Erste Abtheilung.

Mechanik der elastisch-festen Körper.

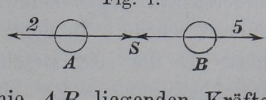
Einleitung.

Nichtstarre Körper und Massengruppen. Elastisch-feste Körper.

Die Möglichkeit, Kräfte mit verschiedenen Angriffspunkten an einem Körper zusammenzusetzen und zu zerlegen, d. h. durch andere ohne Abänderung der Bewegung des Körpers zu ersetzen, ist im 1. Theile dieses Buches nur für völlig starre Körper bewiesen. Für diese benutzten wir (1. Theil, S. 96) den Erfahrungs-Grundsatz, dass zwei gleiche, in derselben Richtungslinie wirkende Kräfte entgegengesetzten Sinnes sich in ihrer Wirkung auf die Bewegung eines starren Körpers aufheben; daraus folgte die Zulässigkeit der Verschiebung des Angriffspunktes einer Kraft längs ihrer Richtungslinie. Auf diese Betrachtungen gründete sich die Lehre von der Zusammensetzung der Kräfte zu einer Einzelkraft und einem Kräftepaare (1. Theil, S. 113), sowie die Lehre vom Gleichgewichte und den sechs Bedingungen für dasselbe (1. Theil, S. 146).

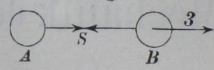
Eine Verlegung des Angriffspunktes einer Kraft hat stets Änderungen der inneren Kräfte des Körpers zur Folge. Auf diese kommt es aber in der Mechanik starrer Körper nicht an, weil starren Körpern eine unbegrenzte Festigkeit beigelegt wird und weil mit dem Auftreten innerer Kräfte keine Formänderungen, keine sichtbaren Wirkungen verbunden sind. Anders ist es mit Körpern oder Massengruppen, welche nicht starr sind.

Fig. 1.



Sind z. B. zwei Massenpunkte A und B, deren Masse je $= 1$ ist, durch eine starre Linie verbunden (Fig. 1) und wirken in A und B die beiden in der Richtungslinie AB liegenden Kräfte von 2 und 5^{kg} mit dem Sinne nach links bezw. rechts, so bringen diese an der starren Massengruppe eine sekundliche Beschleunigung $3:2 = 1{,}5\,^{\mathrm{m}}$ hervor (1. Theil, S. 142). Daraus bestimmt sich die Spannkraft S der starren Linie, denn am Punkte B muss $5 - S = 1 \cdot 1{,}5$, am Punkte A ebenso $S - 2 = 1 \cdot 1{,}5$ sein. Aus beiden folgt die Zugkraft $S = 3{,}5\,^{\mathrm{kg}}$. Verlegt man die Kraft $2\,^{\mathrm{kg}}$ von A nach B (Fig. 2), so dass nun in B eine Kraft von $3\,^{\mathrm{kg}}$ wirkt, so ändert sich dadurch in dem sichtbaren Verhalten der Massengruppe nichts; die sekundl. Beschleunigung bleibt $3:2 = 1{,}5\,^{\mathrm{m}}$ nach rechts. Es wird nun aber die Zugkraft S der Verbindungsgeraden $1{,}5\,^{\mathrm{kg}}$. Eine Verlegung der Kraft $5\,^{\mathrm{kg}}$ (Fig. 1) von B nach A bedingt, wie man leicht erkennt, das Auftreten einer inneren Druckkraft $S = 1{,}5\,^{\mathrm{kg}}$ in der Verbindungsgeraden.

Fig. 2.



