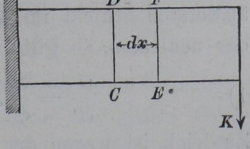
Genauere Untersuchungen zeigen, dass bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

4. Biegungsfestigkeit.

a) Grundgleichungen.

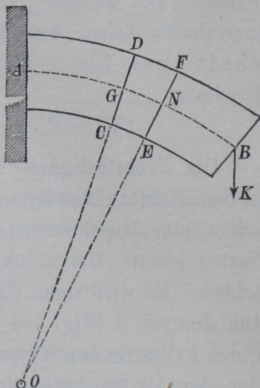
Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äusseren Ende wirke eine Kraft K, welche die Längenachse des Stabes (d. h. die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch K und die Längenachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder Balken eine Symmetrie-Ebene.

Fig. 17.



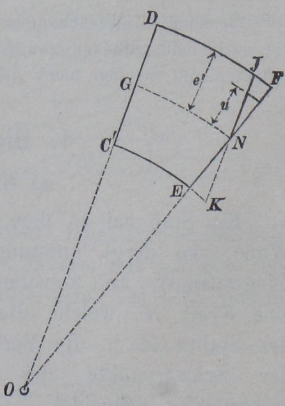
Die Erfahrung lehrt, dass der Stab unter der Last K sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte CD und EF im Abstande dx von einander, verdrehen sich gegen einander und schneiden sich in der Achse O rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Dazwischen befindet sich eine Schicht AB, die keine Längenänderung erlitten hat, die sog. **neutrale Schicht.** Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte CD und EF eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind. Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze den Dehnungen verhältnisgleich sind.

Fig. 18.



Zeichnet man das Längentheilchen $CDFE$ des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und legt durch N eine Ebene $JK \parallel CD$, so stellen die Keile zwischen EF und JK die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabtheilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die übereinstimmende Länge $GN = dx$ hatten, so sind die Dehnungen, also auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnisgleich dem Abstande u derselben von der neutralen Schicht. Ist daher σ die Spannung im Abstande u, σ' die Spannung der äussersten Schicht im Abstande e' von der neutralen, so gilt

Fig. 19.



1) $$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}.$$

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke JFN und GNO

$$JF : GN = JN : GO.$$

$JF : GN$ ist aber $(= JF : DJ)$ die Dehnung $\sigma' : E$ der obersten Schicht. Setzt man $GO = \varrho$, so wird

$$\sigma' : E = e' : \varrho \quad \text{oder}$$

2) $$\varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}.$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an, σ' aus der gegebenen Kraft K zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichts-Bedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt EF in Fig. 18, so muss dieses den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, wobei angenommen wird, dass die Kraft K ihre ursprüngliche (lothrechte) Richtung beibehält und im Punkte B angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt EF auftretenden Spannkräfte unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Biegung nur gering sein wird, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also der linke Theil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Theil ist der Querschnitt.

Fig. 20.

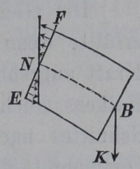
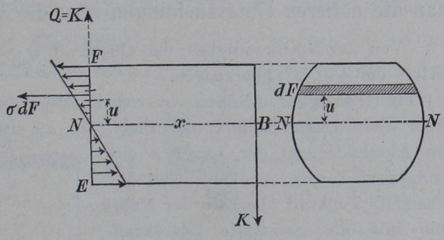


Fig. 21.



Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstande u von der neutralen Schicht NN einen Flächenstreifen dF heraus, so erfährt dieser, weil an ihm durchweg die Spannung σ auftritt, eine Spannkraft $\sigma \cdot dF$. Derartige Spannkräfte kommen über die ganze Querschnittshöhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte Null sein.

Also $\int \sigma d F = 0$. Weil nun nach Gleichung 1, S. 18, $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$, σ' und e' aber von u nicht abhängig sind, so ergiebt sich

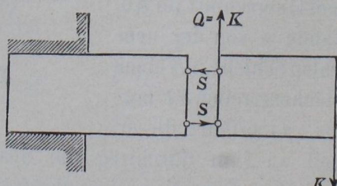
$$\frac{\sigma'}{e'}\int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0.$$

Dies bedeutet (1. Theil, S. 126), dass die Gerade NN im Querschnitt, von welcher aus die Abstände u gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muss. Die Gerade NN, in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heisst die neutrale Achse oder die Spannungs-Nulllinie (weil an ihr die Spannung $\sigma = 0$) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, dass die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt also in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lothrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft K durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft K hat ausser der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten gleiten zu lassen; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft $Q = K$, entgegen. Die aus Q sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft Q hier nicht weiter kümmern werden. In Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik findet man die näheren Untersuchungen über die Vertheilung der Querkraft.

Von der Nothwendigkeit der Querkraft $Q = K$ kann man sich auch noch mittels der Fig. 22 überzeugen.

Fig. 22.



Führt man im Abstande x vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge x ein wenig nach rechts, so kann man die gesammte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesammte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkräfte S zweier wagerechten Gelenkstangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif mit einander verbunden; die Gelenkstangen verhindern nur eine Drehung des rechtsseitigen Theiles, nicht aber eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft $Q = K$ erforderlich.

In der Gleichung der Momente in Bezug auf die Nulllinie NN (Fig. 21) haben wir dann Kx als äusseres Moment; die innere Spannkraft σdF eines Querschnitts-Theilchens hat den Hebelarm u, daher muss $0 = Kx - \int \sigma dFu$ oder nach Gl. 1, S. 18,

$$\frac{\sigma'}{e'}\int dFu^2 = Kx \quad \text{sein.}$$

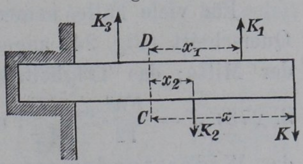
Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkräfte oder das innere Widerstandsmoment, während die rechte Seite das Moment der äusseren biegenden Kraft in Bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heisst das **Biegungsmoment** und wird mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. $\int dFu^2$ bedeutet nach Theil 1, S. 267 und 273 das **geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts** in Bezug auf die Nulllinie. Die Momentgleichung nimmt dann die Form an:

3) $$\frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft K und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrie-Ebene des Stabes sein soll, heisst die **Biegungsebene**, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. Die Nulllinie steht auf der Biegungsebene rechtwinklig.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch nichts wesentliches. An irgend einer Schnittstelle CD vertheilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 18), so dass die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form $\frac{\sigma' J}{e'}$ bekommt.

