



Johann Hopfgartner, Dipl.-Ing.

# Untersuchung von Verbesserungspotentialen hermetischer Kolbenkompressoren mit Hilfe numerischer Methoden

**DISSERTATION**

zur Erlangung des akademischen Grades  
Doktor der technischen Wissenschaften

eingereicht an der

**Technischen Universität Graz**

Erstbegutachter

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Raimund Almbauer  
Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik, TU Graz

Zweitbegutachter

Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Mag.rer.nat Dr.techn. Herbert Steinrück  
Institut für Strömungsmechanik und Wärmeübertragung, TU Wien

Graz, November 2017



Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik  
Vorstand: Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Eichlseder



# Vorwort

Die vorliegende Dissertation entstand während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Mitarbeiter am Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik der Technischen Universität Graz. Diese Arbeit war Teil des von der österreichischen Forschungsförderungsgesellschaft unterstützten Projektes ECO-COOL und beschäftigte sich mit der Analyse von Hubkolbenkompressoren mit Hilfe numerischer Methoden. In diesem Zuge möchte ich mich bei sämtlichen Geldgebern und insbesondere bei der Firma Secop für die hervorragende Zusammenarbeit bedanken.

Weiterer Dank gebührt Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Helmut Eichlseder für die Möglichkeit, meine Dissertation am Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik durchführen zu können.

Ganz besonders möchte ich mich bei Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Raimund Almbauer bedanken, der jederzeit ein offenes Ohr für mich hatte und mir in zahlreichen Gesprächen immer wieder gute Ideen und Hinweise für die Umsetzung meiner Forschungstätigkeit lieferte.

Bedanken möchte ich mich auch bei Herrn Ao.Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Mag.rer.nat. Dr.techn. Herbert Steinrück, der sich bereit erklärte, die Zweitbegutachtung meiner Dissertation zu übernehmen.

Des Weiteren möchte ich mich bei dieser Gelegenheit bei meinen Arbeitskollegen bedanken für die vielen sachlichen Diskussionen und die Durchführung diverser Messungen, aber auch für das angenehme und konstruktive Arbeitsklima im Büro. Hier möchte ich mich speziell bei Stefan Posch, der mich seit Anbeginn meiner technischen Karriere begleitet, für die langjährige Freundschaft und das Überreden zur Durchführung dieser Dissertation bedanken.

Zu guter Letzt möchte ich mich von ganzem Herzen bei meiner Familie bedanken, die mir während meiner Ausbildung stets zur Seite gestanden ist. Vor allem aber gilt mein Dank meiner Verlobten Sarah, die mit ihrer liebevollen und humorvollen Art immer für den notwendigen Ausgleich und Motivation gesorgt hat.



# Kurzfassung

Um die Leistungszahl hermetischer Hubkolbenkompressoren für Haushaltskühlgeräte zu verbessern, wird in deren Entwicklung neben Experimenten vermehrt auf Simulationen gesetzt. Diese bilden ein wichtiges Instrument, um einerseits komplexe Zusammenhänge besser zu verstehen und andererseits Verbesserungsmaßnahmen zuverlässiger bewerten zu können.

Als äußerst kritische Bauteile haben sich die druckgesteuerten Flatterventile erwiesen. Diese kostengünstigen Blechblättchen haben einen wesentlichen Einfluss auf Schallemissionen, Lebensdauer und Leistungszahl des Kompressors. Speziell das Saugventil birgt ein großes Verbesserungspotential in sich. Bleibt das Druckventil während der Ausstoßphase durchgehend geöffnet, so führt das Saugventil eine schwingende Bewegung aus. Durch diese Schwingbewegung schlägt das Ventil mehrmalig während einer Saugphase auf den Ventilsitz auf, was sich sowohl als Druckschwankung als auch Geräuschemission bemerkbar macht. Die damit verbundenen Strömungsverluste haben einen erheblichen Anteil an den thermodynamischen Verlusten im Kompressor und stehen deshalb im Fokus dieser Arbeit.

Ziel dieser Arbeit ist die Analyse der durch das Saugventil verursachten Strömungsverluste. Dazu wird die Kältemittelströmung durch den hermetischen Kompressor mittels dreidimensionaler CFD-Simulation berechnet, wobei die gegenseitige Beeinflussung von Strömung und Ventildynamik berücksichtigt wird. Vor allem für die Berechnung des Saugventils muss ein Ansatz gewählt werden, der sowohl die genaue Ventilbewegung als auch sämtliche am Ventil angreifenden Kräfte (Vorspannung, Öllebekräfte, Kontakt, usw.) modellieren kann.

Für diese Arbeit wurde ein auf der Finite-Elemente-Methode basierendes Programm erstellt, da kein kommerzielles Strukturberechnungsprogramm zur Verfügung steht, das sämtlichen Anforderungen gerecht wird. Dieses Programm ist für kinetische, nichtlineare Strukturberechnungen konzipiert und wird mit einem kommerziellen CFD-Programm gekoppelt. Mithilfe von Messungen wird in einem weiteren Schritt die Eignung des gesamten Simulationsmodells überprüft. Anschließend werden mit diesem Modellierungsansatz Maßnahmen zur Verringerung von Strömungsverlusten durch das Saugventil untersucht und diese hinsichtlich Effizienzsteigerung und Wirtschaftlichkeit bewertet.



# Abstract

In the last years, the importance of numerical simulations in the development process of hermetically sealed reciprocating compressors for household appliances has increased significantly. Beside experiments, these simulations are crucial to understand the complex interactions inside the compressor and to assess different measures for improving the compressor efficiency reliably.

One of the most critical parts of reciprocating compressors are their reed valves. These cheap and simple steel valves have major influence on noise emissions, lifetime and efficiency of the compressor. Especially the suction valve has a big potential for improvement. In contrast to the discharge valve, that stays open during the whole discharge process, the suction valve flutters. Thus, it hits the valve seat several times during one suction phase and causes pressure fluctuations and noise emissions. In addition, this oscillating motion of the suction valve is responsible for a considerable part of the thermodynamic losses inside the compressor and thus, the focus of this work was laid on the reduction of the suction losses.

The aim of this work is the analysis of the flow losses caused by the suction valve. Therefore, the refrigerant flow through the hermetically sealed compressor is calculated using three-dimensional CFD-simulations. The mutual interaction between flow and valve dynamics is considered using so-called Fluid-Structure-Interactions. Especially for calculating the suction valve, an approach which is able to model the exact movement as well as the influence of several forces acting on the valve (preload, oil stiction force, contact, etc.), must be used.

Since no commercial structural analysis program is available, which fulfils all requirements, a program based on finite elements has been written for this work. This program is designed for dynamic, nonlinear structural analysis and it is coupled with a commercially available CFD-program. By means of measurements, the suitability of the whole simulation approach is verified. Following, this approach is used to investigate different measures to reduce the flow losses caused by the suction valve. Beside the ability to increase the compressors efficiency, also economic aspects are discussed.



# Eidesstattliche Erklärung

## *Affidavit*

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

*I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used.*

Graz, am 28.11.2017



Johann Hopfgartner



# Abbildungsverzeichnis

1.1	Aufteilung des Stromverbrauchs deutscher Privathaushalte nach Anwendungsarten 1996 (134,2 TWh) und 2011 (136,9 TWh) . . . . .	1
1.2	Jährlicher Energieverbrauch von Haushaltskühlgeräten (jeweils circa 300 l Gesamtnutzinhalt) unterschiedlicher Energieeffizienzklassen gemäß EU-Verordnung 2010/30/EU [13] . . . . .	2
2.1	Kältemittelkreislauf eines Haushaltskühlgerätes . . . . .	8
2.2	Kreisprozess einer Kompressionskälteanlage gemäß ASHRAE Vergleichsprozess [4] für Isobutan (R600a), $-23,3^{\circ}\text{C}$ Verdampfungstemperatur, $54,4^{\circ}\text{C}$ Kondensationstemperatur, $32,2^{\circ}\text{C}$ Umgebungstemperatur . . . . .	9
2.3	$Ts$ -Diagramm des realen Kältekreislaufs mit und ohne internen Wärmeübertrager für das Kältemittel Isobutan. Die gefärbten Bereiche kennzeichnen die übertragenen Wärmen des internen Wärmeübertragers. . . . .	11
2.4	Schematische Darstellung eines hermetischen Kolbenkompressors . . . . .	12
2.5	CAD-Zeichnung eines HTK 55 Kompressors von Secop . . . . .	13
2.6	Sauglinie bestehend aus Saugrohr und Saugschalldämpfer . . . . .	15
2.7	Zylinderraum begrenzt durch Zylindergehäuse, Kolben und Ventilplatte . . . . .	16
2.8	Druckstrecke bestehend aus Zylinderdeckel, Druckkammern, Serpentine und Druckrohr . . . . .	17
2.9	Verschiedene Ausführungen von Flatterventilen hermetischer Hubkolbenkompressoren von Secop (Saugventil jeweils rechts) . . . . .	19
2.10	Montagesituation des Saug- und Druckventils des HTK 55 Kompressors . . . . .	20
2.11	Typische Verteilung der Verluste eines hermetischen Kolbenkompressors (a) sowie detailliertere Betrachtung der thermodynamischen Verluste (b) . . . . .	21
2.12	Darstellung der Strömungsverluste des Saugventils (links) sowie des Druckventils (rechts) anhand des $pV$ -Diagramms . . . . .	22
2.13	Schematischer Aufbau eines Kalorimeters für kleine Kältemittelkompressoren . . . . .	23
2.14	Größenvergleich zweier Drucksensoren: piezoelektrischer Miniaturdrucksensor (links) und piezoresistiver Drucksensor (rechts) . . . . .	25
2.15	Montagesituation des Zylinderdrucksensors . . . . .	25
2.16	Gemessener Zylinderdruck aufeinanderfolgender Umdrehungen - oben: ohne Korrektur, unten: mit Korrektur . . . . .	27
3.1	Beliebig geformter dreidimensionaler Körper . . . . .	39

3.2	Volumenelement im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem . . .	40
3.3	Cauchyscher Tetraeder . . . . .	41
3.4	Beliebig geformter dreidimensionaler Körper unter großen Verformungen	42
3.5	Beispiele einiger Kontinuums-elemente . . . . .	49
3.6	Koordinatensystem und Punkte eines Dreieck-Elementes zweiter Ordnung . . . . .	50
3.7	Skizze eines einfachen Kontaktproblems . . . . .	57
3.8	Flowchart der FSI-Kopplungsmethodik . . . . .	60
3.9	Flowchart der CSD-Iteration . . . . .	61
3.10	Messaufbau zur Ermittlung der Federkennlinie des Saugventils . . . . .	63
3.11	Statische Auslenkung des Saugventils . . . . .	64
3.12	10-Knoten-Tetraeder . . . . .	66
3.13	6-Knoten-Dreieck . . . . .	67
4.1	Darstellung des Simulationsrechengebietes . . . . .	72
4.2	Rechenetz des Zylinders vor (a) und nach (b) dem Gittertausch . . . . .	73
4.3	Schließen des Saugventils in der Simulation . . . . .	76
4.4	Geometrie des Öklebmodells . . . . .	77
4.5	Ersatzsystem und CAD-Zeichnung des Druckventils . . . . .	78
4.6	Vergleich zwischen gemessener und simulierter Erhebungskurve des Druckventils . . . . .	79
4.7	Darstellung der Einbausituation (a) sowie der Diskretisierung (b) des Saugventils . . . . .	80
4.8	Darstellung der Kraftangriffspunkte des diskretisierten Saugventils . . . . .	81
4.9	Vergleich zwischen gemessener und simulierter Erhebungskurve des Saugventils . . . . .	81
4.10	Kolbenbewegung . . . . .	82
4.11	Vergleich der gemessenen und simulierten Druckkurven für den stationären ASHRAE-Zyklus $-23,3^{\circ}\text{C}/54,4^{\circ}\text{C}$ . . . . .	84
5.1	CAD-Darstellung der Einbausituation der elektromagnetischen Spule . . . . .	87
5.2	Schematisches Diagramm (a) und Ersatzschaltbild (b) des elektromagnetisch angesteuerten Saugventils . . . . .	88
5.3	Schließvorgang des negativ vorgespannten Saugventils bei verschiedenen Versorgungsspannungen der elektromagnetischen Spule . . . . .	90
5.4	Einbausituation der Drucksensoren (a) sowie einiger Temperaturmessstellen (b) . . . . .	91
5.5	Temperaturverlauf ausgewählter Messstellen im Kompressor . . . . .	94
5.6	Simulierte Ventilerhebungskurven des Seriensaugventils (Ventil 1) und des Saugventils mit negativer Vorspannung (Ventil 2) . . . . .	94
5.7	Simulierte Druckverläufe des Seriensaugventils (Ventil 1) und des Saugventils mit negativer Vorspannung (Ventil 2) im Bereich des Saugdruckes	95

---

5.8	Prinzipieller Aufbau des Kurbeltriebes zur Erzeugung der Zusatzkraft auf das Saugventil . . . . .	98
5.9	Verläufe der am Saugventil auftretenden Kräfte beim Öffnen - ohne Zusatzkraft . . . . .	98
5.10	Verläufe der am Saugventil auftretenden Kräfte beim Öffnen - mit Zusatzkraft . . . . .	99
5.11	Ermittlung der Bewegungsgleichungen für den mechanischen Antrieb .	100
5.12	Auslenkung des Saugventils ohne mechanische Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	101
5.13	Geschwindigkeit des Saugventils ohne mechanische Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	102
5.14	Ersatzsystem der mechanisch geführten Feder (a) sowie angreifende Kräfte an der freigeschnittenen Punktmasse (b) . . . . .	103
5.15	Auslenkung des Saugventils mit mechanischer Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	104
5.16	Geschwindigkeit des Saugventils mit mechanischer Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	105
5.17	Bewegung der Zusatzfeder und Verlauf der mechanischen Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	105
5.18	Gegenüberstellung der Druckverläufe während der Saugphase bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck . . . . .	106
5.19	Mechanik der Saugventilunterstützung (a) und Anordnung der Drucksensoren ohne montierte Betätigungsfeder (b) . . . . .	107
5.20	Vergleich der $pV$ -Diagramme des Serienkompressors (links) und unter Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (rechts). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 45 °C Kondensationstemperatur.	109
5.21	Vergleich der $pV$ -Diagramme des Serienkompressors (links) und unter Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (rechts). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 54,4 °C Kondensationstemperatur. . . . .	109
5.22	Simulierte Druckverläufe während der Saugphase. Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 45 °C (links) bzw. 54,4 °C Kondensationstemperatur (rechts). . . . .	110
5.23	Querschnittsgemittelte Strömungsgeschwindigkeiten während der Saugphase im Saugschalldämpferkrümmer in den Querschnitten A und B. Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 54,4 °C Kondensationstemperatur. . . . .	111
5.24	Vergleich der simulierten Saugventilauslenkung beim Serienkompressor (Ventil 1) und bei Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 45 °C (links) bzw. 54,4 °C Kondensationstemperatur (rechts). . . . .	113

