

übertragen und sind von der Form: Flächengrösse mal Kraft für die Flächeneinheit. Zu diesen gehören namentlich die inneren Kräfte fester und flüssiger Körper.

---

## A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

---

### I. Allgemeines.

Ein elastisch-fester Körper ist im Gleichgewichte, wenn seine sämtlichen Punkte sich im Gleichgewichte befinden, und dies verlangt, wie bei starren Körpern, dass der Körper entweder ruht oder eine gleichförmige geradlinige Verschiebung ausführt; auch darf der Körper keine Formänderungen mehr erfahren, vielmehr muss die den inneren Spannungen entsprechende Form bereits vorhanden sein.

Liegt ein solcher Gleichgewichtszustand vor, so ist die Bedingung dafür nach S. 4, dass die äusseren Kräfte des Körpers den Gleichgewichtsgleichungen für starre Körper genügen müssen. Diese Gleichgewichts-Bedingungen werden auch zur Ermittlung der inneren Spannkräfte benutzt, indem man durch den Körper einen Schnitt führt und für einen der erhaltenen Abschnitte die Gleichgewichts-Bedingungen aufstellt. Denn es muss ja, wenn der ganze Körper sich im Gleichgewichte befindet, auch jeder Theil desselben im Gleichgewichte sein. Bei dieser Untersuchung muss man an der Schnittstelle den vorherigen Zusammenhang durch Spannkräfte ersetzen. Diese Spannkräfte, die für den unzertrunden Körper innere Kräfte bedeuteten, gelten für die Betrachtung eines Abschnittes als äussere Kräfte und sind in den Gleichgewichts-Gleichungen mit aufzuführen.

Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn der Körper durch die äusseren Kräfte nicht zerstört wird, d. h. wenn die Spannung an keiner Stelle die Grenze der Festigkeit erreicht. Soll ein Körper aber dauernd im Gleichgewichte bleiben, so darf seine Spannung die Elasticitätsgrenze keinesfalls überschreiten. Es würden sonst bleibende Formänderungen entstehen, die gewöhnlich nicht

zulässig sind. In den meisten Fällen der Anwendung ist die Belastung eines Körpers mehr oder weniger veränderlich. Die Erfahrung lehrt, dass, wenn ein Körper häufig über die Elasticitätsgrenze hinaus belastet wird, die Formänderungen allmählich wachsen und endlich zur Zerstörung führen.

Bei der Berechnung der zulässigen Belastung eines Körpers oder der erforderlichen Abmessungen bei gegebener Belastung darf man aber noch nicht einmal die Spannung an der Elasticitätsgrenze zu Grunde legen, sondern muss als zulässige Spannung einen kleineren Werth einführen, der meist nur aus der Erfahrung gewonnen werden kann. Einerseits sind nämlich die Stoffe der Körper der Abnutzung, dem Rosten, der Fäulnis u. dgl. unterworfen und erleiden deshalb Einbusse an ihrer Festigkeit. Sodann aber sind die Theile eines Bauwerkes oder einer Maschine häufig Erschütterungen und Stößen ausgesetzt, welche Schwingungen der elastischen Körper zur Folge haben. Derartige Schwingungsbewegungen sind nun stets ungleichförmig, bedeuten daher Abweichungen vom Gleichgewichtszustande. Viele Maschinentheile führen auch planmässig beschleunigte Bewegungen aus. Die Spannungen, die in solchen Körpern wirklich auftreten, lassen sich häufig nur sehr schwer ermitteln. Man führt daher eine Berechnung unter Annahme des Gleichgewichts (eine statische Berechnung) aus, welche die Spannungen kleiner angiebt, als sie wirklich sind, welche also bei Zugrundelegung der Elasticitätsgrenze als zulässiger Spannung zu geringe Querschnitts-Abmessungen liefern würde. Den auf diese Weise entstehenden Fehler kann man dadurch wieder ausgleichen, dass man als die in die Rechnung einzuführende Spannung  $\sigma$  nicht die Elasticitätsgrenze, sondern nur den  $n$ ten Theil derselben annimmt. Die Zahl  $n$  nennt man dann die Sicherheit gegen Überschreitung der Elasticitätsgrenze. Wäre die auf solche  $n$ fach kleinere Spannung gegründete Rechnung richtig, so würde thatsächlich nur  $\frac{1}{n}$  der Spannung an der Elasticitätsgrenze erreicht werden. In Wirklichkeit aber bezeichnet die Zahl  $\frac{1}{n}$  nur den Grad der Genauigkeit der Rechnungsgrundlagen für eine Gruppe von Fällen. Die Zahl  $n$  ist durch die Erfahrung an die Hand gegeben und beträgt je nach der Art des Bau- oder Maschinentheiles 1,6, 2, 2,5, 3, 4 u. dgl. Rechnet man mit diesen Sicherheitsverhältnissen, so kann man annehmen, dass die wirkliche Spannung im ungünstigsten Falle

bis nahe an die Elasticitätsgrenze herantreten wird. Je genauer man einen Fall zu berechnen vermag, desto mehr kann sich die Zahl  $n$  der Einheit nähern. So pflegt man für Bauverbände aus Stabeisen, dessen Spannung an der Elasticitätsgrenze etwa  $1600^{\text{at}}$  beträgt,  $700$  bis  $1000^{\text{at}}$  als zulässige Spannung  $\sigma$  einzuführen, indem man annimmt, dass die wahren Spannungen  $1,6$  bis  $2,3$  Mal so gross ausfallen werden, wie die durch statische Berechnung gefundenen. In der Wahl dieser kleinen Spannung  $\sigma$  liegt also keineswegs eine übermässige Ängstlichkeit, die als Verschwendung getadelt werden könnte, sondern eine durch die Erfahrung als nothwendig erkannte, gebotene Vorsicht, wenn man dem fraglichen Bauwerk einen langjährigen Bestand sichern will.

Wie gross die zulässige Spannung bei den verschiedenen Bau- und Maschinentheilen und den entsprechenden Stoffen gewählt werden darf, gehört weniger in den Rahmen der Mechanik, als in den der Lehre von den Bauverbänden und Maschinentheilen.

**Beispiel 1:** Eine Stange aus Stabeisen von  $2^{\text{m}}$  Länge und  $2^{\text{cm}} \times 10^{\text{cm}} = 20^{\text{qcm}}$  Querschnitt kann bei  $\sigma = 700^{\text{at}}$  zulässiger Spannung eine Zugkraft von  $20 \cdot 700 = 14000^{\text{kg}}$  aufnehmen. Die entsprechende Dehnung beträgt  $\epsilon = 700 : 200000 = 7 : 20000 = 0,00035$ . Will man die Verlängerung  $\Delta l$  in  $\text{cm}$  haben, so drücke man die Länge  $l$  in Centimetern  $= 200^{\text{cm}}$  aus, um zu erhalten

$$\Delta l = l \cdot \epsilon = 200 \cdot 0,00035 = 0,07^{\text{cm}}.$$

Bis zur Elasticitätsgrenze würde der Stab durch eine Zugkraft  $K = 20 \cdot 1600 = 32000^{\text{kg}}$  gespannt werden mit einer Verlängerung  $\Delta l = 0,07 \cdot 16/7 = 0,16^{\text{cm}}$ . Zum Zerreißen würde eine Kraft von  $20 \cdot 3500 = 70000^{\text{kg}}$  erforderlich sein.

**Beispiel 2:** Eine ursprünglich spannungslose runde Eisenstange von  $2^{\text{cm}}$  Durchmesser wird an den Enden festgehalten und sodann um  $20^{\circ} \text{C}$ . abgekühlt. Wäre die Stange frei, so würde sie bei einer Ausdehnungsziffer von  $1/80000$  f.  $1^{\circ} \text{C}$ . eine verhältnismässige Verkürzung  $= 20 : 80000 = 1 : 4000$  erfahren; Diese wird durch eine gleiche elastische Dehnung  $\epsilon = 1 : 4000$  in Folge der Befestigung aufgehoben. Daraus entsteht eine Spannung

$$\sigma = E\epsilon = 2000000 : 4000 = 500^{\text{at}}$$

und eine Spannkraft  $K = \sigma F = 500 \cdot \pi = 1570^{\text{kg}}$ .

## 2. Zugfestigkeit hängender Stangen. Druckfestigkeit stehender Säulen.

Bei lothrecht hängenden, oben befestigten Stangen wird die Spannung  $\sigma$  vom Eigengewichte beeinflusst. Wirkt an der Stange

(Fig. 9) von überall gleichem Querschnitt  $F$  unten eine Zugkraft  $K$ , so wird die Stange erst im Gleichgewichte sein können, nachdem eine gewisse Verlängerung stattgefunden hat, die für die Rechnung aber ohne Wichtigkeit ist. Durchschneidet man die Stange in dem Abstände  $x$  vom unteren Ende und bringt an der Schnittstelle die Spannkraft  $\sigma F$  an, so müssen  $K$ ,  $\sigma F$  und das Gewicht  $G$  des unteren Stangentheiles im Gleichgewichte sein. Ist  $\gamma$  die Dichte des Stoffes, so wird  $G = \gamma Fx$ , mithin

$$\sigma F = K + \gamma Fx, \text{ oder}$$

$$1) \quad \sigma = \frac{K}{F} + \gamma x.$$

Die stärkste Spannung findet sich am oberen Ende zu

$$2) \quad \sigma_1 = \frac{K}{F} + \gamma l.$$

Die Verlängerung kann, weil die Spannung  $\sigma$  veränderlich, durch Integration oder Flächenberechnung gefunden werden. An der beliebigen Schnittstelle beträgt die Dehnung  $\varepsilon = \sigma : E$ , daher die elastische Verlängerung des Theiles  $dx$ :

$$\Delta dx = \frac{\sigma}{E} dx$$

und die Verlängerung der ganzen Stange

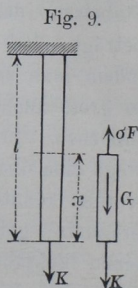
$$3) \quad \begin{aligned} \Delta l &= \frac{1}{E} \int_0^l \sigma dx = \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma}{E} \int_0^l x dx \\ &= \frac{K}{EF} l + \frac{\gamma l^2}{2E} = \frac{l}{E} \left( \frac{K}{F} + \frac{\gamma l}{2} \right). \end{aligned}$$

Bei mässigen Längen kann das zweite Glied vernachlässigt werden.

**Beispiel:** An einem Bergwerks-Gestänge von  $l = 200 \text{ m} = 20\,000 \text{ cm}$  Länge (Stabeisen) wirke unten eine Zugkraft  $K = 40\,000 \text{ kg}$ . Wegen der Bewegung des Gestänges möge die zulässige Spannung nur  $\sigma_1 = 400 \text{ at}$  betragen dürfen. Es soll der erforderliche Querschnitt  $F$  berechnet werden. Wenn  $1 \text{ cbm}$  Stabeisen  $7800 \text{ kg}$  wiegt, so ist für Centimeter  $\gamma = 7800 : 100^3 = 0,0078$  zu setzen. Es wird nach Gleichung 2

$$400 F = 40\,000 + 0,0078 \cdot 20\,000 F, \text{ also}$$

$$F = \frac{40\,000}{400 - 156} = 164 \text{ qcm}.$$



Die Verlängerung beträgt (Gleichung 3)

$$\Delta l = \frac{40000 \cdot 20000}{2000000 \cdot 164} + \frac{0,0078 \cdot 20000^2}{2 \cdot 2000000} = 2,44 + 0,78 = 3,22 \text{ cm.}$$

Am unteren Ende beträgt die Spannung nur

$$\sigma_0 = \frac{K}{F} = \frac{40000}{164} = 244 \text{ at.}$$

Die Festigkeit wird daher nur ungleichmässig ausgenutzt.

Soll die Festigkeit eines Gestänges völlig ausgenutzt werden, so muss der Querschnitt nach oben hin zunehmen. Das Gesetz für die Veränderlichkeit des Querschnittes eines Gestänges überall gleicher Sicherheit findet man nach Fig. 10. Am unteren Ende wirke eine Kraft  $K$ ; diese verlangt bei einer überall gleichen Spannung  $\sigma$  einen Querschnitt  $F_0 = K : \sigma$ . In der Höhe  $x$  sei der Querschnitt  $F$ , mithin die Spannkraft  $\sigma F$ . Für das Stück von der Länge  $x$  gilt dann die Gleichgewichts-Bedingung

$$\sigma F = G + K.$$

Hierin ist  $G$  unbekannt. Die Aufgabe wird aber lösbar, wenn man obige Gleichung auf beiden Seiten nach  $x$  differentiirt.  $\sigma$  und  $K$  sind unveränderlich;  $F$  ändert sich um  $dF$ ,  $G$  um  $dG$ , u. zw. ist  $dG$  das Gewicht eines Längentheilchens an der Schnittstelle, d. h.  $dG = \gamma F dx$ . Mithin wird

$$\sigma dF = \gamma F dx.$$

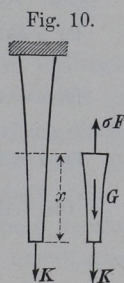
Behufs der Integration dieser Gleichung muss man die Veränderlichen trennen, d. h.  $dF$  und  $F$  auf der linken Seite vereinigen, während  $dx$  auf der rechten bleibt.  $\frac{dF}{F} = \frac{\gamma}{\sigma} dx$ . Das giebt

$$\ln F = \frac{\gamma}{\sigma} x + C. \text{ Für } x = 0 \text{ muss } F = F_0 \text{ sein, mithin } \ln F_0 = C.$$

Durch Abziehen folgt:

$$\ln \left( \frac{F}{F_0} \right) = \frac{\gamma}{\sigma} x \text{ und}$$

$$4) \quad \frac{F}{F_0} = e^{\frac{\gamma}{\sigma} x}.$$



Nimmt man von beiden Seiten die Briggischen Logarithmen, so wird

$$5) \quad \log \frac{F}{F_0} = \log e \cdot \frac{\gamma}{\sigma} x = 0,434 \frac{\gamma}{\sigma} x.$$

Wegen der Gleichheit der Spannung ist auch die Dehnung überall dieselbe, daher die Verlängerung einfach  $\Delta l = l \sigma : E$ .

**Beispiel 1:** Für dasselbe Gestänge, das S. 12 behandelt wurde, wird  $F_0 = 100$  qcm. Es ist  $\gamma : \sigma = 0,0078 : 400 = 0,0000195$ , wofür wir rund  $0,00002$  setzen. Für

$$x = 5000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,1, \quad \frac{F}{F_0} = 1,108, \quad F = 110,8;$$

$$\text{für } x = 10000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,2, \quad \frac{F}{F_0} = 1,221, \quad F = 122,1;$$

$$\text{für } x = 15000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,3, \quad \frac{F}{F_0} = 1,35, \quad F = 135;$$

$$\text{für } x = 20000 \text{ cm} \text{ wird } \log \frac{F}{F_0} = 0,434 \cdot 0,4, \quad \frac{F}{F_0} = 1,49, \quad F = 149 \text{ qcm}.$$

Die Verlängerung wird

$$\Delta l = \frac{20000 \cdot 400}{2000000} = 4 \text{ cm}.$$

Leicht ergibt sich hiernach auch das Gewicht des Gestänges, weil die Spannkraft an dem oberen Querschnitte von  $149$  qcm den Werth  $400 \cdot 149 = 59600$  kg hat, was  $= G + 40000$  kg sein muss. Daher wird das Gewicht  $G = 19600$  kg, während das Gestänge überall gleichen Querschnitts (S. 12)

$$164 \cdot 0,0078 \cdot 20000 = 25584 \text{ kg} \text{ wiegt.}$$

Alles für die Zugfestigkeit Gesagte gilt sinngemäss auch für die Druckfestigkeit.

**Beispiel 2:** Wie hoch darf ein prismatischer Steinfeiler werden, wenn  $1$  cbm  $2000$  kg wiegt und die Spannung nicht über  $20$  at betragen soll? Ist die Höhe  $x$  cm, die Grundfläche  $F$  in qcm ausgedrückt, so wird mit  $\gamma = 0,002$  für  $1$  cbm das Gesamtgewicht

$$G = \gamma F x = 0,002 \cdot F x$$

und die ebenso grosse Spannkraft an der Grundfläche  $K = 20 F$ , mithin wird, unabhängig von der Grösse der Grundfläche  $F$ ,

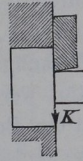
$$x = 10000 \text{ cm} = 100 \text{ m}.$$

Die Grundfläche muss so gross gemacht werden, dass die Gefahr einer seitlichen Ausbiegung nicht entsteht. Der hierdurch bedingte Querschnitt hängt aber von manchen Umständen ab, die sich nicht sämmtlich rechnungsmässig verfolgen lassen.

### 3. Schub- oder Scherfestigkeit.

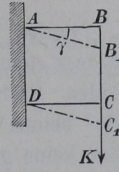
Ist ein Körper fest eingespannt und wird auf den vorspringenden Theil (Zapfen) mittels eines scherblattartigen Körpers eine Kraft  $K$  ausgeübt (Fig. 10), so hat diese das Bestreben, den vorspringenden Zapfen von dem linksseitigen Theile des Körpers im Sinne der Kraft abzuschleifen oder abzuscheren. Der Widerstand gegen Abscherung ist annähernd mit der abzuscherenden Fläche  $F$  proportional und bei Eisen 0,6 bis 0,8 Mal so gross wie der gegen Zerreißen oder gegen Zerdrücken, wenn man von diesen Widerständen den kleineren einführt. Dem entsprechend nimmt man auch die zulässige Belastung = 0,6 bis 0,8 von der zulässigen Zug- oder Druckbelastung; bei Holz längs der Fasern nur  $1/6$  bis  $1/8$ .

Fig. 10.



Wirkt die Kraft nicht dicht an der Anhaftungsfläche, sondern in einem geringen Abstände  $l$  davon, so ist mit den Schubspannungen, die wir für die Flächeneinheit mit  $\tau$  (tangential wirkend) bezeichnen wollen, eine Formänderung verbunden, welche darin besteht, dass die zur Anhaftungsfläche ursprünglich rechtwinkligen Geraden sich um den Winkel  $\gamma$  schiefwinklig stellen (Fig. 12), so dass das Rechteck  $ABCD$  in das Rhomboid  $AB_1C_1D$  übergeht. Dieser Winkel  $\gamma$  heisst die **Gleitung**, indem man sich vorstellt, dass die einzelnen Querschichten  $\parallel AD$  an einander entlang gleiten. Die Gleitung  $\gamma$  hat eine ähnliche Bedeutung wie die Dehnung  $\varepsilon$  bei der Wirkung von Zug und Druckspannungen. Wie  $\varepsilon = \sigma : E$ , so ist

Fig. 12.



$$1) \quad \gamma = \tau : G,$$

also auch verhältnismäßig mit der Spannung  $\tau$ .  $G$  ist wie  $E$  eine von dem Stoff abhängige Grösse, die auch mit  $E$  in einfacher Beziehung steht; es ist nämlich für isotrope Körper etwa

$$G = 0,4 E$$

anzunehmen, u. zw. heisst  $G$  das **Gleitmaß** oder der Gleitmodul. Die Beziehungen zwischen Schubspannungen und Längsspannungen nebst den entsprechenden Formänderungen werden eingehender behandelt in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.

Die Scherfestigkeit kommt besonders bei den Nietverbindungen in Frage. Will man zwei Stäbe, in denen Längszugkräfte  $K$  wirken sollen, in der einfachsten Weise durch Niete verbinden, so versieht man jeden Stab mit einem cylindrischen Loche, legt sie so auf einander, dass die Löcher zusammenfallen und zieht einen Nietbolzen vom Durchmesser  $d$  hindurch (Fig. 13). Sollte nun die Vernietung durch Wirkung der Kräfte  $K$  zerstört werden, so müsste die in der Berührungsebene der Stäbe liegende Querschnittsfläche  $ab$  von der Grösse  $F = \frac{1}{4} d^2 \pi$  abgeschert werden. Man kann daher setzen:

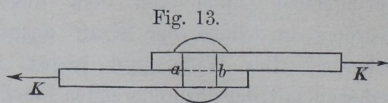


Fig. 13.

$$K = \tau F = \tau \cdot \frac{d^2 \pi}{4}.$$

Die Schubspannungen vertheilen sich nicht gleichmässig über die Abscherungsfläche;  $\tau$  ist also nur eine mittlere Schubspannung. Die Erfahrung lehrt aber, dass man bei Nieten  $\tau = 0,8 \sigma$  setzen darf, wenn  $\sigma$  die kleinere der zulässigen Längsspannungen bedeutet. Ist für Stabeisen  $\sigma = 700^{\text{at}}$ , so kann  $\tau = 560^{\text{at}}$  gesetzt werden.

$$d = 2 \text{ cm}; \quad \tau = 560^{\text{at}} \text{ giebt } K = 1759,3 \text{ kg.}$$

Sollen die zu verbindenden Stäbe in gleicher Flucht liegen, so legt man auf beide eine sog. Lasche und verbindet diese mit beiden Stäben (Fig. 14).

Die beiden Niete liefern aber keine grössere Festigkeit als das eine Niet in Fig. 13. Jeder Nietbolzen

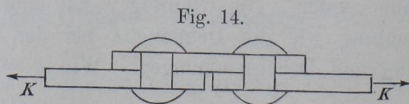


Fig. 14.

hat die Kraft  $K$  für sich allein aufzunehmen. Günstiger ist der Fall, wenn man die zu verbindenden Stäbe beiderseits mit Laschen versieht, sog. doppelte Verlaschung anwendet (Fig. 15). In diesem

Falle widersteht jedes Niet gleichzeitig mit der Scherfestigkeit zweier Querschnitte; z. B.  $ab$  und  $cd$ .

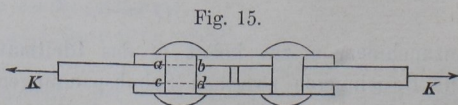


Fig. 15.

Denn um den linksseitigen Stab aus der Verlaschung herauszureissen,



muss das linksseitige Niet an beiden Berührungsflächen zwischen dem Stabe und den Laschen abgeschert werden; bei einer solchen Zerstörung würde dann der mittlere Theil des Nietbolzens in dem herausgerissenen Stabe, seine äusseren Theile in den Laschen verbleiben. Ein solcher Nietbolzen, der mit der Festigkeit zweier Querschnittsflächen widersteht, heisst ein zweiseitiges Niet. Für Fig. 15 gilt also die Gleichung

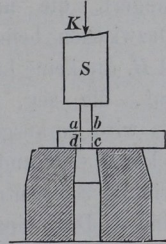
$$K = 2 \cdot \tau \cdot \frac{1}{4} d^2 \pi.$$

Die Scherfestigkeit kommt auch in Frage bei dem Kraftaufwande zum Durchstossen, Durchlochen oder Durchpunzen eines Stabes oder einer Platte, behufs Herstellung (Stanzen) von Nietlöchern. Es wird dann durch Maschinenkraft der Stahlstempel *S* (Fig. 16) niedergedrückt, so dass er den cylindrischen Körper *abcd* aus dem Stabe oder der Platte herausdrängt. Ist die Längsfestigkeit der Platte  $Z = D = 3500 \text{ at}$ , so ist die Scheerfestigkeit  $0,8 \cdot 3500 = 2800 \text{ at}$ . Um ein Loch von  $d = 2 \text{ cm}$  Durchmesser durch die  $h = 2 \text{ cm}$  dicke Platte zu drücken, ist, weil die cylindrische Trennungsfläche  $d\pi h = 2 \cdot \pi \cdot 2$ , die Kraft

$$K = 4 \pi \cdot 2800 = 35186 \text{ kg} \text{ erforderlich.}$$

Genauere Untersuchungen zeigen, dass bei dem Widerstande der Niete wie auch beim Stanzen von Löchern noch verwickeltere Spannungsvorgänge auftreten, auf die hier nicht eingegangen werden kann.

Fig. 16.

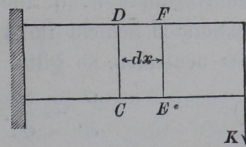


## 4. Biegungsfestigkeit.

### a) Grundgleichungen.

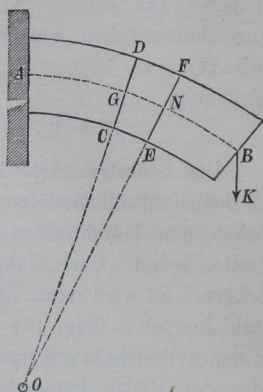
Ein Stab sei an dem einen (linken) Ende (Fig. 17) in einer Wand oder dergl. unwandelbar befestigt (eingespannt); am äusseren Ende wirke eine Kraft *K*, welche die Längsachse des Stabes (d. h. die Verbindungsgrade der Schwerpunkte der Querschnitte) rechtwinklig schneidet. Die durch *K* und die Längsachse bestimmte Ebene sei für den Stab oder Balken eine Symmetrie-Ebene.

Fig. 17.



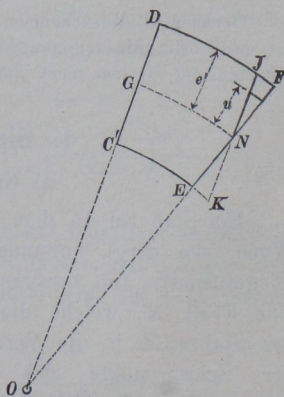
Die Erfahrung lehrt, dass der Stab unter der Last  $K$  sich biegt; zwei ursprünglich parallele Querschnitte  $CD$  und  $EF$  im Abstände  $dx$  von einander, verdrehen sich gegen einander und schneiden sich in der Achse  $O$  rechtwinklig zur Bildebene (Fig. 18). Die oberen Schichten des Stabes haben sich verlängert, die unteren sich verkürzt. Dazwischen befindet sich eine Schicht  $AB$ , die keine Längenänderung erlitten hat, die sog. neutrale Schicht. Es wird vorausgesetzt, dass die Querschnitte  $CD$  und  $EF$  eben und rechtwinklig zur neutralen Schicht geblieben sind. Die einzelnen Schichten erfahren im Zusammenhange mit den Längenänderungen Zug- und Druckspannungen, die innerhalb der Elasticitätsgrenze den Dehnungen verhältnissgleich sind. Zeichnet man das Längentheilchen  $CDFE$  des Stabes besonders heraus (Fig. 19) und

Fig. 18.



legt durch  $N$  eine Ebene  $JK \parallel CD$ , so stellen die Keile zwischen  $EF$  und  $JK$  die Längenänderungen der einzelnen Schichten des Stabtheilchens dar. Da nun die Schichten ursprünglich die übereinstimmende Länge  $GN = dx$  hatten, so sind die Dehnungen, also auch die Spannungen der einzelnen Schichten, verhältnissgleich dem Abstände  $u$  derselben von der neutralen Schicht. Ist daher  $\sigma$  die Spannung im Abstände  $u$ ,  $\sigma'$  die Spannung der äussersten Schicht im Abstände  $e'$  von der neutralen, so gilt

Fig. 19.



1) 
$$\frac{\sigma}{\sigma'} = \frac{u}{e'}$$

Zugleich ist wegen der Ähnlichkeit der Dreiecke  $JFN$  und  $GNO$   
 $JF : GN = JN : GO$ .

$JF:GN$  ist aber ( $= JF:DJ$ ) die Dehnung  $\sigma':E$  der obersten Schicht. Setzt man  $GO = \varrho$ , so wird

$$\sigma':E = e':\varrho \quad \text{oder}$$

$$2) \quad \varrho = \frac{Ee'}{\sigma'}.$$

Durch Gl. 1 sind die Spannungen an den verschiedenen Stellen eines Querschnitts auf diejenige am oberen Rande zurückgeführt; es kommt nun darauf an,  $\sigma'$  aus der gegebenen Kraft  $K$  zu ermitteln. Dazu dienen die Gleichgewichts-Bedingungen. Betrachtet man das Stück rechts vom Schnitt  $EF$  in Fig. 18, so muss dieses den Gleichgewichts-Bedingungen genügen, wobei angenommen wird, dass die Kraft  $K$  ihre ursprüngliche (lothrechte) Richtung beibehält und im Punkte  $B$  angreift (Fig. 20). Da man die Form des gebogenen Balkens nicht kennt, so ist auch die Richtung der am Schnitt  $EF$  auftretenden Spannkraft unbekannt. Weil aber in den meisten Fällen der Wirklichkeit die innerhalb der Elasticitätsgrenze liegende Biegung nur gering sein wird, so vernachlässigen wir die Formänderung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen und nehmen die Lage und Richtung der einzelnen Kräfte so, wie sie am ungebogenen Balken sich ergeben würde. In Fig. 21 stellt also der linke Theil das Stück des Balkens oder Stabes dar, welches im Gleichgewichte sein soll. Der rechte Theil ist der Querschnitt.

Nehmen wir aus dem Querschnitt im Abstände  $u$  von der neutralen Schicht  $NN$  einen Flächenstreifen  $dF$  heraus, so erfährt dieser, weil an ihm durchweg die Spannung  $\sigma$  auftritt, eine Spannkraft  $\sigma \cdot dF$ . Derartige Spannkraften kommen über die ganze Querschnittshöhe vor, sind oben Zug-, unten Druckkräfte, und ihre Summe muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte Null sein.