Fig. 23.



Die Querkraft Q an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegungsmoment aber wird $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2$. Das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande σ'' und den Abstand von der Nulllinie e'', so ist wegen der Gl. 1 (S. 18)

4) $$\frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'},$$

mithin kann auch geschrieben werden nach Gl. 3

5) $$\frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

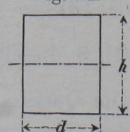
Die linke Seite der Gl. 3: $\frac{\sigma'}{e'} J$, das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor σ', während der andere Faktor $J : e'$ nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$ nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung σ', während $\frac{J}{e''}$, ebenso das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}''$ des Querschnitts für die Druckspannung σ'' ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist $e' = e''$, wofür wir dann einfach e setzen, ebenso $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$. Es werden dann die Randspannungen $\sigma' = \sigma''$ (wofür wir σ schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung} = \frac{\text{Biegungsmoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach Theil 1, S. 273) $J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{dh^3}{12}$; mithin ist, wegen $e = \frac{1}{2} h$, das Widerstandsmoment des Rechtecks

Fig. 24.



6) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{Fh}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

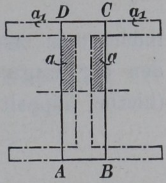
Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt F bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts ihren Höhen h verhältnisgleich. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, dass sie stets nur in lothrechtem Sinne belastet werden, möglichst hochkantig zu stellen, d. h. h gegen d gross zu nehmen.

Für $d = 12$, $h = 24$ ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 12 \quad 24^2 = 1152$; legt man denselben Balken aber flach, so ist $d = 24$, $h = 12$ und $\mathfrak{W} = {}^1/_6 \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$, d. h. halb so gross wie vorher, dem entsprechend auch die Tragfähigkeit nur halb so gross.

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade ($^{cm^4}$), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade ($^{cm^3}$ oder ^{ccm}).

Bei gegebener Höhe $h = 2e$ liefert ein Flächentheil dF im Abstande u von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag $dFu^2 : e$. Die Flächentheile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vortheilhaft, diese Flächentheile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstande von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck $ABCD$ (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächentheile a nach a_1 zu dem I-förmigen Querschnitte.

Fig. 25.



Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man T-Eisen nannte; indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen (T⊥) ansah, führte man dafür den Namen Doppelt-T-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen I-Eisen.

Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke dh und $d_1 h_1$ behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äusseren Theile dienenden Mittelwand $= d - d_1$ setzt. Daher ist

7) $J = {}^1/_{12}\,(dh^3 - d_1 h_1{}^3)$

und weil $e = {}^1/_2\, h$:

8) $\mathfrak{W} = \dfrac{J}{e} = \dfrac{1}{6}\,\dfrac{dh^3 - d_1 h_1{}^3}{h}$.

Fig. 26.

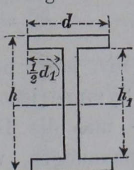
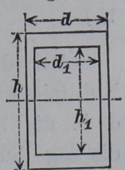


Fig. 27.



Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27).

Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lothrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt, mit

9) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6} \text{ bezw.}$$

10) $$\mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6}\,\frac{h^4 - h_1{}^4}{h}.$$

Fig. 28.

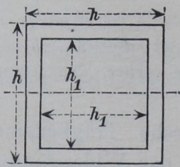
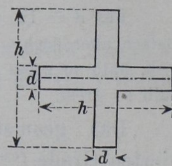


Fig. 29.



Zieht man in solchem Falle Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Es ist dann

11) $$J = \frac{1}{12}(d h^3 + h d^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lothrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates $d \cdot d$ abzieht. Es wird dann

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{6}\,\frac{d h^3 + h d^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser r ist (Theil 1, S. 273)

12) $$J = \frac{F r^2}{4} = \frac{r^4 \pi}{4} \quad \text{und}$$

13) $$\mathfrak{W} = \frac{r^3 \pi}{4}.$$

Für den Ring von den Halbmessern R und r ist

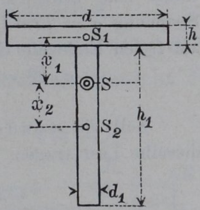
14) $$J = \frac{1}{4}(R^4 - r^4)\pi,$$

15) $$\mathfrak{W} = \frac{1}{4}\,\frac{(R^4 - r^4)\pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher $e' = e''$ und auch $\sigma' = \sigma''$, d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äussersten Lagen, die sog. Randspannungen, von gleicher Grösse. Bei Gusseisen, wo die Spannungen an der Elasticitätsgrenze $z : d$ sich verhalten wie $3 : 8$, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, dass die

Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso gross wird wie in der gedrückten, dass also $\sigma' : \sigma'' = 3 : 8$, also auch $e' : e'' = 3 : 8$. Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den ⊤-Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite muss die gezogene (konvexe) werden.

Fig. 30.