Sind die beiden Masseneinheiten A und B aber nachgiebig, etwa durch eine elastische Feder, mit einander verbunden, die vor dem Auftreten der äusseren Kräfte völlig ohne Spannkraft war, so wird mit dem Beginne der Wirkung der äusseren Kräfte eine Verlängerung der Feder und erst in Verbindung damit das Auftreten einer veränderlichen Spannkraft S erfolgen. Im ersten Augenblicke ist die Spannkraft noch Null; somit erfährt B eine sekundliche Beschleunigung $= 5\,^{\mathrm{m}}$ nach rechts, A eine solche von $2\,^{\mathrm{m}}$ nach links. Mit diesen Beschleunigungen gehen die Massenpunkte aus einander, und mit der Verlängerung der Verbindungsgeraden entsteht dann eine (meist sehr schnell) anwachsende Zugkraft S in der Feder. In dem Augenblicke, wo $S = 1\,^{\mathrm{kg}}$ geworden ist, hat B die sekundliche Beschleunigung $= 4\,^{\mathrm{m}}$ nach rechts, A eine solche von $1\,^{\mathrm{m}}$ nach links. Würde man die Kraft $= 5\,^{\mathrm{kg}}$ von B nach A verlegen (Fig. 4), so erführe A zu Anfang eine sekundliche Beschleunigung $= 3\,^{\mathrm{m}}$ nach rechts, B keine Beschleunigung; A würde nach B hingedrängt, so dass die Feder zusammengedrückt und zur Äusserung einer veränderlichen, gegen beide Massenpunkte gerichteten Druckkraft veranlasst würde. In dem Augenblicke, wo die Druckkraft $S = 1\,^{\mathrm{kg}}$, hätte B die sek. Beschleunigung $= 1\,^{\mathrm{m}}$ nach rechts, A die sek. Beschleunigung $= 2\,^{\mathrm{m}}$ ebenfalls nach rechts; A würde also noch nach B hingedrängt. Erst wenn die Druckkraft S auf $1{,}5\,^{\mathrm{kg}}$

Fig. 3.

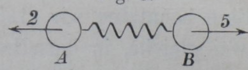
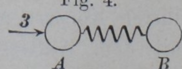


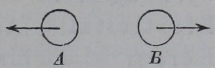
Fig. 4.



angewachsen ist, haben beide Punkte die übereinstimmende Beschleunigung $= 1{,}5^{\mathrm{m}}$ wie bei starrer Verbindung. Man erkennt hieraus, dass eine Verlegung der einen Kraft von B nach A in der Bewegung der Punkte eine Änderung hervorbringt, dass also eine Zusammensetzung der beiden Kräfte, d. h. ihre Ersetzung durch eine einzige Kraft, nicht zulässig ist.

Es giebt auch Massengruppen, deren Punkte einer Vergrösserung des Abstandes von einander keinen Widerstand entgegensetzen. Dies ist z. B. annähernd der Fall bei flüssigen Körpern. Diese lassen sich ohne nennenswerthen Widerstand von einander trennen. Man kann sich solche Massengruppen grobsinnlich vorstellen durch einzelne Kugeln ohne Verbindung. Jede derselben wird nur durch die an ihr angreifenden äusseren Kräfte beschleunigt. Gleiche Kräfte, an A und B (nach Fig. 5) angebracht, bewirken beschleunigte Trennung der Punkte, aber keineswegs Gleichgewicht.

Fig. 5.



Gleiche Zugkräfte, an den Enden einer biegsamen, aber undehnbaren Kette angebracht, heben sich auf, während bei einer Umkehrung der Kräfte zu Druckkräften ein Zusammenballen der Kette zu einem Knäuel, also keinenfalls Gleichgewicht der ursprünglich ausgestreckten Kette, entsteht.

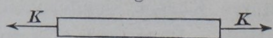
Dennoch sind die Lehren von der Zusammensetzung und dem Gleichgewichte der äusseren Kräfte an starren Körpern auch für nicht starre Körper und Massengruppen von grosser Bedeutung, weil der Satz von d'Alembert (1. Theil, S. 139) und der Satz von der Bewegung des Schwerpunktes (1. Theil, S. 141) nicht allein für starre Körper, sondern allgemein für jede beliebige Massengruppe gelten. Fügt man also zu den äusseren Kräften $[K]$ einer Massengruppe die Gruppe der Ergänzungskräfte $[-mp]$ hinzu, so genügen diese Kräftegruppen zusammen den Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper. Der Schwerpunkt einer beliebigen Massengruppe aber bewegt sich so, als ob die gesammte Masse in ihm zu einem Punkte vereinigt wäre und sämmliche äusseren Kräfte, parallel verschoben, an ihm angriffen. In den Fällen der Figuren 1—4 hat der Schwerpunkt der Gruppe der beiden Massenpunkte übereinstimmend die sekundliche Beschleunigung $1{,}5^{\mathrm{m}}$ nach rechts.