Fig. 20.

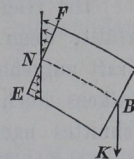
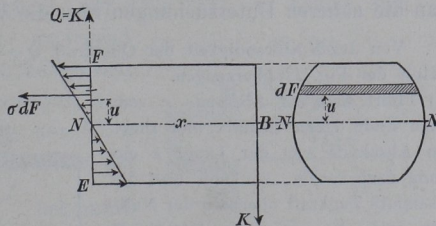


Fig. 21.



Also  $\int \sigma dF = 0$ . Weil nun nach Gleichung 1, S. 18,  $\sigma = u \cdot \sigma' : e'$ ,  $\sigma'$  und  $e'$  aber von  $u$  nicht abhängig sind, so ergibt sich

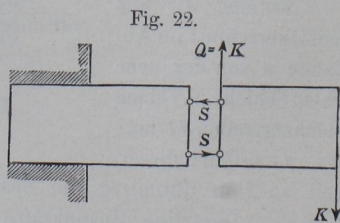
$$\frac{\sigma'}{e'} \int dF \cdot u = 0, \text{ also } \int dF \cdot u = 0.$$

Dies bedeutet (1. Theil, S. 126), dass die Gerade  $NN$  im Querschnitt, von welcher aus die Abstände  $u$  gemessen sind, durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen muss. Die Gerade  $NN$ , in welcher die neutrale Schicht einen Querschnitt schneidet, heisst die neutrale Achse oder die Spannungs-Nulllinie (weil an ihr die Spannung  $\sigma = 0$ ) oder kürzer die Nulllinie des Querschnitts. Die Gleichung der wagerechten Kräfte bedingt also, dass die Nulllinie durch den Schwerpunkt des Querschnitts geht. Die Mittellinie des Stabes liegt also in der neutralen Schicht desselben.

Die Gleichung der lothrechten Kräfte ist aber in Fig. 21 erst erfüllt, wenn die Kraft  $K$  durch eine gleiche, aufwärts gerichtete Kraft aufgehoben wird. Die Kraft  $K$  hat ausser der Biegung des Balkens auch das Bestreben, das abgeschnittene Stück längs des Schnittes nach unten gleiten zu lassen; dem setzt sich an der Querschnittsfläche ein Schubwiderstand, eine sog. innere Querkraft  $Q = K$ , entgegen. Die aus  $Q$  sich ergebenden Schubspannungen sind in den einfacheren Fällen, wie sie in diesem Buche nur behandelt werden sollen, unbedeutend, weshalb wir uns um diese Querkraft  $Q$  hier nicht weiter kümmern werden. In Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik findet man die näheren Untersuchungen über die Vertheilung der Querkraft.

Von der Nothwendigkeit der Querkraft  $Q = K$  kann man sich auch noch mittels der Fig. 22 überzeugen.

Führt man im Abstände  $x$  vom freien Ende einen Schnitt und rückt den Abschnitt von der Länge  $x$  ein wenig nach rechts, so kann man die gesammte Zugkraft oberhalb der Nulllinie und die gesammte Druckkraft unterhalb derselben durch die Spannkraften  $S$  zweier wagerechten Gelenk-



stangen ersetzen. Hierdurch sind aber die beiden Abschnitte noch nicht steif mit einander verbunden; die Gelenk-

stangen verhindern nur eine Drehung des rechtsseitigen Theiles, nicht aber

eine Parallelverschiebung nach unten; hierzu ist noch eine nach oben gerichtete Querkraft  $Q = K$  erforderlich.

In der Gleichung der Momente in Bezug auf die Nulllinie  $NN$  (Fig. 21) haben wir dann  $Kx$  als äusseres Moment; die innere Spannkraft  $\sigma dF$  eines Querschnitts-Theilchens hat den Hebelarm  $u$ , daher muss  $0 = Kx - \int \sigma dFu$  oder nach Gl. 1, S. 18,

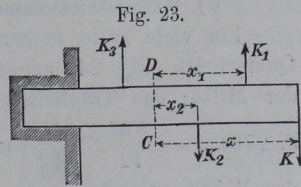
$$\frac{\sigma'}{e'} \int dFu^2 = Kx \text{ sein.}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist die Momentensumme der an einem Querschnitt auftretenden inneren Spannkraften oder das innere Widerstandsmoment, während die rechte Seite das Moment der äusseren biegenden Kraft in Bezug auf die Nulllinie des Querschnitts ist. Dieses heisst das Biegemoment und wird mit  $\mathfrak{M}$  bezeichnet.  $\int dFu^2$  bedeutet nach Theil 1, S. 267 und 273 das geometrische Trägheitsmoment des Querschnitts in Bezug auf die Nulllinie. Die Momentengleichung nimmt dann die Form an:

$$3) \quad \frac{\sigma'}{e'} J = \mathfrak{M}.$$

Die durch die Richtungslinie der Kraft  $K$  und die Mittellinie des Stabes bestimmte Ebene, welche der Voraussetzung zufolge eine Symmetrie-Ebene des Stabes sein soll, heisst die Biegungsebene, weil die Mittellinie des Stabes auch nach der Biegung in ihr verbleibt. Die Nulllinie steht auf der Biegungsebene rechtwinklig.

Treten in der Biegungsebene mehrere, zur Mittellinie des Stabes rechtwinklige Kräfte zugleich auf (Fig. 23), so ändert sich dadurch nichts wesentliches. An irgend einer Schnittstelle  $CD$  vertheilen sich die Zug- und Druckspannungen wiederum nach dem Gesetze der Gl. 1 (S. 18), so dass die linke Seite der Gl. 3 dieselbe Form  $\frac{\sigma' J}{e'}$  bekommt.



Die Querkraft  $Q$  an der Schnittstelle wird nunmehr entgegengesetzt der algebraischen Summe der rechts vom Schnitte liegenden äusseren Kräfte:

$$Q = K - K_1 + K_2 = \Sigma K.$$

Das Biegemoment aber wird  $\mathfrak{M} = Kx - K_1 x_1 + K_2 x_2$ . Das Biegemoment  $\mathfrak{M}$  ist die Momentensumme der am abgeschnittenen Stücke des Stabes wirkenden äusseren Kräfte in Bezug auf die Nulllinie des Schnittes.

Nennt man die stärkste Druckspannung am unteren Rande  $\sigma''$  und den Abstand von der Nulllinie  $e''$ , so ist wegen der Gl. 1 (S. 18)

$$4) \quad \frac{\sigma''}{\sigma'} = \frac{e''}{e'}$$

mithin kann auch geschrieben werden nach Gl. 3

$$5) \quad \frac{\sigma''}{e''} J = \mathfrak{M}.$$

Die linke Seite der Gl. 3:  $\frac{\sigma'}{e'} J$ , das sog. Spannungsmoment, enthält einen physikalischen Faktor  $\sigma'$ , während der andere Faktor  $J : e'$  nur von der Form und Grösse des Querschnitts abhängt. Diesen Faktor  $\frac{J}{e'} = \mathfrak{W}'$  nennt man kurz das Widerstandsmoment des Querschnitts, u. zw. für die Zugspannung  $\sigma'$ , während  $\frac{J}{e''}$ , ebenso das Widerstandsmoment  $\mathfrak{W}''$  des Querschnitts für die Druckspannung  $\sigma''$  ist. In den meisten Fällen der Anwendung liegt der Schwerpunkt des Querschnitts und damit die Nulllinie in halber Höhe; dann ist  $e' = e''$ , wofür wir dann einfach  $e$  setzen, ebenso  $\mathfrak{W}' = \mathfrak{W}'' = \mathfrak{W}$ . Es werden dann die Randspannungen  $\sigma' = \sigma''$  (wofür wir  $\sigma$  schreiben), und man hat

$$\text{Randspannung} = \frac{\text{Biegemoment } \mathfrak{M}}{\text{Widerstandsmoment } \mathfrak{W}}.$$

### b) Widerstandsmomente verschiedener Querschnitte.

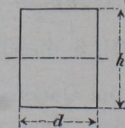
Für viele Fälle, namentlich für Holzbalken ist der rechteckige Querschnitt (Fig. 24) angezeigt. Bei diesem liegt die Nulllinie in der Mitte; das Trägheitsmoment ist (nach Theil 1,

$$\text{S. 273) } J = \frac{Fh^2}{12} = \frac{dh^3}{12}; \text{ mithin ist, wegen } e = 1/2h,$$

das Widerstandsmoment des Rechtecks

$$6) \quad \mathfrak{W} = \frac{J}{e} = \frac{Fh}{6} = \frac{d \cdot h^2}{6}.$$

Fig. 24.



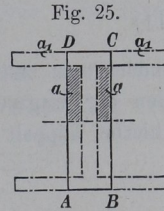
Da nun der Aufwand an Stoff durch den Querschnitt  $F$  bedingt wird, so sind die Widerstandsmomente von Rechtecken gleichen Inhalts

ihren Höhen  $h$  verhältnissgleich. Daher empfiehlt es sich, Balken, von denen man bestimmt annehmen kann, dass sie stets nur in lothrechttem Sinne belastet werden, möglichst hochkantig zu stellen, d. h.  $h$  gegen  $d$  gross zu nehmen.

Für  $d = 12$ ,  $h = 24$  ist  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 24^2 = 1152$ ; legt man denselben Balken aber flach, so ist  $d = 24$ ,  $h = 12$  und  $\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 12^2 = 576$ , d. h. halb so gross wie vorher, dem entsprechend auch die Tragfähigkeit nur halb so gross.

Das geometrische Trägheitsmoment einer Fläche ist vom vierten Grade ( $\text{cm}^4$ ), das Widerstandsmoment also vom dritten Grade ( $\text{cm}^3$  oder  $\text{cm}^3$ ).

Bei gegebener Höhe  $h = 2e$  liefert ein Flächentheil  $dF$  im Abstände  $u$  von der Nulllinie zum Widerstandsmomente den Beitrag  $dFu^2 : e$ . Die Flächentheile in der Nähe der Nulllinie geben daher nur wenig Beitrag; mithin ist es bei der Verwendung von Eisen, wo man in der Wahl der Form nicht sehr beschränkt ist, vortheilhaft, diese Flächentheile fortzunehmen und in möglichst weitem Abstände von der Nulllinie anzubringen. Vom hochkantigen Rechteck  $ABCD$  (Fig. 25) gelangt man dann durch Verlegung der Flächentheile  $a$  nach  $a_1$  zu dem I-förmigen Querschnitte.



Bevor diese Form gewalzt wurde, hatte man schon Eisen der Form T, die man T-Eisen nannte; indem man sodann die I-Form als die Vereinigung zweier T-Eisen ( $\begin{matrix} \text{I} \\ \text{I} \end{matrix}$ ) ansah, führte man dafür den Namen Doppelt-T-Eisen ein, verwendet dafür aber in der Schrift stets das Zeichen I-Eisen.

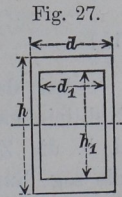
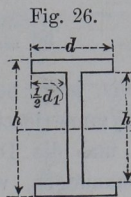
Zur Berechnung des Trägheitsmoments kann der I-Querschnitt (Fig. 26) als Unterschied zweier Rechtecke  $dh$  und  $d_1h_1$  behandelt werden, wenn man die Stärke der zur Verbindung der äusseren Theile dienenden Mittelwand  $= d - d_1$  setzt.

Daher ist

$$7) \quad J = \frac{1}{12} (dh^3 - d_1h_1^3)$$

und weil  $e = \frac{1}{2}h$ :

$$8) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{dh^3 - d_1h_1^3}{h}$$



Die gleiche Formel gilt auch für das hohle Rechteck (Fig. 27).

Soll der Stab oder Balken gegen wagerechte Kräfte ebenso widerstandsfähig sein wie gegen lothrechte, so ist das Quadrat oder noch besser das hohle Quadrat (Fig. 28) angezeigt, mit

$$9) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{h^3}{6} \text{ bzw.}$$

$$10) \quad \mathfrak{B} = \frac{J}{e} = \frac{1}{6} \frac{h^4 - h_1^4}{h}.$$

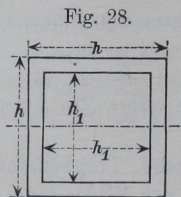
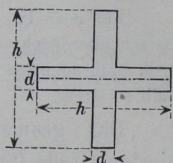


Fig. 29.



Zieht man in solchem Falle

Querschnitte ohne Höhlungen vor, um den Farbenanstrich (als Schutz gegen Rost) leicht erneuern zu können, so kommt der kreuzförmige Querschnitt (Fig. 29) in Frage. Es ist dann

$$11) \quad J = \frac{1}{12} (dh^3 + hd^3 - d^4),$$

indem man erst den Beitrag der lothrechten Rippe anschreibt, dann den der wagerechten Rippe voll hinzufügt und den Beitrag des (hierbei doppelt gerechneten) Quadrates  $d \cdot d$  abzieht. Es wird dann

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{6} \frac{dh^3 + hd^3 - d^4}{h}.$$

Für gleichen Widerstand nach allen Richtungen eignen sich der Kreis und der Kreisring.

Für den Kreis vom Halbmesser  $r$  ist (Theil 1, S. 273)

$$12) \quad J = \frac{Fr^2}{4} = \frac{r^4\pi}{4} \text{ und}$$

$$13) \quad \mathfrak{B} = \frac{r^3\pi}{4}.$$

Für den Ring von den Halbmessern  $R$  und  $r$  ist

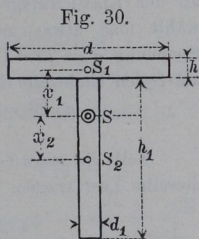
$$14) \quad J = \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \pi,$$

$$15) \quad \mathfrak{B} = \frac{1}{4} \frac{(R^4 - r^4) \pi}{R}.$$

Bei den bis jetzt betrachteten Querschnittsformen war die Nulllinie eine Symmetrieachse, daher  $e' = e''$  und auch  $\sigma' = \sigma''$ , d. h. die Zug- und die Druckspannung in den äussersten Lagen, die sog. Randspannungen, von gleicher Grösse. Bei Gusseisen, wo die Spannungen an der Elasticitätsgrenze  $z : d$  sich verhalten wie 3 : 8, ist es angemessen, den Querschnitt so anzuordnen, dass die



Sicherheit in der gezogenen Randschicht ebenso gross wird wie in der gedrückten, dass also  $\sigma' : \sigma'' = 3 : 8$ , also auch  $e' : e'' = 3 : 8$ . Das führt auf unsymmetrische Formen, von denen wir beispielsweise den T-Querschnitt (Fig. 30) betrachten wollen. Die breite Seite muss die gezogene (konvexe) werden.



Sind  $x_1$  und  $x_2$  die Abstände der Teil-schwerpunkte  $S_1$  und  $S_2$  der Rechtecke  $d \cdot h$  und  $d_1 h_1$  vom Gesamt-Schwerpunkte  $S$ , so ist  $d \cdot h x_1 = d_1 h_1 x_2$  und  $x_1 + x_2 = \frac{1}{2}(h + h_1)$ ; daraus

$$16) \quad x_1 = \frac{d_1 h_1 (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)} \quad \text{und} \quad x_2 = \frac{d \cdot h (h + h_1)}{2(d \cdot h + d_1 h_1)}.$$

Das Trägheitsmoment in Bezug auf die Nulllinie wird dann als Summe der Beiträge der beiden Rechtecke

$$J = \frac{1}{12} d \cdot h^3 + d \cdot h x_1^2 + \frac{1}{12} d_1 h_1^3 + d_1 h_1 x_2^2,$$

wofür man (nach Theil 1, S. 275, Gl. 25) auch schreiben kann

$$17) \quad J = \frac{1}{12} (d \cdot h^3 + d_1 h_1^3) + \frac{d \cdot h \cdot d_1 h_1}{d \cdot h + d_1 h_1} \left( \frac{h + h_1}{2} \right)^2.$$

$$18) \quad \mathfrak{B}' = J : e' \quad \text{und} \quad \mathfrak{B}'' = J : e''$$

sind hier ungleich gross.

### c) Darstellung der Veränderlichkeit des Biegemomentes.

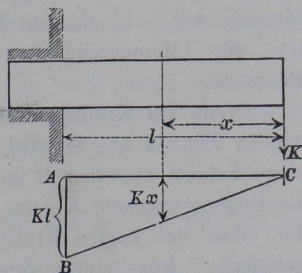
Für Balken oder Stäbe überall gleichen Querschnitts ist auch  $\mathfrak{B}$  überall gleich, mithin die stärkste Spannung  $\sigma$  an verschiedenen Schnitten verhältnissgleich mit dem Biegemomente. Die Veränderlichkeit des letzteren pflegt man bildlich darzustellen.

Wird der eingespannte Balken (Fig. 31) am freien Ende von einer Last  $K$  ergriffen, so ist für einen beliebigen Schnitt im Abstände  $x$  von  $K$  das Biegemoment  $\mathfrak{M} = Kx$ , dargestellt durch die Gerade  $CB$ . Die Figur  $ACB$  heisst Momentenfläche.

Das grösste Moment gilt daher für die Einspannungsstelle

$$\mathfrak{M}_1 = Kl.$$

Fig. 31.



**Beispiel:** Für einen Holzbalken von rechteckigem Querschnitte sei  $l = 2^m = 200$  cm,  $d = 12$ ,  $h = 24$  cm; für Holz ist wegen der Spannungen an der Elasticitätsgrenze, Zug 250, Druck 170 at, die letztere massgebend; wählt man etwas mehr als zweifache Sicherheit, indem man als zulässige Spannung  $\sigma = 75$  at ( $< 1/2 \cdot 170$ ) einführt, so gilt für die zulässige Belastung am freien Ende die Gleichung

$$\sigma \cdot \mathfrak{B} = Kl, \text{ mithin, da nach S. 22 } \mathfrak{B} = 1152, \\ K = 75 \cdot 1152 : 200 = 432 \text{ kg.}$$

Soll ein runder Schmiedeisenstab bei 700 at stärkster Spannung dieselbe Last tragen, so gilt für seinen Halbmesser  $r$  die Gleichung

$$432 \cdot 200 = 700 \frac{r^3 \pi}{4}, \text{ woraus } r = 5,4 \text{ cm.}$$

Ist der Stab oder Balken gleichmässig über seine Länge belastet mit  $p$  für die Längeneinheit (Fig. 32), und führt man im Abstände  $x$  vom Ende einen Schnitt, so hat die Gesamtlast der Länge  $x$  die Grösse  $p x$  im Abstand  $1/2 x$  vom Schnitte; mithin wird

$$\mathfrak{M} = p x \cdot 1/2 x = 1/2 p x^2.$$

Die Darstellung davon ist eine Parabel mit lothrechter Achse, die am freien Ende des Stabes liegt. Der Parameter ist  $1 : p$ .

Greift am freien Ende des Stabes ein Kräftepaar vom Momente  $Ka$  (Fig. 33) an, so ist dieses auch für jeden Schnitt des Stabes das Biegemoment  $\mathfrak{M}$ , weil ein Kräftepaar in Bezug auf jeden Punkt seiner Ebene das gleiche Moment hat. In diesem Falle ist die Momentenfläche ein Rechteck.

Greift das Kräftepaar  $K \cdot a$  wie in Fig. 34 an, so wird für einen Schnitt zwischen  $B$  und  $C$  das Biegemoment  $Kx$  nur von der einen der beiden Kräfte  $K$  geliefert. Für einen Schnitt zwischen  $A$  und  $C$  aber liegen beide Kräfte  $K$  an dem abge-

Fig. 32.

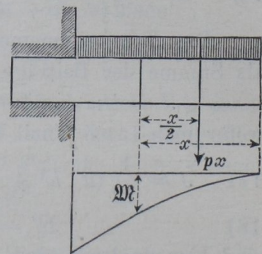


Fig. 33.

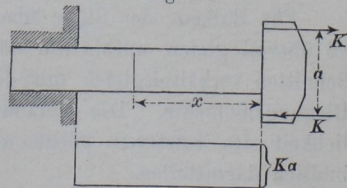
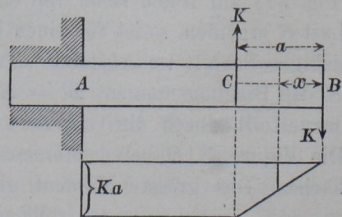


Fig. 34.



schnittenen Stücke und bilden ein Kräftepaar  $\mathfrak{M} = Ka$ . Die Momentenfläche hat daher die unten in Fig. 34 gezeichnete Form.

#### d) Balken auf zwei Stützen mit einer Einzellast.

Ein Balken auf 2 Stützen im Abstände  $l$  von einander (Fig. 35) sei in den Abständen  $a$  und  $b$  von den Stützen durch ein Gewicht  $P$  belastet. Es entstehen an den Auflagern Widerstände  $A$  und  $B$ , die man (nach Theil I, S. 162) leicht findet, indem man die Momenten-Gleichung in Bezug auf  $B$  bzw.  $A$  aufstellt.

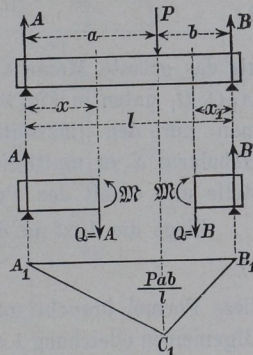
Es wird

$$A = P \frac{b}{l}; \quad B = P \frac{a}{l}.$$

Unter Einwirkung der Kräfte  $P$ ,  $A$  und  $B$  muss der Balken im gebogenen Zustande im Gleichgewichte sein. Nach S. 19 vernachlässigen wir aber die Biegung bei der Aufstellung der Gleichgewichts-Bedingungen. Führen wir im Abstände  $x$  von  $A$  einen Schnitt, so müssen beide Theile des Balkens im Gleichgewichte sein. Welches der beiden Stücke wir betrachten, ist im Grunde gleichgültig; der Einfachheit wegen wählt man meist dasjenige, an dem die wenigsten Kräfte vorkommen, in vorliegendem Falle das linksseitige, welches in der Figur besonders herausgezeichnet ist. Die Kraft  $A$  verlangt eine innere Querkraft  $Q = A$  (abwärts); diese bildet mit  $A$  ein Kräftepaar, das Biegemoment  $\mathfrak{M} = Ax$  mit dem Sinne rechts herum, welches ein entgegengesetzt drehendes Spannungsmoment hervorruft. In dem Balken liegen also, wie schon aus der nach unten gerichteten Durchbiegung folgt, die gezogenen Schichten unten. (Ein gusseiserner Balken unsymmetrischen Querschnitts müsste jetzt mit der breiten Seite nach unten liegen  $\perp$ .)

Die Formel  $\mathfrak{M} = Ax = P \frac{b}{l} x$  für das Moment gilt nur für Schnitte links von der Last. Sobald der Schnitt über die Belastungsstelle hinaus rückt, kommt plötzlich die Last  $P$  links vom Schnitte zu liegen, wodurch sich eine Unstetigkeit in der Veränderlichkeit

Fig. 35.



des Momentes ergibt. Für einen Schnitt rechts von der Last (im Abstände  $x_1$  von  $B$ ) betrachtet man einfacher das Stück rechts vom Schnitte. Dann wird  $\mathfrak{M} = Bx_1 = P \frac{a}{l} x_1$ . Die Momente werden für beide Seiten des Balkens durch Gerade dargestellt. Für die Belastungsstelle ( $x = a$ ;  $x_1 = b$ ) ergibt sich von beiden Seiten der übereinstimmende Werth

$$1) \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{Pab}{l}$$

als das grösste Moment. Die Momentenfläche ist also das Dreieck  $A_1 C_1 B_1$  unten in Fig. 34. Zur Bestimmung dieses Dreiecks braucht man nur den linksseitigen Auflagerdruck  $A = Pb : l$  mit dem Hebelarm  $a$  zu multipliciren, um das Moment an der Belastungsstelle und damit den Punkt  $C_1$  der Momentenfläche zu erhalten.

Liegt die Last in der Mitte, so ist  $a = b = 1/2 l$  und

$$2) \quad \mathfrak{M}_1 = 1/4 Pl;$$

diese Formel braucht man aber für die Anwendung nicht aus der allgemeinen Gleichung 1 abzuleiten, sondern kann unmittelbar den Auflagerdruck, der für diesen Fall offenbar  $= 1/2 P$  sein muss, mit dem Abstände von der Last (der Balkenmitte)  $1/2 l$  multipliciren.

**Beispiel 1:** Es sollen die Querschnitts-Abmessungen eines Holzbalkens bestimmt werden, der bei  $3 \text{ m} = 300 \text{ cm}$  Spannweite und  $75 \text{ at}$  zulässiger Spannung eine Last von  $2000 \text{ kg}$  in der Mitte zu tragen hat. Es muss  $75 \times \frac{d \cdot h^2}{6} = \frac{2000 \cdot 300}{4}$ , also  $d \cdot h^2 = 12000 \text{ cm}^3$  sein. Setzt man nun etwa noch das Verhältnis  $h : d = 2$  fest, so wird  $h^3 = 24000$ , mithin

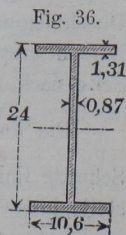
$$h = 28,4 \text{ cm}; \quad d = 14,4 \text{ cm}.$$

**Beispiel 2:** Ein Balken, dessen Querschnitt in Fig. 36 gegeben, liege auf zwei Stützen in  $4 \text{ m}$  Abstand. Es soll für eine stärkste Spannung  $\sigma = 700 \text{ at}$  die zulässige Einzellast in der Mitte berechnet werden. Die Masse in Fig. 36 sind  $\text{cm}$ . (Würde man versäumen, die Spannweite von  $4 \text{ m}$  in  $400 \text{ cm}$  umzuwandeln, so erhielte man die Tragfähigkeit 100 mal zu gross; dieser Fehler kommt erfahrungsmässig bei Anfängern häufig vor.) Es ist

$$J = 1/12 (10,6 \cdot 24^3 - 9,73 \cdot 21,35^3)$$

$$= 4287; \quad \mathfrak{B} = 357.$$

$$\text{Mithin } P \cdot 100 = 700 \cdot 357 \text{ oder } P = 2499 \text{ kg}.$$

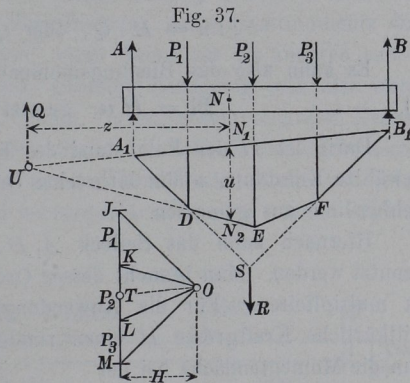


## e) Balken auf zwei Stützen mit mehreren Einzellasten.

Für mehrere Einzellasten (Fig. 37) eignet sich besonders das zeichnerische Verfahren, namentlich für die Herleitung.

In Theil 1, S. 120, wurde gezeigt, wie man die Mittelkraft  $R$  der gegebenen Lasten finden kann. Man setzt die Lasten  $P_1, P_2, P_3$  nach beliebigem Maßstabe

zu einem Krafteck  $JM$  zusammen, wählt einen beliebigen Pol  $O$  und zeichnet, in einem beliebigen Punkte  $A_1$  der linksseitigen Auflager-Lothrechten beginnend, ein Seileck  $A_1DEFB_1$ , welches die rechtsseitige Auflager-Lothrechte in  $B_1$  schneidet. Durch den Schnittpunkt  $S$  der Ver-



längerungen der äussersten Seileckseiten  $A_1D$  und  $B_1F$  geht dann die Mittelkraft  $R$  der Lasten. Um nun die Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  so zu bestimmen, dass sie  $R$  das Gleichgewicht halten, hat man (nach Theil 1, S. 121) nur zu  $A_1B_1$ , der Schlusslinie des Seilecks, einen Parallelstrahl  $OT$  im Krafteck zu ziehen, dann ist  $T$  der Theilpunkt der Lasten; es ist  $TJ$  der Auflagerdruck  $A$ ,  $MT$  der Auflagerdruck  $B$ .