Sind x_1 und x_2 die Abstände der Theilschwerpunkte S_1 und S_2 der Rechtecke $d \cdot h$ und $d_1 h_1$ vom Gesammt-Schwerpunkte S, so ist $d \cdot h x_1 = d_1 h_1 x_2$ und $x_1 + x_2 = {}^1/_2 (h + h_1)$; daraus

16) $$x_1 = \frac{d_1 h_1 (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)}.$$

Das Trägbeitsmoment in Bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = {}^1/_{12}\, d \cdot h^3 + d \cdot h x_1{}^2 + {}^1/_{12}\, d_1 h_1{}^3 + d_1 h_1 x_2{}^2,$$

wofür man (nach Theil 1, S. 275, Gl. 25) auch schreiben kann

17) $$J = \frac{1}{12}(d \cdot h^3 + d_1 h_1{}^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 h_1}{d \cdot h + d_1 h_1}\left(\frac{h + h_1}{2}\right)^2.$$

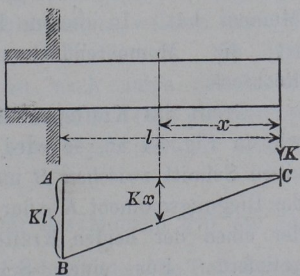
18) $$\mathfrak{W}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{W}'' = J : e''$$

sind hier ungleich gross.

c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegungsmomentes.

Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch $\mathfrak{W}$ überall gleich, mithin die stärkste Spannung σ an verschiedenen Schnitten verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Fig. 31.



Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last K ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstande x von K das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Kx$, dargestellt durch die Gerade CB. Die Figur ACB heisst Momentenfläche. Das grösste Moment gilt daher für die Einspannungsstelle

$$\mathfrak{M}_1 = Kl.$$

Beispiel: Für einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte sei $l = 2^{\mathrm{m}} = 200^{\mathrm{cm}}$, $d = 12$, $h = 24^{\mathrm{cm}}$; für Holz ist wegen der Spannungen an der Elasticitätsgrenze, Zug 250, Druck 170^{at}, die letztere massgebend; wählt man etwas mehr als zweifache Sicherheit, indem man als zulässige Spannung $\sigma = 75^{\mathrm{at}}$ ($< {}^1/_2 \cdot 170$) einführt, so gilt für die zulässige Belastung am freien Ende die Gleichung

$$\sigma \cdot \mathfrak{W} = Kl, \quad \text{mithin, da nach S. 22 } \mathfrak{W} = 1152,$$
$$K = 75 \cdot 1152 : 200 = 432^{\mathrm{kg}}.$$

Soll ein runder Schmiedeisenstab bei 700^{at} stärkster Spannung dieselbe Last tragen, so gilt für seinen Halbmesser r die Gleichung

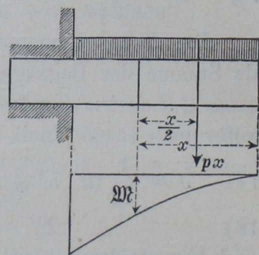
$$432 \cdot 200 = 700 \frac{r^3 \pi}{4}, \quad \text{woraus } r = 5{,}4^{\mathrm{cm}}.$$

Ist der Stab oder Balken gleichmässig über seine Länge belastet mit p für die Längeneinheit (Fig. 32), und führt man im Abstande x vom Ende einen Schnitt, so hat die Gesammtlast der Länge x die Grösse $p\,x$ im Abstand ${}^1/_2\,x$ vom Schnitte; mithin wird

$$\mathfrak{M} = px \cdot {}^1/_2 x = {}^1/_2 p x^2.$$

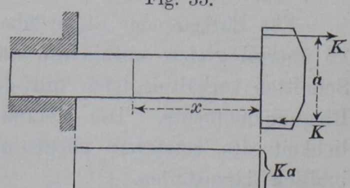
Die Darstellung davon ist eine Parabel mit lothrechter Achse, die am freien Ende des Stabes liegt. Der Parameter ist $1 : p$.

Fig. 32.



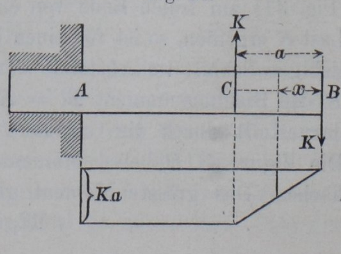
Greift am freien Ende des Stabes ein Kräftepaar vom Momente Ka (Fig. 33) an, so ist dieses auch für jeden Schnitt des Stabes das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$, weil ein Kräftepaar in Bezug auf jeden Punkt seiner Ebene das gleiche Moment hat. In diesem Falle ist die Momentenfläche ein Rechteck.

Fig. 33.



Greift das Kräftepaar $K \cdot a$ wie in Fig. 34 an, so wird für einen Schnitt zwischen B und C das Biegungsmoment Kx nur von der einen der beiden Kräfte K geliefert. Für einen Schnitt zwischen A und C aber liegen beide Kräfte K an dem abge-

Fig. 34.

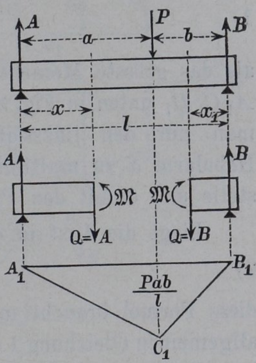


schnittenen Stücke und bilden ein Kräftepaar $\mathfrak{M} = Ka$. Die Momentenfläche hat daher die unten in Fig. 34 gezeichnete Form.

d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast.

Ein Balken auf 2 Stützen im Abstande l von einander (Fig. 35) sei in den Abständen a und b von den Stützen durch ein Gewicht P belastet. Es entstehen an den Auflagern Widerstände A und B, die man (nach Theil I, S. 162) leicht findet, indem man die Momenten-Gleichung in Bezug auf B bezw. A aufstellt.

Fig. 35.



Es wird

$$A = P\frac{b}{l};\ B = P\frac{a}{l}.$$

Unter Einwirkung der Kräfte P, A und B muss der Balken im gebogenen Zustande im Gleichgewichte sein. Nach S. 19 vernachlässigen wir aber die Biegung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen. Führen wir im Abstande x von A einen Schnitt, so müssen beide Theile des Balkens im Gleichgewichte sein. Welches der beiden Stücke wir betrachten, ist im Grunde gleichgültig; der Einfachheit wegen wählt man meist dasjenige, an dem die wenigsten Kräfte vorkommen, in vorliegendem Falle das linksseitige, welches in der Figur besonders herausgezeichnet ist. Die Kraft A verlangt eine innere Querkraft $Q = A$ (abwärts); diese bildet mit A ein Kräftepaar, das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Ax$ mit dem Sinne rechts herum, welches ein entgegengesetzt drehendes Spannungsmoment hervorruft. In dem Balken liegen also, wie schon aus der nach unten gerichteten Durchbiegung folgt, die gezogenen Schichten unten. (Ein gusseiserner Balken unsymmetrischen Querschnitts müsste jetzt mit der breiten Seite nach unten liegen $\perp$.)