Eine beliebige Massengruppe ist im G l e i c h g e w i c h t e, wenn jeder einzelne Punkt derselben ruht oder eine gleichförmig geradlinige Bewegung ausführt, d. h. wenn an jedem einzelnen Massenpunkte die Beschleunigung gleich Null ist. Dann fallen die Ergänzungskräfte sämmtlich fort, und es müssen die äusseren Kräfte der Massengruppe allein den Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper genügen. Hiernach gelten die Gleichgewichts-Bedingungen starrer Körper (1. Theil, S. 146) in unveränderter Weise auch für das Gleichgewicht nicht starrer Körper oder beliebiger Massengruppen.

Die festen Körper sind nicht starr, vielmehr erfahren sie unter Einwirkung äusserer Kräfte Formänderungen, die bei genügendem Anwachsen der Kräfte zur Zerstörung des Zusammenhanges führen können. Die Eigenschaft der festen Körper, unter Einwirkung äusserer Kräfte eine entsprechende Formänderung zu zeigen, die mit dem Aufhören der Kräftewirkung mehr oder minder wieder verschwindet, heisst **Elasticität.** Aufgabe der Mechanik elastisch-fester Körper ist die Ermittelung der inneren Spannungen und der Formänderung, welche an einem Körper durch äussere Kräfte hervorgebracht werden.

Zug- und Druck-Elasticität. Der einfachste Fall der elastischen Formänderung ist die Verlängerung eines geraden prismatischen Stabes durch eine in der Mittellinie des Stabes wirkende Zugkraft. Ist l die Länge des Stabes, F sein Querschnitt (beide im ungespannten Zustande gemessen), und wirken an den Endflächen, genau in der Mittellinie des Stabes, gleiche Zugkräfte K (Fig. 6), deren Grösse aber zunächst ganz allmählich, von Null beginnend, anwachsen soll, so kann man in den meisten Fällen annehmen, dass sich die Kraft K annähernd gleichmässig über den Querschnitt F vertheilt, so dass

Fig. 6.



$$1) \qquad \sigma = \frac{K}{F}$$

die auf die Flächeneinheit kommende Zugkraft ist. Diese Grösse σ heisst die **Zugspannung.** Ihrem Auftreten entspricht eine gewisse Verlängerung Δl des Stabes. (Das Zeichen Δ dient zur Bezeichnung kleiner Änderungen, so auch derjenigen Formänderungen, die mit der Anspannung der festen Körper verbunden sind.) Solange die Spannung σ gewisse, von der Art des Stoffes abhängige Grenzen nicht überschreitet, kann man Verlängerung und Spannung einander verhältnisgleich annehmen. In dieser Proportionalität zwischen Spannung und Formänderung besteht das Wesen der vollkommenen Elasticität.

Der Quotient $\frac{\Delta l}{l}$, das Verlängerung-Verhältnis, oder die auf die Längeneinheit kommende Verlängerung heisst die **Dehnung** (specifische Verlängerung) ε, und man kann jene Proportionalität schreiben:

2) $$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Die Grösse E ist von dem Stoffe abhängig und heisst **Elasticitätsmaſs** (Elasticitätsmodul). Für eine Spannung $\sigma = 1$ wird die Dehnung $\varepsilon = \frac{1}{E}$. Mithin ist das Elasticitätsmaſs E der reciproke Werth der Dehnung für eine Spannung $\sigma = 1$. Weil Δl und l gleichartige Grössen (Längengrössen) sind, so ist ihr Verhältnis, die Dehnung ε, eine unbenannte Verhältniszahl; daher müssen σ und E (in Gl. 2) ebenfalls gleichartige Grössen sein. D. h. E hat die Bedeutung einer Spannung für die Flächeneinheit. Für $\sigma = E$ wird $\varepsilon = 1$ und $\Delta l = l$. Daher kann man auch sagen: das Elasticitätsmaſs E ist diejenige Spannung, unter deren Einflusse der Stab sich um seine ursprüngliche Länge, d. h. auf das Doppelte seiner ursprünglichen Länge dehnen würde, wenn der Stoff bei einer solchen Dehnung noch vollkommen elastisch bliebe. In Wirklichkeit trifft das höchstens bei Kautschuk zu; andere Stoffe ertragen eine so bedeutende Dehnung bei weitem nicht.

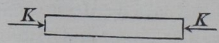
Die Grenze der Spannung σ, bis zu welcher die Gleichung 2 der vollkommen elastischen Dehnung gilt, heisst die Elasticitätsgrenze für Zug; ihr Zahlenwerth soll mit z bezeichnet werden. Lässt man die Spannung allmählich wieder verschwinden, so verschwindet auch die Dehnung wieder; es tritt keine bleibende Formänderung ein.

Überschreitet die Spannung σ die Elasticitätsgrenze z, so wächst die Formänderung schneller als die Spannung, auch nimmt der Stab mit dem Verschwinden der Spannung nicht genau wieder die ursprüngliche Länge an; er hat vielmehr eine bleibende Verlängerung erfahren, er verhält sich nicht mehr vollkommen elastisch. Bei weiterer Zunahme der Spannung tritt schliesslich ein Zerreissen des Stabes ein. Diejenige Spannung, bei der dies erfolgt, heisst die **Zugfestigkeit** und soll mit Z bezeichnet werden.

Kehren die Kräfte K ihre Pfeilrichtung um, so werden sie zu Druckkräften (Fig. 7) und ertheilen dem Stabe, falls seine Länge nicht bedeutend im Verhältnisse zu den Querschnitts-Abmessungen ist, eine gleichmässige Druckspannung

1a) $$\sigma = \frac{K}{F},$$

Fig. 7.

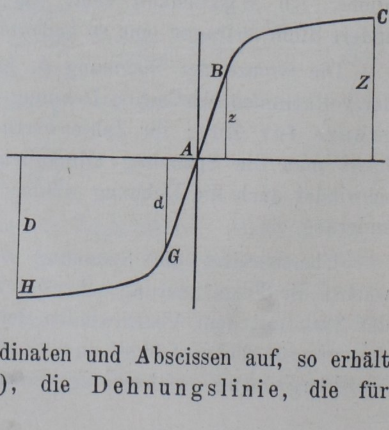


mit deren Auftreten eine Verkürzung verbunden ist. (Bei grösserer Länge erfolgt eine seitliche Ausbiegung mit verwickelteren Verhältnissen, die unter „Knickfestigkeit“ (S. 59) behandelt werden.) Innerhalb gewisser Grenzen kann die für Verlängerung gegebene Gl. 2 auch für die Verkürzung durch Druck benutzt werden; es ist

2a) $$\frac{\Delta l}{l} = \varepsilon = \frac{\sigma}{E}.$$

Darin ist dann Δl eine negative Verlängerung, ε eine negative Dehnung, σ eine negative Spannung. (Es empfiehlt sich, in der Regel Druckspannungen als negative, Zugspannungen als positive Spannungen zu bezeichnen.) Zug- und Druckspannungen fasst man in der gemeinsamen Bezeichnung Längsspannung (Normalspannung) zusammen. Das Elasticitätsmafs E kann man für Zug und Druck gleich gross annehmen. Derjenige Spannungswerth, bis zu welchem die Verkürzung nach der Gleichung 2a folgt, ist die Elasticitätsgrenze für Druck und werde mit d bezeichnet. Die Druckspannung, bei der die Zerstörung erfolgt, ist die Druckfestigkeit D.

Fig. 8.