Will man nun für einen beliebigen, etwa zwischen  $P_1$  und  $P_2$  liegenden Schnitt  $N$  das Biegemoment bestimmen, so hat man zu bedenken, dass das Biegemoment die Summe der Momente der beiden Kräfte  $A$  und  $P_1$  (links vom Schnitt) in Bezug auf  $N$  ist. Zu diesen beiden Kräften findet man aber leicht die Mittelkraft  $Q = A - P_1 = TK$  im Krafteck mit dem Sinne aufwärts. Die Lage wird bestimmt durch den Schnittpunkt der einschliessenden Seileckseiten. Die einschliessenden Polstrahlen sind  $OT$  und  $OK$ , die hierzu parallelen Seiten des Seilecks  $B_1A_1$  und  $ED$ , welche sich in  $U$  schneiden. Nach dem Satze der Momente (Theil 1, S. 103) kann für die Momentensumme von  $A$  und  $P_1$  das Moment der Mittelkraft  $Q$  gesetzt werden, d. h. es ist

$$\mathfrak{M} = Qz.$$

Nun ist das Dreieck  $UN_1N_2 \sim OKT$ . Nennt man den rechtwinkligen Abstand des Poles  $O$  von der Lastlinie  $JM$  den Polabstand  $H$ , so gilt in den ähnlichen Dreiecken, dass die wagerechten und lothrechten Abmessungen einander verhältnissgleich sind. Oder  $z : N_1N_2 = H : KT$ , mithin, wenn man  $N_1N_2 = u$  setzt und  $KT$  mit  $Q$  vertauscht:

$$z : u = H : Q, \text{ oder } Qz = Hu.$$

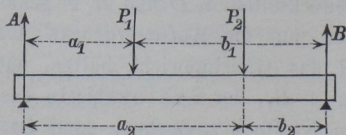
Es kann also das Biegemoment  $\mathfrak{M} = Qz$  auch

$$1) \quad \mathfrak{M} = Hu \text{ gesetzt werden.}$$

Darin ist  $H$  der Polabstand des Kräftecks, d. h. eine beliebig gewählte Konstante,  $u$  die lothrechte Ordinate des Seilecks, von der Schlusslinie aus gemessen.

Hiernach kann das Seileck  $A_1DEFB_1$  als Momentenfläche benutzt werden. Man braucht dessen Ordinaten nur mit der Kraft  $H$  zu multipliciren. Für die Anwendung empfiehlt es sich, für die willkürliche Kraftgrösse  $H$  einen runden Werth zu wählen. Weil nun die Momentenfläche bei der Wirkung von Einzellasten ein Vieleck ist, so muss das überhaupt grösste Biegemoment, das an dem Balken auftritt, stets an einem Eckpunkte des Vielecks, d. h. unter einer Last, vorkommen.

Fig. 38.



Sind nur zwei Lasten  $P_1$  und  $P_2$  auf dem Balken (Fig. 38), so führt die Rechnung rascher zum Ziele. Die Auflagerdrücke werden:

$$A = \frac{P_1 b_1}{l} + \frac{P_2 b_2}{l}; \quad B = \frac{P_1 a_1}{l} + \frac{P_2 a_2}{l}.$$

An der Last  $P_1$  wird dann das Biegemoment

$$\mathfrak{M}_1 = A a_1 = \frac{P_1 a_1 b_1}{l} + \frac{P_2 a_1 b_2}{l},$$

an der Last  $P_2$  aber

$$\mathfrak{M}_2 = B b_2 = \frac{P_1 a_1 b_2}{l} + \frac{P_2 a_2 b_2}{l}.$$

Jedes dieser Momente besteht aus 2 von einander unabhängigen Beiträgen, von je einer der Lasten herrührend, und da die

Beziehungen für die Momente durch Einzellasten rein geradlinige sind, so muss diese Eigenschaft, die wir für die Momente an den Laststellen gefunden haben, auch für jeden anderen Schnitt gelten, wovon man sich auch leicht unmittelbar überzeugen kann. Bringt also irgend eine an bestimmter Stelle eines Balkens liegende Last an irgend einem Schnitte des Balkens ein Moment  $\mathfrak{M}'$  hervor, so bildet dieses Moment  $\mathfrak{M}'$  auch die Vergrößerung des Gesamtmoments des Balkens an demselben Schnitte, wenn jene Last zu anderen schon vorhandenen Lasten hinzutritt. Dieselbe Beziehung gilt also auch für die inneren Spannungen. Beim Vorhandensein mehrerer Lasten ist die Spannung an irgend einer Stelle des Balkens die algebraische Summe der Spannungen, die an der betreffenden Stelle von jeder einzelnen Last für sich allein hervorgebracht werden würde. Später werden wir noch sehen, dass Entsprechendes auch bezüglich der Formänderungen gilt. Dies Verhalten wird die Übereinanderlagerung oder Summierung der Wirkungen genannt.

**Beispiel:** Bedeuten in Fig. 39 die Längenzahlen

Centimeter, die Kräftezahlen Kilogramme, und soll das grösste Moment und danach die stärkste Spannung des Balkens berechnet werden, so braucht man die Momente nur für die beiden Laststellen zu ermitteln, da an diesen das grösste Moment allein zu suchen ist. Es ist

$$A = 2000 \cdot 0,9 + 1500 \cdot 0,4 = 2200 \text{ kg};$$

$$B = 3500 - 2200 = 1300 \text{ kg}.$$

Das Moment an der linksseitigen Last ist

$$\mathfrak{M}_1 = 2200 \cdot 100 = 220\,000 \text{ cmkg},$$

das andere

$$\mathfrak{M}_2 = 1300 \cdot 200 = 260\,000 \text{ cmkg}.$$

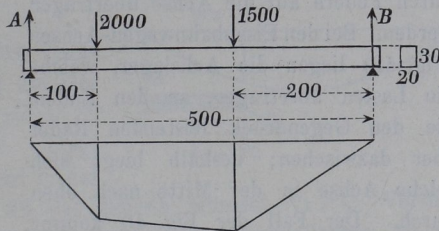
Letzteres ist mithin das grössere. Leicht kann man die so bestimmte Momentenfläche auch durch Zeichnung finden, wenn man als Längenmassstab 1 : 50 wählt, die Kräfte im Massstabe 1000 kg = 2 cm aufträgt und den Polabstand  $H = 2000 \text{ kg} = 4 \text{ cm}$  benutzt. Die Ordinaten des Seilecks sind dann auf dem Längenmassstabe zu messen. Das Widerstandsmoment des Querschnitts ist

$$\frac{1}{6} 20 \cdot 30^2 = 3000, \text{ mithin}$$

$$\sigma = 260\,000 : 3000 = 86\frac{2}{3} \text{ at}.$$

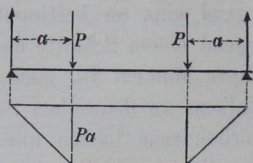
Über den Einfluss des Eigengewichtes s. S. 33.

Fig. 39.



Trägt ein Stab oder Balken auf zwei Stützen zwei gleiche Lasten  $P$  in symmetrischer Lage, wobei jede Last um  $a$  von dem nächsten Auflager absteht (Fig. 40), so muss jeder Stützendruck  $= P$  sein. An einer Laststelle ist dann das Biegemoment  $M_1 = Pa$ , und die Momentenfläche ein Trapez; zwischen den beiden Laststellen hat das Moment durchweg den gleichen Werth  $Pa$ , und die Länge des Stabes ist ganz ohne Einfluss auf das grösste Moment.

Fig. 40.



Solche Belastungsart kommt vor bei jeder Wagenachse. Bei der Achse eines Strassenfuhrwerks (Fig. 41) liefern die aussen liegenden Räder die aufwärts gerichteten Gegendrücke, während die Lasten  $P$  durch Federn auf die Achse übertragen werden. Bei den Eisenbahnwagen-Achsen (Fig. 42) liegen die Achslager, welche die Lasten übertragen, an den Enden, die den Gegendruck leistenden Räder aber dazwischen; deshalb biegt sich solche Achse in der Mitte nach oben durch. Der Fall der Fig. 40 kommt auch vor bei den Querträgern eiserner eingleisiger Eisenbahn-Brücken. Die Lasten  $P$  werden durch die Schienen übertragen; der Querträger stützt sich mit seinen Enden auf die beiden Hauptträger der Brücke. In allen diesen Fällen ist anzustreben, den Abstand  $a$  möglichst klein zu machen, damit das grösste Moment  $Pa$  klein werde.

Fig. 41.

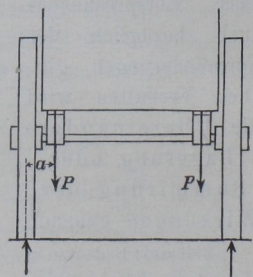
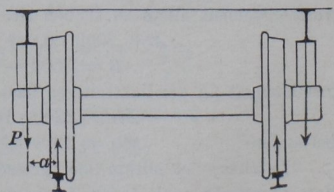


Fig. 42.



**f) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässig vertheilter Last.**

Eine gleichmässig vertheilte Belastung erfährt schon jeder Balken durch sein Eigengewicht. Bei der Berechnung wird ein Balken an und für sich als gewichtlos betrachtet und sein



Eigengewicht wie eine fremde Last behandelt. In vielen Fällen ist dieses so unbedeutend gegenüber den sonstigen Lasten, dass es vernachlässigt werden darf, wie bisher geschehen ist.

Ist die Belastung der Längeneinheit  $p$ , die Spannweite  $l$  (Fig. 43), so wird jeder Auflagerdruck  $\frac{1}{2}pl$ ; für eine Schnittstelle im Abstände  $x$  von dem Auflager ist dann das Moment

$$1) \quad \mathfrak{M} = \frac{plx}{2} - px \cdot \frac{x}{2} = \frac{px(l-x)}{2}.$$

Eine Funktion, in der das Veränderliche in der Form  $x(l-x)$  erscheint, wird (nach Theil 1, S. 183) dargestellt durch ein Parabelsegment, das symmetrisch die Weite  $l$  überspannt.

Das grösste Moment ergibt sich für die Mitte,  $x = \frac{1}{2}l$ , zu

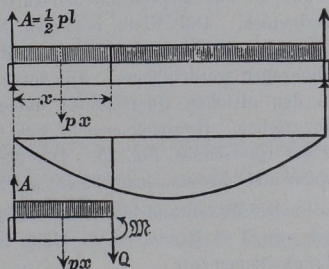
$$2) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{pl^2}{8}.$$

Die Parabel hat den Parameter  $\frac{1}{p}$ . Setzt man die Gesamtlast des Balkens  $pl = P$ , so wird  $\mathfrak{M}_{max} = \frac{1}{8}Pl$ . Liegt die Last als Einzelgewicht in der

Mitte, so ist nach S. 28 das grösste Moment  $\frac{1}{4}Pl$ . Vertheilt man also die Last gleichmässig über den ganzen Träger, so vermindert sich das grösste Moment auf die Hälfte, d. h. ein Balken kann doppelt so viel Last tragen, wenn dieselbe gleichmässig vertheilt ist, als wenn sie in der Mitte vereinigt wäre.

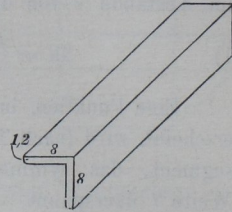
Solche gleichmässige Belastung kommt vor bei den Strassenbrücken mit unmittelbar anliegender Fahrbahn. Die ungünstigste Belastung wird häufig durch sog. Menschengedränge gebildet, wobei die ganze Brückenbahn mit Menschen erfüllt ist. Bei Eisenbahnbrücken ist die Belastung freilich keine gleichmässig vertheilt, weil die stark belasteten Lokomotivräder die Brückenbahn in einzelnen Punkten berühren, die auch keineswegs sich in gleichen Abständen befinden. Gleichwohl werden auch Eisenbahnbrücken oft, wenigstens annäherungsweise, auf gleichmässige Belastung berechnet. Wir wollen nun ermitteln, welche Last ein Brückenträger von 10 m Spannweite bei gegebenem Querschnitte erfahren darf. Der Balken oder Träger bekomme eine Höhe  $= \frac{1}{10}$  der Weite, d. h.  $h = 1 \text{ m} = 100 \text{ cm}$ , und werde als sog. Blechträger ausgebildet, da man so grosse Träger nicht gut mehr aus einem Stücke walzen kann. Man sucht den

Fig. 43.



Querschnitt des Balkens der I-Form zu nähern (Fig. 45). Die lothrechte Wand möge 1 cm stark, 96 cm hoch sein. Darauf und darunter legt man sog. Gurten aus Flacheisen von 25 cm Breite und 2 cm Dicke. Um aber diese drei, eine I-Form bildenden Theile fest mit einander zu verbinden, verwendet man sog. Winkel-eisen in der Form der Fig. 44, welche zum Zusammennieten rechtwinklig an einander stossender Platten dienen. Der Querschnitt des hier zu verwendenden Winkeleisens ist durch die Mafse 8 cm, 8 cm und 1,2 cm bestimmt; bei der Bezeichnung schreibt man diese kennzeichnenden Mafse wie Faktoren hinter einander ( $\angle 8 \cdot 8 \cdot 1,2$  cm), womit aber selbstverständlich keine Multiplikation angedeutet werden soll. Die lothrechten Schenkel der beiden Winkeleisen werden mit der lothrechten Wand, die wagerechten mit den Gurten durch Niete verbunden. Die Niete bedingen Nietlöcher von 2,2 cm Durchmesser, deren Querschnitt bei der Berechnung des Trägheitsmomentes abgezogen werden muss. Die lothrechten und wagerechten Niete fallen nicht in den gleichen Querschnitt; daher brauchen wir nur die lothrechten Löcher abzuziehen. Hiernach ergibt sich für die Berechnung des Trägheitsmomentes  $J$  der Querschnitt Fig. 45. Der Ansatz macht sich verhältnismässig bequem, wenn man die einzelnen Theile als Differenzen von Rechtecken ansieht.

Fig. 44.



Die Mittelwand bildet ein volles Rechteck von 1 cm Breite, 96 cm Höhe und dem Trägheitsmomente . . . . .  $\frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 96^3 = 73\ 728$ .

Die lothrechten Schenkel denken wir uns bis zu den Gurten reichend und an einander geschoben; von dem Rechteck von 2,4 cm Breite und 96 cm Höhe denken wir uns ein solches von 80 cm Höhe abgezogen; mithin ist der Beitrag  $\frac{1}{12} 2,4 (96^3 - 80^3) = 74\ 547$ .

Von jedem wagerechten Schenkel bleibt dann noch  $8 - 1,2 - 2,2 = 4,6$  cm Breite mit den Höhen 96 bzw. 93,6 cm, mithin ist der Beitrag . . . . .  $\frac{1}{12} 9,2 (96^3 - 93,6^3) = 49\ 611$ .

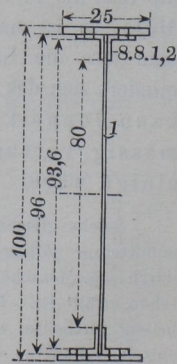
Die Gurten endlich liefern  $\frac{1}{12} (25 - 4,4) (100^3 - 96^3) = 197\ 870$ .

Das gesammte Trägheitsmoment ist 395 756.

Das Widerstandsmoment demnach  $W = 395\ 756 : 50 = 7915$ .

Ist  $p$  die zulässige Belastung auf 1 cm Länge, so wird mit  $\sigma = 700$  at:  $p \frac{1000^2}{8} = 7915 \cdot 700$ , mithin  $p = 44$ ; die zulässige Gesamtlast  $p l$  einschliesslich des eigenen Gewichts ist also 44 000 kg.

Fig. 45.



### g) Balken auf zwei Stützen mit gleichmässiger Belastung und mit Einzellasten.

Bei dem Zusammenwirken einer Einzellast mit stetiger Belastung addiren sich die für jeden Einzelfall bestimmten Momente. Man vereinigt sie am einfachsten, indem man die Momentenflächen der beiden Einzelfälle nach verschiedenen Seiten von der Achse  $A_1 B_1$  (Fig. 46) aufträgt; die Gesamt-Ordinate ist dann  $\mathfrak{M}$ .

Die Figur lässt ohne Weiteres erkennen, dass, wenn  $a > b$ , das grösste Moment nicht auf der Strecke  $b$  liegen kann; denn von  $B_1$  bis nach der Stelle  $C$  der Einzellast wachsen beide Momenten-Ordinaten. Geht man über  $C$  hinaus weiter nach links,

so nimmt die obere Ordinate ab, die untere zu. Das grösste Moment liegt also entweder im Punkte  $C$ , oder zwischen  $C$  und der Mitte. Sind die Momentenflächen genau gezeichnet, so kann man das grösste Moment leicht abgreifen. Allgemein findet man es durch Rechnung in folgender Weise:

Für irgend einen Schnitt der Strecke  $a$  (im Abstände  $x$  von  $A$ ) ist das Moment

$$1) \quad \mathfrak{M} = Ax - \frac{1}{2} p x^2.$$

Diese Funktion erreicht einen Grösstwerth für

$$d\mathfrak{M} : dx = A - px = 0, \text{ d. h. für}$$

$$2) \quad x = x_1 = \frac{A}{p}.$$

Da nun  $A = \frac{pl}{2} + P\frac{b}{l}$ , so ist

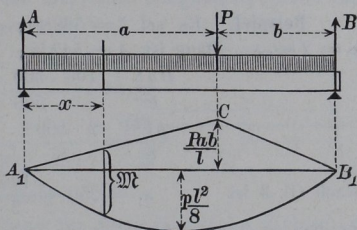
$$3) \quad x_1 = \frac{l}{2} + \frac{Pb}{pl},$$

also  $x_1 > \frac{1}{2}l$ . Setzt man den Werth der Gl. 2 in Gl. 1 ein, so entsteht

$$4) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{p} - \frac{A^2}{2p} = \frac{A^2}{2p}.$$

Diese Grösse ist aber nur gültig, so lange  $x_1 \leq a$ , weil rechts von  $C$  die Momentengleichung 1 nicht mehr gilt.

Fig. 46.



Gl. 4 ist also nur benutzbar für  $A/p \leq a$ , d. h. für  $A \leq pa$  oder

$$5) \quad \frac{Pb}{pl} \leq a - \frac{l}{2}.$$

Ist die Bedingung 5 nicht erfüllt, so giebt es für  $\mathfrak{M}$  kein analytisches Maximum (mit einer Abgeleiteten = Null), sondern einen grössten absoluten Werth bei  $x = a$ , nämlich

$$6) \quad \mathfrak{M}_1 = Aa - \frac{pa^2}{2} = ab \left( \frac{p}{2} + \frac{P}{l} \right).$$

**Beispiel.** Es sei  $l = 500$  cm;  $a = 300$  cm;  $b = 200$  cm;  $P = 100$  kg;  $p = 2$  kg/cm. Dann ist  $A = 540$  kg;

$$\frac{Pab}{l} = \frac{100 \cdot 300 \cdot 200}{500} = 12000 \text{ cmkg.}$$

$$\frac{pl^2}{8} = \frac{2 \cdot 500^2}{8} = 62500 \text{ cmkg.}$$

Nach Gl. 3 ist  $x_1 = 250 + \frac{100 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 270$  cm;

da dies  $< a$ , so giebt es ein

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{A^2}{2p} = \frac{540^2}{4} = 72900 \text{ cmkg.}$$

Ist aber unter sonst gleichen Verhältnissen  $P = 1000$  kg, so wird

$$A = 900 \text{ kg; } \frac{Pab}{l} = 120000 \text{ cmkg.}$$

$$x_1 = 250 + \frac{1000 \cdot 200}{2 \cdot 500} = 450;$$

da dies  $> a$ , so findet sich das grösste Moment an der Stelle der Einzellast und beträgt nach Gl. 6:

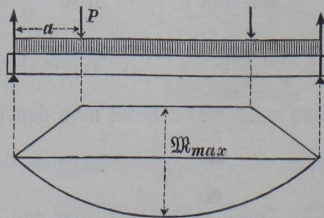
$$\mathfrak{M}_1 = 300 \cdot 200 \left( 1 + \frac{1000}{500} \right) = 180000 \text{ cmkg.}$$

Durch Skizzirung der Momentenflächen erkennt man ebenfalls leicht die Stelle des grössten Momentes.

Sind zwei gleiche, symmetrisch liegende Lasten  $P$  nebst einer gleichförmig vertheilten Last  $p$  vorhanden (Fig. 47), so liefern die Einzellasten ein Trapez von der Höhe  $Pa$ , die gleichförmig vertheilte Last eine Parabel von der Pfeilhöhe  $\frac{1}{8}pl^2$  als Momentenfläche. Das grösste Moment liegt dann in der Mitte und hat den Werth

$$7) \quad \mathfrak{M}_{max} = Pa + \frac{1}{8}pl^2.$$

Fig. 47.



## h) Balken überall gleicher Sicherheit.

Bei einem prismatischen Balken ist die stärkste Spannung  $\sigma$  eines Querschnitts verhältnissgleich mit dem Biegemomente; ist letzteres also veränderlich, so wird die Festigkeit nur ungleichmässig ausgenutzt. Soll die stärkste Spannung  $\sigma$  eines Querschnitts an allen Stellen des Stabes die gleiche sein, so muss das Widerstandsmoment  $\mathfrak{W}$  des Querschnitts verhältnissgleich mit dem Biegemomente  $\mathfrak{M}$  sich ändern. Ist  $\mathfrak{M}_1$  das Biegemoment an einer bestimmten Stelle (etwa das grösste),  $\mathfrak{W}_1$  das Widerstandsmoment an dieser Stelle, so muss

$$1) \quad \mathfrak{W} : \mathfrak{W}_1 = \mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1.$$

Ist der Balken eingespannt (Fig. 48) und am freien Ende durch  $K$  belastet, so ist  $\mathfrak{M} : \mathfrak{M}_1 = x : l$ , mithin muss dann für überall gleiche Sicherheit

$$2) \quad \frac{\mathfrak{W}}{\mathfrak{W}_1} = \frac{x}{l} \text{ sein.}$$

Je nach der Anordnung der Querschnitte sind aber unendlich viele Lösungen der Aufgabe möglich. Soll der Querschnitt ein Rechteck sein von der Breite  $u$ , der Höhe  $v$  an beliebiger Stelle, von der Breite  $d$  und der Höhe  $h$  an der Stelle  $x = l$ , so ist  $\mathfrak{W} = \frac{1}{6} u v^2$ ;  $\mathfrak{W}_1 = \frac{1}{6} d h^2$ , mithin nach Gl. 2

$$3) \quad \frac{u v^2}{d \cdot h^2} = \frac{x}{l}.$$

Bei überall gleicher Breite  $u = d$  wird dann

$$4) \quad v^2 : h^2 = x : l.$$

Trägt man von der Mitte aus  $\frac{1}{2} v$  nach oben und nach unten hin auf, so ergibt sich ein parabolischer Aufriss  $CDB$  (Fig. 49). Die Neigung der Parabel an beliebiger Stelle ist  $\text{tg } \varphi = \frac{1}{2} dv : dx$ .

Nach Gl. 4 wird

$$2 v dv = \frac{h^2 dx}{l}, \text{ mithin}$$

$$\frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{4} \frac{h^2}{vl} = \text{tg } \varphi.$$

Fig. 48.

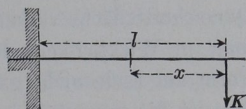
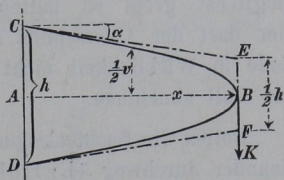


Fig. 49.



Für  $x = l$  und  $v = h$  wird dann  $\operatorname{tg} a = \frac{1}{4} \frac{h}{l}$ . Legt man also in  $C, B$  und  $D$  Berührungsgeraden an die Parabel, so bekommt man das Trapez  $CEFD$ , wobei  $EF = h - 2l \operatorname{tg} a = \frac{1}{2} CD$ . Bei überall gleichem Querschnitte  $d \cdot h$  ist der Rauminhalt des Balkens  $d \cdot h \cdot l$ , bei der parabolischen Begrenzung  $\frac{2}{3} d \cdot h \cdot l$ , während die Umschliessungsform  $CEFD$  den Inhalt  $\frac{3}{4} d \cdot h \cdot l$  hat. Die parabolische Form genügt wohl den Zug- und Druckspannungen, nicht aber den Schubspannungen. Denn auch an dem Ende  $B$ , wo der Querschnitt  $= 0$  ist, herrscht eine Querkraft  $K$ , die eine gewisse Querschnittsfläche verlangt. Daher kann man in Wirklichkeit der parabolischen Form am Ende nicht ganz folgen. In so fern ist die trapezförmige Umschliessung besser als die Parabelgestalt.

Giebt man dem Balken überall gleiche Höhe  $v = h$ , so wird aus Gl. 3:

5)  $u : d = x : l$ ,

d. h. der Grundriss wird nunmehr ein Dreieck (Fig. 50), der Rauminhalt  $\frac{1}{2} d \cdot h \cdot l$ . Diese Form ist also günstiger als die parabolische; es ist vortheilhaft, die Höhe überall möglichst gross zu halten. Auch hier darf der Querschnitt am freien Ende in Wirklichkeit nicht ganz bis auf Null abnehmen.

Sollen die Rechteck-Querschnitte einander durchweg ähnlich bleiben, d. h.  $u : v = d : h$ , so wird aus Gl. 3:

6) 
$$\begin{cases} v^3 : h^3 = x : l & \text{und} \\ u^3 : d^3 = x : l. \end{cases}$$

Trägt man hiernach die Höhen und Breiten auf (Fig. 51), so erhält man (vergl. Theil 1, S. 186) als Begrenzungen im Aufriss und Grundriss Zweige von kubischen Parabeln.

Fig. 50.

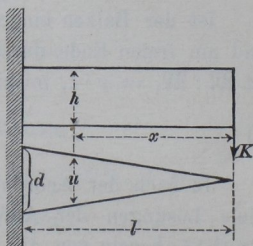
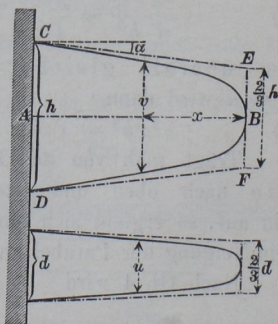


Fig. 51.



Für den Aufriss gilt

$$3v^2 dv = \frac{h^3 dx}{l}, \text{ mithin}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{1}{2} \frac{dv}{dx} = \frac{h^3}{6v^2 l}$$

und die Neigung der Tangente im Punkt  $C$  (Fig. 51) ( $x=l$ ;  $v=h$ )

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{6l}.$$

Legt man um die kubischen Parabeln geradlinige Umschliessungsformen, so wird die Höhe und Breite am freien Ende  $\frac{2}{3}h$  bzw.  $\frac{2}{3}d$ .

Ist bei kreisförmigem Querschnitte der Halbmesser an beliebiger Stelle  $v$ , an der Einspannungsstelle  $r$ , so wird nach Gl. 2:  $\frac{1}{4}v^3\pi : \frac{1}{4}r^3\pi = x:l$ , oder  $v^3 : r^3 = x:l$ . Diese Gleichung entspricht der Gl. 6. Die Form des Stabes oder Balkens wird also ein Umdrehungskörper, dessen Meridianlinie ein Zweig einer kubischen Parabel ist.

Diese Formen von Balken überall gleicher Sicherheit gelten in allen Fällen, in denen das Biegemoment sich nach geradlinigem Gesetz ändert; also auch, wenn ein Balken auf zwei Stützen eine Einzellast trägt. Genügt dann an der Laststelle ein rechteckiger Querschnitt  $d \cdot h$ , und soll die Breite überall gleich sein, so erhält man (Fig. 52) leicht die Umschliessungsform, wenn man an beiden Auflagern die Höhe  $= \frac{1}{2}h$  macht. In diese lassen sich die Parabeln leicht einzeichnen. Die Unstetigkeit der Momentenfläche an der Belastungsstelle (s. Fig. 35, S. 27) hat zur Folge, dass auch die Begrenzung der Balkenform hier Knicke zeigt.

Bei gleich bleibender Höhe würde der Balken die Form der Fig. 53 (im Grundriss aus zwei Dreiecken bestehend) erhalten.

Fig. 52.

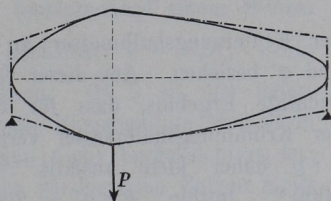
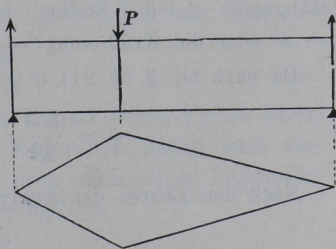


Fig. 53.



Bei kreisförmigem Querschnitte würde die Umschliessungsform an den Auflagern  $\frac{2}{3}r$  als Halbmesser zeigen. Dies findet Anwendung bei Achsen, die durch das Gewicht eines schweren Rades belastet sind.

Auch für gleichförmig belastete Balken auf zwei Stützen lassen sich leicht Formen gleicher Sicherheit entwickeln. Bei rechteckigem Querschnitte überall gleicher Breite wird der Aufriss eine Ellipse.