Die Formel $\mathfrak{M} = Ax = P\frac{b}{l}x$ für das Moment gilt nur für Schnitte links von der Last. Sobald der Schnitt über die Belastungsstelle hinaus rückt, kommt plötzlich die Last P links vom Schnitte zu liegen, wodurch sich eine Unstetigkeit in der Veränderlichkeit des Momentes ergiebt. Für einen Schnitt rechts von der Last (im Abstande x_1 von B) betrachtet man einfacher das Stück rechts vom Schnitte. Dann wird $\mathfrak{M} = B x_1 = P \frac{a}{l} x_1$. Die Momente werden für beide Seiten des Balkens durch Gerade dargestellt. Für die Belastungsstelle ($x = a$; $x_1 = b$) ergiebt sich von beiden Seiten der übereinstimmende Werth

1) $$\mathfrak{M}_1 = \frac{\boldsymbol{Pab}}{\boldsymbol{l}}$$

als das grösste Moment. Die Momentenfläche ist also das Dreieck $A_1 C_1 B_1$ unten in Fig. 34. Zur Bestimmung dieses Dreiecks braucht man nur den linksseitigen Auflagerdruck $A = Pb : l$ mit dem Hebelarm a zu multipliciren, um das Moment an der Belastungsstelle und damit den Punkt C_1 der Momentenfläche zu erhalten.

Liegt die Last in der Mitte, so ist $a = b = {}^1\!/_2\, l$ und

2) $$\mathfrak{M}_1 = {}^1\!/_4\, \boldsymbol{Pl};$$

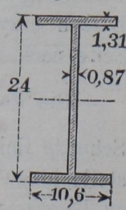
diese Formel braucht man aber für die Anwendung nicht aus der allgemeinen Gleichung 1 abzuleiten, sondern kann unmittelbar den Auflagerdruck, der für diesen Fall offenbar $= {}^1\!/_2\, P$ sein muss, mit dem Abstande von der Last (der Balkenmitte) ${}^1\!/_2\, l$ multipliciren.

Beispiel 1: Es sollen die Querschnitts-Abmessungen eines Holzbalkens bestimmt werden, der bei $3^{\text{m}} = 300^{\text{cm}}$ Spannweite und 75^{at} zulässiger Spannung eine Last von 2000^{kg} in der Mitte zu tragen hat. Es muss $75 \times \frac{d \cdot h^2}{6} = \frac{2000 \cdot 300}{4}$, also $d \cdot h^2 = 12\,000^{\text{cm}^3}$ sein. Setzt man nun etwa noch das Verhältnis $h : d = 2$ fest, so wird $h^3 = 24\,000$, mithin

$$h = 28{,}8^{\text{cm}};\quad d = 14{,}4^{\text{cm}}.$$

Beispiel 2: Ein Balken, dessen Querschnitt in Fig. 36 gegeben, liege auf zwei Stützen in 4^{m} Abstand. Es soll für eine stärkste Spannung $\sigma = 700^{\text{at}}$ die zulässige Einzellast in der Mitte berechnet werden. Die Maſse in Fig. 36 sind cm. (Würde man versäumen, die Spannweite von 4^{m} in 400^{cm} umzuwandeln, so erhielte man die Tragfähigkeit 100 mal zu gross; dieser Fehler kommt erfahrungsmässig bei Anfängern häufig vor.) Es ist

Fig. 36.



$$J = {}^1\!/_{12}\, (10{,}6 \cdot 24^3 - 9{,}73 \cdot 21{,}38^3)$$
$$= 4287;\quad \mathfrak{W} = 357.$$

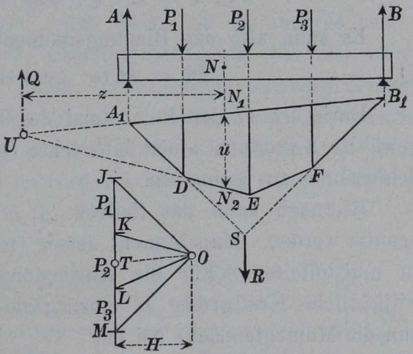
Mithin $P \cdot 100 = 700 \cdot 357$ oder $P = 2499^{\text{kg}}$.

e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

In Theil 1, S. 120, wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft R der gegebenen Lasten finden kann. Man setzt die Lasten P_1, P_2, P_3 nach beliebigem Maſsstabe zu einem Krafteck JM zusammen, wählt einen beliebigen Pol O und zeichnet, in einem beliebigen Punkte A_1 der linksseitigen Auflager-Lothrechten beginnend, ein Seileck A_1DEFB_1, welches die rechtsseitige Auflager-Lothrechte in B_1 schneidet. Durch den Schnittpunkt S der Verlängerungen der äussersten Seileckseiten A_1D und B_1F geht dann die Mittelkraft R der Lasten.

Fig. 37.



Um nun die Auflagerdrücke A und B so zu bestimmen, dass sie R das Gleichgewicht halten, hat man (nach Theil 1, S. 121) nur zu A_1B_1, der Schlusslinie des Seilecks, einen Parallelstrahl OT im Krafteck zu ziehen, dann ist T der Theilpunkt der Lasten; es ist TJ der Auflagerdruck A, MT der Auflagerdruck B.

Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen P_1 und P_2 liegenden Schnitt N das Biegungsmoment bestimmen, so hat man zu bedenken, dass das Biegungsmoment die Summe der Momente der beiden Kräfte A und P_1 (links vom Schnitt) in Bezug auf N ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft $Q = A - P_1 = TK$ im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschliessenden Seileckseiten. Die einschliessenden Polstrahlen sind OT und OK, die hierzu parallelen Seiten des Seilecks B_1A_1 und ED, welche sich in U schneiden. Nach dem Satze der Momente (Theil 1, S. 103) kann für die Momentensumme von A und P_1 das Moment der Mittelkraft Q gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Qz.$$

Nun ist das Dreieck $UN_1N_2 \backsim OKT$. Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles O von der Lastlinie JM den Polabstand H, so gilt in den ähnlichen Dreieken, dass die wagerechten und lothrechten Abmessungen einander verhältnisgleich sind. Oder $z : N_1N_2 = H : KT$, mithin, wenn man $N_1N_2 = u$ setzt und KT mit Q vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Qz = Hu.$$

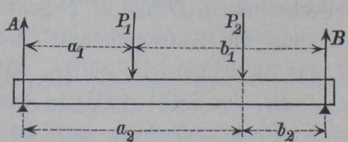
Es kann also das Biegungsmoment $\mathfrak{M} = Qz$ auch

1) $\quad \boldsymbol{\mathfrak{M} = Hu}$ gesetzt werden.

Darin ist H der Polabstand des Kraftecks, d. h. eine beliebig gewählte Konstante, u die lothrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlusslinie aus gemessen.

Hiernach kann das Seileck A_1DEFB_1 als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft H zu multipliciren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, für die willkürliche Kraftgrösse H einen runden Werth zu wählen. Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muss das überhaupt grösste Biegungsmoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Fig. 38.



Sind nur zwei Lasten P_1 und P_2 auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele. Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last P_1 wird dann das Biegungsmoment

$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

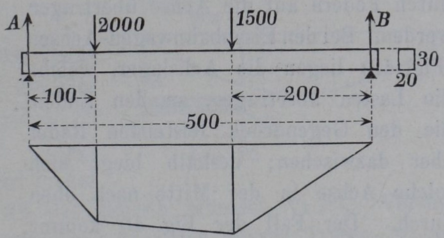
an der Last P_2 aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus 2 von einander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die

Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinige sind, so muss diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgend eine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgend einem Schnitte des Balkens ein Moment $\mathfrak{M}'$ hervor, so bildet dieses Moment $\mathfrak{M}'$ auch die Vergrösserung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgend einer Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, dass Entsprechendes auch bezüglich der Formänderungen gilt. Dies Verhalten wird die Übereinander-Lagerung oder Summirung der Wirkungen genannt.

Fig. 39.



Beispiel: Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen Centimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das grösste Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da an diesen das grösste Moment allein zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot 0{,}8 + 1500 \cdot 0{,}4 = 2200^{\text{kg}};$$
$$B = 3500 - 2200 = 1300^{\text{kg}}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000^{\text{cmkg}},$$

das andere $\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000^{\text{cmkg}}$.

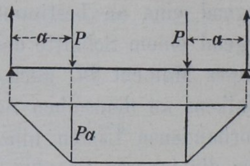
Letzteres ist mithin das grössere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man als Längenmafsstab 1 : 50 wählt, die Kräfte im Mafsstabe $1000^{\text{kg}} = 2^{\text{cm}}$ aufträgt und den Polabstand $H = 2000^{\text{kg}} = 4^{\text{cm}}$ benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmafsstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist $\frac{1}{6}\,20 \cdot 30^2 = 3000$, mithin

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86^2/_3{}^{\text{at}}.$$

Über den Einfluss des Eigengewichtes s. S. 33.

Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten P in symmetrischer Lage, wobei jede Last um a von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muss jeder Stützendruck $= P$ sein. An einer Laststelle ist dann das Biegungsmoment $\mathfrak{M}_1 = Pa$, und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Werth Pa, und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluss auf das grösste Moment.

Fig. 40.



Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Strassenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die aussen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten P durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagen-Achsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die den Gegendruck leistenden Räder aber dazwischen; deshalb biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner eingleisiger Eisenbahn-Brücken. Die Lasten P werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand a möglichst klein zu machen, damit das grösste Moment Pa klein werde.

Fig. 41.

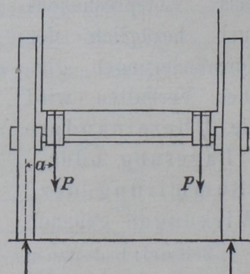
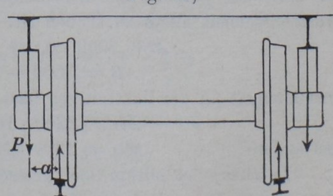


Fig. 42,



f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last.

Eine gleichmässig vertheilte Belastung erfährt schon jeder Balken durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtlos betrachtet und sein

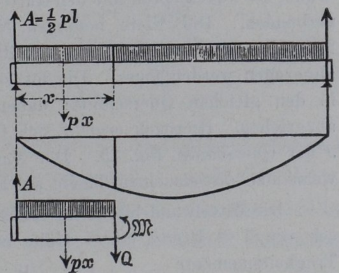
Eigengewicht wie eine fremde Last behandelt. In vielen Fällen ist dieses so unbedeutend gegenüber den sonstigen Lasten, dass es vernachlässigt werden darf, wie bisher geschehen ist.

Ist die Belastung der Längeneinheit p, die Spannweite l (Fig. 43), so wird jeder Auflagerdruck $^1/_2\,p\,l$; für eine Schnittstelle im Abstande x von dem Auflager ist dann das Moment

1) $$\mathfrak{M} = \frac{p\,l\,x}{2} - p\,x \cdot \frac{x}{2} = \frac{p\,x\,(l-x)}{2}.$$

Eine Funktion, in der das Veränderliche in der Form $x\,(l-x)$ erscheint, wird (nach Theil 1, S. 183) dargestellt durch ein Parabelsegment, das symmetrisch die Weite l überspannt.

Fig. 43.



