bis nahe an die Elasticitätsgrenze herantreten wird. Je genauer man einen Fall zu berechnen vermag, desto mehr kann sich die Zahl n der Einheit nähern. So pflegt man für Bauverbände aus Stabeisen, dessen Spannung an der Elasticitätsgrenze etwa 1600^{at} beträgt, 700 bis 1000^{at} als zulässige Spannung σ einzuführen, indem man annimmt, dass die wahren Spannungen 1,6 bis 2,3 Mal so gross ausfallen werden, wie die durch statische Berechnung gefundenen. In der Wahl dieser kleinen Spannung σ liegt also keineswegs eine übermässige Ängstlichkeit, die als Verschwendung getadelt werden könnte, sondern eine durch die Erfahrung als nothwendig erkannte, gebotene Vorsicht, wenn man dem fraglichen Bauwerk einen langjährigen Bestand sichern will.

Wie gross die zulässige Spannung bei den verschiedenen Bau- und Maschinentheilen und den entsprechenden Stoffen gewählt werden darf, gehört weniger in den Rahmen der Mechanik, als in den der Lehre von den Bauverbänden und Maschinentheilen.

Beispiel 1: Eine Stange aus Stabeisen von 2^{m} Länge und $2^{cm} \times 10^{cm} = 20^{qcm}$ Querschnitt kann bei $\sigma = 700^{at}$ zulässiger Spannung eine Zugkraft von $20 \cdot 700 = 14000^{kg}$ aufnehmen. Die entsprechende Dehnung beträgt $\varepsilon = 700 : 2000000 = 7 : 20000 = 0{,}00035$. Will man die Verlängerung $\varDelta l$ in ^{cm} haben, so drücke man die Länge l in Centimetern $= 200^{cm}$ aus, um zu erhalten

$$\varDelta l = l \cdot \varepsilon = 200 \cdot 0{,}00035 = 0{,}07^{cm}.$$

Bis zur Elasticitätsgrenze würde der Stab durch eine Zugkraft $K = 20 \cdot 1600 = 32000^{kg}$ gespannt werden mit einer Verlängerung $\varDelta l = 0{,}07 \cdot {}^{16}/_{7} = 0{,}16^{cm}$. Zum Zerreissen würde eine Kraft von $20 \cdot 3500 = 70000^{kg}$ erforderlich sein.

Beispiel 2: Eine ursprünglich spannungslose runde Eisenstange von 2^{cm} Durchmesser wird an den Enden festgehalten und sodann um 20^{0} C. abgekühlt. Wäre die Stange frei, so würde sie bei einer Ausdehnungsziffer von $^{1}/_{80000}$ f. 1^{0} C. eine verhältnismässige Verkürzung $= 20 : 80000 = 1 : 4000$ erfahren; Diese wird durch eine gleiche elastische Dehnung $\varepsilon = 1 : 4000$ in Folge der Befestigung aufgehoben. Daraus entsteht eine Spannung

$$\sigma = E\varepsilon = 2000000 : 4000 = 500^{at}$$

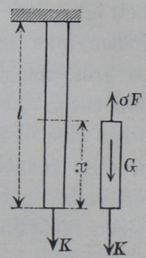
und eine Spannkraft $K = \sigma F = 500 \cdot \pi = 1570^{kg}$.

2. Zugfestigkeit hängender Stangen. Druckfestigkeit stehender Säulen.

Bei lothrecht hängenden, oben befestigten Stangen wird die Spannung σ vom Eigengewichte beeinflusst. Wirkt an der Stange

(Fig. 9) von überall gleichem Querschnitt F unten eine Zugkraft K, so wird die Stange erst im Gleichgewichte sein können, nachdem eine gewisse Verlängerung stattgefunden hat, die für die Rechnung aber ohne Wichtigkeit ist. Durchschneidet man die Stange in dem Abstande x vom unteren Ende und bringt an der Schnittstelle die Spannkraft σF an, so müssen K, σF und das Gewicht G des unteren Stangentheiles im Gleichgewicht sein. Ist γ die Dichte des Stoffes, so wird $G = \gamma F x$, mithin

Fig. 9.



$$\sigma F = K + \gamma F x, \quad \text{oder}$$

1) $$\sigma = \frac{K}{F} + \gamma x.$$

Die stärkste Spannung findet sich am oberen Ende zu

2) $$\sigma_1 = \frac{K}{F} + \gamma l.$$

Die Verlängerung kann, weil die Spannung σ veränderlich, durch Integration oder Flächenberechnung gefunden werden. An der beliebigen Schnittstelle beträgt die Dehnung $\varepsilon = \sigma : E$, daher die elastische Verlängerung des Theiles dx:

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

und die Verlängerung der ganzen Stange

$$\Delta l = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma dx = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma}{E}\int_0^l x dx$$

3) $$= \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{E}\left(\frac{K}{F} + \frac{\gamma l}{2}\right).$$

Bei mässigen Längen kann das zweite Glied vernachlässigt werden.