## 5. Biegungslinie.

Die Linie, nach der sich die ursprünglich gerade Achse des Stabes oder Balkens krümmt, heisst die Biegungslinie. In Fig. 19 (S. 18) ist  $O$  der Krümmungsmittelpunkt der Biegungslinie für die Stelle  $G$  derselben. Gemäss Gl. 2, S. 19 ist mithin

$$1) \quad \varrho = \frac{E e'}{\sigma'}$$

der Krümmungshalbmesser an einer Stelle, auf welche sich  $e'$  und  $\sigma'$  beziehen. Aus dieser Gleichung folgt das für das Weitere wichtige Ergebnis, dass für die meisten Fälle der Anwendung der Krümmungshalbmesser verhältnismässig gross, die Krümmung  $1 : \varrho$  daher klein ausfällt. Bei Stabeisen wird  $\sigma'$  höchstens  $1000^{at}$ , mithin  $E : \sigma' = 2000$  und  $\varrho = 2000 e'$  oder für  $e' = \frac{1}{2}h$ ,  $\varrho = 1000 h$ ; an allen Stellen, an denen  $\sigma$  kleiner ist, wird  $\varrho$  noch grösser. Ein I-Träger von  $0,2^m$  Höhe biegt sich also nach Krümmungshalbmessern von mindestens  $200^m$ . Für Holz ist  $\sigma'$  höchstens  $100^{at}$ , mithin  $\varrho = 1200 e' = 600 h$ , d. h. ebenfalls recht gross. An den Stellen, wo die Biegungsspannung Null, ist  $\varrho = \infty$  oder die Krümmung  $= 0$ .

Da nach Gl. 3 (S. 21)  $\sigma' = \mathfrak{M} e' : J$ , so wird auch

$$2) \quad \varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}; \quad \frac{1}{\varrho} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Nach den Lehren der Analytischen Geometrie ist aber

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{3/2}}.$$



Setzt man dies  $= \frac{\mathfrak{M}}{EJ}$ , so hat man, weil  $\frac{\mathfrak{M}}{J}$  eine Funktion von  $x$ , eine Gleichung, in welcher die erste und die zweite Abgeleitete der Gleichung der Biegelinie vorkommen. Eine solche Gleichung heisst Differentialgleichung; sie ist in dem vorliegenden Falle meist nicht in geschlossener Form lösbar. Für die meisten Fälle der Anwendung ist aber daraus eine Annäherungsgleichung von genügender Genauigkeit abzuleiten. Lässt sich die  $x$ -Achse so legen, dass sie mit der Mittellinie  $AB$  des ungebogenen Stabes entweder parallel ist, oder nur einen sehr kleinen Winkel  $\omega$  bildet

(Fig. 54), so wird auch die Neigung der meist nur schwach gekrümmten Biegelinie  $AC$  gegen die  $x$ -Achse, d. h.  $dy:dx$ , durchweg nur klein sein. Daher kann man

in solchen Fällen  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  mit der Einheit vertauschen. Würde z. B. der grösste Werth von  $dy:dx = 0,1$  (entsprechend einem Winkel  $\alpha = 6^\circ$ ) so würde doch  $1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2$  höchstens  $1 + 0,01$ , worin man  $0,01$  gegen  $1$  vernachlässigen kann. Gl. 2 (S. 40) liefert nämlich nicht sehr genaue Werthe für die Biegelinie, weil darin z. B. der Einfluss der Schubspannungen nicht berücksichtigt ist; auch kennt man die Zahl  $E$  für einen vorliegenden Balken meist nicht auf  $1\%$  genau. Die sehr runden Zahlen der Tabelle (S. 8) lassen darauf schliessen, dass sie nur Mittelwerthe sein können, von denen die wahren Zahlen zuweilen nicht unbeträchtlich abweichen. Solch grosse Werthe von  $dy:dx$  kommen aber bei guten Bauträgern selten vor; man kann also unbedenklich  $\frac{1}{0} = \frac{d^2y}{dx^2}$  setzen; dann wird

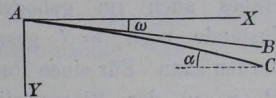
$$3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\mathfrak{M}}{EJ}.$$

Diese im Jahre 1826 von Navier (!1785 Dijon, †1836 Paris) angegebene Gleichung führt in den einfacheren Fällen nach einmaliger Integration zu  $dy:dx$  und nach nochmaliger Integration zu  $y = f(x)$ , der Gleichung der Biegelinie.

### a) Einseitig eingespannter prismatischer Stab oder Balken.

Ein prismatischer Stab oder Balken sei an der linken Seite unwandelbar eingespannt, u. zw., der Allgemeinheit wegen, nicht

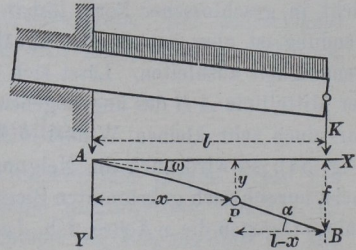
Fig. 54.



völlig wagerecht, sondern mit einer kleinen Neigung  $\omega$  abwärts (Fig. 55); der Balken sei gleichmässig mit  $p$  für die Längeneinheit der Horizontalprojektion und am Ende durch eine Kraft  $K$  lothrecht belastet. In dem unteren

Theile der Fig. 54 ist die Kurve  $AB$  die Biegelinie,  $AX$  wagrecht,  $AY$  lothrecht nach unten. Die Biegung sei so gering angenommen, dass die wagerechte Länge des Stabes auch im gebogenen Zustande noch  $= l$  gesetzt werden kann. Für einen Punkt  $P(x, y)$  der Biegelinie

Fig. 55.



ist das Biegemoment, wenn man das Stück rechts von  $P$  betrachtet,

$$\mathfrak{M} = K(l - x) + \frac{p(l - x)^2}{2}.$$

Dann wird, wenn man in Gl. 3 alle Glieder mit  $EJ dx$  multiplicirt,

$$EJ \frac{d^2 y}{dx^2} = K(l - x) dx + \frac{p}{2} (l^2 - 2lx + x^2) dx.$$

Integrirt man beide Seiten der Gleichung, so entsteht

$$4) \quad EJ \frac{dy}{dx} = K \left( lx - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{p}{2} \left( l^2 x - lx^2 + \frac{x^3}{3} \right) + C.$$

Die Integrations-Konstante  $C$  muss so bestimmt werden, dass für  $x = 0$   $dy : dx = \omega$  wird (entsprechend der Einspannung und indem man  $\text{tg } \omega$  mit  $\omega$  vertauscht). Daraus folgt  $EJ\omega = C$ . Für das Neigungsverhältnis  $\text{tg } \alpha = \alpha$  am freien Ende ergibt sich (mit  $x = l$ )  $EJ\alpha = 1/2 Kl^2 + 1/6 pl^3 + EJ\omega$ , also

$$5) \quad \alpha = \frac{Kl^2}{2EJ} + \frac{pl^3}{6EJ} + \omega.$$

Multiplicirt man aber Gl. 4 mit  $dx$  und integrirt wiederum, so ergibt sich

$$EJy = K(1/2 lx^2 - 1/6 x^3) + 1/2 p(1/2 l^2 x^2 - 1/3 lx^3 + 1/12 x^4) + EJ\omega x + C_1.$$

Da für  $x = 0$  auch  $y = 0$  sein muss, weil der Anfangspunkt der Koordinaten in der Biegelinie liegt, so wird  $C_1 = 0$ . Bezeichnet

man die Ordinate des Endpunktes  $B$  der Biegelinie (für  $x = l$ ) mit  $f$ , so wird

$$EJf = \frac{1}{3} Kl^3 + \frac{1}{8} pl^4 + EJ\omega l, \text{ mithin}$$

$$6) \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ} + \frac{pl^4}{8EJ} + \omega l.$$

Aus den Gl. 5 und 6 erkennen wir, dass auch bezüglich der Neigungen und der Ordinaten der Biegelinie die Wirkungen der einzelnen Ursachen ( $K$ ,  $p$  und  $\omega$ ) sich unabhängig von einander über einander lagern und summieren, wie S. 31 für die Biegemomente gezeigt wurde. (Es gilt dies aber nur, solange man bei der Aufstellung des Biegemomentes die Durchbiegung vernachlässigen darf.) Ist der wagerecht eingespannte Stab ( $\omega = 0$ ) nur durch  $K$  belastet ( $p = 0$ ), so wird

$$7) \quad a = \frac{Kl^2}{2EJ}, \quad f = \frac{Kl^3}{3EJ};$$

ist er nur gleichmässig belastet ( $K = 0$ ), so wird

$$8) \quad a = \frac{pl^3}{6EJ}, \quad f = \frac{pl^4}{8EJ}.$$

Ist der Stab gar nicht belastet, aber schräg eingespannt, so ist (selbstverständlich)

$$a = \omega; \quad f = \omega l.$$

Vor weiterer Anwendung der Ergebnisse möge noch die biegende Wirkung eines am freien Ende des wagerecht eingespannten Stabes wirkenden Kräftepaars  $\mathfrak{M}$  untersucht werden (Fig. 56). Es ist

$$EJ \frac{d^2y}{dx^2} = \mathfrak{M};$$

$$EJ \frac{dy}{dx} = \mathfrak{M}x + C \text{ mit } C = 0;$$

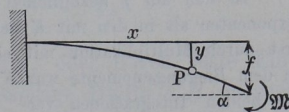
$$9) \quad a = \frac{\mathfrak{M}l}{EJ}.$$

$$10) \quad EJy = \frac{1}{2} \mathfrak{M}x^2 + C_1 \text{ (mit } C_1 = 0):$$

$$11) \quad f = \frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}.$$

Um diese Grössen für  $a$  und  $f$  würden sich die in Gl. 5 und 6 gegebenen vergrössern, wenn in Fig. 55 noch das Kräftepaar  $\mathfrak{M}$

Fig. 56.



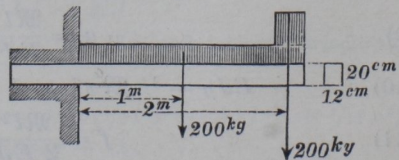
am freien Ende hinzugefügt würde. Gl. 10 bedeutet eine Parabel vom Parameter  $\frac{EJ}{\mathfrak{M}}$  als Biegelinie des Falles der Fig. 56. Die etwas genauere Gleichung  $\varrho = \frac{EJ}{\mathfrak{M}}$  (S. 40) würde für unveränderliches  $\mathfrak{M}$  ein unveränderliches  $\varrho$ , d. h. eine kreisförmige Biegelinie ergeben. Die Vertauschung von  $\frac{1}{\varrho}$  mit  $\frac{d^2y}{dx^2}$  hat also denselben Erfolg wie die Vertauschung eines Kreises von grossem Halbmesser  $\varrho$  mit einer Parabel vom Parameter  $\varrho$ .

Die einzelnen Einflüsse von  $K$ ,  $p$ ,  $\mathfrak{M}$  und  $\omega$  auf  $a$  und  $f$  stellen wir (nach A. Ritter, Technische Mechanik) wegen der häufigen Anwendbarkeit tabellarisch zusammen:

Einfluss von	auf $a$	auf $f$
$K$	$\frac{Kl^2}{2EJ}$	$\frac{Kl^3}{3EJ}$
$p$	$\frac{pl^3}{6EJ}$	$\frac{pl^4}{8EJ}$
$\mathfrak{M}$	$\frac{\mathfrak{M}l}{EJ}$	$\frac{\mathfrak{M}l^2}{2EJ}$
$\omega$	$\omega$	$l\omega$

In den auf  $p$  bezüglichen Gliedern erscheint  $l$  mit einem um 1 höheren Exponenten als in den mit  $K$  behafteten, weil  $p$  noch keine Kraft ist, sondern erst durch Multiplikation mit einer Länge denselben Rang bekommt wie  $K$ . In dem Biegemomente war  $K$  mit einer linearen Grösse multiplicirt; durch die beiden Integrationen verwandelte sich diese lineare Grösse in eine Grösse zweiten und dritten Grades. Daraus erklären sich die Exponenten von  $l$  in den Formeln. Diese Bemerkungen erleichtern das sichere Einprägen der Tabellenwerthe.

Fig. 57.



**Beispiel:** Ein Balkenträger rage aus einer Hauswand auf  $l = 2\text{ m} = 200\text{ cm}$  wagerecht hervor (Fig. 57). Am freien Ende befinde sich eine Einzellast

$K=200$  kg, und ausserdem seien  $p l=200$  kg gleichmässig über die Balkenlänge  $l$  vertheilt. Wie gross sind die stärkste Spannung  $\sigma$  und die Durchbiegung  $f$  des hölzernen Balkens ( $E = 120000$  at) vom Querschnitte  $d = 12$  cm,  $h = 20$  cm?

Das grösste Moment an der Wand beträgt

$$M = 200 \cdot 200 + 200 \cdot 100 = 60000 \text{ cmkg};$$

das Widerstandsmoment

$$W = \frac{1}{6} \cdot 12 \cdot 20^2 = 800, \text{ daher}$$

$$\sigma = 60000 : 800 = 75 \text{ at.}$$

Das Trägheitsmoment ist  $J = W \cdot 10 = 8000$ , daher

$$f = \frac{Kl^3}{3 EJ} + \frac{pl^4}{8 EJ} = \frac{200 \cdot 200^3}{3 \cdot 120000 \cdot 8000} + \frac{200 \cdot 200^3}{8 \cdot 120000 \cdot 8000}$$

$$= 0,76 \text{ cm} = 1 : 263 \text{ der Länge.}$$

In vielen Fällen der Anwendung wirken die einzelnen Ursachen einander entgegen (indem vielleicht  $K$  aufwärts,  $p$  abwärts gerichtet ist), dann hat man die einzelnen Einflüsse mit theilweise entgegengesetzten Vorzeichen sinngemäss zu verbinden.

### b) Prismatischer Balken auf zwei Stützen.

Trägt ein prismatischer Balken auf zwei Stützen in der Mitte eine Einzellast (Fig. 58), so muss die Biegungslinie zu einer Lothrechten durch die Mitte symmetrisch, d. h. in der Mitte

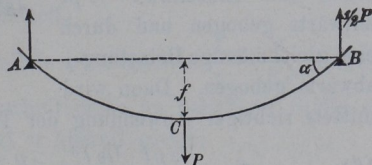
bei  $C$  wagerecht sein. Für die Spannungen und Formänderungen ist es nun gleichgültig, durch welche Mittel die wagerechte Richtung bei  $C$  erzwungen wird; ob durch den

Zusammenhang mit einer anderen Hälfte, oder durch feste Einspannung. Daher kann man die rechtsseitige Hälfte  $CB$  ansehen als bei  $C$  aus einer einspannenden Wand wagerecht um  $\frac{1}{2}l$  hervorragend und am freien Ende durch eine Kraft  $\frac{1}{2}P$  aufwärts gebogen, in Folge dessen der Punkt  $B$  um  $f$  höher liegt als der Punkt  $C$ . Man kann daher für  $f$  die Grundformel  $\frac{Kl^3}{3 EJ}$  anwenden,

muss nur  $K$  mit  $\frac{1}{2}P$ ,  $l$  mit  $\frac{1}{2}l$  vertauschen. Dann wird

$$12) \quad f = \frac{\frac{1}{2}P \cdot \frac{1}{8}l^3}{3 EJ} = \frac{Pl^3}{48 EJ}.$$

(Fig. 58.)



Ebenso gilt für die Neigung  $\alpha$  am Ende nach der Formel  $\frac{Kl^2}{2EJ}$ .

$$13) \quad \alpha = \frac{1/2 P \cdot 1/4 l^2}{2EJ} = \frac{Pl^2}{16EJ}.$$

Für Zahlenrechnungen ist es in solchen Fällen meist bequemer, die stärkste Spannung  $\sigma$  einzuführen. Für diese gilt nach S. 21 und 28:

$$\sigma \frac{J}{e} = \frac{Pl}{4}, \text{ also } \frac{Pl}{4J} = \frac{\sigma}{e}.$$

Hiermit wird aus Gl. 12 und 13:  $f = \frac{1}{12} \frac{\sigma l^2}{E e}$ , oder, um überall Verhältnisse gleichartiger Grössen zu haben:

$$14) \quad \frac{f}{l} = \frac{1}{12} \frac{\sigma l}{E e} \quad \text{und}$$

$$15) \quad \alpha = \frac{1}{4} \frac{\sigma l}{E e}.$$

Einen gleichmässig über die ganze Länge belasteten Balken (Fig. 59) kann man ansehen als bei  $C$  wagerecht eingespannt, im Abstände  $1/2 l$  durch eine Einzelkraft  $1/2 pl$  aufwärts gebogen und durch eine gleichmässige Belastung  $p$  abwärts gebogen. Dann wird mittels richtiger Anwendung der Tabelle auf S. 44:

$$16) \quad f = \frac{1/2 pl \cdot 1/8 l^3}{3EJ} - \frac{p \cdot 1/16 l^4}{8EJ} = \frac{5}{384} \frac{pl^4}{EJ}.$$

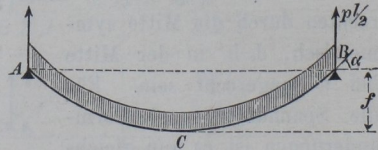
$$17) \quad \alpha = \frac{1/2 pl \cdot 1/4 l^2}{2EJ} - \frac{p \cdot 1/8 l^3}{6EJ} = \frac{pl^3}{24EJ}.$$

Für die stärkste Spannung gilt wieder nach S. 33:  $\sigma \frac{J}{e} = \frac{pl^2}{8}$ ; setzt man also  $\frac{pl^2}{8J} = \frac{\sigma}{e}$  in den Gl. 16 und 17 ein, so wird

$$18) \quad \frac{f}{l} = \frac{5}{48} \frac{\sigma l}{E e}.$$

$$19) \quad \alpha = \frac{1}{3} \frac{\sigma l}{E e}.$$

Fig. 59.



**Beispiel:** Sind die Verhältnisse so gewählt, dass  $\sigma = 700 \text{ at}$ ;  $l : e = 20$ , so wird im Falle der Einzellast (Gl. 14 und 15):

$$a = \frac{1}{4} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00175 = 0^{\circ} 6'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00058.$$

Im Falle der gleichmässigen Belastung ist (Gl. 18 und 19):

$$a = \frac{1}{3} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00233 = 0^{\circ} 8'.$$

$$\frac{f}{l} = \frac{5}{48} \cdot \frac{7}{20\,000} \cdot 20 = 0,00072.$$

Bei gleichen stärksten Spannungen und gleicher Spannweite verhalten sich hiernach die Durchbiegungen bei gleichförmiger Belastung und bei Einzelast zu einander wie  $5 : 4 = 1,25 : 1$ . Die Ursache hiervon liegt darin, dass die Momentenflächen in beiden Fällen gleiche Pfeilhöhe haben, die eine aber parabolisch, die andere dreieckig gestaltet ist. Die aus dem Inhalte der Momentenflächen abgeleiteten Mittelwerthe der Momente sind also  $\frac{2}{3}$  bzw.  $\frac{1}{2} M_{max}$ , verhalten sich demnach wie  $4 : 3 = 1,33 : 1$ .

Bei sehr dünnwandigen  $\Gamma$ -Trägern wird die Durchbiegung wegen des Auftretens der Gleitung durch die Schubspannungen etwas grösser.

### c) Biegung von einseitig eingespannten Balken überall gleicher Sicherheit.

Die Krümmung der Biegelinie ist allgemein  $\frac{1}{\rho} = \frac{\sigma}{Ee}$  (S. 40, Gl. 1). Setzt man nun die Querschnittshöhe an beliebiger Stelle  $v$  und  $e = \frac{1}{2}v$ , so wird, weil jetzt  $\sigma$  überall gleich,

$$20) \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{1}{\rho} = \frac{1}{v}.$$

a) Wird dem Balken überall gleicher Sicherheit auch überall gleiche Höhe  $v = h$  gegeben, so wird nach Gl. 20 auch  $\rho$  überall gleich, d. h. die Biegelinie ein Kreisbogen vom Halbmesser  $\frac{Eh}{2\sigma}$  (wie in dem besonderen Falle der Fig. 56, S. 43), wofür man auch eine Parabel setzen kann.

Die Durchbiegung findet man am einfachsten, indem man in Gl. 20 für  $\frac{1}{\rho} = \frac{d^2y}{dx^2}$  setzt und 2 mal integriert.

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{1}{h}; \quad \frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = \frac{x}{h} + C \text{ mit } C = 0;$$

$$\frac{E}{2\sigma} y = \frac{x^2}{2h} + C_1 \text{ mit } C_1 = 0; \quad \frac{E}{\sigma} f = \frac{l^2}{h};$$

$$\frac{f}{l} = \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h} \text{ oder, wegen } \sigma = \frac{\mathfrak{M}_1}{J_1} \frac{h}{2},$$

wenn  $\mathfrak{M}_1$  und  $J_1$  sich auf irgend einen, z. B. den Befestigungsquerschnitt, beziehen:  $f = \frac{\mathfrak{M}_1 l^2}{2 E J_1}$ .

Erfolgt die Biegung durch eine am äusseren Ende wirkende Kraft  $K$ , so ist  $\mathfrak{M}_1 = Kl$  und

$$21) \quad f = \frac{Kl^3}{2 E J_1}.$$

Die Durchbiegung ist also wegen der dreieckigen Zuschärfung im Grundrisse (Fig. 50)  $1\frac{1}{2}$  mal so gross wie bei prismatischen Balken (Gl. 7, S. 43).

$\beta$ ) Ist die Höhe  $v$  nach parabolischem Gesetze veränderlich (Fig. 49, S. 37), so wird  $v^2 : h^2 = (l-x) : l$  und aus Gl. 20:

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{\sqrt{l}}{h} (l-x)^{-1/2} \text{ (Fig. 60).}$$

Multipliziert man mit  $dx = -d(l-x)$ , so wird nach der ersten Integration

$$\frac{E}{2\sigma} \frac{dy}{dx} = -\frac{\sqrt{l}}{h} 2\sqrt{l-x} + C$$

und, weil für  $x=0$  auch  $\frac{dy}{dx} = 0$  ist,

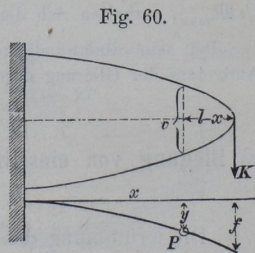
$$C = \frac{2l}{h}, \text{ daher}$$

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} \frac{dy}{dx} = l - \sqrt{l} \sqrt{l-x}.$$

Nochmalige Integration liefert

$$\frac{h}{4} \frac{E}{\sigma} y = l \cdot x + \frac{2}{3} \sqrt{l} (l-x)^{3/2} + C_1$$

mit  $C_1 = -\frac{2}{3} l^2$  wegen  $y = 0$  für  $x = 0$ .





$y = f$  für  $x = l$  giebt sodann

$$\frac{f}{l} = \frac{4}{3} \frac{\sigma}{E} \frac{l}{h}, \quad \text{oder wegen } \sigma = \frac{Kl}{J_1} \frac{h}{2}:$$

$$22) \quad f = \frac{2}{3} \frac{Kl^3}{EJ_1}.$$

In diesem Falle wird also (wegen der nach dem Ende abnehmenden Höhe) die Durchbiegung doppelt so gross wie bei prismatischen Balken (vgl. S. 44).

$\gamma$ ) Eine kreisförmige Biegung nach einem Halbmesser

$$\rho = \frac{Eh}{2\sigma} = \frac{EJ_1}{\mathfrak{M}_1} = \frac{EJ_1}{Ka}$$

(vergl. S. 47) wird auch bei einem durch ein Kräftepaar  $Ka$  belasteten Balken von der Form der Fig. 61 eintreten. Setzt man dafür eine Parabel vom Parameter  $\rho$ , so wird die Durchbiegung des Endpunktes  $B$  werden

$$f = \frac{l^2}{2\rho} = \frac{Kal^2}{2EJ_1},$$

wenn  $J_1$  das Trägheitsmoment des Einspannungs-Querschnittes.

Ist  $h = 2$  cm,  $\sigma = 700$  at,  $E = 2000000$  at, so wird der Krümmungshalbmesser  $\rho = \frac{2000000 \cdot 2}{2 \cdot 700} = 2857$  cm = 28,57 m.

d) Prismatischer, an dem einen Ende wagerecht eingespannter, am anderen Ende unterstützter, gleichmässig belasteter Balken.

Der Balken rage bei  $A$  (Fig. 62) aus der einspannenden Wand hervor; der Endpunkt  $B$  liege genau in der Richtungslinie der Verlängerung des eingespannten Theiles.

Dann ist, wie wir sehen werden, der Auflagerdruck  $B$  mit alleiniger Hülfe der Gleichgewichtsbedingungen nicht zu bestimmen, somit sind denn auch Biegemoment und Spannungen unbestimmt. Es

liegt eine sog. statisch unbestimmte Aufgabe vor. In solchen Fällen führen nun die Ergebnisse der Biegelhre zur Lösung.

Fig. 61.

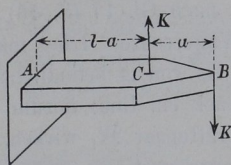
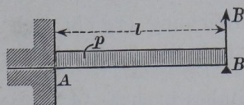
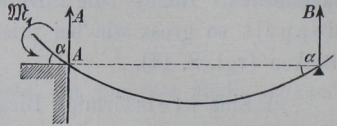


Fig. 62.



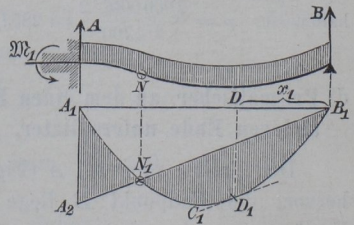
Um uns von der Unbestimmtheit der Aufgabe zu überzeugen, müssen wir uns zunächst die Wirkung der Einspannung klar machen, indem wir uns einmal bei  $A$  den oberen Theil der einspannenden Wand fortdenken. Dann findet sich (Fig. 63) bei  $A$  nur eine unterstützende Kante; der Balken ist ein einfacher Träger auf zwei Stützen, biegt sich in der Mitte um die Grösse  $f$  nach Gl. 16 (S. 46) durch und hat an beiden Enden eine Neigung  $\alpha$  nach Gl. 17 (S. 46) gegen die Wagerechte. Lässt man an dem links von  $A$  befindlichen Balkenstück ein links herum drehendes

Fig. 63.



Kräftepaar  $\mathcal{M}_1$  wirken, welches sich, von Null beginnend, allmählich vergrössert, so wird dieses Balkenstück mehr und mehr niedergedrückt, und bei einer bestimmten Grösse von  $\mathcal{M}_1$  wird die Biegelinie bei  $A$  genau wagerecht sein. Man kann daraus schliessen, dass die wagerecht einspannende Wand neben dem Auflagerdruck  $A$  noch ein Einspannungsmoment  $\mathcal{M}_1$  auf den Balken ausübt. Für das Gleichgewicht eines Balkens, an dem neben Kräftepaaren nur lothrechte, nicht schräge Kräfte wirken, lassen sich nicht mehr als zwei von einander unabhängige Gleichgewichtsgleichungen aufstellen, da zu der

Fig. 64.



Gleichung der wagerechten Kräfte sich keine Glieder ergeben. Zur Bestimmung der Auflagerkräfte  $A, B$  und des Momentes  $\mathcal{M}_1$  (Fig. 64) hat man also nur zwei Gleichgewichts-Bedingungen zur Verfügung; die eine fehlende dritte Gleichung muss aus der Biegelohre genommen werden; man nennt daher diesen Fall: einfach statisch unbestimmt. Die dritte Gleichung ergibt sich in diesem Falle sehr einfach. Die Kraft  $B$  würde den Endpunkt des bei  $A$  wagerecht eingespannten, unbelasteten Stabes nach S. 44 in die Höhe biegen um  $\frac{Bl^3}{3EJ}$ . Wäre die Stütze

$B$  nicht vorhanden, so würde die Belastung den Endpunkt um  $\frac{pl^4}{8EJ}$

abwärts biegen. Da in Wirklichkeit der Endpunkt  $B$  in gleicher Höhe mit  $A$  liegt, so heben sich beide Durchbiegungen gegenseitig auf; es wird

$$\frac{Bl^3}{3 EJ} = \frac{pl^4}{8 EJ} \quad \text{oder}$$

$$1) \quad B = \frac{3}{8} pl; \quad \text{somit}$$

$$2) \quad A = \frac{5}{8} pl \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} pl^2 - \frac{3}{8} pl^2 = \frac{1}{8} pl^2.$$

Diese Werthe gelten aber nur, wenn die an die Biegelinie bei  $A$  gelegte Tangente genau durch den Punkt  $B$  geht; geringe Abweichungen von dieser Bedingung haben grossen Einfluss auf die Auflagerkräfte.

In einem Abstände  $x$  von  $B$  ist das Biegemoment

$$3) \quad \mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} px^2 = \frac{3}{8} plx - \frac{1}{2} px^2.$$

Fügt man  $\frac{1}{8} plx$  mit  $+$  und  $-$  hinzu, so kann man auch schreiben:

$$4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{M} &= \frac{1}{2} plx - \frac{1}{2} px^2 - \frac{1}{8} plx \\ &= \frac{1}{2} px(l - x) - \frac{1}{8} plx. \end{aligned}$$

Das erste Glied der rechten Seite entspricht (nach Gl. 1 S. 33) einem auf beiden Seiten gestützten (nicht eingespannten) Balken; die entsprechende Momentenfläche ist eine Parabel  $A_1 C_1 B_1$  (Fig. 64) von der Pfeilhöhe  $\frac{1}{8} pl^2$ . Das zweite Glied wird durch die Gerade  $A_2 B_1$  dargestellt, wenn  $A_1 A_2 = \frac{1}{8} pl^2$ . Von den Ordinaten der Parabel muss man diejenigen der Geraden abziehen, um  $\mathfrak{M}$  zu erhalten. Die lothrechte Schraffirung giebt die Veränderlichkeit des Momentes an.