5.25	Auftretende Vergleichsspannungen beim Erreichen der maximalen Auslenkung (links) und beim Aufprallen auf den Ventilsitz (rechts). Die unteren Grafiken zeigen jeweils das Saugventil bei Verwendung der mechanischen Ventilunterstützung. . . . .	113
A.1	Typischer Verlauf der Spektraldichte der kinetischen Energie in einer turbulenten Strömung . . . . .	125

# Tabellenverzeichnis

1.1	Eckdaten des ECO-COOL Projektes . . . . .	5
2.1	Eckdaten des Serienkompressors HTK55 . . . . .	14
2.2	Hauptspezifikationen des Kalorimeters . . . . .	22
2.3	Verwendete Messmittel zur Zylinderdruckindizierung . . . . .	26
3.1	Statische Auslenkung - Vergleich verschiedener Rechengitter . . . . .	65
3.2	Interpolationsfunktionen für ein 10-Knoten-Tetraederelement . . . . .	65
3.3	Gaußsche Integrationsmethode - Stützstellen und Gewichtungsfaktoren . . . . .	67
4.1	Materialwerte des Saugschalldämpfers (Ultradur B4300 G6) . . . . .	74
4.2	Zusammenfassung der wichtigsten Lösereinstellungen . . . . .	75
4.3	Abmessungen der Kurbelgeometrie des Versuchskompressors . . . . .	81
4.4	Vergleich der indizierten Leistung und der Strömungsverluste zwischen Messung und Simulation für den stationären ASHRAE-Zyklus $-23,3^{\circ}\text{C}/54,4^{\circ}\text{C}$ . . . . .	83
5.1	Annahmen für die Vorauslegung der elektromagnetischen Spule . . . . .	89
5.2	Finale Hauptabmessungen der elektromagnetischen Spule . . . . .	89
5.3	Verwendete Messmittel für Versuche mit elektromagnetischem Ventil . . . . .	92
5.4	Messergebnisse mit negativ vorgespanntem Ventil im Vergleich zu Referenzmessungen . . . . .	92
5.5	Vergleich zwischen Seriensaugventil und negativ vorgespanntem Saugventil basierend auf den Simulationsergebnissen . . . . .	96
5.6	Abmessungen der Kurbelgeometrie zur Erzeugung der Zusatzkraft auf das Saugventil . . . . .	100
5.7	Vergleich zwischen Seriensaugventil und Saugventil mit Zusatzkraft basierend auf den Simulationsergebnissen . . . . .	106
5.8	Vergleich des Serienkompressors (Ventil 1) mit dem Kompressor mit mechanischer Saugventilunterstützung (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit $45^{\circ}\text{C}$ Kondensationstemperatur. . . . .	111
5.9	Vergleich des Serienkompressors (Ventil 1) mit dem Kompressor mit mechanischer Saugventilunterstützung (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit $54,4^{\circ}\text{C}$ Kondensationstemperatur. . . . .	112



# Inhaltsverzeichnis

<b>Formelzeichen und Abkürzungen</b>	<b>xix</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Problemstellung . . . . .	3
1.2 Zieldefinition . . . . .	4
1.3 Methodik der Arbeit . . . . .	4
1.4 Projektumfeld . . . . .	5
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1 Funktionsweise eines Kühltanks . . . . .	7
2.1.1 Idealer Kältekreisprozess . . . . .	8
2.1.2 Realer Kältekreisprozess . . . . .	10
2.2 Der hermetische Hubkolbenkompressor . . . . .	12
2.2.1 Sauglinie . . . . .	15
2.2.2 Zylinderraum . . . . .	15
2.2.3 Druckstrecke . . . . .	16
2.2.4 Ventile . . . . .	17
2.2.5 Verlustarten im Kompressor . . . . .	19
2.3 Verwendete Messtechnik . . . . .	21
2.3.1 Kalorimeter . . . . .	22
2.3.2 Laser-Doppler-Vibrometrie . . . . .	23
2.3.3 Zylinderdruckindizierung . . . . .	24
2.3.4 Temperaturmessung . . . . .	28
2.4 Erhaltungsgleichungen . . . . .	28
2.4.1 Massenerhaltungsgleichung . . . . .	29
2.4.2 Impulserhaltungsgleichungen . . . . .	30
2.4.3 Energieerhaltungsgleichung . . . . .	31
2.5 Einteilung der Simulationsstrategien für hermetische Hubkolbenkompressoren . . . . .	33
2.6 Modellierungsansätze für Flatterventile . . . . .	34
<b>3 Berechnung der Ventilbewegung mithilfe der Finite-Elemente-Methode</b>	<b>37</b>
3.1 Theoretische Grundlagen der Berechnung von Festkörpern . . . . .	37
3.1.1 Einleitung . . . . .	37
3.1.2 Formulierung der Bewegungsgleichung . . . . .	38

3.1.3	Finite-Elemente-Methode . . . . .	45
3.1.4	Isoparametrische finite Elemente . . . . .	48
3.1.5	Materialgesetz . . . . .	51
3.1.6	Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung in dynamischen Berechnungen . . . . .	52
3.1.7	Lösung nichtlinearer Gleichungen . . . . .	53
3.1.8	Lösung linearer Gleichungssysteme . . . . .	55
3.1.9	Kontakt . . . . .	57
3.2	Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf ein Flatterventil eines Hubkolbenkompressors . . . . .	59
3.2.1	Einleitung . . . . .	59
3.2.2	Auswahl der finiten Elemente . . . . .	62
3.2.3	Interpolationsfunktionen . . . . .	64
3.2.4	Numerische Integration . . . . .	65
3.2.5	Dämpfung . . . . .	68
3.2.6	Lösen des Gleichungssystems . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Numerische Strömungssimulation</b>	<b>71</b>
4.1	Rechendomäne . . . . .	71
4.1.1	Randbedingungen . . . . .	73
4.1.2	Lösereinstellungen . . . . .	74
4.2	Ventile . . . . .	75
4.2.1	Schließen des Ventils . . . . .	76
4.2.2	Ölklebeeffekt . . . . .	76
4.2.3	Modellierung des Druckventils . . . . .	77
4.2.4	Modellierung des Saugventils . . . . .	79
4.3	Kolbenbewegung . . . . .	81
4.4	Validierung . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Kraftunterstützte Saugventile</b>	<b>85</b>
5.1	Elektromagnetisch unterstütztes Saugventil . . . . .	86
5.1.1	Elektromagnetische Spule . . . . .	86
5.1.2	Experimenteller Aufbau . . . . .	91
5.1.3	Ergebnisse . . . . .	92
5.1.4	Fazit . . . . .	96
5.2	Mechanisch unterstütztes Saugventil . . . . .	97
5.2.1	Kurbeltrieb . . . . .	97
5.2.2	Validierung an Luft . . . . .	100
5.2.3	Versuche unter standardisierten ASHRAE-Betriebsbedingungen .	107
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>115</b>

<b>Literaturverzeichnis</b>		<b>117</b>
<b>Appendix</b>		<b>123</b>
A	Kontinuumshypothese . . . . .	123
B	Reynoldssches Transporttheorem . . . . .	123
C	Turbulenz . . . . .	124
D	Nabla-Operator $\nabla$ . . . . .	129
E	Auswertung der Matrizen der nichtlinearen Bewegungsgleichung . . . . .	130



# Formelzeichen und Abkürzungen

## Lateinische Formelzeichen

$a$	$\text{m/s}^2$	Beschleunigungsvektor
$\dot{A}$	W	Leistung äußerer Kräfte
$\dot{A}^B$	W	Leistung der Volumenkräfte
$A_\Delta$	$\text{m}^2$	Dreiecksfläche
$B$	$1/\text{m}$	Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix
$C$	$\text{N/m}^2$	Spannungs-Verzerrungs-Materialmatrix
$d$	$\text{Ns/m}$	Dämpfungsparameter
$D$	$\text{Ns/m}$	Dämpfungsmatrix
$D$	$1/\text{m}$	Differentialoperatormatrix
$e$	$\text{J/kg}$	spezifische innere Energie
$e_{\text{res}}$	-	Rücksprungparameter
$E$	$\text{N/m}^2$	Elastizitätsmodul
$E$	J	Energie
$f$	Hz	Frequenz
$f$	N	Vektor der Knotenpunktkräfte
$f^B$	$\text{N/m}^3$	Vektor der Volumenkräfte
$f^B$	$\text{N/kg}$	Vektor der spezifischen Volumenkräfte
$f^S$	$\text{N/m}^2$	Vektor der Oberflächenspannungen
$F$	N	Kraft
$F$	N	Kraftvektor
$F^B$	N	Vektor der Volumenkräfte
$F^O$	N	Vektor der Oberflächenkräfte
$F_g$	N	resultierende Gaskraft
$F_m$	N	magnetische Kraft
$F_{\text{pre}}$	N	Ventilvorspannkraft
$F_r$	N	Reibkraft
$F_{\text{st}}$	N	Ölklebekraft
$F_t$	N	Anteil der Ölklebekraft aufgrund der Oberflächenspannung
$F_v$	N	viskoser Anteil der Ölklebekraft
$F_v$	N	Ventilkraft
$F^\sigma$	N	Kraftvektor verursacht durch Spannungen
$h$	-	Ansatzfunktion
$h$	m	Ölfilmstärke
$h$	$\text{J/kg}$	spezifische Enthalpie
$H$	-	Matrix der Ansatzfunktionen

## Formelzeichen und Abkürzungen

---

$i$	A	Spulenstrom
$I$	N s	Impuls
$\mathbf{I}$	-	Einheitsmatrix
$\mathbf{J}$	-	Jacobi-Matrix, Jacobi-Operator
$k$	N/m	Steifigkeit
$k$	$\text{m}^2/\text{s}^2$	kinetische Energie der Schwankungsbewegung
$\mathbf{K}$	N/m	Steifigkeitsmatrix
$l$	m	Pleuellänge
$L$	H	Induktivität
$\tilde{\mathbf{L}}$	-	untere Dreiecksmatrix
$m$	kg	Masse
$\dot{m}$	kg/s	Massenstrom
$\mathbf{M}$	kg	Massenmatrix
$\mathbf{n}$	-	Flächennormalenvektor
$N$	-	Windungszahl
$o$	$\text{N}/\text{m}^2$	Druckkorrektur
$o$	m	Offset des Kolbenbolzens
$\bar{o}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Druckoffset Mittelwert
$\tilde{o}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Druckoffset Amplitude
$O$	$\text{m}^2$	Oberfläche
$p$	$\text{N}/\text{m}^2$	Druck
$\mathbf{p}$	$\text{N}/\text{m}^2$	Druckvektor
$P$	W	Leistung
$P_{\text{el}}$	W	elektrische Antriebsleistung
$\text{Pr}_t$	-	turbulente Prandtl-Zahl
$q_0$	J/kg	spezifische Kälteleistung
$\dot{q}_S$	$\text{W}/\text{m}^3$	von außen zugeführter spezifischer Energiestrom
$\dot{Q}$	W	Übertragener Wärmestrom aufgrund von Wärmeleitung
$\dot{Q}_0$	W	Kälteleistung
$\dot{Q}_S$	W	von außen zugeführter Energiestrom
$r$	m	Kurbelradius
$r$	m	natürliche Koordinate
$\mathbf{r}$	N	Vektor der äußeren Kräfte
$r_a$	m	Radius des Ventiltellers
$\mathbf{r}_B$	N	Vektor der Volumenkräfte
$\mathbf{r}_C$	N	Vektor der Einzellasten
$r_i$	m	Radius der Überströmbohrung
$\mathbf{r}_S$	N	Vektor der Oberflächenkräfte
$R$	N m	virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte
$R$	$\Omega$	elektrischer Widerstand
$\mathbf{R}$	-	Drehmatrix
Re	-	Reynoldszahl
$\mathcal{R}$	A/V s	Reluktanz
$s$	m	natürliche Koordinate

$s$	J/kg K	spezifische Entropie
$S$	m <sup>2</sup>	Oberfläche
$\mathbf{S}$	N/m <sup>2</sup>	zweiter Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$t$	m	natürliche Koordinate
$t$	s	Zeit
$T$	K	Temperatur
$u$	m/s	Geschwindigkeit in x-Richtung
$u$	V	elektrische Spannung
$\mathbf{u}$	m	Verschiebungsvektor
$\dot{\mathbf{u}}$	m/s	Geschwindigkeitsvektor
$\ddot{\mathbf{u}}$	m/s <sup>2</sup>	Beschleunigungsvektor
$\mathbf{U}$	-	Streckmatrix
$\tilde{\mathbf{U}}$	-	obere Dreiecksmatrix
$v$	m/s	Geschwindigkeit in y-Richtung
$\mathbf{v}$	m/s	Geschwindigkeitsvektor
$V$	m <sup>3</sup>	Volumen
$w$	m/s	Geschwindigkeit in z-Richtung
$W_m$	J	magnetische Energie
$x$	m	globale Koordinate
$x$	m	Spalt zwischen Ventil und Eisenkern
$\mathbf{X}$	-	Deformationsgradient
$x_p$	m	Kolbenweg
$y$	m	globale Koordinate
$z$	m	globale Koordinate

## Griechische Formelzeichen

$\alpha$	-	Parameter der Newmark-Methode
$\alpha$	-	Gewichtungsfaktor für das Gaußsche Integrationsverfahren
$\alpha$	N/m	Gewichtungsfaktor der Penalty-Methode
$\alpha$	1/s	Dämpfungsparameter Rayleigh-Dämpfung
$\alpha$	-	Fitparameter
$\beta_{st}$	rad	Kontaktwinkel
$\beta$	-	Parameter der Newmark-Methode
$\beta$	s	Dämpfungsparameter Rayleigh-Dämpfung
$\delta$	-	Kronecker-Delta
$\Delta t$	s	zeitliches Inkrement
$\Delta u$	m	inkrementeller Zuwachs der Verschiebungen
$\Delta \varphi$	rad	Phasenverschiebung
$\epsilon$	-	Leistungszahl
$\epsilon$	m <sup>2</sup> /s <sup>3</sup>	Dissipationsrate
$\epsilon$	-	Verzerrungstensor
$\tilde{\epsilon}$	-	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\varphi$	rad	Kurbelwinkel