Das grösste Moment ergiebt sich für die Mitte, $x = {}^1/_2\,l$, zu

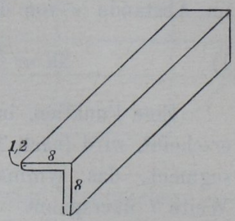
2) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{p l^2}{8}.$$

Die Parabel hat den Parameter $^1/_p$. Setzt man die Gesammtlast des Balkens $p\,l = P$, so wird $\mathfrak{M}_{max} = {}^1/_8\,P\,l$. Liegt die Last als Einzelgewicht in der Mitte, so ist nach S. 28 das grösste Moment $^1/_4\,Pl$. Vertheilt man also die Last gleichmässig über den ganzen Träger, so vermindert sich das grösste Moment auf die Hälfte, d. h. ein Balken kann doppelt so viel Last tragen, wenn dieselbe gleichmässig vertheilt ist, als wenn sie in der Mitte vereinigt wäre.

Solche gleichmässige Belastung kommt vor bei den Strassenbrücken mit unmittelbar aufliegender Fahrbahn. Die ungünstigste Belastung wird häufig durch sog. Menschengedränge gebildet, wobei die ganze Brückenbahn mit Menschen erfüllt ist. Bei Eisenbahnbrücken ist die Belastung freilich keine gleichmässig vertheilte, weil die stark belasteten Lokomotivräder die Brückenbahn in einzelnen Punkten berühren, die auch keineswegs sich in gleichen Abständen befinden. Gleichwohl werden auch Eisenbahnbrücken oft, wenigstens annäherungsweise, auf gleichmässige Belastung berechnet. Wir wollen nun ermitteln, welche Last ein Brückenträger von 10 m Spannweite bei gegebenem Querschnitte erfahren darf. Der Balken oder Träger bekomme eine Höhe $= {}^1/_{10}$ der Weite, d. h. $h = 1$ m $= 100$ cm, und werde als sog. Blechträger ausgebildet, da man so grosse Träger nicht gut mehr aus einem Stücke walzen kann. Man sucht den

Querschnitt des Balkens der I-Form zu nähern (Fig. 45). Die lothrechte Wand möge 1 cm stark, 96 cm hoch sein. Darauf und darunter legt man sog. Gurten aus Flacheisen von 25 cm Breite und 2 cm Dicke. Um aber diese drei, eine I-Form bildenden Theile fest mit einander zu verbinden, verwendet man sog. Winkeleisen in der Form der Fig. 44, welche zum Zusammennieten rechtwinklig an einander stossender Platten dienen. Der Querschnitt des hier zu verwendenden Winkeleisens ist durch die Mafse 8 cm, 8 cm und $1{,}2$ cm bestimmt; bei der Bezeichnung schreibt man diese kennzeichnenden Mafse wie Faktoren hinter einander (∟ $8 \cdot 8 \cdot 1{,}2$ cm), womit aber selbstverständlich keine Multiplikation angedeutet werden soll. Die lothrechten Schenkel der beiden Winkeleisen werden mit der lothrechten Wand, die wagerechten mit den Gurten durch Niete verbunden. Die Niete bedingen Nietlöcher von $2{,}2$ cm Durchmesser, deren Querschnitt bei der Berechnung des Trägheitsmomentes abgezogen werden muss. Die lothrechten und wagerechten Niete fallen nicht in den gleichen Querschnitt; daher brauchen wir nur die lothrechten Löcher abzuziehen. Hiernach ergiebt sich für die Berechnung des Trägheitsmomentes J der Querschnitt Fig. 45. Der Ansatz macht sich verhältnismässig bequem, wenn man die einzelnen Theile als Differenzen von Rechtecken ansieht.

Fig. 44.



Die Mittelwand bildet ein volles Rechteck von 1 cm Breite, 96 cm Höhe und dem Trägheitsmomente . . . . . $\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 96^3 = 73\,728$.

Die lothrechten Schenkel denken wir uns bis zu den Gurten reichend und an einander geschoben; von dem Rechteck von $2{,}4$ cm Breite und 96 cm Höhe denken wir uns ein solches von 80 cm Höhe abgezogen; mithin ist der Beitrag $\frac{1}{12}\, 2{,}4\, (96^3 - 80^3) = 74\,547$.

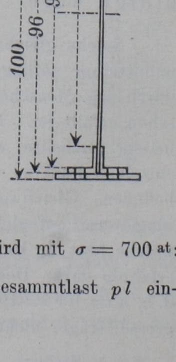
Von jedem wagerechten Schenkel bleibt dann noch $8 - 1{,}2 - 2{,}2 = 4{,}6$ cm Breite mit den Höhen 96 bezw. $93{,}6$ cm, mithin ist der Beitrag . . . . . $\frac{1}{12}\, 9{,}2\, (96^3 - 93{,}6^3) = 49\,611$.

Die Gurten endlich liefern

$$\frac{1}{12}\,(25 - 4{,}4)\,(100^3 - 96^3) = 197\,870.$$

Das gesammte Trägheitsmoment ist 395 756.

Fig. 45.



Das Widerstandsmoment demnach

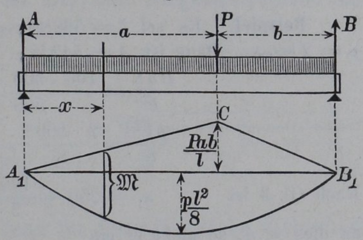
$$\mathfrak{W} = 395\,756 : 50 = 7915.$$

Ist p die zulässige Belastung auf 1 cm Länge, so wird mit $\sigma = 700$ at: $p\,\frac{1000^2}{8} = 7915 \cdot 700$, mithin $p = 44$; die zulässige Gesammtlast pl einschliesslich des eigenen Gewichts ist also 44 000 kg.

g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässiger Belastung und mit Einzellasten.