Von  $B_1$  (wo  $\mathfrak{M} = 0$ ) beginnend, nimmt das Moment zunächst zu, erreicht an der Stelle  $D_1$ , wo die Parabel  $\parallel$  der Geraden  $A_2 B_1$ , ein analytisches Maximum  $\mathfrak{M}_{max}$ , nimmt dann wieder ab, wird bei  $N_1$ , wo Parabel und Gerade sich schneiden, zu Null, geht dann ins Negative über und erreicht den grössten negativen Werth  $-\mathfrak{M}_1 = -\frac{1}{8} pl^2$  an der Einspannungsstelle.

Die Funktion von der Form  $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} px^2$  erreicht, wie schon S. 35 gefunden (dort war  $A$  statt  $B$  gesetzt), das Maximum

$$\mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p} \quad \text{für} \quad x_1 = \frac{B}{p};$$

das giebt für  $B = \frac{3}{8} pl$  (Punkt  $D_1$ ):

$$5) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{9}{128} pl^2 \text{ und } x_1 = \frac{3}{8} l.$$

$Bx - \frac{1}{2} px^2$  wird aber zu Null für  $x = 0$  (Punkt  $B_1$ ) und für  $x = \frac{2B}{p} = \frac{3}{4} l$  (Punkt  $N_1$ ).

Es findet sich also  $\mathfrak{M}_{max}$  mitten zwischen den beiden Momenten-Nullpunkten. Einem Momente = 0 entspricht bei einem Balken, dessen Querschnitt ein Trägheitsmoment  $J > 0$  hat, eine Krümmung = 0, und ein Krümmungshalbmesser  $\rho = \infty$  der Biegungslinie.  $N_1$  entspricht daher einem Wendepunkte  $N$  der Biegungslinie. Rechts von  $N$  kehrt die Biegungslinie ihre konvexe Seite nach unten  $\smile$ , wie bei einem Balken auf zwei Stützen; links von  $N$  ist die Krümmung  $\frown$  und damit auch das Moment entgegengesetzt.

Solche Querschnitte, an denen das Biegemoment grösser ist als zu beiden Seiten daneben, heissen gefährliche Querschnitte. Hier giebt es deren zwei, nämlich  $D$  und  $A$ . Beide sind aber nicht in gleichem Mafse gefährlich; denn die entsprechenden Momente  $\frac{9}{128} pl^2$  und  $\frac{1}{8} pl^2 = \frac{16}{128} pl^2$  verhalten sich wie 9 : 16. An der Einspannungsstelle herrscht also das grösste Moment, und dies ist auch ebenso gross, als wenn der Balken an beiden Enden einfach gestützt wäre; das grösste Moment hat sich daher in Folge der Einspannung nicht vermindert, sondern nur von der Mitte nach dem Ende  $A$  verschoben.

Eine Verminderung des grössten Momentes lässt sich aber erreichen, wenn man die Stütze  $B$  um ein gewisses Mafß nach oben schiebt. Durch dieses Aufwärtsbiegen vergrössert man den Stützendruck  $B$ ; in Folge dessen wird in  $\mathfrak{M}$  (Gl. 3, S. 51) das positive Glied vergrössert, hierdurch das bisher kleinere Moment  $\mathfrak{M}_{max}$  vergrössert und der absolute Werth des negativen Momentes  $\mathfrak{M}_1$  vermindert. Man erkennt dies deutlicher, wenn man zu dem allgemeinen Ausdrucke für  $\mathfrak{M}$ , der von der Höhenlage des Punktes  $B$  noch unabhängig ist,  $\mathfrak{M} = Bx - \frac{1}{2} px^2$ , die Grösse  $\frac{1}{2} plx$  mit + und - hinzufügt, dann kann man ordnen:

$$6) \quad \mathfrak{M} = \frac{1}{2} px(l - x) - (\frac{1}{2} pl - B)x.$$

Darin bezeichnet wieder das erste Glied der rechten Seite die unveränderte Parabel  $A_1 C_1 B_1$  (Fig. 64), während das letzte Glied wiederum durch eine Gerade dargestellt wird, deren Endordinate  $A_1 A_2$  nun aber  $= (1/2 p l - B) l$ , d. h. von  $B$  abhängig ist, und zwar bedeutet  $A_1 A_2$  wiederum den absoluten Werth  $\mathfrak{M}_1$  des Spannungsmomentes. Die günstigste Momentenfläche, d. h. diejenige, in welcher das absolut grösste Moment so klein wie möglich ist, könnte man nun schon zeichnerisch durch Probiren finden, indem man die Gerade  $B_1 A_2$  solange um  $B_1$  drehte, bis die beiden lothrecht gemessenen Abstände zwischen der Geraden und der Parabel, welche  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  entsprechen, gleich geworden wären. Eine günstigere Momentenfläche ist nicht mehr denkbar, denn jede Änderung der Richtung von  $B_1 A_2$  würde wohl das eine der beiden Momente verkleinern, das andere aber vergrössern. Hier, wie in den meisten derartigen Fällen, wo mehrere gefährliche Querschnitte vorhanden sind, kommt es darauf an, die Momente dieser Querschnitte auszugleichen, wenn man den günstigsten Zustand herbeiführen will. Hat man die Ausgleichung zeichnerisch gefunden, so braucht man nur  $A_1 A_2 = (1/2 p l - B) l$  zu setzen und hat damit  $B$  bestimmt. Der Weg der Rechnung bedingt, dass man das analytische Maximum von  $\mathfrak{M}$ , nämlich  $\frac{B^2}{2p} = \mathfrak{M}_1 = \frac{p l^2}{2} - B l$  setzt. Diese quadratische Gleichung liefert die beiden Lösungen  $B = p l (-1 \pm \sqrt{2})$ , von denen nur der positive Werth

$$7) \quad B = p l (-1 + 1,414) = 0,414 p l$$

möglichst kleine Werthe der Grösstmomente liefern kann, denn der negative Werth würde  $\frac{B^2}{2p}$  sehr gross machen. Da nun für diesen Auflagerdruck  $B = 0,414 p l$  die Momente  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  gleich werden, so berechnet man den Werth beider am einfachsten mittels der Formel für  $\mathfrak{M}_1 = 1/2 p l^2 - B l = p l^2 (0,5 - 0,414) = 0,086 p l^2$ . Diesem Auflagerdrucke  $B = 0,414 p l$  entspricht also ein überhaupt grösstes Moment

$$8) \quad \mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0,086 p l^2,$$

während bei  $B = 3/8 p l$  sich  $\mathfrak{M}_1 = 1/8 p l^2 = 0,125 p l^2$  ergab. Das grösste Moment ist also bei gegebener Balkenlänge und Last

im Verhältnis von 125 auf 86 vermindert, die Tragfähigkeit also auf das  $125 : 86 = 1,45$ fache gestiegen. Um nun diejenige Hebung  $f$  des Punktes  $B$  gegen die Einspannungsstelle  $A$  zu finden, welche dieser Verbesserung entspricht, bringt man an die Biegelinie die Kraft  $B = 0,414 pl$  (Fig. 65) und bekommt dann durch denselben Gedankengang, der auf S. 50/51 zur Bestimmung von  $B$  für  $f = 0$  führte, jetzt

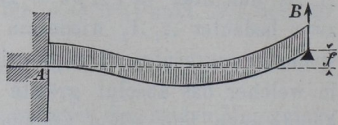


Fig. 65.

$$f = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ} = \frac{pl^4}{EJ} \left( \frac{0,414}{3} - \frac{1}{8} \right).$$

$$9) \quad f = 0,013 \frac{pl^4}{EJ}.$$

Um die verhältnismässige Grösse dieser Hebung einigermaßen übersehen zu können, führen wir wieder die stärkste Spannung  $\sigma$  ein, indem wir bedenken, dass das grösste Moment jetzt  $0,086 pl^2 = \sigma \frac{J}{e}$ , also  $\frac{pl^2}{J} = \frac{\sigma}{0,086 e}$  sein muss. Führt man dies in Gl. 9 ein, so wird

$$10) \quad \frac{f}{l} = 0,151 \frac{\sigma}{E} \frac{l}{e}.$$

Setzt man wieder, wie in anderen Beispielen (S. 47)

$$\sigma = 700; \quad E = 2000000; \quad \frac{l}{e} = 20,$$

so wird  $\frac{f}{l} = 0,001057$ , d. h. rund  $\frac{1}{1000}$ . Eine Hebung der Stütze  $B$  um  $\frac{1}{1000}$  der Spannweite  $l$  genügt also schon, um die Tragfähigkeit des Balkens auf das 1,45fache zu erhöhen. Von diesem günstigen Ergebnisse würde man gewiss mit Vortheil Gebrauch machen, wenn man sicher wäre, den erstrebten Zustand des Balkens genau erreichen und auf die Dauer erhalten zu können. Wenn man aber die Mittel erwägt, die man zu einer derartig genauen Auflagerung eines Balkens anwenden müsste, so überzeugt man sich leicht, dass eine Balken-Anordnung, deren Spannungszustand von solchen Feinheiten abhängt, trotz der Möglichkeit, rechnungsmässig sehr günstige Verhältnisse zu liefern, wenig Vertrauen verdient, da durch Abweichungen von der gewünschten Stützenlage leicht eine Vergrösserung

der Momente eintreten kann, ohne dass man es wahrzunehmen vermag. Dies ist ein Übelstand, der den meisten statisch unbestimmten Anordnungen anhaftet.

### e) Prismatischer, gleichförmig belasteter Balken auf drei Stützen.

Wir betrachten nur den Fall, dass die 3 Stützen gleiche Entfernung  $l$  haben. Für einen solchen Balken (Fig. 66) kann man nur die beiden Gleichgewichtsgleichungen aufstellen:

$$1) \quad A + C + B = 2pl$$

und in Bezug auf  $C$ :  $Al - Bl = 0$  oder

$$2) \quad A = B.$$

Die noch fehlende dritte Gleichung muss wieder aus der Biegelshre geschöpft werden; die Anordnung ist einfach statisch unbestimmt. Bei dieser dritten Gleichung kommt es nun wieder wesentlich auf die gegenseitige Höhenlage der Stützen an. Deshalb machen wir gleich von Anfang an die Annahme, die Mittelstütze  $C$  liege um  $c$  unter der Verbindungsgeraden der Endstützen, wobei dann  $c$  beliebig  $\geq 0$  gesetzt werden kann. Geht man mit der Mittelstütze weit genug herunter, so wird der Balken sich endlich nur auf die Enden stützen (Fig. 67), es wird  $A = B = pl$ ,  $C = 0$  sein. Schiebt man aber den Punkt  $C$  weit genug in die Höhe (Fig. 68), so wird der Balken endlich nur auf  $C$

Fig. 66.

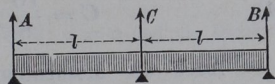


Fig. 67.

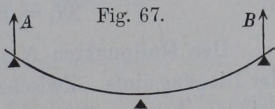


Fig. 68.

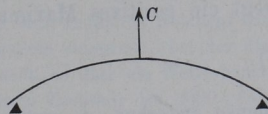
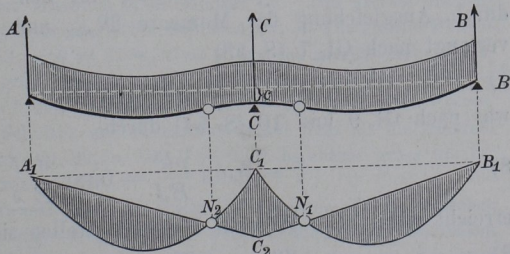


Fig. 69.

$C = 2pl$ , und  $A = B = 0$  sein. Die Biegelshre muss in allen Fällen zur lothrechten Mittellinie symmetrisch, d. h. in der Mitte waagrecht sein (Fig. 69).



Wenn man sich nun, wie bei Fig. 58 (S. 45) die linke Hälfte

wagrecht eingespannt denkt, so gleicht die rechtsseitige Hälfte  $CB$  in Fig. 69 der Fig. 65 (S. 54), so dass die sämtlichen Untersuchungen von S. 52—54 sich hier verwerthen lassen. Es wird

$$c = \frac{Bl^3}{3EJ} - \frac{pl^4}{8EJ}, \text{ mithin}$$

$$3) \quad B = \frac{3}{8} pl + \frac{3EJc}{l^3} = A \quad \text{und}$$

$$4) \quad C = \frac{10}{8} pl - \frac{6EJc}{l^3}.$$

Auch die Momentenfläche wird für die rechtsseitige Hälfte ebenso, wie in Fig. 64 (S. 50) gezeigt, und für die linksseitige Hälfte dazu symmetrisch.  $\mathfrak{M}_1$  wird hier das Moment über der Mittelstütze

$$5) \quad \mathfrak{M}_1 = C_1 C_2 = (1/2 pl - B) l.$$

Den Nullpunkten  $N_1$  und  $N_2$  entsprechen wieder Wendepunkte der Biegungslinie. Zwischen den Wendepunkten kehrt die Biegungslinie die konvexe Seite nach oben (die Zugspannungen liegen oben), ausserhalb derselben ist es umgekehrt. Mitten zwischen  $B_1$  und  $N_1$  liegt ein positives Maximalmoment

$$6) \quad \mathfrak{M}_{max} = \frac{B^2}{2p},$$

ebenso zwischen  $A_1$  und  $N_2$ .

Für  $c = 0$ , d. h. für Stützen in einer Flucht, wird  $B = 3/8 pl$ .  $\mathfrak{M}_{max} = 9/128 pl^2$ ;  $\mathfrak{M}_1 = 1/8 pl^2$ . Eine Senkung der Mittelstütze um  $c$  vergrössert  $B$ , vergrössert  $\mathfrak{M}_{max}$  und verkleinert gleichzeitig  $\mathfrak{M}_1$ .

Die günstigste Anordnung für den Balken wird wieder durch Ausgleichung der Momente  $\mathfrak{M}_{max}$  und  $\mathfrak{M}_1$  erreicht. Dies verlangt nach Gl. 7 (S. 53)

$$7) \quad B = 0,414 pl,$$

was nach Gl. 9 und 10 (S. 54) durch

$$8) \quad \frac{c}{l} = 0,013 \frac{pl^3}{EJ} = 0,151 \frac{\sigma l}{E e}$$

erreicht wird. Die grössten Momente stellen sich dann auf

$$9) \quad \mathfrak{M}_{max} = \mathfrak{M}_1 = 0,086 pl^2,$$

während bei Stützen in gleicher Flucht  $\mathfrak{M}_1 = 0,125 pl^2$  sein würde.



**Beispiel:** Ein Holzbalken von  $2l = 10\text{ m} = 1000\text{ cm}$  Länge, im Querschnitte  $15\text{ cm}$  breit und  $16\text{ cm}$  hoch, werde von drei Arbeitern  $A$ ,  $C$  und  $B$  getragen. Es soll die Gewichtsvertheilung berechnet werden für verschiedene Höhenlagen der tragenden Schultern. Der Balken hat  $10 \cdot 0,16 \cdot 0,15 = 0,24\text{ cbm}$  Inhalt; wiegt  $1\text{ cbm } 600\text{ kg}$ , so wird das Gesamtgewicht  $2pl = 144\text{ kg}$ ;  $p = 0,144\text{ kg/cm}$ . Es ist  $J = \frac{1}{12} 15 \cdot 16^3 = 5120$ ;  $\mathfrak{B} = 640$ ;  $E = 120\,000\text{ at}$ ,  $l = 500\text{ cm}$ .

$$\text{Es wird } A = B = \frac{3}{8} \cdot 72 + \frac{3}{l^3} EJc = 27 + 14,746 c;$$

$$C = \frac{10}{8} \cdot 72 - \frac{6}{l^3} EJc = 90 - 29,492 c.$$

Fehlt die Mittelstütze, so wird  $A = B = 72\text{ kg}$ ;  $C = 0$  und die Durchbiegung in der Mitte

$$c = 90 : 29,492 = 3,05\text{ cm}.$$

Hält der mittlere Arbeiter also seine Schulter um dies Maß niedriger als die beiden anderen, so bekommt er gar keine Last. In diesem Falle ist das grösste Moment in der Mitte

$$\frac{1}{8} p (2l)^2 = \frac{1}{2} pl^2 = \frac{1}{2} \cdot 72 \cdot 500 = 18\,000\text{ cmkg}$$

und die Spannung  $\sigma = 18\,000 : 640 = 28,1\text{ at}$ .

Sollen alle drei Schultern gleich stark tragen, soll  $A = B = C = \frac{1}{3} \cdot 144 = 48\text{ kg}$  sein, so muss die mittlere Schulter um  $c = \frac{48 - 27}{14,746} = 1,42\text{ cm}$  tiefer

liegen als die anderen. In diesem Falle wird  $\mathfrak{M}_{max} = \frac{48^2}{2 \cdot 0,144} = 8000$ ,

$\mathfrak{M}_1 = (\frac{1}{2} 72 - 48) 500 = -6000$ , d. h. wegen des negativen Zeichens ist  $\mathfrak{M}_1$ , welches mit positivem Zeichen einer Biegelinie entsprach, bei der die konvexe Seite oben lag, hier ein umgekehrtes Moment, so dass ein Wendepunkt nicht vorkommt. Die stärkste Spannung in diesem Zustande ist  $8000 : 640 = 12,5\text{ at}$ .

Die Spannung wird am kleinsten für

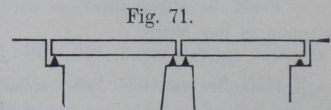
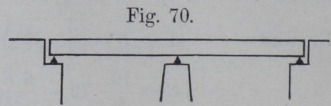
$$c = 0,013 \frac{pl^4}{EJ} = \frac{0,013 \cdot 72 \cdot 500^3}{120\,000 \cdot 5120} = 0,19\text{ cm}.$$

Dabei ist  $A = B = 0,414 pl = 29,3\text{ kg}$ ;  $C = 144 - 2 \cdot 29,3 = 84,4\text{ kg}$ , so dass die mittlere Schulter jetzt erheblich mehr belastet ist. Das grösste Moment wird  $0,086 pl^2 = 3096$ , die Spannung  $3096 : 640 = 4,8\text{ at}$ . — Für gleiche Höhenlage der Schultern wird  $A = B = 27\text{ kg}$ ;  $C = 90\text{ kg}$ ; das grösste Moment  $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{8} pl^2$ , d. h.  $\frac{1}{4}$  so gross wie für  $C = 0$ , also  $\mathfrak{M}_1 = 4500$ ,  $\sigma = 7\text{ at}$ . — Dagegen wird  $A = B = 0$  und  $C = 144\text{ kg}$  für  $c = -27 : 14,746 = -1,83\text{ cm}$ , d. h. wenn die mittlere Schulter um dieses Maß höher liegt als die anderen. Das grösste Moment wird nun  $\mathfrak{M}_1 = \frac{1}{2} pl^2 = 0$ , d. h. ebenso gross wie für  $C = 0$ , nämlich  $18\,000$  mit  $\sigma = 28,1\text{ at}$ .

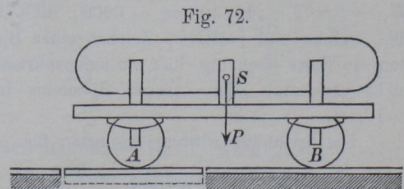
Die Spannung schwankt also in diesen betrachteten Fällen zwischen  $4,8$  und  $28,1\text{ at}$ . Dem entsprechen freilich, weil ein biegsamer Holzbalken angenommen war, auch ziemlich beträchtliche Höhenverschiebungen; für einen steiferen Eisenträger würden ähnliche Spannungsunterschiede durch viel geringere Verschiebungen bewirkt werden. Solche Balken auf mehr als zwei

Stützen sind hiernach sehr empfindlich gegen Höhenverschiebungen einzelner Stützpunkte und deshalb nur mit Vorsicht zu verwenden.

Soll eine Balkenbrücke mit zwei Oeffnungen gebaut werden, so hat man die Wahl, ob man (Fig. 70) Balken verwenden will, die über beide Öffnungen durchgehen, oder ob man auf dem Mittelpfeiler neben einander zwei Auflager anbringen und die Balken dort unterbrechen will (Fig. 71). Letzterer Fall hat den Vorzug, statisch bestimmt zu sein; wenn einer der Pfeiler sich etwas senkt, so werden dadurch die Brückenbalken nicht in Spannung gerathen, vielmehr werden sie widerstandslos dem Pfeiler folgen.



Mit der statisch bestimmten Auflagerung eines Trägers auf zwei Stützen hängt auch ein Verfahren zusammen, das Gewicht eines sehr langen, auf einem zweiachsigen Wagen befestigten Dampfkessels zu bestimmen, ohne dass eine zur Aufnahme des ganzen Wagens hinreichende Brückenwaage verfügbar ist. Man fährt in diesem Falle mit der einen Achse auf die Waage (Fig. 72) und ermittelt die Last  $A$ , verfährt dann mit der anderen Achse  $B$  in derselben Weise und erhält in der Summe  $A + B$  das Gesamtgewicht  $P$  des belasteten Wagens. Für die Zulässigkeit dieses Verfahrens ist nur erforderlich, dass



die Fahrbahn zu beiden Seiten der Waage nicht gar zu uneben sei, damit sich der wagerechte Abstand der Schwerpunkts-Lothrechten von den Achsen nicht merklich ändere. Bei der Verwendung eines dreiachsigen Wagens würde dieses Vorgehen nicht brauchbar sein, weil man nicht wissen kann, ob die Achse, nachdem sie die Waage verlassen hat, noch dieselbe Last trägt wie bei ihrer Stellung auf der Waage.

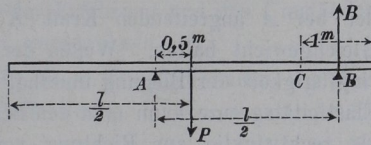
Bei dieser Gelegenheit möge noch ein Verfahren angegeben werden, wie man das Gewicht eines Längenmeters von einer Eisenbahnschiene oder einem gewalzten Träger bestimmen kann, wenn die vorhandene Waage zur Wägung des ganzen Stabes nicht ausreicht, der Stab aber auch nicht zerschnitten werden soll. Es sei  $l$  die Länge des ganzen Stabes oder Balkens; von dem rechtsseitigen Ende aus messe man eine Länge  $= 1 \text{ m}$  ab (Fig. 73) und bringe unter der Mitte  $B$  dieser Länge eine schneidenartige Stütze an. In der Mitte  $A$

der übrigen Länge  $l - 1\text{ m}$  werde in gleicher Weise eine Schneide  $A$  angebracht. Der Schwerpunkt der ganzen Schiene liegt dann um  $\frac{1}{2}\text{ m}$ , die Schneide  $B$  um  $\frac{1}{2}l$  von der Schneide  $A$  entfernt; der Stützendruck  $B$  wird daher

$$B = \frac{P \cdot 0,5}{\frac{1}{2}l} = \frac{P}{l},$$

d. h. das gewünschte Gewicht von einem Längenmeter der Schiene. Dieses Gewicht kann man ermitteln, indem man die Schneide  $B$  auf die Brücke einer Waage stützt. — Zur Erklärung diene noch Folgendes: Denkt man sich das Stück von  $1\text{ m}$  Länge thatsächlich abgeschnitten, so befindet sich dieses auf der Schneide  $B$  im (wenn auch unsicheren) Gleichgewichte, ebenso der lange Abschnitt auf der Schneide  $A$ . Verbindet man die Theile nun an der Schnittstelle  $C$  mit einander, so treten in der Verbindung keine Spannkkräfte auf; ebenso wenig wird dies daher in der ungetrennten Schiene vorkommen. Die Schneide  $B$  trägt also nur das abgemessene (aber nicht abgetrennte) Schienenstück von  $1\text{ m}$  Länge. (Dieses Beispiel gehört eigentlich nicht zur Biegungslehre, sondern in Theil 1, S. 162.)

Fig. 73.



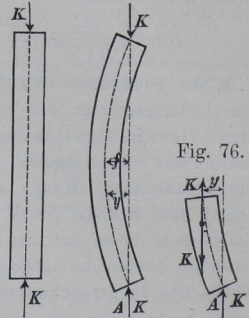
## 6. Knickfestigkeit.

Wird ein ursprünglich völlig gerader und gleichmässiger Stab an den Enden durch Druckkräfte  $K$  belastet (Fig. 74), die genau in die Mittellinie des Stabes fallen, so ist nur eine geradlinige Verkürzung des Stabes möglich. Dies zeigt sich auch in Wirklichkeit, solange die Länge des Stabes im Verhältnisse zur Querschnittsbreite nicht erheblich ist. Bei grösserer Länge aber ist mit der Wirkung der Kräfte  $K$  eine seitliche Ausbiegung verbunden, die offenbar daher rührt, dass die vorstehend genannten Bedingungen der völligen Geradlinigkeit und Gleichmässigkeit und des vollkommenen Zusammenfallens der Druckkräfte mit der Mittellinie des Stabes in aller Schärfe nicht zu erfüllen sind. Bei allmählichem Anwachsen der Kräfte erfolgt schliesslich eine Zerstörung durch gleichzeitige Zusammendrückung und Biegung, und man nennt diesen Vorgang Knickung.

Wir nehmen an, der Stab habe sich um ein gewisses Mafß gebogen und befinde sich im Gleichgewichte; seine Spannungen seien noch innerhalb der Elasticitätsgrenze. Die beiden Kräfte  $K$  sollen in ihrer ursprünglichen Richtung und Lage verblieben sein (Fig. 75).

Führt man an irgend einer Stelle, wo die Ausbiegung  $y$  betrügt, einen Querschnitt durch den Stab und betrachtet das Stück unterhalb des Schnittes (Fig. 76), so müssen an dem

Fig. 74. Fig. 75.



Schnitte innere Kräfte auftreten, die der bei  $A$  angreifenden Kraft  $K$  das Gleichgewicht halten. Wegen der Geringfügigkeit der Biegung innerhalb der Elasticitätsgrenze kann man den Schnitt als rechtwinklig zur Richtung von  $K$  annehmen. Die Richtungslinie von  $K$  geht um  $y$  an dem Schwerpunkte der Querschnittsfigur vorbei. Zur Erleichterung der Spannungsberechnung denken wir uns an einem Punkte des unteren Stabtheils 2 mit  $K$  gleiche und parallele, aber einander entgegengesetzte Kräfte so hinzugefügt, dass sie durch den Schwerpunkt der Querschnittsfigur gehen; hierdurch wird an dem Gleichgewichtszustande nichts geändert. Die ursprünglich gegebene und die entgegengesetzt hinzugefügte Kraft  $K$  bilden ein Kräftepaar vom Momente  $Ky$ , welches an der rechten, konkaven Seite eine Druckspannung  $\sigma = \frac{Ky e}{J}$  hervorbringt. Die zweite hinzugefügte Kraft  $K$  aber ist eine durch den Schwerpunkt des Schnittes gehende Druckkraft und erzeugt eine gleichmässig über die Schnittfläche vertheilte Druckspannung  $\frac{K}{F}$ . Diese vereinigt sich mit der aus dem Biegemomente hervorgehenden Druckspannung zu der an dem Schnitt überhaupt vorkommenden grössten Druckspannung

$$\sigma'' = \frac{Ky e}{J} + \frac{K}{F}.$$

Nennt man  $f$  die stärkste Durchbiegung, welche in der Mitte der Länge  $l$  auftreten muss, so wird die überhaupt grösste an dem Stabe vorkommende Spannung die Druckspannung  $\sigma''$ , deren absoluter Werth

$$1) \quad \sigma'' = \frac{K f e}{J} + \frac{K}{F}.$$

Man könnte erwarten, dass die unbekannte Durchbiegung  $f$  mit Hülfe der Gleichung der Biegunslinie zu ermitteln sein würde;

doch gelingt ein derartiger Versuch nicht, wie in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre, ausführlich entwickelt wird. Der Grund des Misserfolges liegt in dem Umstande, dass die Biegung nur eine Folge zufälliger Abweichungen ist, deren Grösse nicht zahlenmässig feststeht, sondern nur aus der Erfahrung und den Umständen eines bestimmten Falles ermittelt werden kann.

Bei den Belastungsfällen Fig. 58 u. 59 nun haben wir die Durchbiegung  $f$  eines Stabes auf die Form

$$f = \frac{1}{12} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e} \text{ bzw. } \frac{5}{48} \frac{\sigma}{E} \frac{l^2}{e}$$

(Gl. 14 und 18, S. 46) gebracht, und auf ähnliche Form lässt sie sich auch in den einfachen, in der Tabelle auf S. 44 behandelten Fällen bringen; es hat nur die Ziffer vor  $\frac{\sigma}{E}$  in jedem Fall ihren besonderen Werth. Daher können wir auch bei der jetzt vorliegenden Aufgabe mit einiger Berechtigung  $fe$  verhältnissgleich mit  $l^2$ , also etwa

$$fe = al^2 \text{ setzen.}$$

Da bei einem nachgiebigen, wenig steifen Stoffe eine starke Durchbiegung eher erwartet werden darf als bei einem verhältnissmässig starren Körper, so ist die Ziffer  $a$  eine in erster Linie von dem Material abhängige Verhältnisszahl, und zwar darf der Erfahrung zufolge etwa gesetzt werden: für Stabeisen  $a = 0,0001$ , für Gusseisen und Holz  $a = 0,0002$ . Natürlich sind dies nur rohe Mittelwerthe; eingehendere Versuche haben gezeigt, dass  $a$  nicht ganz allein von dem Stoffe, sondern auch in nicht ganz einfacher Weise noch von dem Längenverhältnis abhängt, doch können wir darauf in diesem Buche nicht näher eingehen.