## Formelzeichen und Abkürzungen

---

$\Phi_c$	Wb	magnetischer Fluss
$\eta$	-	Wirkungsgrad
$\eta$	kg/m s	dynamische Viskosität
$\tilde{\eta}$	-	nichtlinearer Anteil des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors
$\eta_t$	kg/m s	turbulente Wirbelviskosität
$\lambda$	N/m <sup>2</sup>	erste Lamesche Konstante
$\lambda$	W/m K	Wärmeleitfähigkeit
$\mu$	N/m <sup>2</sup>	zweite Lamesche Konstante
$\mu$	-	Reibungskoeffizient
$\mu_r$	-	relative Permeabilität
$\nu$	-	Querkontraktionszahl
$\Pi$	N m	potenzielle Energie
$\Theta$	A	magnetische Durchflutung
$\rho$	kg/m <sup>3</sup>	Dichte
$\sigma_{st}$	N/m	Oberflächenspannung (Ölkleben)
$\boldsymbol{\sigma}$	N/m <sup>2</sup>	Spannungsvektor
$\underline{\boldsymbol{\sigma}}$	N/m <sup>2</sup>	Spannungstensor
$\sigma_{v,M}$	N/m <sup>2</sup>	Vergleichsspannung nach Mises
$\tau$	s	charakteristische Zeitkonstante
$\boldsymbol{\tau}$	N/m <sup>2</sup>	Cauchyscher Spannungstensor, viskoser Spannungstensor
$\omega$	1/s	Kreisfrequenz
$\omega$	rad/s	Winkelgeschwindigkeit
$\tilde{\boldsymbol{\xi}}$	-	linearer Anteil des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors
$\psi$	Wb	verketteter Fluss der Spule
$\zeta$	-	Lehrsches Dämpfungsmaß

## Konstanten

$\mu_0$	$1,2566 \cdot 10^{-6}$	V s/A m	Permeabilität von Vakuum
---------	------------------------	---------	--------------------------

## Abkürzungen

0D	nulldimensional		Dynamics
1D	eindimensional	DNS	Direkte Numerische Simulation
2D	zweidimensional	DOF	Degree of Freedom
3D	dreidimensional	EAM	Institut für elektrische
ASHRAE	American Society of Heating, Refrigerating and Air-Conditioning Engineers	FCKW	Antriebstechnik und Maschinen Fluorchlorkohlenwasserstoffe
CAD	Computer-Aided Design	FE	Finite-Elemente
CFD	Computational Fluid Dynamics	FEM	Finite-Elemente-Methode
COP	Coefficient of Performance	FFG	Österreichische
CSD	Computational Structural	FL	Forschungsförderungsgesellschaft Fortgeschriebene Lagrangesche

	Formulierung	RANS	Reynolds-averaged Navier-Stokes
FSI	Fluid-Struktur-Interaktion	RHS	right-hand side
FVM	Finite-Volumen-Methode	SFG	Steirische
IVT	Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik	TL	Wirtschaftsförderungsgesellschaft Totale Lagrangesche Formulierung
KWF	Kärntner Wirtschaftsförderungsfond	TTM	Institut für thermische Turbomaschinen und
LDV	Laser-Doppler-Vibrometrie		Maschinendynamik
LES	Large Eddy Simulation	UDF	User Defined Function
OT	oberer Totpunkt	UT	unterer Totpunkt

## Indizes

amb	Umgebung	j	Koordinatenrichtung
ch	Zylinderdeckel	L	linear
comp	Kompressor	meas	gemessen
cond	Kondensation	NL	nicht linear
cyl	Zylinder	pre	Vorspannung
d	druckseitig	ref	Referenz
eff	effektiv	s	saugseitig
evap	Verdampfung	sim	simuliert
FSO	Full Scale Output	sm	Saugschalldämpfer
i	Koordinatenrichtung, Iterationsindex	st	Ökleben
is	isentrop	th	theoretisch

## Operatoren

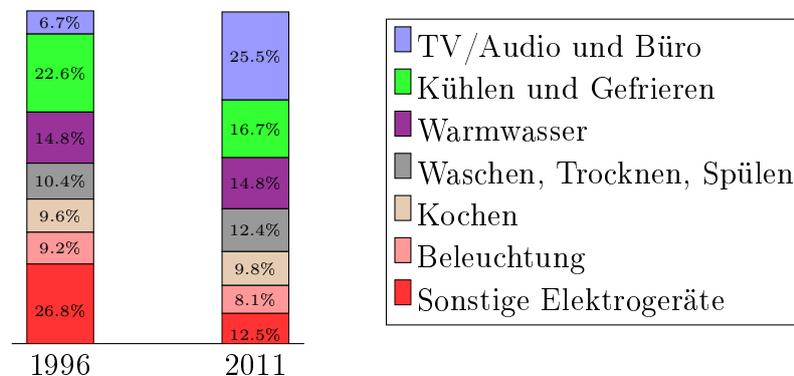
d	vollständiges Differential	$\partial$	partiell Differential
$\nabla$	Nabla-Operator	$\sum$	Summe
$\delta$	virtuelle Größe, unvollständiges Differential		



# 1 Einleitung

Das Kühlen und Gefrieren spielt eine zentrale Rolle, um die Haltbarkeit von Lebensmitteln deutlich zu verlängern und somit der Verschwendung durch frühzeitig verdorbene Nahrungsmittel entgegenzuwirken. Der dafür benötigte Energiebedarf ist aufgrund der wachsenden Weltbevölkerung sowie der rasch voranschreitenden Erschließung weiterer Märkte noch immer im Steigen begriffen.

Durch die Einführung der Energieetikettierung Anfang der 1990er Jahre konnte europaweit<sup>1</sup> ein wichtiger Schritt zur Reduktion des Energieverbrauchs in diesem Bereich gesetzt werden. Dem Energie-Info des Bundesverbandes der Energie- und Wasserwirtschaft (BDEW) [7] zufolge konnte im Zeitraum zwischen 1996 und 2011 durch die Verwendung zunehmend sparsamerer Geräte rund ein Viertel der für Kühlen und Gefrieren benötigten elektrischen Energie in deutschen Privathaushalten eingespart werden (siehe Abbildung 1.1).

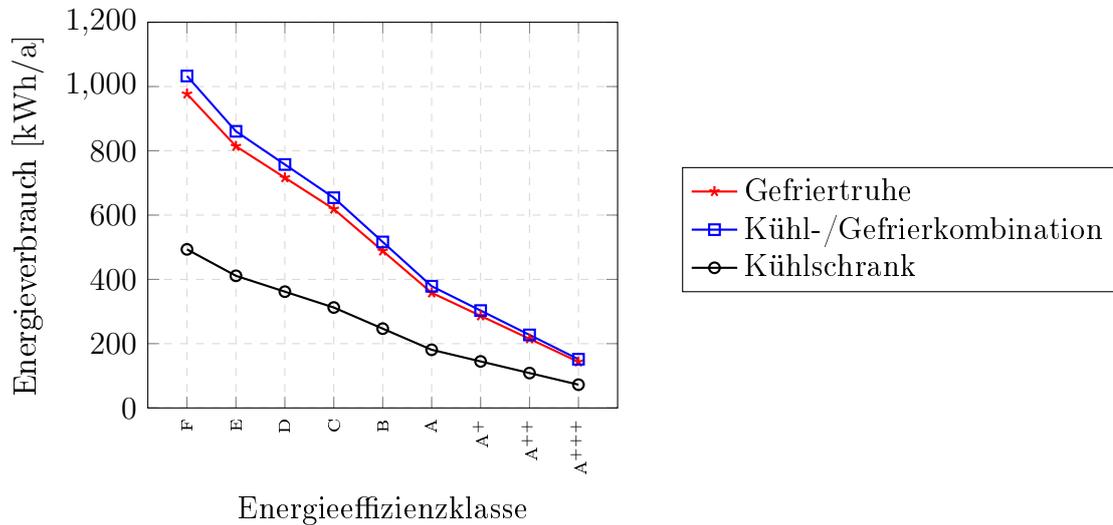


**Bild 1.1:** Aufteilung des Stromverbrauchs deutscher Privathaushalte nach Anwendungsarten 1996 (134,2 TWh) und 2011 (136,9 TWh) (BDEW, 2016 [7])

Einen Überblick über die Entwicklung des Energieverbrauchs einiger Kühl- und Gefrierhaushaltsgeräte liefert Abbildung 1.2. Darin ist für drei unterschiedliche Gerätetypen (jeweils circa 300l Gesamtnutzinhalt) der zur Erreichung der Energieeffizienzklasse

<sup>1</sup> Ähnliche Regulierungen gibt es auch in anderen Ländern.

notwendige maximale Energieverbrauch dargestellt.<sup>2</sup> Aktuelle Spitzengeräte unterbieten den Energieverbrauch der bisher besten Effizienzklasse nochmals um einige Prozentpunkte.



**Bild 1.2:** Jährlicher Energieverbrauch von Haushaltskühlgeräten (jeweils circa 300l Gesamtnutzinhalt) unterschiedlicher Energieeffizienzklassen gemäß EU-Verordnung 2010/30/EU [13]

Durch die Einführung weiterer, noch effizienterer Klassen im Jahre 2003 und 2010 sowie durch eine neue EU-Verordnung,<sup>3</sup> die voraussichtlich im Jahr 2020 in Kraft treten soll, waren und sind die Hersteller von Kühl- und Gefriergeräten stets gefordert, ihre Produkte noch effizienter zu machen. Der Aufwand, der zur weiteren Verbesserung aktueller Topgeräte betrieben werden muss, steigt zwar stetig an, jedoch scheint dies durch ein jährliches Marktpotential von über 20 Millionen Geräten europaweit bzw. rund 100 Millionen Geräten weltweit durchaus gerechtfertigt zu sein ([70], [69]). War der Verbesserungsprozess von Haushaltskühlgeräten in der Vergangenheit noch sehr stark durch Experimente geprägt, so wird aktuell vermehrt auf Simulationen gesetzt. Speziell bei der Entwicklung von Kompressoren, dem Herzstück der Kälteanlagen, sind weitere Effizienzsteigerungen ohne den Einsatz numerischer Simulationen wohl nur mehr schwer zu erreichen.

<sup>2</sup>Die Berechnung des jährlichen Standardenergieverbrauchs beinhaltet mehrere Korrekturfaktoren in Abhängigkeit der Anzahl, der Auslegungstemperatur und der Größe der Kühl-/Gefrierfächer.

<sup>3</sup>Energieeffizienzklassen werden künftig wieder von A bis G reichen, die Kennzeichnung effizienterer Geräte durch den Zusatz „+“ entfällt.

## 1.1 Problemstellung

Wie bereits erwähnt, ist die Effizienzsteigerung von Kühl- und Gefriergeräten im Haushaltssektor nicht nur durch diverse Richtlinien erforderlich, sondern vom Umweltaspekt aus betrachtet natürlich auch sinnvoll. Waren in den 1990er Jahren die zur Erreichung der höchsten Effizienzklasse erforderlichen Verbesserungen noch sehr einfach durch die Verwendung dickerer Dämmung, anderer Materialien oder effizienterer Kompressoren zu erzielen, ist es heutzutage bedeutend schwieriger. Auch Faktoren wie Preis, Geräuschemission und Haltbarkeit spielen eine entscheidende Rolle. So sind vor allem europäische Hersteller von Haushaltskühlgeräten und insbesondere Kompressorhersteller zunehmend gefordert und müssen ihre Anstrengungen in Forschung und Entwicklung deutlich intensivieren, wollen sie am hart umkämpften internationalen Markt weiterhin bestehen.

Grobe Potentiale zur Effizienzsteigerung bei Kühlschrankschrankkompressoren können anhand von Verlustanalysen aufgezeigt werden. Die Einteilung der Verluste kann dabei prinzipiell in drei Bereiche erfolgen: elektrische Verluste, mechanische Verluste und thermodynamische Verluste. Vor allem letzteren wird ein großes Verbesserungspotential zugeschrieben, weshalb sich diese Arbeit auf die Untersuchung thermodynamischer Vorgänge und die Auswirkungen von Maßnahmen zur Effizienzsteigerung konzentrieren soll. Ein tiefgreifendes Verständnis sämtlicher thermodynamischer Vorgänge im Kompressor ist dabei unumgänglich, welches einerseits durch Experimente und andererseits durch Simulationen generiert werden kann. Durch die hermetische und kompakte Bauweise sind der experimentellen Untersuchung jedoch teilweise Grenzen gesetzt. So sind beispielsweise Ventilerhebungskurven der Flatterventile oder Zylinderdrücke nur mit beträchtlichem Aufwand zu ermitteln. Des Weiteren muss bedacht werden, dass die dafür notwendige Messtechnik den Kompressor wesentlich beeinflussen kann.

Ein weiterer Nachteil der experimentellen Untersuchung ist, dass einzelne Maßnahmen nicht sauber getrennt voneinander bewertet werden können. So können gegenseitige Wechselwirkungen dazu führen, dass eine im Grunde sinnvolle Veränderung im Kompressor mit einer Verschlechterung der gemessenen Leistungszahl verbunden ist. Um daraus nicht voreilig falsche Schlüsse zu ziehen, ist es sinnvoll, Messungen mit Simulationen zu kombinieren.

Um brauchbare Simulationsergebnisse zu erhalten, sind Simulationstechniken notwendig, die im Stande sind, die dominierenden physikalischen Effekte korrekt zu berücksichtigen. Je nachdem, welche komplexen Vorgänge im Kompressor untersucht werden sollen, ist es sinnvoll, Modelle mit verschiedenen Komplexitätsgraden zu verwenden. So ist es beispielsweise kaum möglich, eine transiente Berechnung der Strömung durch den Zylinder (circa 20 ms je Lastspiel) und die Aufwärmung der Anbauteile (circa 50 min, bis stationäre Temperaturen erreicht werden) simultan durchzuführen. Durch eine geschickte Wahl der Randbedingungen können jedoch zufriedenstellende Ergebnisse erzielt werden, auch wenn die beiden Problemstellungen, Strömung und Bauteilaufwärmung, getrennt voneinander betrachtet werden.

Eine weitere Besonderheit von Kühltankkompressoren sind die darin verbauten Flatterventile. Der gegenseitige Einfluss dieser druckgesteuerten Ventile auf die Strömung stellt in der Erforschung der Kompressoren ein Kernthema dar und muss in der Simulation mittels Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) berücksichtigt werden.

## 1.2 Zieldefinition

Ziel dieser Arbeit ist es, die zuvor beschriebenen Simulationstechniken zur Untersuchung hermetischer Hubkolbenkompressoren für Haushaltskühlgeräte hinsichtlich der Reduzierung der thermodynamischen Verluste zu entwickeln. Im Speziellen soll das Hauptaugenmerk auf die Reduzierung von Strömungsverlusten verursacht durch das Saugventil gelegt werden. Dazu sollen transiente dreidimensionale CFD-Berechnungen der Kältemittelströmung durch den Kompressor durchgeführt werden. Große Bedeutung soll dabei der Modellierung der Saugventilbewegung zukommen.