Bei dem Zusammenwirken einer Einzellast mit stetiger Belastung addiren sich die für jeden Einzelfall bestimmten Momente. Man vereinigt sie am einfachsten, indem man die Momentenflächen der beiden Einzelfälle nach verschiedenen Seiten von der Achse $A_1 B_1$ (Fig. 46) aufträgt; die Gesammt-Ordinate ist dann $\mathfrak{M}$. Die Figur lässt ohne Weiteres erkennen, dass, wenn $a > b$, das grösste Moment nicht auf der Strecke b liegen kann; denn von B_1 bis nach der Stelle C der Einzellast wachsen beide Momenten-Ordinaten. Geht man über C hinaus weiter nach links, so nimmt die obere Ordinate ab, die untere zu. Das grösste Moment liegt also entweder im Punkte C, oder zwischen C und der Mitte. Sind die Momentenflächen genau gezeichnet, so kann man das grösste Moment leicht abgreifen. Allgemein findet man es durch Rechnung in folgender Weise:

Fig. 46.



Für irgend einen Schnitt der Strecke a (im Abstande x von A) ist das Moment

1) $$\mathfrak{M} = Ax - {}^1\!/\!_2\, p x^2 .$$

Diese Funktion erreicht einen Grösstwerth für

$$d\mathfrak{M} : dx = A - px = 0 , \quad \text{d. h. für}$$

2) $$x = x_1 = \frac{A}{p} .$$

Da nun $$A = \frac{pl}{2} + P\frac{b}{l}, \quad \text{so ist}$$

3) $$x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Pb}{pl},$$

also $x_1 > {}^1\!/\!_2\, l$. Setzt man den Werth der Gl. 2 in Gl. 1 ein, so entsteht

4) $$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{p} - \frac{A^2}{2p} = \frac{A^2}{2p} .$$

Diese Grösse ist aber nur gültig, so lange $x_1 \leqq a$, weil rechts von C die Momentengleichung 1 nicht mehr gilt.

Gl. 4 ist also nur benutzbar für $A/_p \leqq a$, d. h. für $A \leqq p\,a$ oder

5) $$\frac{Pb}{pl} \leqq a - \frac{l}{2}.$$

Ist die Bedingung 5 nicht erfüllt, so giebt es für $\mathfrak{M}$ kein analytisches Maximum (mit einer Abgeleiteten = Null), sondern einen grössten absoluten Werth bei $x = a$, nämlich

6) $$\mathfrak{M}_1 = A\,a - \frac{p\,a^2}{2} = a\,b\left(\frac{p}{2} + \frac{P}{l}\right).$$

Beispiel. Es sei $l = 500$ cm; $a = 300$ cm; $b = 200$ cm; $P = 100$ kg; $p = 2$ kg/cm. Dann ist $A = 540$ kg;

$$\frac{P\,a\,b}{l} = \frac{100 \cdot 300 \cdot 200}{500} = 12\,000 \text{ cmkg}.$$

$$\frac{p\,l^2}{8} = \frac{2 \cdot 500^2}{8} = 62\,500 \text{ cmkg}.$$

Nach Gl. 3 ist $$x_1 = 250 + \frac{100 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 270 \text{ cm};$$

da dies $< a$, so giebt es ein

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{2p} = \frac{540^2}{4} = 72\,900 \text{ cmkg}.$$

Ist aber unter sonst gleichen Verhältnissen $P = 1000$ kg, so wird

$$A = 900 \text{ kg}; \quad \frac{P\,a\,b}{l} = 120\,000 \text{ cmkg}.$$

$$x_1 = 250 + \frac{1000 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 450;$$

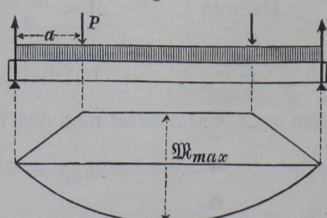
da dies $> a$, so findet sich das grösste Moment an der Stelle der Einzellast und beträgt nach Gl. 6:

$$\mathfrak{M}_1 = 300 \cdot 200\left(1 + \frac{1000}{500}\right) = 180\,000 \text{ cmkg}.$$

Durch Skizzirung der Momentenflächen erkennt man ebenfalls leicht die Stelle des grössten Momentes.

Sind zwei gleiche, symmetrisch liegende Lasten P nebst einer gleichförmig vertheilten Last p vorhanden (Fig. 47), so liefern die Einzellasten ein Trapez von der Höhe $P\,a$, die gleichförmig vertheilte Last eine Parabel von der Pfeilhöhe $^1/_8\,p\,l^2$ als Momentenfläche. Das grösste Moment liegt dann in der Mitte und hat den Werth

Fig. 47.

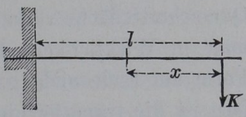


7) $$\mathfrak{M}_{max} = P\,a + {}^1/_8\,p\,l^2.$$

h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung σ eines Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmässig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung σ eines Querschnitts an allen Stellen des Stabes die gleiche sein, so muss das Widerstandsmoment $\mathfrak{W}$ des Querschnitts verhältnisgleich mit dem Biegungsmomente $\mathfrak{M}$ sich ändern. Ist $\mathfrak{M}_1$ das Biegungsmoment an einer bestimmten Stelle (etwa das grösste), $\mathfrak{W}_1$ das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muss

Fig. 48.



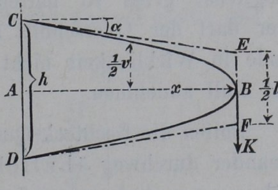
1) $$\mathfrak{W} : \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 .$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch K belastet, so ist $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$, mithin muss dann für überall gleiche Sicherheit

2) $$\frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}_1} = \frac{x}{l} \quad \text{sein.}$$

Je nach der Anordnung der Querschnitte sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Soll der Querschnitt ein Rechteck sein von der Breite u, der Höhe v an beliebiger Stelle, von der Breite d und der Höhe h an der Stelle $x = l$, so ist $\mathfrak{W} = {}^1/_6\, u v^2$; $\mathfrak{W}_1 = {}^1/_6\, d h^2$, mithin nach Gl. 2

Fig. 49.