Trägt man die zusammengehörigen Spannungen und Dehnungen, wie sie sich bei Versuchen ergeben, als Ordinaten und Abscissen auf, so erhält man eine Schaulinie (Fig. 8), die Dehnungslinie, die für

Schmiedeisen ungefähr die Form $HGABC$ hat. Innerhalb des mittleren geraden Theiles gilt die Gleichung 2.

Mit dem Auftreten der Zugspannungen sind neben den besprochenen Längsdehnungen auch noch Einschnürungen (Verminderungen des Querschnittes) verbunden. Ebenso sind Verkürzungen in der Längsrichtung durch Druck von Stauchungen (Querschnitts-Vergrösserungen) begleitet. Diese Erscheinungen haben für die erste Einführung in das Verhalten der elastischen Körper keine besondere Wichtigkeit, finden aber in Keck's Vorträgen über Elasticitätslehre gebührende Berücksichtigung.

Diejenige Grenze, bis zu welcher die Dehnungen mit den Spannungen verhältnisgleich sind, wurde vorstehend Elasticitätsgrenze genannt und zugleich als Grenze bezeichnet, bis zu welcher bleibende Formänderungen nicht auftreten. In Wirklichkeit weicht das Verhalten der Körper von diesem ideellen Bilde mehr oder weniger ab, insofern jene beiden Grenzen nicht zusammenfallen. Hält man sich strenger an die Wirklichkeit, so bezeichnet man zweckmässig die erstere Grenze als Proportionalitätsgrenze, die zweite als Elasticitätsgrenze. Über diese Verhältnisse ist nachzulesen in C. Bach's Elasticität und Festigkeit. Das genannte Buch enthält auch Mittheilungen über den Einfluss der Zeit auf die Formänderung und das Verschwinden derselben, über die s. g. elastische Nachwirkung, auf welche wir hier auch nicht eingehen wollen.

Was die Mafseinheiten anlangt, so behalten wir für die Kräfte das Kilogramm bei, wie im ersten Theile. Als Längeneinheit benützen wir in der Mechanik der elastischen Körper zweckmässig nicht das Meter, weil Elasticitäts- und Festigkeitsgrenzen für das Quadratmeter unbequem grosse Zahlen ergeben. Vielmehr wählen wir das Centimeter zur Einheit. Im Maschinenbau wird auch vielfach nach Millimetern gerechnet. Umrechnungen von Centimetern auf Millimeter oder auf Meter sind so einfach, dass es nur geringer Aufmerksamkeit bedarf, sich in dieser Beziehung vor Fehlern zu schützen. Freilich muss man sich zur Regel machen, in einem gegebenen Falle sämmtliche Mafse, also neben den Querschnitten besonders auch die Längen, durch dieselbe Einheit auszudrücken. In dieser Beziehung machen Anfänger häufig Fehler. Als Spannung hat eine Zahl nur Bedeutung, wenn die zugehörige Kraft- und Flächeneinheit bekannt sind. Eine Spannung von 700 $^{kg}/_{qcm}$ (d. h. 700 ^{kg} für das Quadratcentimeter) ist gleichbedeutend mit 7 $^{kg}/_{qmm}$, mit 7 000 000 $^{kg}/_{qm}$.

Die freie Luft übt auf die von ihr berührten Körper einen Druck aus, welcher auf 1 ^{qm} in der Höhe des Meeresspiegels etwa

10333 ^{kg}, auf 1 ^{qcm} mithin etwa 1,0333 ^{kg} beträgt. Da der Luftdruck mit zunehmender Höhe kleiner wird, so ist auch leicht eine Höhe zu finden (etwa 264 ^{m} über dem Meere), in welcher der Luftdruck im Mittel 1 $^{kg}/_{qcm}$ beträgt, und man hat es zweckmässig gefunden, diesen Druck als Atmosphäre (1 ^{at}) im Maschinenwesen allgemein einzuführen. Der Kürze wegen wollen wir auch die Spannungseinheit (1 $^{kg}/_{qcm}$) als Atmosphäre bezeichnen, also die Werthe σ, z, d, Z, D und E in Atmosphären mit der Bedeutung Kilogramme für 1 ^{qcm} ausdrücken.