Anders als bei Ventilen von Verbrennungskraftmaschinen werden Flatterventile durch die vorherrschenden Druckunterschiede gesteuert. Das Öffnen und Schließen der Ventile kann dabei nicht zu festgelegten Zeitpunkten erfolgen, sondern ist variabel und abhängig von den jeweiligen Betriebsbedingungen. Des Weiteren wird die Ventilbewegung durch sogenannte Öllebeeefekte, Trägheitskräfte und natürlich durch innere Kräfte aufgrund der Verformung des Ventils beeinflusst. Dies führt in Summe zu einem relativ komplexen, schwingenden Bewegungsablauf, bei dem das Saugventil während einer Saugphase typischerweise mehrmals auf den Ventilsitz aufprallt. Um das Verhalten dieser Saugventile zu untersuchen, soll ein dreidimensionales FEM-Modell verwendet werden, das sämtliche zuvor genannte Einflussgrößen berücksichtigen kann. Außerdem muss es im Stande sein, zeitlich und örtlich veränderbare Zusatzkräfte zu berücksichtigen.

Die Kältemittelströmung in und aus dem Zylinder ist stark durch die Dynamik der Flatterventile geprägt. Zur Analyse der Fluid-Struktur-Interaktionen eignen sich somit vor allem die Ventilerhebungskurven. Diese bestimmen den Kältemittelmassenstrom und die transienten Druckverläufe im Zylinder sowie im Saugschalldämpfer bzw. Zylinderdeckel. Die messtechnische Erfassung dieser Größen stellt einen wichtigen Vorgang für die Entwicklung dieser Kompressoren dar. Es wurde in dieser Arbeit davon ausgegangen, dass mit diesen Messwerten einerseits das gesamte Simulationsmodell validiert und andererseits die Bewertung von Maßnahmen zur Reduktion der Strömungsverluste durchgeführt werden kann.

## 1.3 Methodik der Arbeit

Nach einer kurzen Einleitung in die Thematik der Kompressorenentwicklung werden im zweiten Kapitel zuerst die Funktionsweisen des Kältekreislaufes und des hermeti-

schen Hubkolbenkompressors erläutert. Nachfolgend werden eingesetzte Messtechniken und Messmittel beschrieben und theoretische Grundlagen der Strömungssimulation behandelt. Im dritten Kapitel folgt die Beschreibung der Saugventilbewegung mithilfe der Finite-Elemente-Methode. Darin werden zuerst allgemeine Grundlagen zur Berechnung von Festkörpern erörtert und diese anschließend auf das Saugventil angewendet. Die Kopplungsstrategie des daraus resultierenden FE-Berechnungsprogramms mit dem Strömungssimulationsprogramm wird ebenfalls dargestellt.

Das nachfolgende Kapitel 4 beschreibt die Umsetzung der numerischen Simulation der Kältemittelströmung durch den Kompressor im kommerziell erhältlichen Programm ANSYS Fluent und zeigt die Validierung des gesamten Rechenmodells. Das zuvor präsentierte Rechenmodell wird im fünften Kapitel zur Untersuchung kraftunterstützter Saugventile eingesetzt. Gemeinsam mit Messungen werden die Auswirkungen der zusätzlich eingebrachten Kräfte ausführlich diskutiert und schlussendlich im letzten Kapitel zusammengefasst.

## 1.4 Projektumfeld

Die hier dargestellte Arbeit wurde im Rahmen des COMET K-Projektes ECO-COOL durchgeführt. Dieses hatte zum Ziel, den Energieverbrauch bestehender Haushaltskühlgeräte (Stand 2012) um weitere 30 % zu senken. Dazu wurden neben Optimierungen des Gesamtsystems auch Verbesserungspotentiale einzelner Komponenten wie dem Hubkolbenkompressor untersucht. Die in diesem Rahmen durchgeführten Messungen erfolgten in Zusammenarbeit des gesamten Projektteams und wurden auch zur Validierung von den hier präsentierten Simulationsergebnissen verwendet. Weitere Informationen bezüglich des Projektes sind Tabelle 1.1 zu entnehmen.

**Tabelle 1.1:** Eckdaten des ECO-COOL Projektes

COMET K-Projekt	ECO-COOL
Leitung	Ao. Univ.-Prof. Dr. Raimund Almbauer
Zeitraum	07/2013 bis 06/2017
Industriepartner	Secop Austria, Liebherr-Hausgeräte Lienz, Infineon, SimTech
Wissenschaftliche Partner (TU Graz)	IVT, EAM, TTM
Fördergeber	FFG, SFG, Land Tirol, KWF
Projektkosten	2 812 731 €



## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel werden zuerst die Hauptkomponenten und die allgemeine Funktionsweise einer Kompressionskälteanlage dargestellt. Danach wird der hermetische Hubkolbenkompressor anhand des HTK 55 Kompressors von Secop näher betrachtet. Neben den Aufgaben und Besonderheiten einzelner Baugruppen werden die im Kompressor auftretenden Verluste aufgeteilt. Nachfolgend werden die in diversen Versuchen verwendete Messtechnik sowie die Vorgehensweise zur Ermittlung der Messdaten beschrieben. Nach der Behandlung der Erhaltungsgleichungen wird abschließend ein kurzer Überblick über die in der Literatur verwendeten Modelle zur Berechnung hermetischer Hubkolbenkompressoren sowie Modellierungsansätze für Flatterventile gegeben.

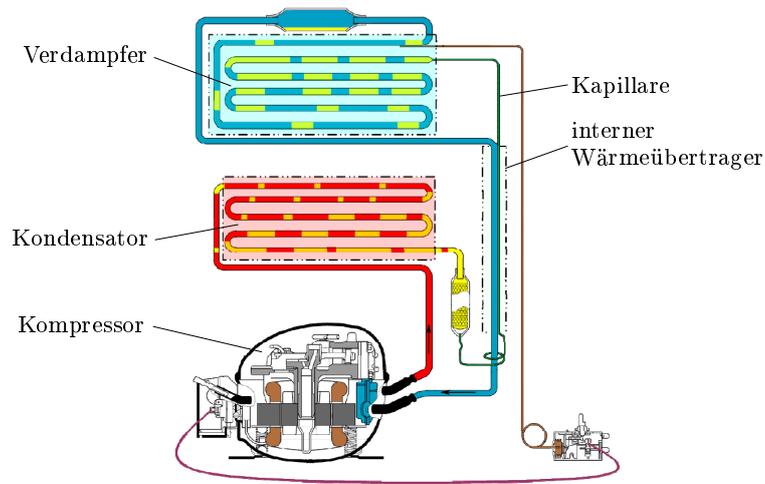
### 2.1 Funktionsweise eines Kühlschranks

Die meisten Haushaltskühlgeräte sind Kompressionskälteanlagen, die die Verdampfungswärme des Kältemittels beim Aggregatzustandswechsel von flüssig zu gasförmig nutzen. In ihrer einfachsten Form bestehen diese Kälteanlagen aus zumindest vier Bauteilen: Kompressor, Kondensator, Drossel und Verdampfer. Durch den Kompressor wird das gasförmig vorliegende Kältemittel von einem niedrigen Druckniveau auf ein höheres Druckniveau gehoben. Anschließend wird über den Kondensator Wärme an die Umgebung abgegeben und das Kältemittel dadurch verflüssigt. In der darauffolgenden Kapillare (Drossel) wird das Kältemittel wieder auf den Ausgangsdruck entspannt, wobei es nun auf niedrigem Temperaturniveau als Zweiphasengemisch vorliegt. Über den Verdampfer wird dem Innenraum des Kühlgerätes Wärme entzogen und somit gekühlt, wobei das Kältemittel vollständig verdampft. Danach wird das gasförmige Kältemittel wieder dem Kompressor zugeführt und somit der Kältekreislauf geschlossen. Der Kältemittelkreislauf eines vergleichbar einfachen Haushaltskühlgerätes ist in Abbildung 2.1 dargestellt.

Nachdem lange Zeit Fluorchlorkohlenwasserstoffe (FCKW) als Kältemittel in Kühlschränken eingesetzt wurden, sind diese aufgrund ihrer ozonschädigenden Wirkung heute verboten. Für Haushaltskühlgeräte sind heutzutage Tetrafluorethan (R134a) und Isobutan (R600a) als Kältemittel sehr weit verbreitet, wobei letzteres vor allem in Europa das Standardkältemittel ist.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Ein Vorteil von Isobutan gegenüber Tetrafluorethan ist das geringere Treibhauspotential (3 vs. 1430), allerdings muss die Brennbarkeit des Kältemittels in Kauf genommen werden.



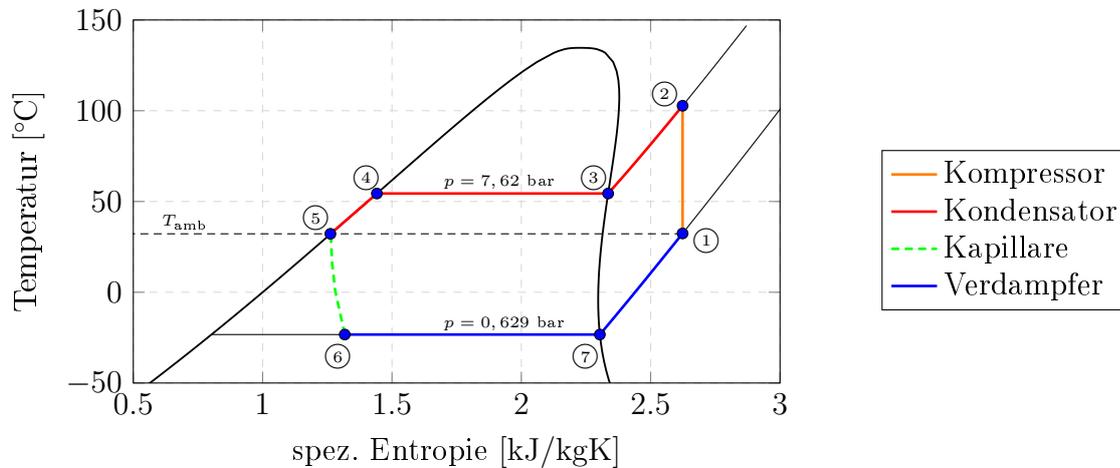
**Bild 2.1:** Kältemittelkreislauf eines Haushaltskühlgerätes (Burgstaller, 2009 [10])

Reale (transiente) Betriebsbedingungen von Kühlschränken können aufgrund von Benutzerverhalten und äußeren Bedingungen höchst unterschiedlich sein. So spielt dabei das Öffnen der Kühlschranktüre, das Einlagern und Herausnehmen von Kühlgut oder die Variation der Innenraumtemperatur durch den Benutzer eine entscheidende Rolle. Auch unterschiedliche Umgebungstemperaturen oder die Einbausituation von Kühlgeräten führen zu diesen unterschiedlichen Betriebsbedingungen. Um jedoch verschiedenste Kompressoren miteinander vergleichen zu können, bedient man sich idealisierter, stationärer Vergleichsprozesse, wie in Kapitel 2.1.1 dargestellt.

### 2.1.1 Idealer Kältekreisprozess

In Abbildung 2.2 ist ein idealisierter Vergleichsprozess für das Kältemittel Isobutan (R600a) dargestellt, wobei folgende vereinfachende Annahmen getroffen wurden: (i) isentrope Verdichtung, (ii) kein Druckverlust entlang der Wärmeübertrager, (iii) adiabate Drosselung und (iv) Kompressoreintritt und Kondensatoraustritt bei Umgebungstemperatur. Der Kreisprozess lässt sich dabei wie folgt unterteilen in: isentrope Verdichtung (1-2), isobare Abkühlung im Kondensator (2-3), isobare Verflüssigung im Kondensator (3-4), isobare Unterkühlung auf Umgebungstemperatur im Kondensator (4-5), adiabate Expansion (5-6), isobare Verdampfung im Verdampfer (6-7) sowie isobare Überhitzung auf Umgebungstemperatur im Verdampfer (7-1).

Um die Effizienz des Kompressors nun quantifizieren zu können, wird die Leistungszahl des Kompressors (Coefficient of Performance) als Verhältnis zwischen Nutzen zu



**Bild 2.2:** Kreisprozess einer Kompressionskälteanlage gemäß ASHRAE Vergleichsprozess [4] für Isobutan (R600a),  $-23,3^\circ\text{C}$  Verdampfungstemperatur,  $54,4^\circ\text{C}$  Kondensationstemperatur,  $32,2^\circ\text{C}$  Umgebungstemperatur

Aufwand, wie folgt, definiert:

$$\text{COP} := \frac{\dot{Q}_0}{P_{\text{el}}} . \quad (2.1)$$

Dabei entspricht  $P_{\text{el}}$  der elektrischen Antriebsleistung des Kompressors und  $\dot{Q}_0$  der Kälteleistung, die als Produkt aus Kältemittelmassenstrom  $\dot{m}$  und spezifischer Kälteleistung  $q_0$  ausgedrückt werden kann:

$$\begin{aligned} \dot{Q}_0 &= \dot{m} q_0 , \\ q_0 &= h_1 - h_6 . \end{aligned} \quad (2.2)$$

Für den in Abbildung 2.2 gezeigten Vergleichsprozess nach ASHRAE kann die spezifische Kälteleistung als Differenz der spezifischen Enthalpien der Punkte 1 und 6 ausgedrückt werden. Für das Kältemittel Isobutan ergibt sich bei den gegebenen Kondensations- und Verdampfungstemperaturen eine spezifische Kälteleistung  $q_0$  von etwa  $335 \text{ kJ/kg}$ . Gemessen wird der COP eines Kompressors mittels Kalorimeter, das in Kapitel 2.3.1 genauer beschrieben wird. Das Kalorimeter stellt dabei die vorher definierten stationären Betriebsbedingungen für den Kompressor bereit und misst die Kälteleistung und die aufgenommene elektrische Leistung des Kompressors.

Für gegebene Verdampfungs- und Kondensationstemperaturen ( $T_{\text{evap}}$ ,  $T_{\text{cond}}$ ) kann die theoretische Obergrenze der maximal erreichbaren Leistungszahl mittels Carnotprozess beschrieben werden, bei dem die Wärmen bei konstanten Temperaturen übertragen

werden und Expansion sowie Kompression isentrop erfolgen:

$$\epsilon_{\text{carnot}} = \frac{T_{\text{evap}}}{T_{\text{cond}} - T_{\text{evap}}} = \frac{1}{\eta_{\text{carnot}}} . \quad (2.3)$$

Daraus lässt sich erkennen, dass  $\epsilon_{\text{carnot}}$  umso größer ist, je näher Kondensations- und Verdampfungstemperatur beieinander liegen. Naturgemäß sind diese Temperaturen jedoch einerseits durch die Umgebungstemperatur (Kondensationstemperatur liegt über Umgebungstemperatur) und andererseits durch die gewünschte Innenraumtemperatur vorgegeben. Bei einer Verdampfungstemperatur von  $-23,3^\circ\text{C}$  und einer Kondensationstemperatur von  $54,4^\circ\text{C}$  ergibt sich für R600a mit der Definition von Gleichung 2.3 somit ein  $\epsilon_{\text{carnot}}$  von 3,21.