3) $$\frac{u v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l} .$$

Bei überall gleicher Breite $u = d$ wird dann

4) $$v^2 : h^2 = x : l .$$

Trägt man von der Mitte aus ${}^1/_2\, v$ nach oben und nach unten hin auf, so ergiebt sich ein parabolischer Aufriss CDB (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist $\operatorname{tg} \varphi = {}^1/_2\, dv : dx$.

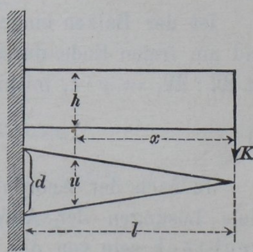
Nach Gl. 4 wird

$$2\, v\, dv = \frac{h^2\, dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$ {}^1/_2 \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{vl} = \operatorname{tg} \varphi .$$

Für $x = l$ und $v = h$ wird dann $\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{4}\frac{h}{l}$. Legt man also in C, B und D Berührungsgeraden an die Parabel, so bekommt man das Trapez $CEFD$, wobei $EF = h - 2l \operatorname{tg} \alpha = {}^1/_2\, CD$. Bei überall gleichem Querschnitte $d \cdot h$ ist der Rauminhalt des Balkens $d \cdot h \cdot l$, bei der parabolischen Begrenzung ${}^2/_3\, d \cdot h \cdot l$, während die Umschliessungsform $CEFD$ den Inhalt ${}^3/_4\, d \cdot h \cdot l$ hat. Die parabolische Form genügt wohl den Zug- und Druckspannungen, nicht aber den Schubspannungen. Denn auch an dem Ende B, wo der Querschnitt $= 0$ ist, herrscht eine Querkraft K, die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher kann man in Wirklichkeit der parabolischen Form am Ende nicht ganz folgen. In so fern ist die trapezförmige Umschliessung besser als die Parabelgestalt.

Fig. 50.

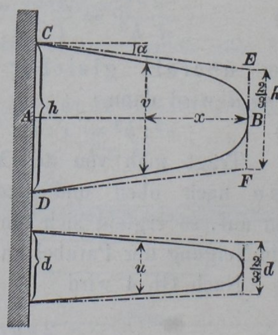


Giebt man dem Balken überall gleiche Höhe $v = h$, so wird aus Gl. 3:

$$5) \qquad u : d = x : l,$$

d. h. der Grundriss wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt ${}^1/_2\, d \cdot h \cdot l$. Diese Form ist also günstiger als die parabolische; es ist vortheilhaft, die Höhe überall möglichst gross zu halten. Auch hier darf der Querschnitt am freien Ende in Wirklichkeit nicht ganz bis auf Null abnehmen.

Fig. 51.



Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h. $u : v = d : h$, so wird aus Gl. 3:

$$6) \quad \begin{cases} v^3 : h^3 = x : l \quad \text{und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält man (vergl. Theil 1, S. 186) als Begrenzungen im Aufriss und Grundriss Zweige von kubischen Parabeln.

Für den Aufriss gilt

$$3\,v^2 dv = \frac{h^3 dx}{l}, \quad \text{mithin}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2}\frac{dv}{dx} = \frac{h^3}{6\,v^2 l}$$

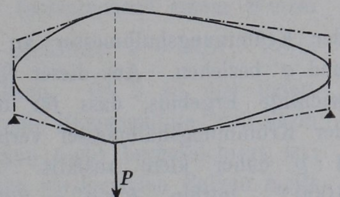
und die Neigung der Tangente im Punkt C (Fig. 51) ($x = l$; $v = h$)

$$\operatorname{tg} a = \frac{h}{6\,l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschliessungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende $^2/_3\,h$ bezw. $^2/_3\,d$.

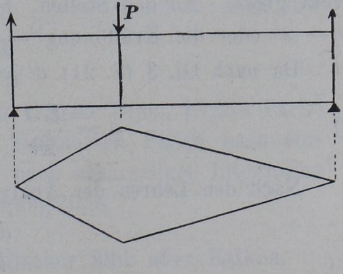
Ist bei kreisförmigem Querschnitte der Halbmesser an beliebiger Stelle v, an der Einspannungsstelle r, so wird nach Gl. 2: $^1/_4\,v^3\pi : {}^1/_4\,r^3\pi = x : l$, oder $v^3 : r^3 = x : l$. Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Fig. 52.



Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegungsmoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert; also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt $d \cdot h$, und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschliessungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe $= {}^1/_2\,h$ macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 27) hat zur Folge, dass auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

Fig. 53.



Bei gleich bleibender Höhe würde der Balken die Form der Fig. 53 (im Grundriss aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern $^2/_3\, r$ als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 18) ist O der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle G derselben. Gemäss Gl. 2, S. 19 ist mithin

1) $$\varrho = \frac{E e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich e' und σ' beziehen. Aus dieser Gleichung folgt das für das Weitere wichtige Ergebnis, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung $1 : \varrho$ daher klein ausfällt. Bei Stabeisen wird σ' höchstens 1000^{at}, mithin $E : \sigma' = 2000$ und $\varrho = 2000\, e'$ oder für $e' = {}^1/_2\, h$, $\varrho = 1000\, h$; an allen Stellen, an denen σ kleiner ist, wird ϱ noch grösser. Ein I-Träger von $0{,}2^{\text{m}}$ Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens 200^{m}. Für Holz ist σ' höchstens 100^{at}, mithin $\varrho = 1200\, e' = 600\, h$, d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannnng Null, ist $\varrho = \infty$ oder die Krümmung $= 0$.

Da nach Gl. 3 (S. 21) $\sigma' = \mathfrak{M} e' : J$, so wird auch

2) $$\varrho = \frac{\boldsymbol{EJ}}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{\boldsymbol{EJ}}.$$

Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\dfrac{d^2 y}{d x^2}}{\left[1 + \left(\dfrac{d y}{d x}\right)^2\right]^{3/2}}.$$