Die für eine Stoffgattung geltenden Elasticitäts- und Festigkeitszahlen E, z, d, Z und D sind natürlich je nach der Güte des gerade vorliegenden Körpers schwankend. In folgender Tabelle geben wir einige Mittelwerthe für die in den Beispielen vorkommenden Fälle.

Elasticitäts- und Festigkeitszahlen in ^{at}.

	Elasticitätsgrenze		Festigkeit		Elasticitätsmaſs
	Zug z	Druck d	Zug Z	Druck D	E
Gusseisen	600	1600	1300	7000	1 000 000
Stabeisen	1600	1600	3500	3500	2 000 000
Stahl	3000	3000	5000	6000	2 200 000
Gussstahl	4500	4500	7000	8000	2 200 000
Holz	250	170	800	500	120 000
Glas	340	1450	340	1450	1 000 000
Kautschuk	20	—	30	—	10

Bei Glas fallen Elasticitäts- und Festigkeitsgrenzen zusammen, d. h. Glas bleibt bis zur Zerstörung vollkommen elastisch. Bekanntlich kommen ja auch beim Glase bleibende Formänderungen, z. B. Verbiegungen, nicht vor.

Die Kräfte, welche auf einen Körper oder einen Theil desselben wirken, unterscheidet man in **Massenkräfte** und **Flächenkräfte**. Unter ersteren verteht man solche, die unmittelbar auf die Massentheilchen übertragen werden und auch der Masse verhältnisgleich sind; dazu gehören die Schwerkräfte, auch magnetische und elektrische Kräfte, sowie die Ergänzungskräfte ($-mp$, $-mr\omega^2$). Die Flächenkräfte werden durch unmittelbare Berührung mittels der Flächen übertragen und sind von der Form: Flächengrösse mal Kraft für die Flächeneinheit. Zu diesen gehören namentlich die inneren Kräfte fester und flüssiger Körper.

A. Gleichgewicht elastisch-fester Körper.

I. Allgemeines.

Ein elastisch-fester Körper ist im Gleichgewichte, wenn seine sämmtlichen Punkte sich im Gleichgewichte befinden, und dies verlangt, wie bei starrren Körpern, dass der Körper entweder ruht oder eine gleichförmige geradlinige Verschiebung ausführt; auch darf der Körper keine Formänderungen mehr erfahren, vielmehr muss die den inneren Spannungen entsprechende Form bereits vorhanden sein.

Liegt ein solcher Gleichgewichtszustand vor, so ist die Bedingung dafür nach S. 4, dass die äusseren Kräfte des Körpers den Gleichgewichtsgleichungen für starre Körper genügen müssen. Diese Gleichgewichts-Bedingungen werden auch zur Ermittelung der inneren Spannkräfte benutzt, indem man durch den Körper einen Schnitt führt und für einen der erhaltenen Abschnitte die Gleichgewichts-Bedingungen aufstellt. Denn es muss ja, wenn der ganze Körper sich im Gleichgewichte befindet, auch jeder Theil desselben im Gleichgewichte sein. Bei dieser Untersuchung muss man an der Schnittstelle den vorherigen Zusammenhang durch Spannkräfte ersetzen. Diese Spannkräfte, die für den unzertrennten Körper innere Kräfte bedeuteten, gelten für die Betrachtung eines Abschnittes als äussere Kräfte und sind in den Gleichgewichts-Gleichungen mit aufzuführen.

Das Gleichgewicht ist nur möglich, wenn der Körper durch die äusseren Kräfte nicht zerstört wird, d. h. wenn die Spannung an keiner Stelle die Grenze der Festigkeit erreicht. Soll ein Körper aber dauernd im Gleichgewichte bleiben, so darf seine Spannung die Elasticitätsgrenze keinenfalls überschreiten. Es würden sonst bleibende Formänderungen entstehen, die gewöhnlich nicht