Analog zur Leistungszahl des Carnot-Prozesses kann eine theoretische Leistungszahl  $\epsilon_{\text{th}}$  des idealisierten Kreisprozesses aus Abbildung 2.2 definiert werden:

$$\epsilon_{\text{th}} = \frac{\dot{q}_{\text{zu}}}{a_{\text{comp, is}}} = \frac{(h_1 - h_6)}{(h_2 - h_1)} . \quad (2.4)$$

Unter Verwendung oben genannter Temperaturen lässt sich somit für das Kältemittel Isobutan eine theoretische Leistungszahl von 2,9 erreichen. In der Realität liegen die Leistungszahlen von Kompressoren aufgrund von diversen Verlusten jedoch deutlich unter dieser Grenze. Effiziente Hubkolbenkompressoren für Haushaltskühlgeräte erreichen dabei Leistungszahlen von bis zu 2,0.<sup>2</sup>

### 2.1.2 Realer Kältekreisprozess

Reale Kältekreisprozesse unterscheiden sich vom idealisierten Kreisprozess aus Kapitel 2.1.1 einerseits durch das Auftreten von diversen Verlusten und andererseits durch das meist sehr dynamische Betriebsverhalten sowie die Verwendung zusätzlicher Komponenten.

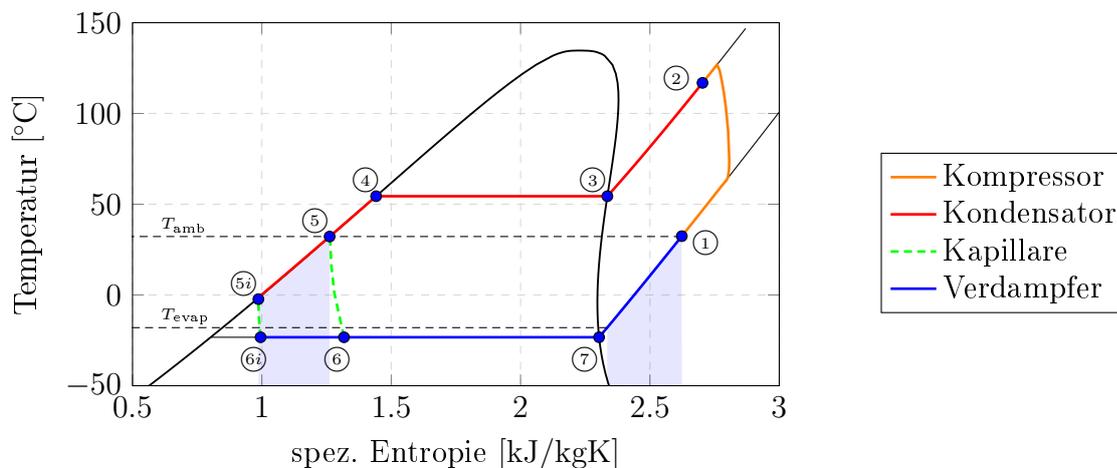
In der Realität treten bei den durchströmten Bauteilen vor allem bei den relativ dünnen und sehr langen Rohren der Wärmeübertrager natürlich Druckverluste auf. Darüber hinaus muss eine Temperaturdifferenz zwischen Umgebung und Kondensator bzw. Innenraum und Verdampfer vorliegen, um Wärme an die Umgebung ab- bzw. vom Kühlgut aufnehmen zu können. Die erforderliche Temperaturdifferenz bei vorgegebenem Wärmestrom ist dabei einerseits von der Übertragungsfläche und andererseits vom Wärmeübergangskoeffizienten bestimmt. Da die Übertragungsflächen bei realen Geräten ebenfalls stark eingeschränkt sind (genormte Außenabmessungen bei möglichst großem Innenraum), konzentrieren sich Hersteller von Kühlgeräten auf die Verbesserung des Wärmeübergangs. Als Beispiel hierfür sei die Verwendung von Ventilatoren oder die Optimierung der Anbindung des Verdampfers an den Innenraum durch Wärmeleitpaste zu nennen.

---

<sup>2</sup> Gilt für aktuelle Serienkompressoren mit einem Hubvolumen von circa  $5,5\text{ cm}^3$ .

Auch die Annahme eines isentropen Verdichtungsprozesses weicht sehr stark von der Realität ab. Bei realen Kühlgeräten werden meist hermetisch abgedichtete Kompressoren verwendet, wobei das Kältemittel nach dem Eintritt in das hermetische Gehäuse zuerst durch die Bauteile im Kompressor aufgewärmt wird. Erst nachdem das Kältemittel soweit komprimiert wurde, dass dessen Temperatur über dem Temperaturniveau der begrenzenden Zylinderbauteile liegt, ändert sich der Wärmefluss und das Gas wird gekühlt.

Bezüglich der Verwendung von zusätzlichen Komponenten realer Kältekreisläufe ist neben den schon erwähnten Ventilatoren vor allem der interne Wärmeübertrager zu nennen. Dieser nützt das niedrige Temperaturniveau des vollständig verdampften Kältemittels am Ende des Verdampfers aus, um das flüssige Kältemittel aus dem Kondensator unter Umgebungstemperatur zu kühlen. Dadurch steigt zwar einerseits die Kompressionsstarttemperatur (schlechterer Wirkungsgrad des Kompressors), jedoch wird auch die Kälteleistung bei gleichbleibendem Massenstrom deutlich erhöht. Alles in allem wird der erhöhte Leistungsbedarf des Kompressors von der positiven Wirkung der größeren Kälteleistung kompensiert und die Effizienz des gesamten Kältekreislaufs verbessert. Die Kältekreisprozesse mit und ohne internen Wärmeübertrager sind im  $Ts$ -Diagramm in Abbildung 2.3 dargestellt.

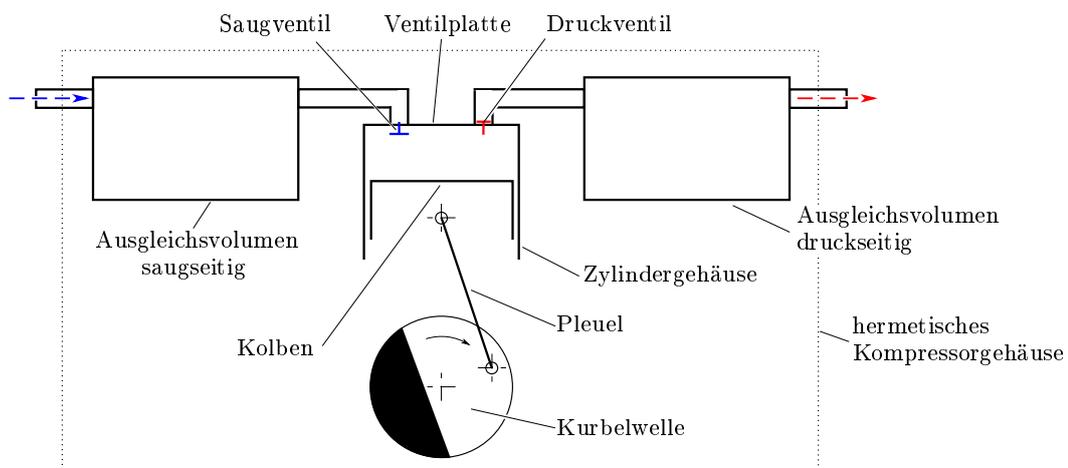


**Bild 2.3:**  $Ts$ -Diagramm des realen Kältekreislaufs mit und ohne internen Wärmeübertrager für das Kältemittel Isobutan. Die gefärbten Bereiche kennzeichnen die übertragenen Wärmen des internen Wärmeübertragers.

Die Steuerung von realen Geräten führt zu meist periodischen Betriebsverhalten, die durch Ein-/Ausschaltvorgänge sowie Drehzahländerungen von Kompressoren und Ventilatoren, Koordination mehrerer Verdampferkreisläufe usw. geprägt sein können. Stationäre Betriebsbedingungen für den Kompressor sind dadurch faktisch ausgeschlossen. Nichtsdestotrotz werden in dieser Arbeit wie auch in der Kompressorentwicklung nur stationäre Betriebsbedingungen angenommen.

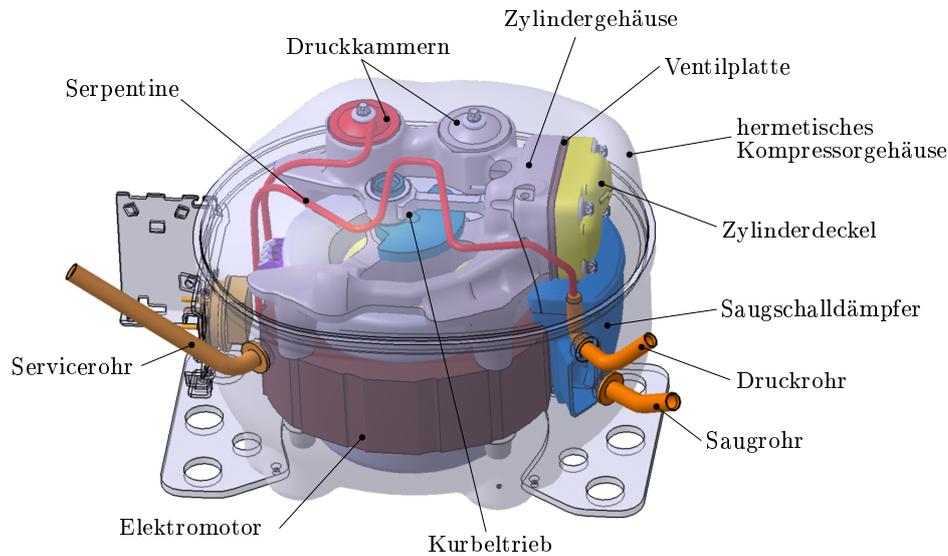
## 2.2 Der hermetische Hubkolbenkompressor

Die grundlegende Funktionsweise des Hubkolbenkompressors ist schon seit vielen Jahrzehnten unverändert und schematisch in Abbildung 2.4 dargestellt. Eine Pleuelstange wandelt dabei die rotierende Antriebsbewegung der Kurbelwelle in eine oszillierende Hubbewegung des Kolbens um. Der Kolben bildet zusammen mit dem Zylindergehäuse und der Ventilplatte ein geschlossenes Volumen, das sich aufgrund der Hubbewegung zeitlich verändert. Durch die Abwärtsbewegung des Kolbens und der damit verbundenen Volumenvergrößerung wird im Zylinder ein Unterdruck erzeugt, der zum Öffnen des Saugventils und damit zu einem Ansaugen des Gases führt. Nach dem Erreichen des unteren Totpunktes des Kolbens wird das Saugventil wieder geschlossen und das im Zylinder befindliche Gas durch die Aufwärtsbewegung des Kolbens komprimiert. Wenn der Druck im Zylinder den Druck auf der anderen Seite des Druckventils übersteigt, öffnet sich das Ventil und das komprimierte Gas wird ausgestoßen. Im Bereich des oberen Totpunktes wird durch den Druckabfall im Zylinder das Druckventil wieder verschlossen und nach einer kurzen Rückexpansionsphase folgt ein neues Lastspiel beginnend mit der Saugphase.



**Bild 2.4:** Schematische Darstellung eines hermetischen Kolbenkompressors

Die geforderte Kälteleistung von Kühlschrankskompressoren für zukünftige Haushaltsgeräte bewegt sich zwischen 10 und 180 W. Für die Auslegung solcher Kompressoren gibt es neben der Effizienz noch weitere Aspekte, die berücksichtigt werden müssen. Dies sind Kosten, Geräuschemissionen und Lebensdauer. Dabei spielt vor allem der Kostenfaktor eine entscheidende Rolle, da die Herstellungskosten oftmals unter 20 € liegen müssen. Vom wirtschaftlichen Standpunkt aus betrachtet wird auch klar, wieso bei der Kompressorenentwicklung Einfachheit und Funktionalität im Vordergrund stehen und sich manche Maßnahmen zur Effizienzsteigerung nicht durchsetzen.



**Bild 2.5:** CAD-Zeichnung eines HTK 55 Kompressors von Secop

Basis sämtlicher Untersuchungen dieser Arbeit ist der HTK 55 Kompressor der Firma Secop, der als CAD-Zeichnung in Abbildung 2.5 dargestellt ist. Die wichtigsten Eckdaten dieses Kompressors sind in Tabelle 2.1 zusammengefasst und gelten für die Serienausführung.<sup>3</sup> In weiterer Folge wird immer von diesem bestimmten Kompressortyp gesprochen, auch wenn dies nicht dezidiert erwähnt ist. Grundsätzliche Aussagen gelten jedoch auch für ähnliche Hubkolbenkompressoren.

Eine Besonderheit von Kältschrankkompressoren ist das hermetische Gehäuse rund um den Kompressor, das ein Austreten des brennbaren Kältemittels in die Umgebung verhindert. Über ein dicht angelötetes Kupferrohr gelangt das Kältemittel im Bereich des Saugschalldämpfereinlasses in das Kompressorgehäuse. Von hier aus strömt ein Teil des Kältemittels direkt in den Saugschalldämpfer. Der Rest des Gases strömt jedoch vorbei und wird durch die heißen Bauteile des Kompressors aufgewärmt. Eine direkte Anbindung zwischen dem Kupferrohr und dem Schalldämpfer wäre zwar bezüglich Sauggaserwärmung vorteilhaft, wird aber oft aus Geräuschemissionsgründen nicht realisiert. Eine dichte Anbindung ist wegen des Ölumlaufs und Effizienzverlusten nicht möglich.

Vom Saugschalldämpfer aus erreicht das Kältemittel über das Saugventil den Zylinder, in dem es komprimiert und durch das Druckventil in den Zylinderdeckel ausge-

<sup>3</sup>Durch die Montage diverser Sensorik können einzelne Parameter (Schadraum, Ventilvorspannung, usw.) bei den Versuchskompressoren geringfügig abweichen.

**Tabelle 2.1:** Eckdaten des Serienkompressors HTK55

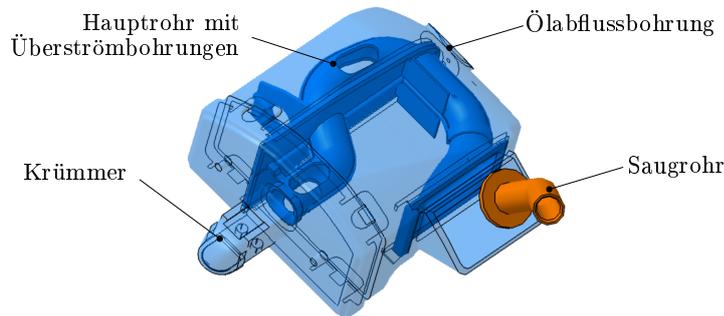
<b>Allgemein</b>			
Kolbendurchmesser	21,1 mm	Hubvolumen	5,5 cm <sup>3</sup>
Schadraum	80 mm <sup>3</sup>	Drehzahl	3000 rpm
Kältemittel	Isobutan		
<b>Kalorimeterdaten bei konstanten Betriebsbedingungen<sup>4</sup></b>			
COP	1,61 W/W	el. Antriebsleistung	57,8 W
Kälteleistung	93,2 W		
<b>Saugventil</b>		<b>Druckventil</b>	
Eigenfrequenz	285 Hz	Eigenfrequenz	340 Hz
Steifigkeit	360 N/m	Steifigkeit	570 N/m
Vorspannung	0,05 N	Vorspannung	0,04 N
Ventildicke	0,2 mm	Ventildicke	0,2 mm
Durchmesser Überströmbohrung	7,8 mm	Durchmesser Überströmbohrung	5,4 mm

stoßen wird. Die durch die zyklische Kompression hervorgerufenen Druckpulsationen werden in weiterer Folge durch zwei Druckkammern abgeschwächt. Von dort aus strömt das verdichtete Kältemittel durch eine Kupferserpentine zu einem weiteren Kupferrohr, von wo aus das Kältemittel wieder aus dem hermetischen Kompressorgehäuse geleitet wird.