Hiernach wird dann aus Gl. 1:

$$\sigma'' = K \left( \frac{al^2}{J} + \frac{1}{F} \right).$$

Da der Stab die Freiheit hat, sich nach irgend einer Richtung auszubiegen, so muss man für vorstehende Gleichung den ungünstigsten Fall, d. h. für  $J$  den kleinstmöglichen Werth annehmen. Ist der Querschnitt z. B. ein Rechteck,  $d$  die kleinere,  $h$  die grössere Seite, so ist  $J = \frac{1}{12} h d^3$  zu setzen in Bezug auf die zur Kante  $h$  parallele Schwerpunktsachse. In der Richtung der

kleineren Seite  $d$  ist dann die Ausbiegung zu erwarten. Führt man noch den zu  $J$  gehörigen kleinstmöglichen Trägheitshalbmesser  $i$  ein, indem man  $J = F i^2$  setzt, so wird

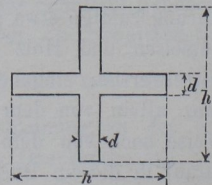
$$2) \quad \sigma'' = \frac{K}{F} \left( \alpha \frac{l^2}{i^2} + 1 \right), \quad \text{oder auch mit } n = \left( \alpha \frac{l^2}{i^2} + 1 \right)$$

$$3) \quad F = \frac{K}{\sigma''} \cdot n \quad \text{und} \quad K = \frac{F \sigma''}{n}.$$

Der Klammerausdruck  $n$  wird für  $l = 0$  zu Eins und wächst mit zunehmender Stablänge. Ist  $\sigma''$  die zulässige Druckspannung, so würde  $K : \sigma''$  der bei einer Berechnung auf reine Druckfestigkeit erforderliche Querschnitt sein. Der Zerknickungsfaktor  $n = \alpha \frac{l^2}{i^2} + 1$  giebt an, in welchem Verhältnisse der Querschnitt wegen der Möglichkeit des Zerknickens vergrößert werden muss.

Bei einem auf Knicken beanspruchten Stabe muss die Querschnittsform zweckmässig so gewählt werden, dass bei gegebener Fläche  $F$  das Quadrat des kleinsten Trägheitshalbmessers  $i$  möglichst gross werde. Man muss den Querschnitt so anordnen, dass zwei zu einander rechtwinklige Symmetrieachsen gleich grosses Trägheitsmoment liefern. Jede Abweichung von dieser Form würde wohl in einer Richtung die Steifigkeit vergrößern, aber nur zum Schaden der Steifigkeit in anderer Richtung. Von allen rechteckigen Querschnitten verdient also das Quadrat den Vorzug. Der Kreis kommt bei den natürlichen Baumstämmen zur Anwendung. Für die Verwendung von Eisen wird man hohlen Querschnittsformen (Ring, hohlem Quadrat) und gerippten Formen, z. B. dem Kreuzquerschnitte mit gleichen Rippen (Fig. 77) den Vorzug geben.

Fig. 77.



**Beispiele:** Für einen Schmiedeeisenstab von 100 cm Länge, dessen Querschnitt ein Quadrat von 2 cm Seite, ist  $i^2 = 2^2 : 12$ , und der Zerknickungsfaktor

$$n = 0,0001 \cdot \frac{100^2}{2^2} \cdot 12 + 1 = 4.$$

Bei 700 at zulässiger Druckspannung wird daher die zulässige Belastung

$$K = 2^2 \cdot 700 : 4 = 700 \text{ kg.}$$

Für einen kreuzförmigen Querschnitt (Fig. 77) ist nach S. 24

$$J = \frac{1}{12} d h^3 \left( 1 + \frac{d^2}{h^2} - \frac{d^3}{h^3} \right),$$

$$F = 2 d \cdot h - d^2 = d \cdot h \left( 2 - \frac{d}{h} \right).$$

Bei der Berechnung des Zerknickungsfaktors kann man (im Hinblick auf die Unsicherheit des Werthes  $\alpha$ ) wegen der Kleinheit von  $d : h$  annähernd

$$i^2 = \frac{d \cdot h^3}{12 \cdot 2 d \cdot h} = \frac{h^2}{24} \text{ setzen.}$$

Es wird dann 
$$n = \alpha \cdot 24 \frac{l^2}{h^2} + 1;$$

für Schmiedeseisen und  $l = 20 h$  ist  $n = 0,96 + 1$  oder rund  $n = 2$ . (Abrundungen sind bei der Berechnung von  $n$  sehr angebracht.) Die Fläche  $F$  ist, z. B. für  $d = 2,5 \text{ cm}$ ,  $h = 20$ , also  $l = 400 \text{ cm}$ ,

$$F = 2 \cdot 2,5 \cdot 20 - 2,5^2 = 93,75 \text{ qcm},$$

mit  $\sigma'' = 700$  wird dann die zulässige Belastung

$$K = \frac{700 \cdot 93,75}{2} = 32813 \text{ kg.}$$

Ist der Stab von Gusseisen, so wird  $\alpha$  doppelt so gross, daher

$$n = 1,92 + 1 = 2,92, \text{ rund } 3.$$

Nimmt man wiederum  $\sigma'' = 700$ , so wird

$$K = \frac{700 \cdot 93,75}{3} = 21875 \text{ kg.} \quad -$$

Für eine hohle Gusseisensäule von dem äusseren und inneren Halbmesser  $R$  bzw.  $r$  ist

$$J = \frac{1}{4} (R^4 - r^4) \pi; \quad F = (R^2 - r^2) \pi,$$

mithin  $i^2 = \frac{1}{4} (R^2 + r^2)$ , daher

$$n = 0,0002 \cdot 4 \frac{l^2}{R^2 + r^2} + 1;$$

mit  $r = 0,9 R$  wird dann

$$n = 0,00044 \frac{l^2}{R^2} + 1.$$

Ist dann noch  $l = 40 R$ , so wird  $n = 1,7$ .

$R = 10 \text{ cm}$ ,  $l = 400 \text{ cm}$  und  $\sigma'' = 700 \text{ at}$  liefert dann wegen  $F = 59,69 \text{ qcm}$

$$K = \frac{700 \cdot 59,69}{1,7} = 24576 \text{ kg.}$$

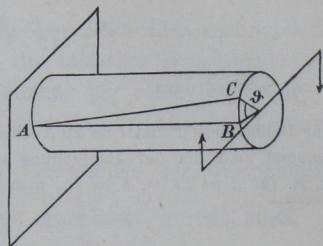
Weiteres über Knickfestigkeit findet man in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre.

## 7. Drehungsfestigkeit.

### a) Stab von kreisförmigem und kreisringförmigem Querschnitte.

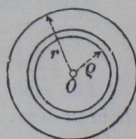
Wird ein Cylinder an beiden Enden durch gleiche Kräftepaare von entgegengesetztem Drehsinn ergriffen, deren Ebenen rechtwinklig zur Cylinderachse sind, so heben sich diese Paare am starren Körper bekanntlich ohne Weiteres auf (Theil 1, S. 108); am elastisch-festen Körper aber nur, wenn seine Widerstandsfähigkeit hinreicht und auch dann erst, nachdem eine entsprechende Formänderung stattgefunden hat. Diese Formänderung besteht in einer Verdrehung; die einzelnen Querschnittsebenen verdrehen sich derartig gegen einander, dass die ursprünglich geraden Cylinderseiten (z. B.  $AB$ ) in sehr steile

Fig. 78.



Schraubenlinien (z. B.  $AC$ ) übergehen. (In Fig. 78 ist das linksseitige Ende des Cylinders festgehalten gedacht.) Die Verdrehungen der Querschnitte gegen einander sind als Gleitungen der einzelnen Querschnittstheile aufzufassen, mit denen das Auftreten entsprechender Schubspannungen verbunden ist. Versuche haben ferner gezeigt, dass Halbmesser eines Querschnitts auch nach der Formänderung noch geradlinig sind. Daraus folgt, dass die Gleitung in der Achse bei  $O$  (Fig. 79) Null ist und verhältnismäßig mit dem Abstände  $\varrho$  von  $O$  nach aussen zunimmt. Da nun nach Gl. 1, S. 15

Fig. 79.



$$1) \quad \gamma = \frac{\tau}{G},$$

d. h. die Gleitung verhältnismäßig mit der Schubspannung ist, so muss auch die Schubspannung mit  $\varrho$  verhältnismäßig sein. Nennt man also die Schubspannung in den Abständen  $\varrho$  und  $r$  von der Mitte  $\tau_\varrho$  bzw.  $\tau$ , so ist (ähnlich wie für die Biegungsspannungen Gl. 1, S. 18)

$$2) \quad \tau_\varrho : \tau = \varrho : r.$$



Nimmt man aus dem kreisförmigen Querschnitt einen dünnen Ring vom Halbmesser  $\varrho$  und von der Fläche  $dF$  heraus, so tritt an diesem durchweg die gleiche Schubspannung  $\tau_\rho$  in tangentialer Richtung, d. h. rechtwinklig zum Halbmesser  $\varrho$  auf; das giebt für die Ringfläche  $dF$  eine gesammte innere Tangentialkraft  $dF\tau_\rho$ , welche in Bezug auf die Cylinderachse ein Moment

$$d\mathfrak{M} = \tau_\rho dF\varrho \text{ liefert.}$$

Dies ist das der weiteren Verdrehung entgegenwirkende Moment des Ringes. Summirt man über den ganzen Querschnitt, so ist das gesammte Spannungsmoment mit Rücksicht auf Gl. 2

$$\mathfrak{M} = \frac{\tau}{r} \int dF \cdot \varrho^2,$$

welches dem verdrehenden Kräftepaare gleich sein muss. Wir können daher  $\mathfrak{M}$  unmittelbar als das Verdrehungsmoment bezeichnen. Der Werth  $\int dF \cdot \varrho^2$  bedeutet (nach Theil 1, S. 270) das polare Trägheitsmoment  $J_0$  des Querschnitts in Bezug auf die Achse  $O$  des Stabes. Sonach wird

$$3) \quad \frac{\tau J_0}{r} = \mathfrak{M}.$$

Diese Formel ist ähnlich gestaltet wie die Gl. 3, S. 21, für die Biegungsspannung. Nur kommt hier das polare Trägheitsmoment in Frage.

Der Winkel  $\vartheta$ , um den sich der eine Querschnitt gegen einen um  $l$  davon entfernten verdreht, heisst der Verdrehungswinkel. Die Berechnung desselben folgt leicht aus Fig. 78. Die Abweichung der Schraubenlinie  $AC$  von der Geraden  $AB$  ist die der Schubspannung  $\tau$  der äusseren Mantelfläche entsprechende Gleitung; daher wird der Verdrehungsbogen  $BC = \gamma l$ . Weil aber auch  $BC = r\vartheta$ , so wird  $r\vartheta = \gamma l$  oder

$$4) \quad \vartheta = \frac{\tau l}{G r} = \frac{\mathfrak{M} l}{G J_0}$$

(entsprechend Gl. 9, S. 43).

Diese Gleichungen gelten für kreis- und kreisringförmige Querschnitte. Für Vollkreise ist (nach Theil 1, S. 273)  $J_0 = 1/2 r^4 \pi$ , für einen Ring von den Halbmessern  $R$  und  $r$

$$J_0 = 1/2 (R^4 - r^4) \pi.$$

Die Formeln 2—4 sind nicht nur für den ruhenden Cylinder, sondern auch für den gleichförmig um seine Achse sich drehenden Cylinder verwendbar, weil die dieser Drehung entsprechenden Ergänzungskräfte (Centrifugalkräfte) in den einzelnen Theilen des Körpers nur (meist unbedeutende) Zugspannungen hervorrufen.

**Beispiel:** Auf einer Maschinenwelle (Fig. 80) befinden sich zwei Zahnräder im Abstände  $l = 250$  cm von einander. Am Umfange des rechtsseitigen vom Halbmesser  $= 40$  cm wirke eine Kraft  $K = 1000$  kg. Dadurch entsteht ein Drehmoment  $\mathfrak{M} = 40\,000$  cmkg, welches durch ein gleiches Widerstandsmoment am anderen Zahnrade aufgehoben werden möge. Die zulässige Schubspannung möge mit Rücksicht auf mögliche Unregelmässigkeiten der Bewegung nur zu  $\tau = 200$  at angenommen werden, dann gilt für den erforderlichen Wellenhalbmesser  $r$

$$200 \cdot \frac{1}{2} r^3 \pi = 40\,000 \quad \text{oder} \quad r = 5 \text{ cm.}$$

Die elastische Verdrehung der beiden Zahnräder gegen einander beträgt (Gl. 4)

$$\vartheta = \frac{200}{800\,000} \frac{250}{5} = \frac{1}{80},$$

oder in Graden  $0^\circ 43'$ .

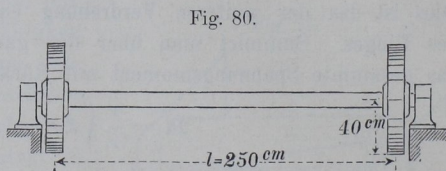


Fig. 80.

### b) Stab von rechteckigem Querschnitte.

So einfach die Drehungsfestigkeit eines cylindrischen Stabes zu berechnen war, so verwickelt werden ihre Verhältnisse bei Stäben anderer Querschnittsform. Ein für diese Untersuchung wichtiges Ergebnis folgt aus einer Eigenschaft der Schubspannungen an einem würfelförmigen Körper. Denkt man sich aus einem Körper, der durch schiebende, parallel der Bildebene wirkende Kräfte angegriffen ist, einen Würfel von der Seite  $= 1$  herausgeschnitten (Fig. 81) und nimmt an, dass an der oberen Fläche  $DC$  eine wagerecht nach rechts gerichtete Schubspannung  $\tau$  auftritt, der an  $AB$  eine gleiche nach links gerichtete entgegen wirkt, so fordert das Gleichgewicht gegen Drehung, dass dieses Kräftepaar durch ein gleiches entgegengesetztes aufgehoben werde. Die ersten beiden

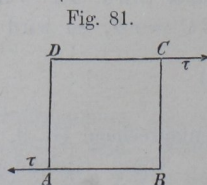


Fig. 81.

Schubspannungen bedingen also das Auftreten gleich grosser an den Flächen  $AD$  und  $BC$  (Fig. 82).

An den vier zu einer Ebene rechtwinkligen Seitenflächen eines rechtwinkligen Parallelepipedes treten in den Richtungen parallel zu jener Ebene stets gleiche Schubspannungen auf.

Gehört nun die Seitenfläche  $AD$  etwa der freien Mantelfläche eines auf Drehung beanspruchten Körpers an, so kann an dieser keine Schubspannung auftreten, und damit wird auch die in  $AB$  rechtwinklig zu der Mantelfläche gerichtete Schubspannung Null. Hiernach müssen an einem solchen Körper die am äusseren Rande eines Querschnitts auftretenden Schubspannungen nothwendig parallel der Begrenzung des Querschnittes sein. Ist aber  $ABCD$  (Fig. 83) der rechteckige Querschnitt des Stabes mit den Seiten  $AB = d$ ,  $BC = h$ , wobei  $h \geq d$ , so kann an einer Kante, z. B. bei  $D$  gar keine Schubspannung auftreten, weil sowohl die zu  $AD$ , wie auch die zu  $CD$  rechtwinklige Schubspannung verschwinden muss. Es folgt also das auf den ersten Blick überraschende Ergebnis, dass die von der Achse des Stabes am weitesten entfernten Querschnittstheile an den vier Ecken spannungslos sind.

Über die Veränderlichkeit der längs des Randes eines Querschnittes auftretenden Schubspannungen giebt die Grösse der Gleitung an den verschiedenen Stellen der Mantelfläche des Stabes Auskunft (s. C. Bach, Elasticität und Festigkeit). Versieht man die Mantelfläche des Stabes mit einem Netze von Quadraten und beobachtet diese, nachdem die Verdrehung stattgefunden hat, so findet man, dass die Quadrate sich im Allgemeinen in Rhomben verwandelt haben. Die Abweichung der Rhomben von den Quadraten kennzeichnet unmittelbar die Gleitung an den verschiedenen Stellen. Dabei bestätigt sich zunächst, dass an den Kanten  $ABCD$  die Figuren quadratisch

Fig. 82.

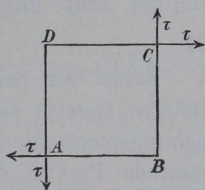
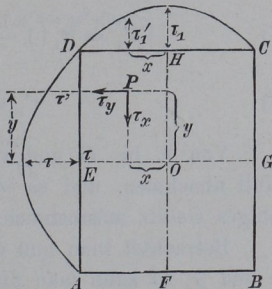


Fig. 83.



geblieben sind. Ferner ergibt sich, dass die Gleitungen in denjenigen Punkten  $E$  und  $G$  des Umfanges, welche der Achse am nächsten liegen, am stärksten, in den Mittelpunkten  $F$  und  $H$  der kurzen Seiten weniger stark sind. Die Spannungen sind mit den Gleitungen verhältnisgleich. Sind  $\tau$  und  $\tau_1$  die Schubspannungen an den Punkten  $E$  und  $H$ , so kann man diese den Entfernungen von der Achse umgekehrt proportional annehmen, d. h.

$$5) \quad \tau_1 : \tau = d : h.$$

Längs der Seitenfläche  $AD$  muss die Spannung nach einem stetigen Gesetze sich ändern; das einfachste der hier wahrscheinlichen Gesetze ist das parabolische, durch die über der Sehne  $AB$  stehende Parabel dargestellt. Nimmt man dies als gültig an, so wird für die Spannung  $\tau'$  im Abstände  $y$  von der Mitte:

$$y^2 : \frac{1}{4} h^2 = (\tau - \tau') : \tau \quad \text{oder}$$

$$6) \quad \tau' = \tau \left( 1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right).$$

Ebenso wird in einem Abstände  $x$  von der Mitte  $H$  der kürzeren Seite die Spannung

$$7) \quad \tau'_1 = \tau_1 \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right), \quad \text{oder wegen Gl. 5:}$$

$$8) \quad \tau'_1 = \tau \frac{d}{h} \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right).$$

Von  $E$  bis  $O$  und von  $H$  bis  $O$  muss die Spannung bis auf Null abnehmen, und es steht nichts im Wege, dafür ein geradliniges Gesetz anzunehmen.

Betrachtet man nun einen beliebigen Punkt  $P$  der Koordinaten  $x$  und  $y$ , so kann man die dort herrschende Spannung zerlegen in  $\tau_x$  und  $\tau_y$  rechtwinklig zu  $x$  und  $y$ . Man kann dann mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit annehmen, dass  $\tau_x$  und  $\tau_y$  in geradliniger Beziehung zu  $\tau'$  bzw.  $\tau'_1$  stehen, d. h.

$$9) \quad \tau_x : \tau' = x : \frac{1}{2} d \quad \text{und}$$

$$10) \quad \tau_y : \tau'_1 = y : \frac{1}{2} h, \quad \text{oder}$$

$$11) \quad \tau_x = \frac{2 \tau}{d} x \left( 1 - \frac{4 y^2}{h^2} \right) \quad \text{und}$$

$$12) \quad \tau_y = 2 \tau \frac{d}{h^2} y \left( 1 - \frac{4 x^2}{d^2} \right).$$

An einem Flächentheilchen  $dF = dx \cdot dy$  bei  $P$  wirken dann die inneren Kräfte  $\tau_x dF$  und  $\tau_y dF$  und liefern in Bezug auf die Achse  $O$  des Stabes das innere Moment  $(\tau_x x + \tau_y y) dF$ . Daher gilt für das Verdrehungsmoment

$$\mathfrak{M} = \int (\tau_x x + \tau_y y) dF \quad \text{oder}$$

$$\begin{aligned} \mathfrak{M} &= 2\tau \int \frac{1}{d} \left\{ x^2 \left( 1 - \frac{4y^2}{h^2} \right) + \frac{d}{h^2} y^2 \left( 1 - \frac{4x^2}{d^2} \right) \right\} dF \\ &= 2\tau \left\{ \frac{1}{d} \int dF x^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 + \frac{d}{h^2} \int dF y^2 - \frac{4}{h^2 d} \int dF x^2 y^2 \right\}. \end{aligned}$$

Nun ist  $\int dF x^2 = J_2$  das Trägheitsmoment in Bezug auf die Achse  $OH$ ;  $\int dF y^2 = J_1$  das Trägheitsmoment auf die Achse  $OE$ ; wird aber  $\int dF y^2 = \frac{1}{12} dh^3$  noch mit  $\frac{d}{h^2}$  multiplicirt, so entsteht daraus  $\frac{1}{12} d^2 h = \frac{1}{d} J_2$ . Endlich ist noch zu lösen

$$\int dF x^2 y^2 = \int dx dy x^2 y^2.$$

Ein wagerechter Flächenstreifen liefert hierzu den Beitrag

$$y^2 dy \int_{-\frac{d}{2}}^{+\frac{d}{2}} x^2 dx = 2y^2 dy \int_0^{\frac{d}{2}} x^2 dx = y^2 dy \frac{d^3}{12},$$

die ganze Fläche also

$$\frac{2d^3}{12} \int_0^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{d^3 h^3}{12 \cdot 12}.$$

Setzt man diese Werthe oben ein, so entsteht:

$$\mathfrak{M} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{16}{h^2 d} \frac{d^3 h^3}{144} \right\} = \tau \left\{ \frac{4}{d} J_2 - \frac{4}{3} \frac{J_2}{d} \right\}$$

$$\mathfrak{M} = 4\tau \frac{J_2}{d} \left( 1 - \frac{1}{3} \right)$$

$$13) \quad \mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d} = \frac{4}{3} \tau \frac{J_2}{1/2 d} \quad \text{und ebenso} \quad \mathfrak{M} = \frac{4}{3} \tau_1 \frac{J_1}{1/2 h}, \quad \text{oder}$$

$$14) \quad \tau = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} d}{J_2}; \quad \tau_1 = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M} h}{J_1}, \quad \text{d. h. :}$$

Bei einem auf seine Drehungsfestigkeit beanspruchten Stabe von rechteckigem Querschnitte tritt die stärkste Schubspannung  $\tau$  an denjenigen Punkten

der Umfangslinie auf, welche der Stabachse am nächsten liegen, nämlich in dem Abstände  $\frac{1}{2}d$ . Für die Drehungsfestigkeit ist das auf die längere Mittellinie bezogene (kleinere) Trägheitsmoment  $J_2 = \frac{1}{12}hd^3$  massgebend.

**Beispiel:** Bei einem Quadrate von der Seite  $d$  als Querschnitt ist

$$\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{Fd}{12} = \frac{2}{9} Fd\tau = 0,222 d^3 \tau;$$

beim Kreise vom Durchmesser  $d$ :

$$\mathfrak{M} = \frac{Fr}{2} \tau = \frac{1}{4} Fd\tau = \frac{1}{16} d^3 \pi \tau = 0,2 d^3 \tau.$$

Bei gleichem Querschnitt  $F$  ist also der Kreis, bei gleicher Breite (Durchmesser = Quadratseite) das Quadrat gegen  $\mathfrak{M}$  widerstandsfähiger.

**Der Verdrehungswinkel  $\vartheta$**  eines Stabes von rechteckigem Querschnitt wäre nach der im Querschnittspunkte  $E$  (Fig. 83) herrschenden Spannung  $\tau$  und der daraus folgenden Gleitung  $\gamma = \tau : G$  zu  $\frac{\tau}{G} \frac{l}{\frac{1}{2}d}$ , d. h. mittels Gl. 13, S. 69, zu  $\frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_2}$  zu erwarten, nach

der im Punkte  $H$  herrschenden Spannung  $\tau_1 = \tau \frac{d}{h}$  aber zu

$$\frac{\tau_1}{G} \frac{l}{\frac{1}{2}h} = \frac{3}{4} \frac{\mathfrak{M}l}{GJ_1}.$$

In Wirklichkeit verdrehen sich die beiden Symmetrieachsen des Querschnitts annähernd um das arithmetische Mittel dieser beiden Werthe, d. h. es ist ungefähr

$$15) \quad \vartheta = \frac{3}{8} \frac{\mathfrak{M}l}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right).$$

Die beiden Symmetrieachsen bleiben zu einander rechtwinklig; die übrigen vom Mittelpunkte aus gezogenen Radien verdrehen sich um verschiedene Winkel und treten aus der ursprünglichen Querschnittsebene heraus, so dass diese in eine krumme Fläche übergeht. Bessere Übereinstimmung mit Bauschinger's Versuchen (Civilingenieur 1881, S. 115 u. f.) ergibt sich noch, wenn man  $\frac{3}{8} = 0,375$  mit  $0,3$  vertauscht, also setzt:

$$\vartheta = 0,3 \frac{\mathfrak{M}l}{G} \left( \frac{1}{J_2} + \frac{1}{J_1} \right) l.$$

Nach Einführung von  $\mathfrak{M} = \frac{8}{3} \tau \frac{J_2}{d}$  (Gl. 13) wird hieraus

$$16) \quad \vartheta = 0,8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left( 1 + \frac{J_2}{J_1} \right) = 0,8 \frac{\tau}{G} \frac{l}{d} \left( 1 + \frac{d^2}{h^2} \right).$$

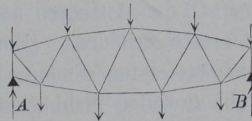
## 8. Einfache Fachwerkbalken auf zwei Stützen.

### a) Art der Berechnung der Spannkkräfte.

An Stelle der S. 23 und 28 behandelten Balken, die entweder aus einem Stücke bestanden, oder, wenn auch aus Theilen zusammengesetzt, doch einen möglichst stetig zusammenhängenden Körper bildeten (S. 34), kann man auch gegliederte Stabanordnungen verwenden, zu deren Grundgedanken schon die Betrachtung der Gelenkstangen-Verbindungen (Theil 1, S. 185) geführt hatte; es sind dies die einfachen Fachwerke.

Ein einfaches Fachwerk besteht meist in einer Aneinanderreihung (Verbindung) von Gelenkstangen-Dreiecken, von denen je zwei benachbarte eine Seite gemeinsam haben. Wird ein solches Fachwerk auf Stützen gelegt, deren eine nur in einer bestimmten (lothrechten) Richtung Widerstände leisten kann, so bildet es einen Fachwerkbalken oder Fachwerkträger (Fig. 84).

Fig. 84.

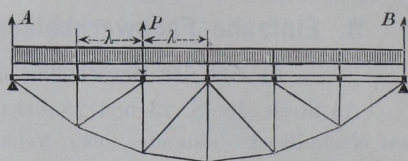


Eine Stange, welche durch zwei reibungslose Gelenke mit anderen verbunden ist, erfährt, wenn die äusseren Kräfte nur in diesen Gelenkpunkten angreifen, (nach Theil 1, S. 172) eine Spannkraft, deren Richtungslinie in die Verbindungsgerade der beiden Gelenkpunkte fällt. Ist diese Verbindungsgerade dann zugleich die Mittellinie des Stabes, so wird letzterer nur auf reinen Zug oder Druck beansprucht, wobei sich die Spannung in günstigster Weise gleichmässig über den ganzen Stab vertheilt. Die gedrückten Stäbe müssen freilich auf Knickfestigkeit berechnet werden. Bei einem Fachwerke mit reibungslosen Gelenken und mit Kraftangriff in den Gelenkpunkten liegen somit die inneren Spannkkräfte der Stäbe nach Richtung und Lage fest, nur ihre Grösse muss noch ermittelt werden.

Besteht die Belastung nicht ohne Weiteres aus Kräften, die durch die Gelenkpunkte gehen, soll etwa ein Fachwerkträger eine Brückenbahn tragen, die durch Menschengedränge gleichmässig belastet wird, so ordnet man besondere Zwischenbalken an, welche die unmittelbare Belastung aufnehmen und auf Gelenkpunkte des Fachwerks übertragen.

Diese Zwischenbalken, welche in Fig. 85 oberhalb des Fachwerks gezeichnet sind, wiewohl sie häufig nicht

Fig. 85.



in dieser Höhe liegen, werden, wenn sie auch in Wirklichkeit meist mit einander in Verbindung stehen, doch für die Rechnung stets als einfache, nur von Gelenkpunkt zu Gelenkpunkt durchgehende kleine Balkenstücke behandelt. Sind diese Zwischenbalken von übereinstimmender Länge  $\lambda$  und auf die Längeneinheit mit  $p$  belastet, so erfährt der belastete Gelenkpunkt einen Druck  $P = p \lambda$ . Diese Kräfte  $P$  erzeugen die Stabspannungen des Fachwerks, wobei die Zwischenbalken nicht mehr in Betracht kommen.