Beispiel: An einem Bergwerks-Gestänge von $l = 200$ m $= 20\,000$ cm Länge (Stabeisen) wirke unten eine Zugkraft $K = 40\,000$ kg. Wegen der Bewegung des Gestänges möge die zulässige Spannung nur $\sigma_1 = 400$ at betragen dürfen. Es soll der erforderliche Querschnitt F berechnet werden. Wenn 1 cbm Stabeisen 7800 kg wiegt, so ist für Centimeter $\gamma = 7800 : 100^3 = 0{,}0078$ zu setzen. Es wird nach Gleichung 2

$$400\,F = 40\,000 + 0{,}0078 \cdot 20\,000\,F, \quad \text{also}$$

$$F = \frac{40\,000}{400 - 156} = 164 \text{ qcm}.$$

Die Verlängerung beträgt (Gleichung 3)

$$\Delta l = \frac{40000 \cdot 20000}{2000000 \cdot 164} + \frac{0{,}0078 \cdot 20000^2}{2 \cdot 2000000} = 2{,}44 + 0{,}78 = 3{,}22 \text{ cm}.$$

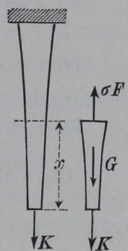
Am unteren Ende beträgt die Spannung nur

$$\sigma_0 = \frac{K}{F} = \frac{40000}{164} = 244 \text{ at}.$$

Die Festigkeit wird daher nur ungleichmässig ausgenutzt.

Soll die Festigkeit eines Gestänges völlig ausgenutzt werden, so muss der Querschnitt nach oben hin zunehmen. Das Gesetz für die Veränderlichkeit des Querschnittes eines G e s t ä n g e s ü b e r a l l g l e i c h e r S i c h e r h e i t findet man nach Fig. 10. Am unteren Ende wirke eine Kraft K; diese verlangt bei einer überall gleichen Spannung σ einen Querschnitt $F_0 = K : \sigma$. In der Höhe x sei der Querschnitt F, mithin die Spannkraft σF. Für das Stück von der Länge x gilt dann die Gleichgewichts-Bedingung

Fig. 10.



$$\sigma F = G + K.$$

Hierin ist G unbekannt. Die Aufgabe wird aber lösbar, wenn man obige Gleichung auf beiden Seiten nach x differentiirt. σ und K sind unveränderlich; F ändert sich um dF, G um dG, u. zw. ist dG das Gewicht eines Längentheilchens an der Schnittstelle, d. h. $dG = \gamma F dx$. Mithin wird

$$\sigma dF = \gamma F dx.$$

Behufs der Integration dieser Gleichung muss man die Veränderlichen trennen, d. h. dF und F auf der linken Seite vereinigen, während dx auf der rechten bleibt. $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$. Das giebt $\mathfrak{l}\, F = \frac{\gamma}{\sigma} x + C$. Für $x = 0$ muss $F = F_0$ sein, mithin $\log F_0 = C$.

Durch Abziehen folgt:

$$\mathfrak{l}\left(\frac{F}{F_0}\right) = \frac{\gamma}{\sigma} x \quad \text{und}$$

4) $$\frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$

Nimmt man von beiden Seiten die Briggischen Logarithmen, so wird

$$\text{5)} \qquad \log \frac{F}{F_0} = \log e \cdot \frac{\gamma}{\sigma} x = 0{,}434 \frac{\gamma}{\sigma} x .$$

Wegen der Gleichheit der Spannung ist auch die Dehnung überall dieselbe, daher die Verlängerung einfach $\varDelta l = l\sigma : E$.

Beispiel 1: Für dasselbe Gestänge, das S. 12 behandelt wurde, wird $F_0 = 100^{\text{qcm}}$. Es ist $\gamma : \sigma = 0{,}0078 : 400 = 0{,}0000195$, wofür wir rund $0{,}00002$ setzen. Für

$$x = 5000^{\text{cm}} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}1, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}105, \quad F = 110{,}5;$$

$$\text{für } x = 10000^{\text{cm}} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}2, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}221, \quad F = 122{,}1;$$

$$\text{für } x = 15000^{\text{cm}} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}3, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}35, \quad F = 135;$$

$$\text{für } x = 20000^{\text{cm}} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0{,}434 \cdot 0{,}4, \quad \frac{F}{F_0} = 1{,}49, \quad F = 149^{\text{qcm}}.$$

Die Verlängerung wird

$$\varDelta l = \frac{20000 \cdot 400}{2000000} = 4^{\text{cm}}.$$

Leicht ergiebt sich hiernach auch das Gewicht des Gestänges, weil die Spannkraft an dem oberen Querschnitte von 149^{qcm} den Werth $400 \cdot 149 = 59600^{\text{kg}}$ hat, was $= G + 40000^{\text{kg}}$ sein muss. Daher wird das Gewicht $G = 19600^{\text{kg}}$, während das Gestänge überall gleichen Querschnitts (S. 12)

$$164 \cdot 0{,}0078 \quad 20000 = 25584^{\text{kg}} \text{ wiegt.}$$

Alles für die Zugfestigkeit Gesagte gilt sinngemäss auch für die Druckfestigkeit.

Beispiel 2: Wie hoch darf ein prismatischer Steinpfeiler werden, wenn 1^{cbm} 2000^{kg} wiegt und die Spannung nicht über 20^{at} betragen soll? Ist die Höhe x^{cm}, die Grundfläche F in $^{\text{qcm}}$ ausgedrückt, so wird mit $\gamma = 0{,}002$ für 1^{ccm} das Gesammtgewicht

$$G = \gamma F x = 0{,}002 \cdot F x$$

und die ebenso grosse Spannkraft an der Grundfläche $K = 20\,F$, mithin wird, unabhängig von der Grösse der Grundfläche F,

$$x = 10000^{\text{cm}} = 100^{\text{m}}.$$

Die Grundfläche muss so gross gemacht werden, dass die Gefahr einer seitlichen Ausbiegung nicht entsteht. Der hierdurch bedingte Querschnitt hängt aber von manchen Umständen ab, die sich nicht sämmtlich rechnungsmässig verfolgen lassen.