Angetrieben wird der Kompressor über einen Einphasen-Asynchronmotor, dessen Rotor fest mit der senkrecht stehenden Kurbelwelle verbunden ist. Ein Ende dieser Kurbelwelle ist in den Ölsumpf des Kompressors eingetaucht. Mithilfe der Kombination aus einer exzentrischen Bohrung am Einlass, einer spiralförmigen Nut entlang der Kurbelwellenoberfläche und einer weiteren exzentrischen Auslassbohrung wird Öl aus dem Ölsumpf gepumpt und an die Gleitlagerstellen der Kurbelwelle gefördert. Das restliche Öl wird durch die Auslassbohrung im Kurbelwellenzapfen an die Umgebung verteilt, von wo es auch an die Zylinderwand und den Kolben gelangt. Neben der Hauptaufgabe des Schmierens der bewegten Teile erfüllt das in den Ölsumpf zurückfließende Öl auch den Nebeneffekt des Kühlens von heißen Bauteilen.

Mit der damit verbundenen Erwärmung des Öls ändert sich die Viskosität und das Öl wird dünnflüssiger. Dies hat zwar einerseits den Effekt, dass die Reibungsverluste dadurch geringfügig sinken, andererseits kann bei zu dünnflüssigem Öl eine ausreichende Lagerschmierung nicht mehr gewährleistet werden. Die Viskosität wird deshalb auf den ungünstigsten Fall bei der größten thermischen Belastung (Pull-Down Betrieb ei-

<sup>4</sup> Gemäß ASHRAE Vergleichsprozess mit  $-23,3\text{ °C}$  Verdampfungstemperatur,  $54,4\text{ °C}$  Kondensations-temperatur und  $32,2\text{ °C}$  Umgebungstemperatur.



**Bild 2.6:** Sauglinie bestehend aus Saugrohr und Saugschalldämpfer

nes Kühlschrankes) ausgelegt, um ein Trockenlaufen der bewegten Teile zu verhindern. In den nachfolgenden Unterkapiteln werden die gasführenden Bauteile als Einzelteile bzw. als Baugruppen zusammengefasst näher beschrieben und dessen Hauptaufgaben genannt.

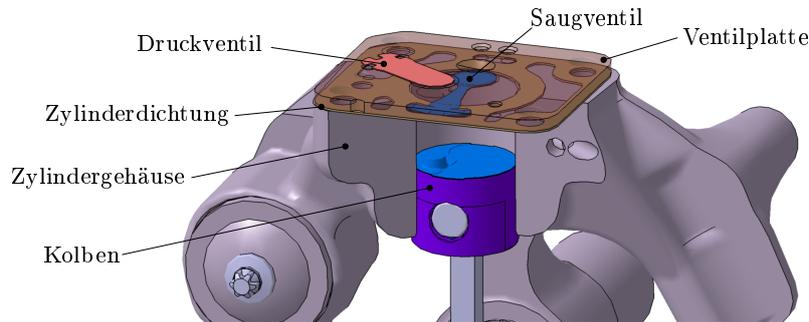
### 2.2.1 Sauglinie

Unter der Sauglinie, die in Abbildung 2.6 dargestellt ist, werden die Bauteile zwischen Eintritt des Kältemittels in das Kompressorgehäuse und dem Saugventil zusammengefasst. Diese bestehen in der Regel aus dem Saugrohr selbst und dem Saugschalldämpfer. Die Sauglinie muss im Grunde zwei Aufgaben erfüllen: (i) Führung des Kältemittels in den Zylinder bei möglichst gleichbleibend niedriger Temperatur und geringem Druckverlust und (ii) Dämpfung der Schallemissionen aufgrund der Ventilbewegung bzw. der Sauggeräusche. Um diese Aufgaben bestmöglich zu erfüllen, wird der Saugschalldämpfer aus Kunststoff gefertigt und besitzt im Inneren ein Hauptrohr mit Überströmbohrungen und mehreren Kammern. Das Ende des Schalldämpfers, der Krümmer, schließt bündig mit der Ventilplatte ab und geht somit nahtlos in die Überströmbohrung des Saugventils über.

Wie im vorherigen Kapitel schon erwähnt, gibt es beim HTK 55 Kompressor zwischen Saugrohr und Schalldämpfer keine direkte Verbindung. Dadurch ist auch die Sauggaswärmerung in diesem Bereich relativ hoch, da zum Teil wärmeres Kältemittel aus dem Kompressorgehäuse angesaugt wird. Geräuschtechnisch stellt dies eine relativ gute Lösung dar, da schwingende Bauteile vom massiven Stahlgehäuse des Kompressors weitestgehend entkoppelt sind. Für mittransportiertes Schmieröl befindet sich zusätzlich eine Ölabbflussbohrung am unteren Ende des Schalldämpfers.

### 2.2.2 Zylinderraum

Der in Abbildung 2.7 dargestellte Zylinderraum wird durch den Kolben, das Zylindergehäuse und die Ventilplatte samt Ventilen begrenzt und variiert abhängig von der



**Bild 2.7:** Zylinderraum begrenzt durch Zylindergehäuse, Kolben und Ventilplatte

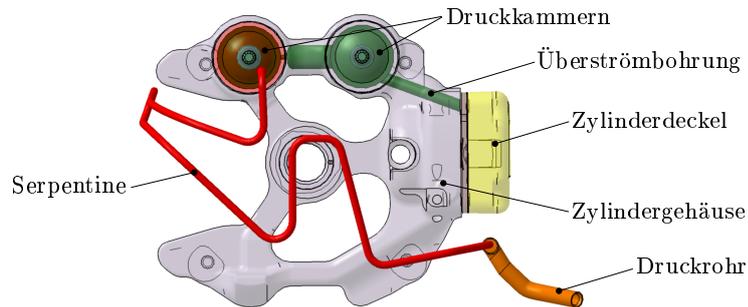
Kolbenstellung von  $0,08 \text{ cm}^3$  bis  $5,5 \text{ cm}^3$ . Dies entspricht einem Verdichtungsverhältnis von etwa 70:1. Generell gilt, dass der Kompressor umso effizienter wird, je geringer das Schadvolumen im oberen Totpunkt gehalten werden kann. In der Realität sind hier aber vor allem durch Fertigungstoleranzen Grenzen gesetzt. Beim HTK 55 Kompressor befinden sich am Kolben Vertiefungen für das Saugventil sowie eine Nase, um den Überströmkanal der Druckbohrung im oberen Totpunkt möglichst gut ausfüllen zu können. Des Weiteren kann der Abstand zwischen Kolben und Ventilplatte über die Verwendung von Dichtungen unterschiedlicher Dicke relativ genau eingestellt werden.

Ein weiterer wichtiger Aspekt bezüglich Kompressoreffizienz stellt die Paarung zwischen Kolben und Zylindergehäuse dar. Einerseits sollte diese so gewählt werden, dass die Leckage zwischen den beiden Bauteilen möglichst gering ist, andererseits soll die Toleranz aber nicht zu eng sein, um keine Nachteile aufgrund von erhöhter Reibung in Kauf nehmen zu müssen. Neben der geometrischen Paarung sollte aber auch darauf geachtet werden, Materialien mit ähnlichen Wärmeausdehnungskoeffizienten zu verwenden, da Temperaturunterschiede in der Größenordnung von  $50 \text{ °C}$  auftreten können.

### 2.2.3 Druckstrecke

Die Druckstrecke, dargestellt in Abbildung 2.8, besteht aus Zylinderdeckel, Druckkammern, Serpentine und Druckrohr und hat die Aufgabe, das komprimierte Kältemittel wieder aus dem hermetischen Kompressorgehäuse herauszuführen. Dabei sollten Druckschwankungen durch die diskontinuierliche Verdichtung gedämpft und das Gas möglichst heiß und bei geringem Druckverlust aus dem Kompressor geführt werden. Aufgrund des relativ hohen Drucks besteht die Druckstrecke bei diesen Kompressoren meist aus metallischen Werkstoffen, die jedoch den Nachteil einer hohen Wärmeleitfähigkeit aufweisen.

Beim HTK 55 Kompressor ist der aus Aluminiumguss gefertigte Zylinderdeckel mit der Ventilplatte und dem Zylindergehäuse fest verschraubt und bildet das erste Ausgleichsvolumen. Nachdem das komprimierte Gas aus dem Zylinder in den Zylinderdeckel ausgestoßen wird, strömt es über eine in das Zylindergehäuse integrierte Über-



**Bild 2.8:** Druckstrecke bestehend aus Zylinderdeckel, Druckkammern, Serpentine und Druckrohr

strömbohrung in zwei weitere Druckkammern. Von dort aus verbindet eine Serpentine die letzte Druckkammer mit dem Druckrohr. Die Serpentine muss einerseits eine dichte Verbindung zwischen Druckkammer und Druckrohr herstellen, andererseits muss sie so konstruiert sein, dass Körperschall nicht bzw. möglichst gedämpft an das Zylindergehäuse weitergegeben wird. Dazu wird sie meist sehr lang und biegeweich ausgeführt, was jedoch Nachteile bezüglich Wärmeverlusten entlang dieser Leitung mit sich bringt. Beim innovativen Delta-Kompressor von Secop wird dies bedeutend besser gelöst, indem die gesamte Druckstrecke aus Kunststoff gefertigt ist. Für weiterführende Informationen sei hier auf die Dissertation von Lang (2010) [29] verwiesen.

### 2.2.4 Ventile

Da in dieser Dissertation das Hauptaugenmerk auf die Ventile gelegt wird, wird hier etwas weiter ausgeholt und die Komponente Ventil allgemeiner betrachtet. Ventile sind Komponenten, die entweder den Druck oder die Strömung von Fluiden regeln. Zu den Aufgabenstellungen der Ventile gehören unter anderem die Massenflussregelung (von der Drosselung bis zum gänzlichen Versperren einer Öffnung), die Massenflussaufteilung, das Verhindern von Rückströmungen oder die Druckbegrenzung. Für jede dieser Aufgaben gibt es verschiedenste Lösungsansätze, die in diesem Kapitel kurz zusammengefasst werden sollen.

Die Einteilung der Ventile kann auf unterschiedlichste Arten erfolgen und wird hier analog zu Smith *et al.* (2004) [55] in (i) manuelle Ventile, (ii) Rückschlagventile und (iii) Druckbegrenzungsventile eingeteilt. Erstere können weiter nach der Methode der Flussregulierung in Hub-, Schiebe-, Dreh-, Quetsch- und Membranventile unterteilt werden. Die meisten dieser manuellen Ventile können auch mit Aktuatoren betätigt werden. Der zur Steuerung dieser Ventile verwendete Linear-, Dreh- bzw. Schwenkantrieb kann dann hydraulisch, mechanisch, elektrisch, magnetisch oder pneumatisch betätigt werden.

Ventile der Gruppe (ii) und (iii) sind hingegen selbststeuernd und öffnen und schlie-

ßen aufgrund der Strömungsrichtung des Fluides bzw. aufgrund des vorherrschenden Drucks. Die Gruppe der Rückschlagventile kann aufgrund der Bewegungsrichtung des Ventils wiederum in Rückschlagventile mit linearem Hub, Rückschlagklappen und Membranrückschlagventile unterteilt werden. Bei den Druckbegrenzungsventilen wird hauptsächlich in direkt- und vorgesteuerte Ventile unterteilt. Eine Sonderform der Druckbegrenzungsventile ist die Berstscheibe, die beim Erreichen eines kritischen Überdrucks mechanisch zerstört und als Sicherheitsventil eingesetzt wird.

Für die Steuerung des Massenflusses in Kolbenkompressoren eignen sich vor allem Ventile der Gruppe (i) und (ii). Ein bedeutender Vorteil von Rückschlagventilen gegenüber manuellen Ventilen ist die automatische Anpassung an verschiedenste Betriebsbedingungen. Aufgrund unterschiedlicher Druckverhältnisse ergeben sich vor allem für das Saugventil signifikant unterschiedliche Steuerzeiten, die über einen rein mechanischen Ventilantrieb nicht realisiert werden können. Die Ansteuerung der manuellen Ventile mittels anderer Aktuatoren wäre zwar technisch möglich, würde aber weitere Sensoren voraussetzen, die Aufschluss über die vorherrschenden Betriebsbedingungen geben. Speziell bei kleineren hermetischen Hubkolbenkompressoren, welche in Haushaltskühlgeräten eingesetzt werden, wäre dies äußerst unwirtschaftlich und zugleich technisch sehr herausfordernd. Aus diesen Gründen haben sich Rückschlagventile in Form von Flatterventilen bei Hubkolbenkompressoren für Haushaltskühlgeräte durchgesetzt.

Die Anforderungen an die Ventile bei den hier untersuchten hermetischen Hubkolbenkompressoren sind einerseits eine lange Lebensdauer und hohe Effizienz, andererseits müssen aber auch die Kosten so gering wie möglich gehalten werden. In der Praxis fällt der Kompromiss meistens zugunsten der Kosten aus, um am hart umkämpften Markt die Produkte überhaupt verkaufen zu können. Nichtsdestotrotz müssen Ventile eine Lebensdauer von 15 Jahren und mehr aufweisen, da Kompressoren in Haushaltsgeräten servicefrei das gesamte Produktleben funktionieren sollen. Vorzeitige Totalausfälle des Kompressors zum Beispiel aufgrund von Ventilbrüchen sind daher unbedingt zu vermeiden.

Bei Flatterventilen spielt die Geschwindigkeit beim Aufprallen auf den Ventilsitz eine entscheidende Rolle. Durch Anpassen der Ventilparameter wie Vorspannung, Steifigkeit oder durch konstruktive Maßnahmen (Anschlag für Ventile) werden die maximalen Ventilhuberhöhen und somit die Aufprallgeschwindigkeiten begrenzt. Damit werden jedoch größere Strömungsverluste in Kauf genommen. Die immer strikteren Energielabels für Haushaltgeräte lassen auch den Aspekt der Effizienz immer wichtiger erscheinen. Aus diesem Grund werden in dieser Arbeit zuerst die Verluste, die aufgrund der Serienventile entstehen, analysiert und in weiterer Folge Maßnahmen zur Effizienzsteigerung untersucht.