Die Gelenkpunkte heissen auch Knotenpunkte oder Knoten des Fachwerks. In solchen Knoten müssen auch die Widerstände  $A$  und  $B$  der Auflager angreifen, damit die Stäbe keine Biegemomente erleiden. (Eine derartige Anbringung der Auflager an den äussersten Enden, wie in Fig. 85, erscheint dem Anfänger wohl zuweilen nicht genügend sicher; jedoch ist zu bemerken, dass die hier benutzten Figuren nur das Netz der Mittellinien des Fachwerks geben; bei der körperlichen Ausbildung des Balkens wird derartig verfahren, dass zu Bedenken dieser Art kein Grund mehr vorliegt, dass aber die Auflagerkräfte dennoch durch die Endknoten gehen.)

Die Stäbe, welche das Fachwerk oben und unten begrenzen, heissen seine Gurten (Obergurt bzw. Untergurt) mit den Spannkraften  $O$  u.  $U$ , die dazwischen angebrachten Stäbe allgemein Wandglieder (weil sie eine volle Blechwand zwischen den Gurten ersetzen); lothrechte Wandglieder heissen Ständer, Pfosten, Vertikalen mit den Spannkraften  $V$ , schräg gerichtete Wandglieder werden Streben oder Diagonalen genannt mit den Spannkraften  $D$ . Es ist rathsam, diese Kräfte



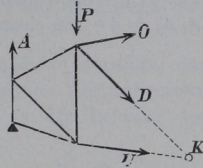
in der Figur als Zugkräfte einzuführen. Liefert dann die Rechnung positive bezw. negative Werthe für diese Kräfte, so kennzeichnen sich dadurch wirkliche Zugkräfte bezw. Druckkräfte.

Die Berechnung der Auflagerdrücke  $A$  und  $B$  geschieht ganz so wie bei vollen Balken auf zwei Stützen mittels der Momentengleichungen, da nach S. 4 auch für beliebige Körpergruppen die Gleichgewichtsbedingungen starrer Körper Gültigkeit haben.

Zur Auffindung der einzelnen Stabkräfte zerlegt man durch einen Schnitt das Fachwerk in zwei Theile, bringt an den Schnittstellen der Stäbe die Spannkkräfte derselben an und stellt für einen der beiden Theile, z. B. für den linksseitigen (Fig. 86), die Gleichgewichtsbedingungen auf. Bei Kräften in der Ebene kann man drei von einander unabhängige Gleichungen anschreiben, kann also für einen Schnitt auch drei Spannkkräfte, die nicht durch einen Punkt gehen, daraus berechnen. Bei dem hier nur zu behandelnden einfachen Dreiecks-Fachwerke lassen sich sämtliche Stäbe durch Schnitte erreichen, die im Ganzen nicht mehr als drei Stäbe treffen, so dass die Spannkkräfte statisch bestimmbar sind.

Bei der Anwendung der drei Gleichgewichts-Bedingungen in der ursprünglichen Form (Gleichung der wagerechten Kräfte, Gleichung der lothrechten Kräfte, Gleichung der Momente für irgend einen Punkt) auf einen Fall, z. B. den der Fig. 86, würden in jeder der drei Gleichungen die drei Unbekannten  $O$ ,  $D$  und  $U$  vorkommen. Zweckmässig ist es, wie auch schon in anderen Fällen (Theil 1, S. 160) geschehen, die Rechnung so einzurichten, dass man für jede Unbekannte nur eine Gleichung bekommt. Dies wird in solchen Fällen, wo  $O$ ,  $D$  und  $U$  verschiedene Richtungen haben, erreicht, wenn man nur Momentengleichungen anschreibt und zum Drehpunkte jedes Mal den Schnittpunkt derjenigen beiden Stäbe wählt, deren Spannkraft vorläufig nicht verlangt wird. Dies ist der Grundgedanke des Verfahrens von A. Ritter (Zeitschrift des Architekten- und Ingenieur-Vereins zu Hannover 1861, S. 412). Zur Berechnung der Spannkraft  $O$  (Fig. 86) stellt man für die am linksseitigen Trägerstücke wirkenden Kräfte die Momentengleichung in Bezug auf den Schnittpunkt  $K$  von  $D$  und  $U$  auf; dann kommen

Fig. 86.

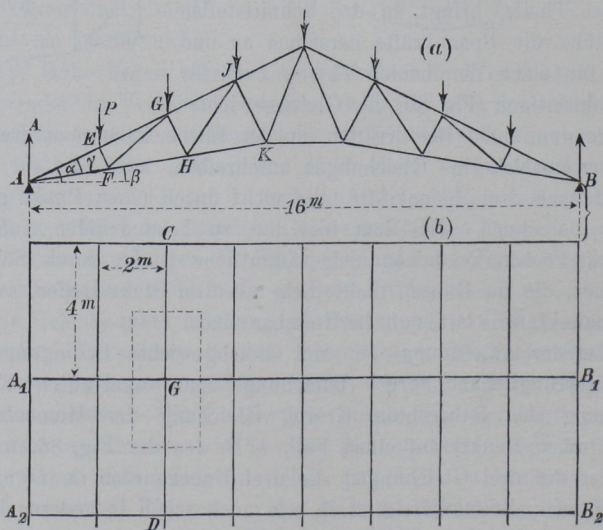


$D$  und  $U$  in dieser Gleichung nicht vor, weil sie beide das Moment Null haben, und man hat für  $O$  eine einzige Gleichung ersten Grades.

### b) Dachträger.

**Beispiel 1:** Berechnung der Spannkkräfte eines belgischen Dachträgers von 16 m Spannweite. Die Anordnung des Trägers zeigt Fig. 87 a. Im Grundrisse (Fig. 87 b) mögen die Träger  $A_1 B_1$  und  $A_2 B_2$  um  $A_1 A_2 = 4$  m von einander abstehen. Die Spannweite werde durch sog. Pfetten,

Fig. 87.



die über den Knotenpunkten des Obergurts liegen, in acht gleiche Theile von 2 m getheilt. Da die gleichmässige Belastung des Grundrisses der Dachfläche sich gleichmässig über die Pfetten vertheilt, und da die Pfetten für die Berechnung als Einzelträger (nur von Dachträger zu Dachträger reichend) angesehen werden, so erkennt man leicht, dass ein beliebiger Knoten  $G$  des Obergurts die Last zu tragen hat, welche auf das im Grundrisse punktirte Rechteck von  $2 \text{ m} \times 4 \text{ m} = 8 \text{ qm}$  entfällt. Rechnet man als Gesamtlast (einschl. Schnee- und Winddruck) 180 kg für 1 qm Grundfläche, so ergibt sich  $P = 180 \cdot 8 = 1440 \text{ kg}$  als Last jedes Knotens des Obergurts. Die halb so grosse Belastung, welche auf die Endpunkte  $A$  und  $B$  kommt, beeinflusst wohl den Druck auf die stützenden Wände, bringt aber, weil sie unmittelbar auf die Stützpunkte übertragen wird, in den Fachwerkstäben keine Spannkraft

hervor und bleibt deshalb bei der Berechnung der Stabkräfte am besten ganz ausser Betracht. Hiernach befinden sich auf dem Träger sieben gleiche Lasten  $P$  in gleichen Abständen, so dass jeder Auflagerdruck  $A = B = \frac{1}{2} P$  wird. Es ist zweckmässig, die Knotenlast im Laufe der Rechnung noch allgemein mit  $P$  zu bezeichnen. Am Schlusse kann dann dafür der Zahlenwerth 1440 kg eingeführt werden.

Die beiden Gurte sind durch Stäbe, rechtwinklig zum Obergurt, mit einander verbunden, deren Spannkraften wir, wenn sie auch nicht lothrecht stehen, doch mit  $V$  bezeichnen wollen. Die Spannkraften der dazwischen eingelegten Streben  $D$  heissen.

Der Obergurt habe eine Neigung  $\operatorname{tg} \alpha = 0,5$  gegen die Wagerechte; das giebt  $\alpha = 26^{\circ} 34'$ ,  $\cos \alpha = 0,894$ ,  $\sec \alpha = 1,119$ ; dann ist der Abstand zweier Lastpunkte, welcher wagerecht gemessen  $2\text{ m}$  beträgt, in der Richtung des Obergurtes  $AE = 2 \cdot 1,119 = 2,238\text{ m}$ .

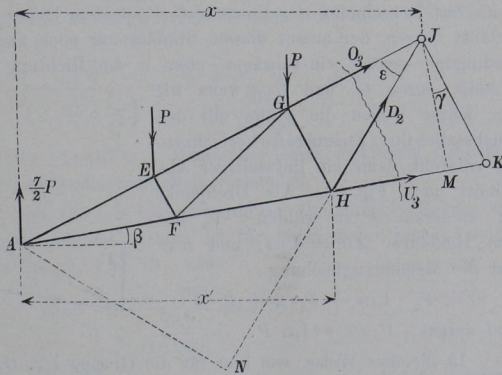
Der Untergurt habe eine Neigung  $\operatorname{tg} \beta = \frac{1}{6}$  gegen die Wagerechte; dies giebt  $\beta = 9^{\circ} 28'$ ,  $\sin \beta = 0,1645$ ,  $\cos \beta = 0,9864$ ,  $\sec \beta = 1,011$ . Der Winkel  $\gamma = EAF$  zwischen beiden Gurten beträgt hiernach  $17^{\circ} 6'$  mit  $\cos \gamma = 0,9558$ ,  $\sec \gamma = 1,046$ ,  $\operatorname{tg} \gamma = 0,3076$ .

Hieraus bestimmt sich  $EF = AE \cdot \operatorname{tg} \gamma = 2,238 \cdot 0,3076 = 0,688\text{ m}$ , mithin  $GH = 2 \cdot 0,688 = 1,376$  und  $JK = 3 \cdot 0,688 = 2,064$ .

Für die Theile des Untergurtes gilt dann:  $AF = AE \sec \gamma = 2,238 \cdot 1,016 = 2,341$ .

Die Ermittlung der Spannkraften soll an dem dritten Fache von links,  $GJKH$ , gezeigt werden. Führt man einen Schnitt durch dasselbe, welcher das Obergurtstück  $GJ$ , die Strebe  $HJ$  und das Untergurtstück  $HK$  trifft, so betrachtet man das links vom Schnitte verbleibende Stück (Fig. 88), bringt an den Schnittstellen die als Zugkräfte gedachten Spannkraften  $O_3$ ,  $D_2$  und  $U_3$  an und stellt für das Gleichgewicht des linksseitigen Abschnittes drei Momenten-Gleichungen auf.

Fig. 88.



Zur Berechnung von  $U_3$  dient der Schnittpunkt  $J$  von  $O_3$  und  $D_2$  zum Drehpunkte. Dann ist  $JM \perp AK$  der Hebelarm von  $U_3$ , und zwar ist

$JM = JK \cos \gamma = 2,061 \cdot 0,9558 = 1,973 \text{ m}$ . Der wagerechte Abstand der Knotenpunkte des Obergurts beträgt  $2 \text{ m}$ , daher ist  $x = 6 \text{ m}$ , während die Lasten bei  $E$  und  $G$  die Hebelarme  $4$  bzw.  $2 \text{ m}$  haben. Es ist empfehlenswerth, beim Aufschreiben der Momenten-Gleichungen eine bestimmte Reihenfolge festzusetzen, um sich vor Auslassungen zu bewahren. Wir schreiben stets zuerst das Moment der gesuchten Spannkraft, dann dasjenige des Auflagerdrucks und schliesslich diejenigen der am betrachteten Trägerstücke vorhandenen Lasten Also

$$0 = - U_3 \cdot 1,973 + 3,5 P \cdot 6 - P \cdot 4 - P \cdot 2,$$

woraus man leicht

$$U_3 = + 7,60 P$$

findet; das positive Zeichen bedeutet eine Zugkraft.

Zur Berechnung von  $O_3$  dient der Schnittpunkt  $H$  von  $U_3$  und  $D_2$  als Drehpunkt. Es ist  $AH = 2 AF = 4,682$ . Der wagerechte Abstand  $x'$  des Drehpunktes vom linksseitigen Auflager ist dann

$$x' = 4,682 \cdot \cos \beta = 4,682 \cdot 0,9864 = 4,62,$$

der Hebelarm von  $O_3$  aber  $GH = 1,376$ ; mithin

$$0 = O_3 \cdot 1,376 + 3,5 P \cdot 4,62 - P \cdot 0,62 - P \cdot 2,62 \text{ und daraus}$$

$$O_3 = - 9,40 P.$$

Zur Berechnung von  $D_2$  dient der Punkt  $A$  als Drehpunkt. Fällt man von  $A$  eine Winkelrechte  $AN$  auf die Richtung von  $D_2$ , so ist  $AN = AJ \sin \varepsilon$ . Nun ist  $AJ = 3 AE = 6,714$ ;  $\text{tg } \varepsilon = GH : GJ = GH : AE = 1,376 : 2,238 = 0,615$ , dem ein Werth  $\sin \varepsilon = 0,524$  entspricht, mithin

$$AN = 6,714 \cdot 0,524 = 3,517.$$

Dann wird, weil der Auflagerdruck den Hebelarm Null hat:

$$0 = - D_2 \cdot 3,517 + P \cdot 2 + P \cdot 4,$$

mithin

$$D_2 = 1,7058 P.$$

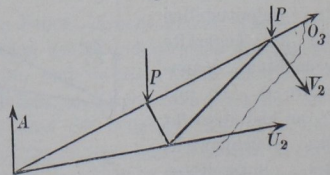
Zur Berechnung der Spannkraft  $V_2$  in dem Ständer  $GH$  muss man einen Schnitt führen, der ausser diesem Ständer nur noch zwei Stäbe trifft. Dieser Bedingung genügt ein schräger, etwa in der Richtung der Streben geführter Schnitt durch  $O_3$  und  $U_2$ , wenn wir der Kürze wegen die Stäbe mit den Buchstaben ihrer Spannkräfte bezeichnen. Es entsteht dann ein linksseitiger Abschnitt nach Fig. 89. Als Drehpunkt ist wiederum  $A$  zu wählen.  $V_2$  hat den Hebelarm  $AG = 4,476$ , und man hat die Momentengleichung

$$0 = V_2 \cdot 4,476 + P \cdot 2 + P \cdot 4$$

und daraus  $V_2 = - 1,37 P$ .

In gleicher Weise, wie hier für die Gruppe  $U_3$ ,  $O_3$ ,  $D_3$  und  $V_2$  gezeigt, hat man die Berechnung der übrigen Spannkräfte der linksseitigen Hälfte des Trägers durchzuführen; die Spannkräfte der rechten sind dann der linken symmetrisch.

Fig. 89.



Führt man schliesslich  $P = 1440$  kg ein, so wird  $U_3 = 10944$  kg;  $O_3 = -13536$  kg;  $D_2 = +2458$  kg;  $V_2 = -1973$  kg. Will man die Stäbe aus Schmiedeisen herstellen, so erfordert, bei  $700$  at zulässiger Spannung,  $U_3$  einen Querschnitt von  $10944 : 700 = 15,63$  qcm,  $D_2$  einen solchen von  $2458 : 700 = 3,51$  qcm, wofür man rund  $16$  qcm bzw.  $4$  qcm wählen wird; dabei ist die Querschnittsform gleichgültig. Bei den gedrückten Theilen aber, die auf Knickfestigkeit zu berechnen sind, sind auch die Länge und die Querschnittsform von Bedeutung.

Der Stab  $O_3$  hat eine Länge  $l = 223,8$  cm. Er werde gebildet aus zwei ungleichschenkligen Winkeleisen  $10 \cdot 6,5 \cdot 1$  cm (Fig. 90). Theilt man den Querschnitt des einen Winkeleisens durch eine lothrechte Gerade in die beiden Flächentheile  $5,5$  und  $10$  qcm, deren Schwerpunkte um  $4,5$  cm in lothrechtem Sinne von einander abstehen, so ist nach Gl. 14, S. 25, das Trägheitsmoment des einen Winkeleisens in Bezug auf eine wagerechte Schwerpunktsachse

$$J = \frac{1}{12} 5,5 \cdot 1^3 + \frac{1}{12} \cdot 1 \cdot 10^3 + \frac{5,5 \cdot 10}{5,5 + 10} \cdot 4,5^2 = 156,$$

mithin ist das Quadrat des Trägheitshalbmessers

$$i^2 = J : F = 156 : 15,5 = 10,$$

$$i = 3,16; \quad \frac{l}{i} = \frac{223,8}{3,16} = 71,$$

$$\left(\frac{l}{i}\right)^2 = 5041.$$

Dieses Verhältnis bleibt auch gültig für den aus zwei Winkeleisen bestehenden Querschnitt. Die zulässige Druckbelastung des Stabes in der Längsrichtung ist daher nach Gl. 2, S. 62

$$K = \frac{F \sigma}{\left(1 + \alpha \frac{l^2}{i^2}\right)} = \frac{2 \cdot 15,5 \cdot 700}{1 + \frac{5041}{10000}}, \text{ d. h.}$$

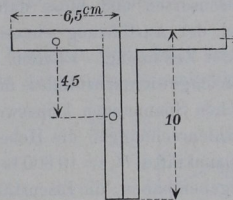
rund  $K = \frac{2}{3} \cdot 31 \cdot 700 = 14467$  kg. Gegenüber einer wirklichen Druckkraft von  $13522$  kg ist also genügende Sicherheit vorhanden.

Der Ständer  $V_2$  von  $137,6$  cm Länge werde in ähnlicher Weise aus zwei Winkeleisen  $6 \cdot 4 \cdot 0,6$  cm gebildet. Dann ist für eines dieser Eisen  $J = 20$ ;  $F = 5,64$ , daher  $i = 1,88$ ,  $l : i = 73$ , und

$$K = \frac{2 \cdot 5,64 \cdot 700}{1 + \frac{73^2}{10000}} = 5151.$$

Diese zulässige Druckbelastung ist, gegenüber der wirklichen Belastung mit  $1930$  kg reichlich gross; man wird aber wegen der Nietverbindungen einen kleineren Querschnitt nicht wählen.

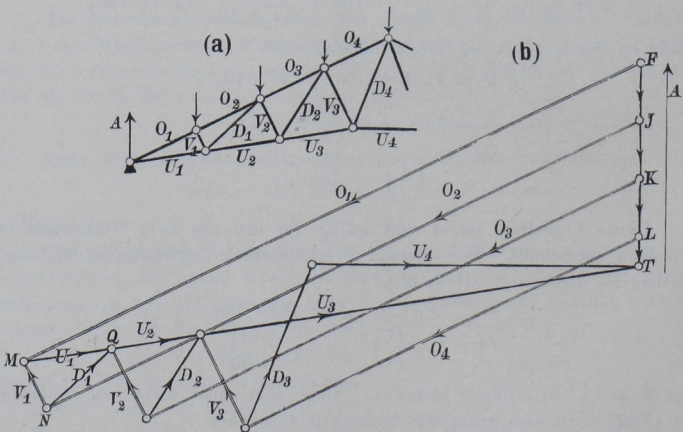
Fig. 90.



Bei der obigen Berechnung der Spannkkräfte war die Ermittlung der Stablängen und Hebelarme die zeitraubendste Arbeit. In den meisten Fällen wird man diese Längen aus einer genauen Zeichnung des Trägernetzes abgreifen und dadurch viel Zeit ersparen können. Es ist nicht zu empfehlen, bei derartigen Rechnungen eine weitgehende ziffermässige Genauigkeit anzustreben. Denn bei der schliesslichen Bestimmung der Stabquerschnitte richtet man sich nach den vorhandenen Eisensorten und muss daher häufig nach oben hin abrunden. Auch kommen bei der Ausführung ebenso leicht kleine Fehler vor wie beim Abgreifen von einer Zeichnung. Endlich aber ist die ganze Berechnung unter Annahme eines Gleichgewichtszustandes doch nur eine Annäherung, mit der man die wirklichen Spannungen keineswegs genau ermitteln kann. Hätte man in den obigen Zahlenrechnungen die Hebelarme auf Decimeter abgerundet, so würden sich die Spannkkräfte  $U_3 = 10\,800\text{ kg}$ ;  $O_3 = -13\,168\text{ kg}$ ;  $D_2 = 2469\text{ kg}$ ;  $V_2 = -1920\text{ kg}$  ergeben haben; die Eisenstärken würden eine Änderung nicht zu erfahren brauchen.

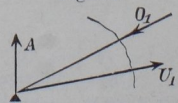
Am schnellsten ergeben sich die Spannkkräfte solcher einfach geformten Dachträger mittels eines rein zeichnerisch hergestellten Kräfteplanes

Fig. 91.



(Fig. 91 b). Bezeichnet man, wie auf S. 75 die Knotenlast mit  $P$ , so ist der Auflagerdruck  $A = 3,5 P$ . Diese  $3\frac{1}{2}$  Lasten  $P$  sind durch  $TF = A$  dargestellt, mit den Theilen  $FJ = JK = KL = P$  und  $LT = \frac{1}{2} P$ . Man muss nun mit den Schnitten im ersten Fache am Auflager  $A$  beginnen, indem man (Fig. 92)  $O_1$  und  $U_1$  durchschneidet, dann müssen  $A$ ,  $O_1$  und  $U_1$  im Gleichgewichte sein, also ein geschlossenes Kräfteck bilden. Zieht man durch  $T$  (Fig. 91 b) eine Parallele zum Untergurtstab  $U_1$ , durch  $F$  eine Parallele

Fig. 92.



zum Obergurtstab  $O_1$ , so schneiden sich beide in  $M$ ;  $TFM$  ist das geschlossene Krafteck, mithin ist  $FM$  die Grösse von  $O_1$ ,  $MT$  die Grösse von  $U_1$ , beide nach dem Maßstabe gemessen, in welchem  $P = FJ$  ist. In dem Krafteck  $TFM$  müssen die Kräfte übereinstimmenden Umfassungssinn haben. Da nun die Pfeilspitze des Auflagerdrucks  $A$  von  $T$  nach  $F$  weist, so muss  $O_1$  von  $F$  nach  $M$ ,  $U_1$  von  $M$  nach  $T$  weisen. Diesem entsprechend sind die Pfeile bei  $O_1$  und  $U_1$  angebracht. Überträgt man diese Pfeilrichtungen nun nach Fig. 92 an die Schnittstellen, so erkennt man, dass  $O_1$  ein Druck,  $U_1$  ein Zug ist.

Nachdem so die Spannkkräfte des ersten Faches bestimmt sind, führt man einen weiteren Schnitt, doch so, dass nur zwei neue unbekannte Spannkkräfte auftreten. Man legt daher den Schnitt durch den soeben behandelten Stab  $U_1$  und ausserdem durch  $V_1$  und  $O_2$  (Fig. 93). Dann müssen die neuen unbekannt Kräfte  $V_1$  und  $O_2$  den bekannten:  $U_1$ ,  $A$ ,  $P$ , das Gleichgewicht halten, also mit ihnen wieder ein geschlossenes Krafteck bilden. Wir betrachten  $M$  (Fig. 91 b) als Anfangspunkt mit  $MT = U_1$ ,  $TF = A$ ,  $FJ = P$ , ziehen von  $J$  aus eine Parallele zu  $O_2$ , von  $M$  aus eine Parallele zu  $V_1$ , welche beiden sich in  $N$  schneiden. Dann ist  $JN = O_2$ ,  $NM = V_1$ . Der Umfassungssinn ist:  $MTFJNM$ . Überträgt man die so bestimmten Pfeilrichtungen von  $O_2$  und  $V_1$  an die Schnittstellen in Fig. 93, so erkennt man beide als Druckkräfte.

Für den nächsten Schnitt behält man nun  $O_2$  bei und führt ihn ausserdem durch  $D_1$  und  $U_2$  (Fig. 94). Die bekannten Theile des jetzt zu benutzenden Kraftecks sind  $A = TF$ ,  $P = FJ$ ,  $O_2 = JN$ . Zwischen die Punkte  $N$  und  $T$  sind nun die neuen Kräfte  $D_1$  und  $U_2$  einzulegen. Eine von  $T$  aus gezogene Parallele zu  $U_2$  fällt mit  $TM$  zusammen,  $NQ \parallel D_1$  bestimmt daher den Punkt  $Q$ , und es ist  $NQ = D_1$ ,  $QT = U_2$ ; beide erkennt man als Zugkräfte.

Die der Reihe nach zu führenden Schnitte sind im Zickzack derartig anzuordnen, dass jeder neue Schnitt ein vorher schon untersuchtes Gurtstück nochmals trifft und ausserdem zwei neue Stäbe. Hiernach setzt sich der leicht verständliche Kräfteplan (Fig. 91 b) fort. Zu beachten ist nur, dass  $U_1$ ,  $U_2$  und  $U_3$  theilweise auf einander fallen, d. h. verschiedene Anfangspunkte, aber gemeinsame Endpunkte  $T$  haben. Die Druckkräfte sind im Kräfteplane durch Doppellinien hervorgehoben.

Weiteres über Kräftepläne für Fachwerk findet sich in Keck, Vorträge über Graphische Statik, S. 65 u. ff.

**Beispiel 2:** Berechnung der Spannkkräfte eines Wiegmannschen Dachträgers von 16 m Spannweite (Fig. 95). Die Berechnung der Spannkkräfte  $O_1$ ,  $U_1$ ,  $V_1$ ,  $O_2$ ,  $D_1$  und  $U_2$  erfolgt ganz in derselben Weise wie beim belgischen Dachträger, und wenn, wie wir annehmen, die Neigungen

Fig. 93.

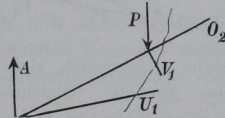
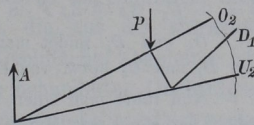
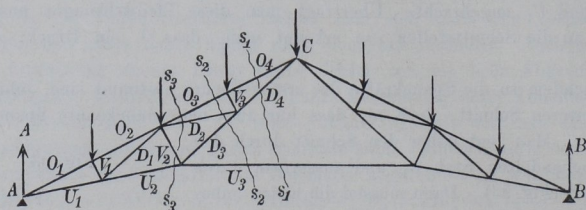


Fig. 94.



von  $O_1$ ,  $O_2$ ,  $U_1$  und  $U_2$  dieselben sind wie bei jenem (Fig. 87), so werden bei gleichen Lasten  $P$  auch die Spannkraften für die genannten Stäbe dieselben sein. Bei den Stäben  $V_2$ ,  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $V_3$  ist es aber nicht möglich, von oben bis unten Schnitte so zu führen, dass der Schnitt nur drei

Fig. 95.



Stäbe zerschneidet; vielmehr ist die Zahl der vom Schnitte getroffenen Stäbe eine grössere. Gleichwohl sind die Spannkraften auch dieses Trägers in leichter Weise zu finden; nur muss der Vorgang etwas abgeändert werden.

Man legt zunächst einen Schnitt  $s_1 s_1$  durch  $O_4$ ,  $D_4$  und  $U_3$  und wählt den Schnittpunkt  $C$  der beiden ersteren zum Drehpunkte. Der Hebelarm von  $U_3$  lässt sich leicht abgreifen oder berechnen und beträgt, auf Grund der Bemerkung auf S. 78 nach Decimetern abgerundet,  $3,2^m$ . Dann gilt:  $0 = -U_3 \cdot 3,2 + 3,5 P \cdot 8 - P \cdot 2 - P \cdot 4 - P \cdot 6$  oder  $U_3 = 5 P$ .

$O_4$  und  $D_4$  findet man in gleicher Weise, indem man den Schnittpunkt von  $D_4$  und  $U_3$  bzw. von  $O_4$  und  $U_3$  zum Drehpunkte wählt.

Nun führt man einen Schnitt  $s_2 s_2$  durch  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $D_3$  und  $U_3$ . Weil  $U_3$  schon berechnet ist, treten an diesem Schnitte nun drei unbekannte Spannkraften auf. Um beispielsweise  $D_2$  zu berechnen, benutzt man den Schnittpunkt  $C$  von  $O_3$  und  $D_3$  als Drehpunkt und behandelt die schon bekannte Spannkraft  $U_3$  in der Momentengleichung wie eine gegebene Kraft. Der Hebelarm von  $D_2$  wird  $1,3$ , und es gilt:

$$0 = -D_2 \cdot 1,3 - U_3 \cdot 3,2 + 3,5 P \cdot 8 - P \cdot 4 - P \cdot 6, \text{ mithin} \\ D_2 = 1,54 P.$$

Für die Berechnung von  $O_3$  dient der Schnittpunkt von  $D_2$  und  $D_3$ , für die von  $D_3$  der Schnittpunkt von  $D_2$  und  $O_3$  zum Drehpunkte.