Die Auslegung des Ventils sollte generell so erfolgen, dass es bereits bei geringen Unterdrücken öffnet, schnell den maximalen Ventilhub erreicht, diesen so lange wie möglich beibehält und mit moderaten Schließgeschwindigkeiten gerade so schließt, dass ein



**Bild 2.9:** Verschiedene Ausführungen von Flatterventilen hermetischer Hubkolbenkompressoren von Secop (Saugventil jeweils rechts)

Rückströmen verhindert wird. In der Praxis öffnet ein Seriensaugventil in einem Kompressor verzögert aufgrund von Trägheits-, Ölklebe- und Vorspannkräften. Je nach Auslegung schwingt das Saugventil während einer Saugphase mehrmals auf und zu, was jedes Mal zu einem relativ harten Aufschlagen des Ventils am Ventilsitz führt. Darüber hinaus kann es dazu kommen, dass das Ventil kurz vor dem Erreichen des unteren Kolbentotpunktes nochmals zurückspringt und somit der Zeitpunkt des idealen Schließens trotz Vorspannung nicht eingehalten werden kann.

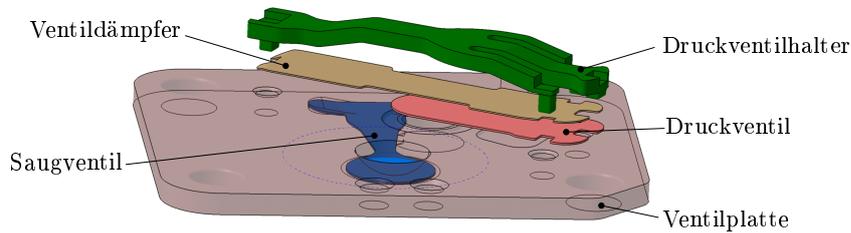
Beispiele für Flatterventile, wie sie in hermetischen Hubkolbenkompressoren eingesetzt werden, sind in Abbildung 2.9 zu sehen. Sie werden meist aus einem Federstahlblech gefertigt und können verschiedenste Formen annehmen. So findet man neben sehr einfachen geraden Ventilen auch biegeweichere Ventile mit kreisförmigen oder nierenförmigen Ventiltellern. Hier gilt es wiederum verschiedenste Aspekte wie Herstellungskosten, Leckage sowie Strömungswiderstand bei der Ventilauslegung zu beachten. So kann die effektive Einströmfläche<sup>5</sup> bei nierenförmigen Ventiltellern zwar deutlich vergrößert werden, die Abdichtung des ovalen Ventilsitzes kann aber problematisch sein.

Die Montagesituation der Ventile des HTK 55 ist in Abbildung 2.10 dargestellt. Die Befestigung erfolgt dabei an der Ventilplatte, wobei der Aufbau des Druckventils komplexer ist, da dessen Ventilhub durch einen Ventildämpfer begrenzt wird.

### 2.2.5 Verlustarten im Kompressor

Die Leistungszahl von hermetischen Kolbenkompressoren hängt von verschiedenen Verlustmechanismen ab. Generell werden die Gesamtverluste grob in elektrische, mechanische und thermodynamische Verluste aufgeteilt. Die elektrischen Verluste sind neben dem relativ geringen Verbrauch der Leistungselektronik hauptsächlich dem elektrischen Motor zuzuschreiben. Mechanische Verluste werden dominiert von Reibverlusten zwischen Kolben und Zylinder sowie Reibverlusten in den Lagerstellen der Kurbelwelle. Die Summe dieser mechanischen Verluste hängt einerseits von der Belastung (Druckverhältnis) im Zylinder ab, andererseits wird sie auch maßgeblich von der Ölviskosität

<sup>5</sup> Entspricht der Randlinie multipliziert mit dem Ventilhub.

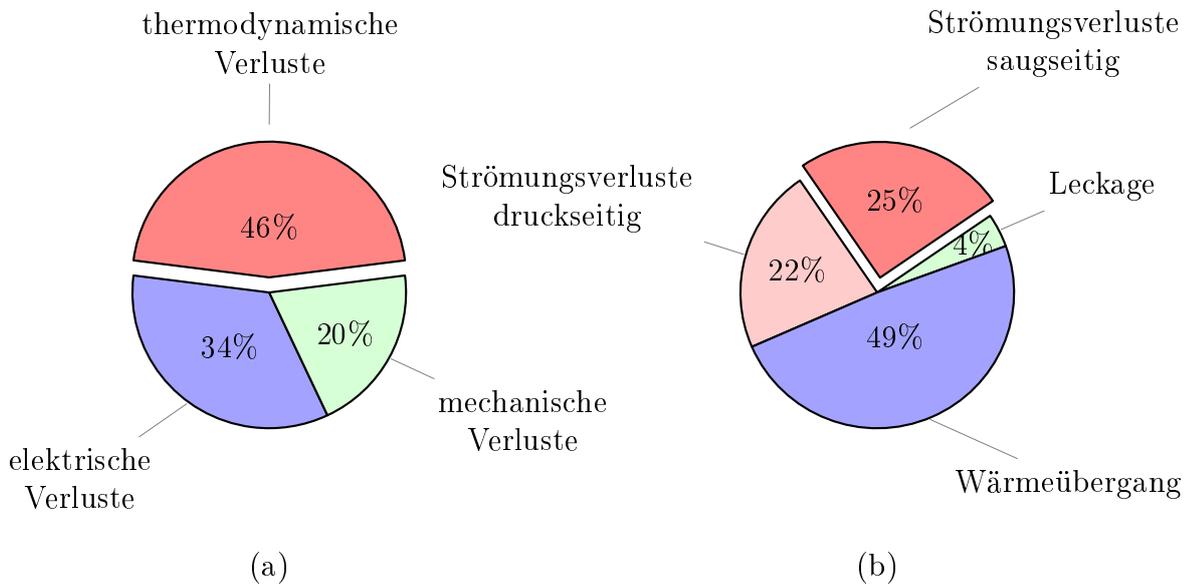


**Bild 2.10:** Montagesituation des Saug- und Druckventils des HTK 55 Kompressors

beeinflusst. Generell gilt hier die Aussage, dass die mechanischen Verluste umso geringer ausfallen, je dünnflüssiger das Öl ist. Da jedoch die Viskosität stark von der Temperatur abhängt (sinkt mit steigender Temperatur) und die Schmierung auch während größter Belastungen (Kühlgerät im Pull-Down-Modus) gewährleistet sein muss, müssen Kompromisse eingegangen werden. Die restlichen Verluste im Kompressor werden in der Regel den thermodynamischen Verlusten zugeordnet, die sich aus Verlusten aufgrund von Wärmeübergängen, Strömungsverlusten sowie Leckageverlusten zusammensetzen. Abbildung 2.11 zeigt eine quantitative Aufteilung der in einem hermetischen Kolbenkompressor auftretenden Verluste, die auf der Veröffentlichung von Ribas *et al.* (2008) [50] basiert. Die genauere Betrachtung der Verlustmechanismen der thermodynamischen Verluste zeigt, dass fast die Hälfte dieser Verluste durch Wärmeübergänge verursacht wird. Die Erwärmung des Sauggases entlang der Saugstrecke wirkt sich dabei besonders schädlich auf den Kompressorwirkungsgrad aus, was durch Untersuchungen von Burgstaller (2009) [10] belegt wurde. Die Reduktion des Wirkungsgrades kann dabei auf zwei Effekte zurückgeführt werden: (i) die Erhöhung der Sauggastemperatur führt zu einer niedrigeren Dichte des Kältemittels und somit zu geringeren Massenströmen und (ii) die Erwärmung des Sauggases führt zu einer höheren Kompressionsstarttemperatur und damit zu einer größeren spezifischen, indizierten Leistung.

Die Strömungsverluste können als Druckverluste aufgrund der Gasströmung in und aus dem Zylinder aufgefasst werden. Ein erheblicher Teil dieser Verluste kann entlang des Gaspfades zum Saugventil hin bzw. vom Druckventil weg auftreten, weshalb hier analog zu Bauer (1998) [5] die Strömungsverluste nochmals unterteilt werden in (i) Verluste aufgrund der Ventile und ihrer direkten Umgebung sowie (ii) Verluste entlang der Saug- bzw. Drucklinie. Einen maßgeblichen Einfluss auf die Verluste (i) hat neben dem Ventil selbst, die Gestaltung der Ventilbohrung sowie einer allfälligen Ventilbegrenzung bzw. Ventiltasche. Die Hauptverursacher für die Verluste entlang der Saug- bzw. Drucklinie sind Querschnittsveränderungen.

Abbildung 2.12 zeigt die unterschiedlichen Ventilverluste anhand eines  $pV$ -Diagramms.

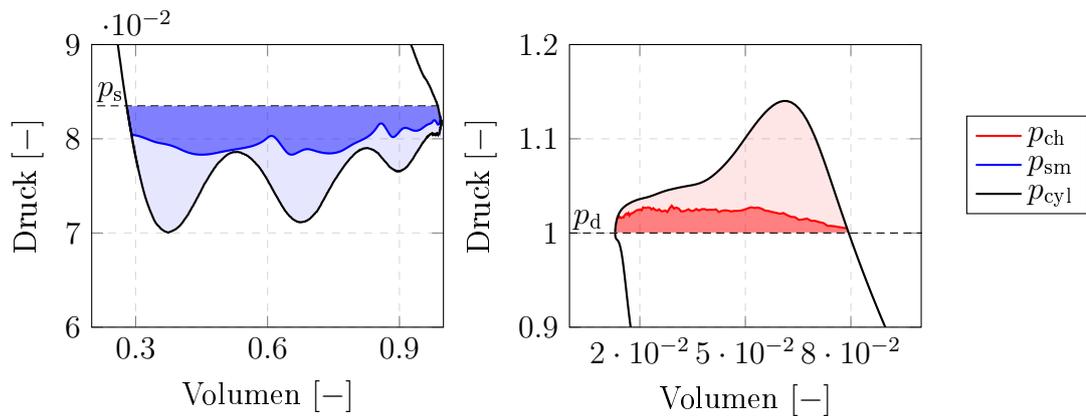


**Bild 2.11:** Typische Verteilung der Verluste eines hermetischen Kolbenkompressors (a) sowie detailliertere Betrachtung der thermodynamischen Verluste (b) (Ribas *et al.*, 2008 [50])

Die Verluste entlang der Saug- und Drucklinie (ii) entsprechen den Flächen (kräftig eingefärbte Bereiche) zwischen Saugdruck  $p_s$  und Druck im Krümmer des Saugschalldämpfers  $p_{sm}$  bzw. zwischen Gegendruck  $p_d$  und Druck im Zylinderdeckel  $p_{ch}$ . In weiterer Folge werden diese Verluste mit  $P_{SVII}$  und  $P_{DVII}$  bezeichnet. Die schwach eingefärbten Bereiche werden durch den Zylinderdruck  $p_{cyl}$  und den Druck im Saugschalldämpferkrümmer  $p_{sm}$  bzw. dem Druck im Zylinderdeckel  $p_{ch}$  begrenzt und entsprechen den Verlusten (i), die dem Ventil und seiner direkten Umgebung zugeordnet werden können. Diese Verluste werden von hier an mit  $P_{SVI}$  und  $P_{DVI}$  gekennzeichnet.

## 2.3 Verwendete Messtechnik

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über die verwendete Messtechnik zur Ermittlung der Messdaten geben. Neben der Beschreibung der prinzipiellen Funktionsweise der Kalorimetermessung und der Laser-Doppler-Vibrometrie wird vor allem auf die Zylinderdruckindizierung genauer eingegangen. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass die in dieser Arbeit verwendeten Messungen nicht vom Verfasser dieser Arbeit durchgeführt wurden.



**Bild 2.12:** Darstellung der Strömungsverluste des Saugventils (links) sowie des Druckventils (rechts) anhand des  $pV$ -Diagramms

### 2.3.1 Kalorimeter

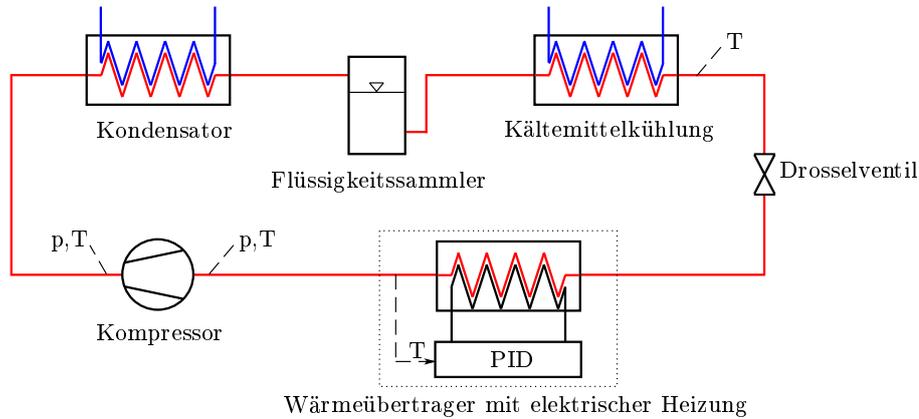
Kalorimeter werden verwendet, um die Leistungszahl von Kompressoren unter Laborbedingungen zu ermitteln. Dazu wird der Kompressor unter stationären Bedingungen betrieben,<sup>6</sup> die durch die Umgebungs-, die Verdampfungs- und die Kondensationstemperatur vorgegeben sind. Neben der Leistungsaufnahme des zu untersuchenden Kompressors wird die Heizleistung gemessen, die notwendig ist, um das Kältemittel des Kreislaufes im Wärmeübertrager vollständig zu verdampfen und auf Umgebungstemperatur zu überhitzen. Diese Heizleistung entspricht der Kälteleistung des Kühlkreislaufes und wird zur Berechnung des COPs verwendet. Der schematische Aufbau eines Kalorimeters für kleine Kältemittelkompressoren ist in Abbildung 2.13 dargestellt.

Tabelle 2.2 zeigt die Hauptspezifikationen des am Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik zur Verfügung stehenden Kalorimeters.

**Tabelle 2.2:** Hauptspezifikationen des Kalorimeters

Hersteller	Microline
Maximale Kühlleistung	800W
Temperaturbereich Umgebung (innen)	20 ÷ 45 °C ±0,2 °C
Außentemperatur	20 °C ±5 °C

<sup>6</sup> Vergleichsprozess gemäß ASHRAE - siehe Kapitel 2.1.1.



**Bild 2.13:** Schematischer Aufbau eines Kalorimeters für kleine Kältemittelkompressoren (Zippl (2002) [66])

### 2.3.2 Laser-Doppler-Vibrometrie

Die Laser-Doppler-Vibrometrie (LDV) ist eine kontaktlose Messtechnik zur Ermittlung von Geschwindigkeit und Vibration von bewegten Oberflächen, wobei Frequenzen von bis zu 30 MHz detektiert werden können. Der Laserstrahl des Vibrometers wird dabei auf die bewegte Oberfläche gerichtet und von dort wieder reflektiert. Mit Hilfe des Prinzips der optischen Interferenz können Frequenz und Amplitude der Bewegung berechnet werden (Sharpe, 2008 [53]).