An dem Schnitte  $s_3 s_3$  kommen die Spannkraften  $O_3$ ,  $D_2$ ,  $V_2$  und  $U_2$  vor, von denen nur noch  $V_2$  unbekannt; wählt man  $A$  zum Drehpunkte, so verschwinden  $O_3$  und  $U_3$  aus der Momentengleichung, und die bekannte  $D_2$  wird wie eine gegebene Kraft behandelt.

Ein schräger Schnitt durch  $O_3$ ,  $V_3$ ,  $D_4$  und  $U_3$  und die Wahl des Punktes  $C$  zum Drehpunkte führt nun auch leicht zu der einzigen noch fehlenden Spannkraft  $V_3$ , jedoch erkennt man leicht, dass  $V_3$ , ebenso wie  $V_1$ , gleich  $-P \cos a$  sein muss. Führt man nämlich um den oberen Endpunkt von  $V_3$  einen kreisförmigen Schnitt, so trennt man dadurch das in Fig. 96 besonders



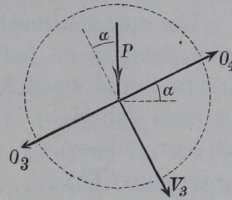
gezeichnete Stück aus dem Träger heraus. Dieses muss unter Einwirkung der Kräfte  $P$ ,  $O_3$ ,  $O_4$  und  $V_3$  im Gleichgewichte sein. Zerlegt man aber  $P$  nach der Richtung von  $V_3$  und rechtwinklig dazu in  $P \cos \alpha$  bzw.  $P \sin \alpha$ , so muss in ersterer Richtung stattfinden:

$$P \cos \alpha + V_3 = 0 \quad \text{oder}$$

$$V_3 = -P \cos \alpha.$$

(Für  $V_1$  gilt dieselbe Figur.) Nach diesen Angaben kann es dem Leser keine Schwierigkeiten machen, die sämtlichen Spannkkräfte der linken Hälfte des Wiegmannschen Dachträgers zahlenmässig auszurechnen. Dem Anfänger ist dringend zu rathen, nach Führung eines Schnittes das links davon befindliche Trägerstück jedes Mal mit den daran auftretenden Kräften besonders aufzuzeichnen, weil dadurch die sichere Aufstellung der Momentengleichung sehr erleichtert wird.

Fig. 96.



### c) Ungünstigste Belastungsart.

In den vorstehend berechneten Beispielen wurde nur eine bestimmte Belastungsart vorausgesetzt, es wurde angenommen, dass jeder Belastungspunkt eine Last  $P$  trage, die aus der stärksten überhaupt vorkommenden Belastung der Dachfläche abgeleitet ist. Diese Voraussetzung trifft für die zwei eben behandelten Dachträger zu, wie S. 84/85 sich erweisen wird. Für anders gestaltete Fachwerke trifft sie aber nicht allgemein zu, vielmehr wird sich zeigen, dass in manchen Stäben des Fachwerks die Entlastung gewisser Knotenpunkte eine Vergrößerung der Spannkkräfte herbeiführen kann.

Es muss deshalb unterschieden werden zwischen der ständigen Belastung, die von dem Eigengewichte des Bauwerks und aller damit fest verbundenen Theile herrührt, und der beweglichen Belastung, die bei Dachträgern aus dem Gewichte einer Schneelage und dem Drucke des Windes, bei Brückenträgern aus dem Gewichte der die Brückenbahn befahrenden Lokomotiven, Wagen u. dergl. oder von dem Gewichte der auf der Brücke Platz findenden Menschen (Menschengedränge) und Thiere besteht. Beide Arten von Belastungen sollen annäherungsweise als gleichförmig vertheilt angesehen werden; die ständige Last werde mit  $g$ , die bewegliche Last mit  $p$  für die Längeneinheit des Trägers bezeichnet, so dass, wenn der wagerechte Abstand der Lastpunkte =  $\lambda$  ist, die ständige

Knotenlast  $G = g\lambda$ , die bewegliche Knotenlast  $P = p\lambda$  wird. Die Lasten  $G$  sind stets vorhanden, die Lasten  $P$  können auch fehlen. Jede Knotenlast kann daher entweder nur aus  $G$ , oder aus  $G + P$  bestehen.

Um nun die Einwirkung beweglicher Lasten auf die an irgend einem Schnitte  $ss$  auftretenden Spannkkräfte zu erkennen, denken wir uns irgend einen Knotenpunkt links bzw. rechts vom Schnitte mit einer beliebigen Last  $P$  bzw.

$P_1$  versehen (Fig. 97). Diese beiden Lasten treten in den Momentengleichungen, die man etwa für das links vom Schnitte liegende Trägerstück aufstellt, in

verschiedener Weise auf: beide liefern einen Beitrag zu dem Auflagerdrucke  $A$  und haben hierdurch mittelbar Einfluss auf die Spannkkräfte des Schnittes; die linksseitige Last  $P$  gehört aber zu den am betrachteten Trägerstücke wirkenden Kräften und erscheint als solche auch noch unmittelbar in der Momentengleichung, während dies für  $P_1$  nicht zutrifft. Aus diesem Grunde müssen Lasten links und rechts vom Schnitte bestimmt aus einander gehalten werden. Die beliebigen Knotenlasten  $P$  und  $P_1$  zu beiden Seiten des Schnittes seien um  $u$  und  $u_1$  vom linken bzw. rechten Auflager entfernt. Dann ist der linksseitige Auflagerdruck

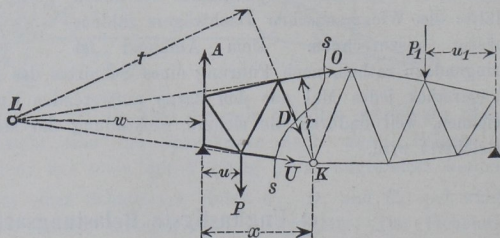
$$1) \quad A = P \frac{l-u}{l} + P_1 \frac{u_1}{l} = P - P \frac{u}{l} + \frac{P_1 u_1}{l}.$$

Zur Berechnung der Spannkraft  $O$  im Obergurt dient der Punkt  $K$  des Untergurtes im Abstände  $x$  von der linksseitigen Auflager-Lothrechten als Drehpunkt, und es gilt die Momentengleichung

$$0 = Or + Ax - P(x-u) \quad \text{oder nach Gl. 1:}$$

$$-Or = Px - P \frac{u}{l} x + P_1 \frac{u_1}{l} x - Px + Pu,$$

Fig. 97.



woraus sich

$$-Or = Pu \left(1 - \frac{x}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{x}{l}$$

ergiebt. Da nun  $x \leq l$ , so haben die beiden Glieder der rechten Seite übereinstimmende Vorzeichen. Zu der Druckkraft  $-O$  in irgend einem Theile des Obergurtes tragen also Lasten links und rechts vom Schnitt in übereinstimmender Weise bei. Gleiches findet man leicht bezüglich der Zugkraft  $U$  im Untergurt. Die Zugkräfte im Obergurt und die Druckkräfte im Untergurt werden daher am grössten, wenn alle Lastpunkte möglichst stark belastet sind.

Für die Strebe  $D$  liegt der Drehpunkt  $L$  im Schnittpunkte der Richtungen der vom Schnitte mitgetroffenen Gurtstücke. Die Momentengleichung lautet:

$$\begin{aligned} 0 &= Dt - Aw + P(w + u), \quad \text{mithin} \\ Dt &= Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w - Pw - Pu \\ &= -Pu \left(1 + \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}. \end{aligned}$$

Hiernach liefern die Lasten  $P$  und  $P_1$  zu  $D$  Beiträge von entgegengesetztem Vorzeichen. Eine Last rechts vom Schnitt erzeugt in der Strebe Zugkraft und umgekehrt. Belastungen links und rechts vom Schnitte vermindern sich also gegenseitig in ihrer Wirkung. Soll nun die Zugkraft in den Streben so gross wie möglich werden, so muss man die Lasten von positivem Einflusse, d. h. die rechtsseitigen, möglichst gross machen, und umgekehrt. Rechts vom Schnitte wird man daher die Lastpunkte durchweg mit ständiger und beweglicher,  $G + P$ , links vom Schnitte nur mit ständiger Last  $G$  versehen. Die Druckkraft in den Streben wird am grössten bei entgegengesetzter Belastung, d. h. wenn links vom Schnitte volle Lasten  $G + P$ , rechts nur ständige Lasten  $G$  wirken. Solche Anordnung der Lasten nennen wir einseitige Belastungen. Dies gilt für eine von links nach rechts fallende Strebe; für eine nach rechts ansteigende ist alles entgegengesetzt, weil das Moment einer solchen Strebe entgegengesetzten Drehsinn zeigt. Liegt der Schnitt näher an dem rechtsseitigen Auflager, so kann der Drehpunkt  $L$  rechts von der Spannweite liegen. Dies ändert aber, wie

man leicht findet, nichts an den vorstehenden Ergebnissen; diese bleiben gültig, so lange der Drehpunkt ausserhalb der Spannweite  $AB$  liegt.

Anders verhält sich die Sache, wenn der Drehpunkt  $L$  für eine Strebe im Innern der Spannweite liegt (Fig. 98). Dann ist

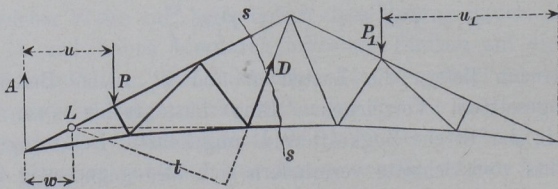
$$0 = -Dt + Aw + P(u - w),$$

oder mit Benutzung von Gl. 1:

$$\begin{aligned} Dt &= Pw - \frac{Pu}{l}w + \frac{P_1 u_1}{l}w + Pu - Pw \\ &= Pu \left(1 - \frac{w}{l}\right) + P_1 u_1 \frac{w}{l}. \end{aligned}$$

Weil bei der jetzt angenommenen Lage von  $L$  die Länge  $w$  stets  $\leq l$ , so werden in der letzten Gleichung beide Glieder der rechten Seite positiv, so dass nun, wie bei den Gurtstäben, Lasten

Fig. 98.



links und rechts vom Schnitte Wirkungen von übereinstimmendem Vorzeichen hervorbringen. Ob eine bestimmte Last in einer bestimmten Strebe gerade Zug oder Druck erzeugt, ist für deren Abmessung nicht entscheidend. Es kommt nur darauf an, zu wissen, ob ein Stab auf volle oder auf einseitige Belastung berechnet werden muss. Im letzteren Falle sind dann in der Regel zwei Belastungsfälle zu untersuchen: in dem einen befindet sich bewegliche Belastung nur auf der linken Seite, im anderen nur auf der rechten Seite. Für Ständer, die nur besondere Fälle von Streben sind, gelten dieselben Gesetze.

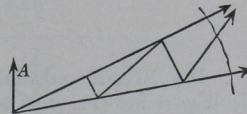
Bei den meisten Fachwerkformen liegt der für die Wandglieder (Streben und Ständer) massgebende Drehpunkt ausserhalb der Spannweite; der andere Fall kommt seltener vor.

Daher hat man den Satz:

Die Spannkkräfte der Wandglieder eines einfachen Fachwerkträgers auf zwei Stützen sind, wenn der massgebende Drehpunkt **ausserhalb** der Spannweite liegt, auf einseitige Belastung (daß eine Mal rechts, das andere Mal links vom Schnitte) zu berechnen; wenn aber der Drehpunkt zwischen die Auflager-Lothrechten fällt, so muss die Berechnung (wie bei den Gurten) für volle Belastung erfolgen.

Fällt der Drehpunkt in die linksseitige Auflager-Lothrechte, so ist dies ein Grenzfall, der nach Belieben zu der einen oder anderen Gruppe von Fällen gerechnet werden kann. Man würde hiernach die betreffende Strebe auf einseitige oder auch auf volle Belastung berechnen dürfen. Beide Berechnungen führen nämlich zu dem gleichen Ergebnisse. Irgend eine Last  $P_1$  rechts vom Schnitt wirkt auf den linksseitigen Abschnitt nur mittelbar durch seinen Beitrag zu dem Auflagerdruck  $A$  ein (s. S. 82). Da aber der Auflagerdruck  $A$  in Bezug auf den in seiner Richtungslinie liegenden Drehpunkt das Moment Null hat, so haben rechtsseitige Lasten auf die betreffende Strebe  $D$  überhaupt keinen Einfluss (Fig. 99); eine einseitige Belastung links vom Schnitte hat deshalb dieselbe Wirkung, wie eine volle Belastung; und da die Rechnung mit voller Belastung bequemer ist, so kann man diese, die für die Gurtkräfte massgebend war, auch für Ständer und Streben verwenden. Die für volle Belastung durchgeführte Berechnung des in Fig. 87, S. 74 und Fig. 95, S. 80 dargestellten Dachträgers war daher richtig. Für die Streben des Mittelfaches aber musste volle Belastung vorgenommen werden, weil für diese der Drehpunkt zwischen den Auflager-Lothrechten liegt. Über schiefe Belastungen durch Winddruck s. Keck, Graphische Statik, S. 70.

Fig. 99.



#### d) Parabolischer Fachwerkträger.

**Beispiel:** Parabolischer Fachwerkträger von  $l = 24$  m Spannweite und  $h_m = 3$  m Höhe in der Mitte. Der Obergurt sei gerade, der Untergurt einer Parabel eingeschrieben. Die Spannweite sei durch Ständer in sechs

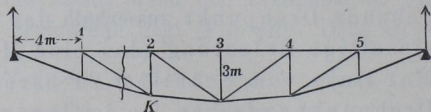
gleiche Fache von der Länge  $\lambda = 4 \text{ m}$  getheilt (Fig. 100). Für die Ständerhöhen  $h$  gilt dann die Parabelgleichung (s. Theil 1, S. 183)

$$h = \frac{4 h_m}{l^2} x (l - x),$$

wenn  $x$  der Abstand eines Ständers von einem Auflager.

Für  $x = 4 \quad 8 \quad 12$   
 wird  $h = 1^{2/3} \quad 2^{2/3} \quad 3$ .

Fig. 100.

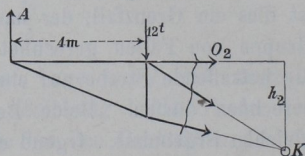


Für jeden der fünf Lastpunkte des Obergurts sei die ständige Last  $G = 2000 \text{ kg} = 2 \text{ t}$ , die bewegliche  $P = 10000 \text{ kg} = 10 \text{ t}$ . Es sollen beispielsweise die Spannkraften des zweiten Faches berechnet werden (Fig. 101). Für die Gurtkräfte ist volle Belastung aller Lastpunkte mit  $2 + 10 = 12 \text{ t}$  anzunehmen; dann wird der Auflagerdruck  $A = 5/2 \cdot 12 = 30 \text{ t}$ . Für den Obergurt  $O_2$  ist  $K$  der Drehpunkt,  $h_2 = 2^{2/3} \text{ m}$  der Hebelarm; mithin wird aus

$$0 = O_2 \cdot \frac{8}{3} + A \cdot 8 - 12 \cdot 4,$$

$$O_2 = -72 \text{ t}.$$

Fig. 101.



Das Neigungsverhältnis des zweiten Stückes  $U_2$  des Untergurts gegen die Wagerechte (Fig. 102) ist

$$(h_2 - h_1) : 4 = 1/4 = \text{tg } \nu,$$

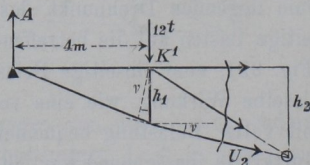
dann ist  $\cos \nu = 0,9701$ ,  $\sec \nu = 1,031$ .

Der Drehpunkt für  $U_2$  ist  $K'$ , der Hebelarm daher  $h_1 \cos \nu$ ; mithin wird aus

$$0 = -U_2 \cdot \frac{5}{3} \cos \nu + A \cdot 4:$$

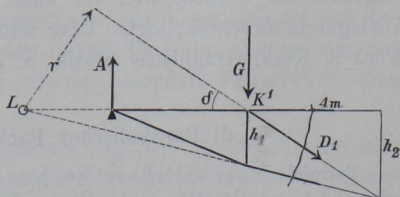
$$U_2 = 72 : \cos \nu = 72 \cdot \sec \nu = 74,23 \text{ t}.$$

Fig. 102.



Für die Strebe  $D_1$  liegt der Drehpunkt  $L$  links von der Spannweite (Fig. 103), u. zw., weil die Neigung von  $U_2$ , d. h.  $\text{tg } \nu = 1/4$ , um  $4 h_1 = 6^{2/3} = LK'$  links von  $K'$ , oder um  $2^{2/3} \text{ m}$  links von  $A$ . Ist  $\delta$  der Neigungswinkel von  $D_1$ , so gilt dafür  $\text{tg } \delta = h_2 : 4 = 2/3$  und  $\sin \delta = 0,5546$ . Der Hebelarm von  $D_2$  wird  $r = LK' \sin \delta = 3,697 \text{ m}$ . Die Strebe ist auf zwei verschiedene Belastungsarten zu berechnen: Bei einseitiger Belastung rechts vom

Fig. 103.



Schnitte tragen sämtliche Lastpunkte die ständige Last  $G = 2 \text{ t}$ , während

nur die Punkte 2 bis 5 (Fig. 100) mit beweglicher Last  $P = 10 \text{ t}$  bedeckt sind. Erstere liefern zu  $A$  den Beitrag  $\frac{5}{2} \cdot 2 = 5 \text{ t}$ , letztere den Beitrag

$$(\frac{1}{6} + \frac{2}{6} + \frac{3}{6} + \frac{4}{6}) 10 = 16\frac{2}{3} \text{ t, so dass}$$

$$A = 5 + 16\frac{2}{3} = 21\frac{2}{3} \text{ t}$$

wird. Mithin wird aus

$$0 = D_1 \cdot 3,697 - A \cdot 2\frac{2}{3} + G \cdot 6\frac{2}{3}$$

$$D_1 = 12,02 \text{ t.}$$

Bei einseitiger Belastung links vom Schnitt wird

$$A' = 5 + 10 \cdot \frac{5}{6} = 13\frac{1}{3} \text{ t, mithin aus}$$

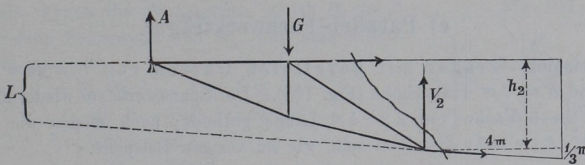
$$0 = D_1' \cdot 3,697 - A' \cdot 2\frac{2}{3} + (G + P) \cdot 6\frac{2}{3}$$

$$D_1' = -12,02 \text{ t.}$$

Die Strebe  $D_1$  erfährt also, wenn die Lastengruppe  $P$  sich über den Träger bewegt, Spannkraft, die zwischen einer Zugkraft von  $12,02 \text{ t}$  und einer Druckkraft von derselben Grösse schwanken.

Die gleichen Belastungsarten gelten auch für den Ständer  $V_2$  (Fig. 104).

Fig. 104.



Der Drehpunkt liegt um  $x = h_2 \frac{4}{1/3} = 32 \text{ m}$  links von  $V_2$ , um  $24 \text{ m}$  links von  $A$ .

Daher gilt für rechtsseitige Last

$$0 = -V_2 \cdot 32 - A \cdot 24 + G \cdot 28 \text{ mit } A = 21\frac{2}{3} \text{ t, wie vorhin,}$$

$$\text{also } V_2 = -14,5 \text{ t.}$$

Für linksseitige:

$$0 = -V_2' \cdot 32 - A' \cdot 24 + (G + P) \cdot 28 \text{ mit } A' = 13\frac{1}{3} \text{ t, wie vorhin,}$$

$$\text{also } V_2' = 0,5 \text{ t.}$$

Die Spannkraft des Ständers schwankt demnach zwischen  $0,5 \text{ t}$  Zug und  $14,5 \text{ t}$  Druck.

Dieses Beispiel des parabolischen Trägers ist besonders geeignet, zu zeigen, welchen Fehler man begehen würde, wollte man die Wandglieder auf volle Belastung berechnen. Es wäre dann  $A = 30 \text{ t}$ , und es würde nach Fig. 103, wenn man darin die Einzellast  $G$  durch  $G + P = 12$  ersetzt, aus

$$0 = D_1 \cdot 3,697 - 30 \cdot 2\frac{2}{3} + 12 \cdot 6\frac{2}{3}:$$

$$D_1 = 0; \text{ und nach Fig. 104 aus}$$

$$0 = -V_2 \cdot 32 - 30 \cdot 24 + 12 \cdot 28:$$

$$V_2 = -12 \text{ t.}$$

Für volle Belastung ist also die Strebe  $D_1$  spannungslos, und dasselbe erhält man für sämtliche Streben des parabolischen Trägers. In Theil 1, S. 185, wurde schon gezeigt, dass der parabolische Träger ohne Streben für volle Belastung im Gleichgewicht ist, dass diese Stäbe nur durch eine ungleichmässige Belastung bedingt werden. Demgemäss werden nun die vorhandenen Streben bei voller Belastung spannungslos; auch haben dann die Ständer nur die Knotenlasten von oben nach den Knotenpunkten des geknickten Untergurtes zu übertragen; daraus erklärt sich der obige Werth  $V_2 = -12 \text{ t}$  für volle Belastung, den man in gleicher Weise für sämtliche Ständer findet. Nach Theil 1, S. 184, ist  $H = \frac{p l^2}{8 f} = \frac{p l \cdot l}{8 f}$  die wagerechte Spannkraft einer solchen Stangenverbindung; dies giebt hier, wo auf  $4 \text{ m}$  Länge  $12 \text{ t}$ , auf  $l = 24 \text{ m}$  also  $72 \text{ t}$  kommen:

$$H = \frac{72 \cdot 24}{8 \cdot 3} = 72 \text{ t.}$$

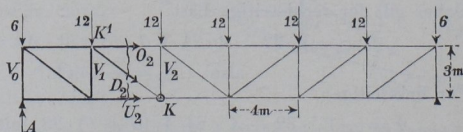
Dieser Werth gilt für die Druckkräfte in sämtlichen Stäben des Obergurtes und ist zugleich die wagerechte Seitenkraft der Zugkräfte im Untergurte.

### e) Parallel-Fachwerkträger.

**Beispiel:** Träger mit parallelen Gurten von  $l = 24 \text{ m}$  Spannweite und  $h = 3 \text{ m}$  Trägerhöhe (Fig. 105). Die Spannweite sei wiederum durch Ständer in 6 Fache von  $\lambda = 4 \text{ m}$  Länge getheilt; auch mögen die Lasten,  $G = 2 \text{ t}$ ,  $P = 10 \text{ t}$ , dieselben sein, wie im vorigen Beispiele.

Für die Berechnung der Gurten ist volle Belastung sämtlicher Lastpunkte anzunehmen, und zwar sind die Endpunkte des Obergurtes je mit der halben Last eines Faches, d. h. mit  $1 \text{ t}$  bzw.  $5 \text{ t}$  zu belasten. Dann ist  $A = 3 \cdot 12 = 36 \text{ t}$ .

Fig. 105.



Für  $O_2$  ist  $K$  der Drehpunkt, und man findet aus der Momentengleichung

$$0 = O_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 8 - 12 \cdot 4:$$

$$O_2 = -64 \text{ t.}$$

Für  $U_2$  ist  $K'$  der Drehpunkt, und man findet aus:

$$0 = -U_2 \cdot 3 + (A - 6) \cdot 4$$

$$U_2 = 40 \text{ t.}$$

Übrigens braucht man bei einem derartigen Parallelfachwerke mit Streben, die nach der Mitte hin abfallen, nur die Spannkkräfte des Obergurtes zu berechnen und kann darnach diejenigen des Untergurtes ohne Weiteres



angeben. Führt man nämlich durch den Träger einen Schnitt in der Richtung der Streben (Fig. 106), so muss nach der Gleichung der wagerechten Kräfte  $O + U = 0$ , mithin  $U = -O$  sein, oder in einem Parallel-Fachwerke mit Ständern haben zwei Stäbe des Ober- und Untergurtes, welche zwischen demselben Strebepaare liegen, gleiche aber entgegengesetzte Spannkraft; mithin ist  $O_1 = -U_2$ ;  $O_2 = -U_3$  u. s. f.

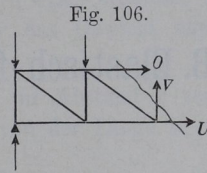
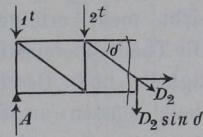


Fig. 106.

Da der Schnittpunkt der Gurten in unendlicher Ferne liegt, so verwendet man für die Berechnung der Wandglieder eines Parallelträgers an Stelle der Momentengleichung zweckmässig die Gleichung der lothrechten Kräfte. In dieser kommen die Gurtkräfte, weil sie wagerecht sind, nicht vor; mithin erreicht man dasselbe, was sonst mit der Momentengleichung erzielt wurde, nämlich dass man für die gesuchte Spannkraft nur mit einer einzigen Gleichung zu thun hat.

Ordnet man zur Berechnung von  $D_2$  zunächst eine Belastung rechts vom Schnitt an, so wird der linke Auflagerdruck leicht zu  $22\frac{2}{3}t$  gefunden (nämlich um die ständige Last ( $1t$ ) des Endknotenpunktes mehr als auf S. 87 zur Berechnung von  $D_1$ ). Ist  $\delta$  der Neigungswinkel der Strebe gegen die Wagerechte, so ist  $D_2 \sin \delta$  die lothrechte Seitenkraft von  $D_2$ , und man erhält (Fig. 107) aus

Fig. 107.



$$0 = D_2 \sin \delta - A + 1 + 2:$$

$$D_2 \sin \delta = 19\frac{2}{3}t \text{ und,}$$

$$\text{weil } \operatorname{tg} \delta = \frac{3}{4}, \sin \delta = 0,6,$$

$$D_2 = 32,78t.$$

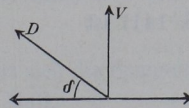
Für einseitige Belastung links vom Schnitt ist  $A' = 19\frac{1}{3}t$ ; und aus  $0 = D_2' \sin \delta - A + 6 + 12$  findet man leicht

$$D_2' \sin \delta = 1\frac{1}{3}t; D_2' = 2,22t.$$

Die Spannkraft der Strebe  $D_2$  schwankt also zwischen den Zugkräften  $2,22$  und  $32,78t$ ; Druckkraft erfährt sie nicht.

Die Spannkräfte der Ständer lassen sich beim Parallel-Fachwerk auf die der Streben zurückführen. Führt man nämlich um einen Knoten des unbelasteten Gurtes (hier also des unteren) einen kreisförmigen Schnitt (Fig. 108) und wendet auf den herausgeschnittenen Theil die Gleichung der lothrechten Kräfte an, so kommen in dieser nur  $V$  und  $D$  vor, und es muss

Fig. 108.



$$V + D \sin \delta = 0 \text{ oder } V = -D \sin \delta \text{ sein.}$$

Am Knotenpunkte  $K$  des Untergurtes (Fig. 105) treffen  $D_2$  und  $V_2$  zusammen, mithin wird  $V_2 = -D_2 \sin \delta = -19\frac{2}{3}t$ ,  $V_2' = -1\frac{1}{3}t$ . Der Ständer  $V_2$  erfährt also eine Druckkraft, die zwischen  $1\frac{1}{3}$  und  $19\frac{2}{3}t$  schwankt. Eine eingehendere Behandlung erfahren die Fachwerke in Keck, Vorträge über Elasticitätslehre und über Graphische Statik.

## B. Elastisch-feste Körper in Beschleunigungs-Zuständen.

### I. Beschleunigte Verschiebung elastisch-fester Körper.

Einem geraden Stabe werde durch eine im Schwerpunkte der vorderen Stirnfläche angreifende Zugkraft  $K$  eine Beschleunigung  $p$  ertheilt (Fig. 109). Hierdurch entstehen Spannungen und Formänderungen (elastische Verlängerungen). Es wird die Annahme gemacht, die Formänderungen seien bereits derartig eingetreten, dass gegenseitige Bewegungen der einzelnen Punkte des Stabes nicht mehr erfolgen, dass vielmehr alle Theile übereinstimmende Geschwindigkeit und Beschleunigung haben. Dann müssen an dem ganzen Stabe, sowie an jedem abgeschnittenen Theile desselben nach S. 3 die Ergänzungskräfte  $[-mp]$  den wirklichen Kräften das Gleichgewicht halten, und es muss der Stab sich bei der Bewegung wie ein starrer Körper verhalten. Nach dem Satze von der Beschleunigung des Schwerpunktes (Theil 1, S. 141) ist

$$p = \frac{K}{M},$$

wenn  $M = \gamma Fl : g$  die Masse des ganzen Stabes bedeutet (s. Theil 1, S. 126).

Macht man auch hier die Voraussetzung, dass die an einem Querschnitte auftretende Spannkraft sich gleichmässig über dessen Fläche  $F$  vertheile, so ist die Spannung an der Angriffsstelle der Kraft  $K$

$$1) \quad \sigma_1 = \frac{K}{F} = \frac{M}{F} p = \frac{\gamma}{g} l p = \gamma l \frac{p}{g},$$

Fig. 109.