Mit der LDV können einerseits Bewegungen an schwer zugänglichen Stellen gemessen werden und andererseits ist der Einfluss auf die Bewegung selbst minimal. Somit ist der Einsatz dieser Messtechnik für die Ermittlung von Kolben- und Ventilbewegungen in hermetischen Hubkolbenkompressoren bestens geeignet.

Zur Ermittlung des Kurbelwinkels wurden die mit LDV gemessene Bewegung des Kolbens und das Signal eines in die Kurbelwange integrierten Hallsensors verwendet. Dabei wurden die zeitlichen Abstände zwischen dem signifikanten Ausschlag des Hallsensorsignals und den Totpunkten des Kolbens in Abhängigkeit der Kolbenlast (unterschiedliche Gegendrücke) an Luft ermittelt. Mit dem somit gewonnenen Zusammenhang zwischen der Kolbenlast und dem Auftreten der Signalspitze des Hallsensors konnte anderen Messsignalen (z. B. dem Drucksignal) die dazugehörige Kurbelwinkelposition während des regulären Kalorimeterbetriebes zugeordnet werden. Die Genauigkeit der ermittelten Totpunkte lag dabei im Bereich von etwa  $1^\circ$  Kurbelwinkel.

Die Bewegung der Ventile wurde ebenfalls mittels LDV gemessen. Dazu wurde der Laserstrahl auf die Ventiltellermitte gerichtet. Für Versuche an Luft wurde dabei der Kompressor ohne das hermetische Gehäuse und ohne Saugschalldämpfer betrieben. Für den Kalorimeterbetrieb musste ein geeigneter optischer Zugang durch das hermetische Gehäuse und den Saugschalldämpfer geschaffen werden. Einzelheiten dazu sind in der Veröffentlichung von Nagy *et al.* (2008) [40] zu finden.

### 2.3.3 Zylinderdruckindizierung

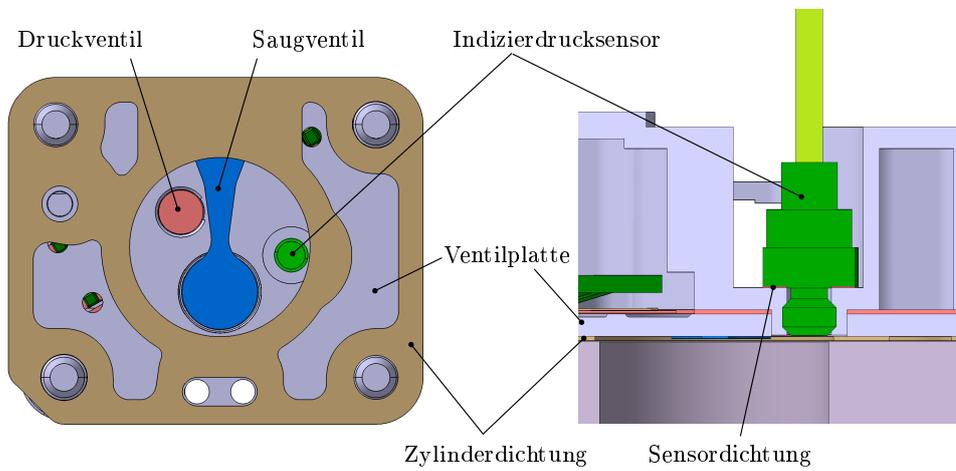
Eine qualitativ hochwertige Zylinderdruckindizierung bei hermetischen Kühltrockenkompressoren ist aufgrund der kleinen Abmessungen des Zylinderraumes sowie der Forderung eines geringen Schadraumes herausfordernd. Neben einer hohen Genauigkeit vor allem bei niedrigen Drücken soll auch der Einfluss des Drucksensors auf das Verhalten des Kompressors so gering wie möglich sein. Die kleinsten handelsüblichen Sensoren, die die geforderte Genauigkeitsklasse erreichen, haben in der Regel einen Durchmesser von etwa 5 mm. Bei einem Kolbendurchmesser von gerade einmal dem Vierfachen ist somit unweigerlich auch eine deutliche Vergrößerung des Schadraumes verbunden. Eine exakte Bestimmung dieser Vergrößerung ist oftmals nicht möglich. Erheblichen Einfluss auf die Vergrößerung des Schadraumes hat die Montageart des Drucksensors. Der Sensor kann entweder oberflächenbündig oder leicht zurückversetzt in einer Kammer, die mit einer kleinen Bohrung mit dem Zylinder verbunden ist, montiert werden. Des Weiteren hat auch die Lage der Dichtstelle einen Einfluss auf das Schadvolumen - hier kann zwischen Schulter- und Frontdichtung unterschieden werden.

Zur Ermittlung des Druckes können verschiedene physikalische Messeffekte ausgenutzt werden, wobei für die Zylinderdruckindizierung vor allem zwei Sensortypen eingesetzt werden: piezoresistive und piezoelektrische Drucksensoren. Erstere besitzen eine durch Druck verformbare Membran mit aufgebrachtenelektrischen Widerständen, die sich je nach Verformung verändern. Letztere beruhen auf dem piezoelektrischen Prinzip, bei dem durch die mechanische Verformung eines Kristalls eine elektrische Ladung entsteht, die der auf den Kristall wirkenden Kraft proportional ist. Diese Ladung wird in eine elektrische Spannung umgewandelt und dient als Messsignal. Vor allem bei der Zylinderdruckindizierung von Verbrennungskraftmaschinen ist diese Art von Sensoren weit verbreitet. Ein Nachteil dieser piezoelektrischen Sensoren ist, dass sie einer relativ starken Drift unterliegen und somit nur für die Messung von dynamischen Druckänderungen geeignet sind.

Als Alternative zu den relativ großen piezoresistiven Drucksensoren ( $\varnothing$  5 mm) wurde auch ein piezoelektrischer Miniaturdrucksensor mit einem Frontdurchmesser von nur 1 mm untersucht (siehe Abbildung 2.14). Der Größenvorteil des Piezosensors konnte jedoch nicht ganz ausgespielt werden, da der Sensor nur schulterdichtend eingebaut werden konnte. Des Weiteren konnte der Sensor aufgrund der relativ großen Signaldrift und der Problematik bei der Einpassung der Druckkurve (kein Absolutdruck) nicht überzeugen. Daraus resultierend wurde für die weitere Zylinderdruckindizierung des HTK 55 Kompressors ein flächenbündig montierter Absolutdrucksensor verwendet, der schulterdichtend eingebaut wurde. Abbildung 2.15 zeigt die Montagesituation des verwendeten Drucksensors und Tabelle 2.3 fasst sämtliche Messmittel zusammen, die für diese Versuche verwendet wurden.



**Bild 2.14:** Größenvergleich zweier Drucksensoren: piezoelektrischer Miniaturdrucksensor (links) und piezoresistiver Drucksensor (rechts)



**Bild 2.15:** Montagesituation des Zylinderdrucksensors

**Tabelle 2.3:** Verwendete Messmittel zur Zylinderdruckindizierung

Sensoren	Bezeichnung	Genauigkeit	Messbereich
Saugdrucksensor	Kulite XTL-123C-190M	0,5 %FSO	bis 1,7 bar
Gegendrucksensor	Kulite XTL-HA-123C-190M	0,5 %FSO	bis 17 bar
Indizierdrucksensor	Kulite XTL-HA-123C-190M	0,5 %FSO	bis 17 bar
Sonstige Hardware			
Datenaufnahme	Brüel & Kjaer 3560-B-130		
Spannungssignal Ausgang	National Instruments c-DAQ, Modul NI 9205		
Peak-Spannungsmessung Hallsensor	National Instruments c-DAQ, Modul NI 9263		
Vibrometer Controller	Polytec OFV-5000-2G		
Vibrometer Messkopf	Polytec OFV-503		

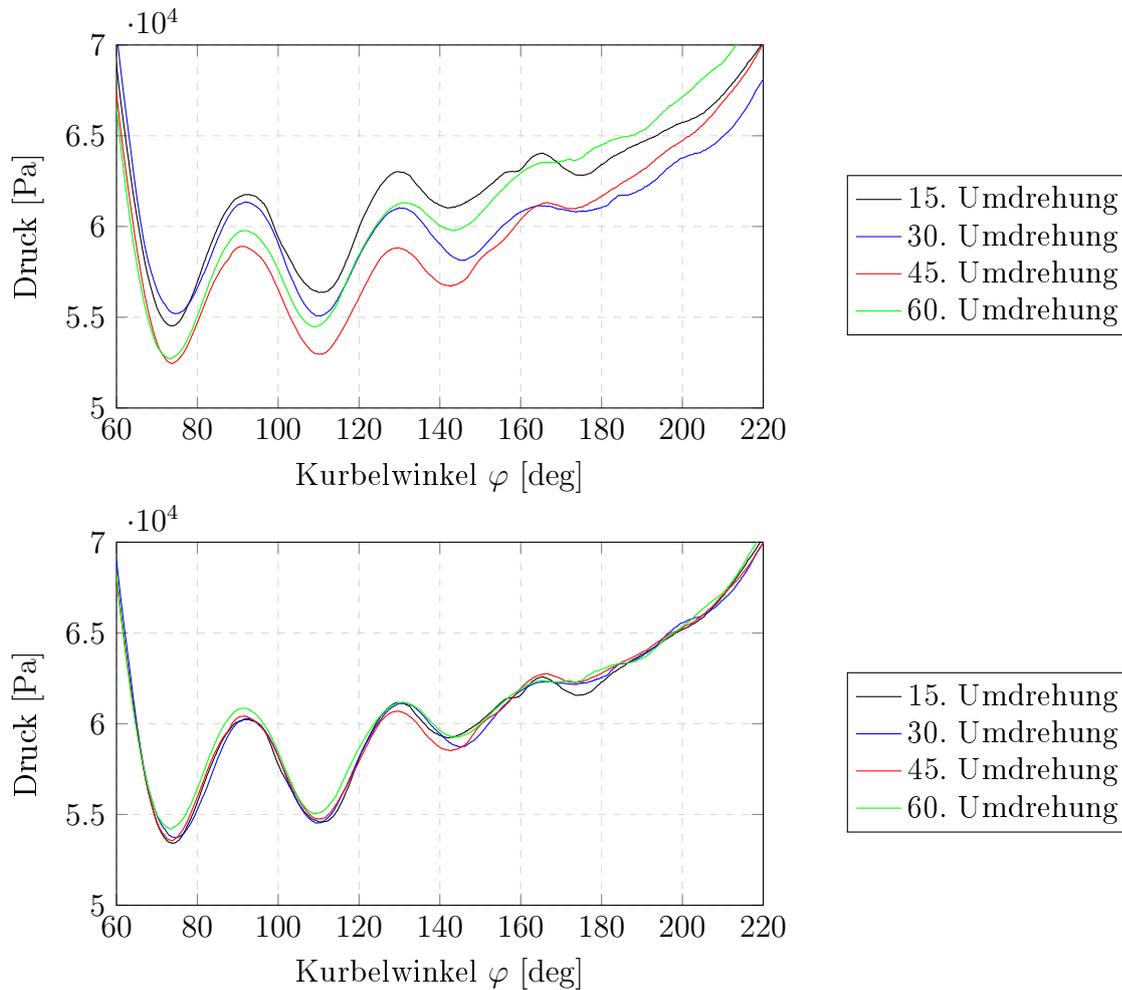
Um die durch die Ventile verursachten Strömungsverluste mit Messungen realistisch bewerten zu können, muss die Genauigkeit des Indizierdrucksensors vor allem im Niederdruckbereich gegeben sein. Daher ist eine Korrektur des Offsetfehlers notwendig, die bei der Datenaufbereitung zu berücksichtigen ist. Dazu wird die Abweichung des Indizierdrucksensors vom genaueren Saugdrucksensor mit einer Korrekturfunktion bestimmt, die aus einem konstanten Mittelwert und einer Sinusschwingung mit einer Frequenz von 50 Hz besteht:

$$o(\varphi) = \bar{o} + \tilde{o} \sin(\omega t + \Delta\varphi) . \quad (2.5)$$

Da der Kompressor bei einer Drehfrequenz betrieben wird, die geringfügig niedriger ist als die Frequenz der Messsignalgrundschiwingung, tritt eine relative Phasenverschiebung auf, die nach 60 Umdrehungen circa  $360^\circ$  Kurbelwinkel beträgt. Daraus ergibt sich eine Druckkurvenschar, die sich alle 60 Umdrehungen wiederholt. Abbildung 2.16 zeigt im oberen Diagramm einen Auszug dieser Kurvenschar nach jeweils 15 Umdrehungen, wobei eine relativ große Abweichung der Signale aufgrund der Grundschiwingung des Sensors zu erkennen ist. Nach Anwendung der Korrekturfunktion aus Gleichung 2.5 ergibt sich für dieselbe Kurvenschar eine deutlich kleinere Abweichung, wie im unteren Diagramm von Abbildung 2.16 zu sehen ist.

Des Weiteren kann die Drehfrequenzschwankung des Kompressors während einer Kurbelwellenumdrehung berücksichtigt werden, indem eine volle Umdrehung in zwei Bereiche mit leicht unterschiedlicher Drehzahl eingeteilt wird: (i) vom oberen zum unteren Totpunkt und (ii) vom unteren zum oberen Totpunkt. Für den HTK 55 liegt die Drehfrequenz im Bereich (i) circa 1 % über und im Bereich (ii) circa 1 % unter der gemittelten Drehfrequenz des Kompressors.

Zur Ermittlung der indizierten Leistung sowie der Strömungsverluste aufgrund der Ventile muss neben dem Zylinderdruck, dem Druck im Saugschalldämpfer und dem Druck



**Bild 2.16:** Gemessener Zylinderdruck aufeinanderfolgender Umdrehungen - oben: ohne Korrektur, unten: mit Korrektur

im Zylinderdeckel auch der dazugehörige Kurbelwinkel ermittelt werden, um den zeitlichen Verlauf des Zylindervolumens berechnen zu können. In sämtlichen Versuchen dieser Arbeit wird der Kurbelwinkel mittels Hallsensor ermittelt (siehe Kapitel 2.3.2). Zusammenfassend kann gesagt werden, dass mit der Zylinderdruckindizierung auch immer eine Beeinflussung des Kompressors einhergeht. Diese ist hauptsächlich auf das vergrößerte Schadraumvolumen, Leckagen und eine leicht veränderte Ventildynamik aufgrund des manuellen Einbaus zurückzuführen. Beim Vergleichen mit Simulationsergebnissen sollte dies jedenfalls bedacht werden.

### 2.3.4 Temperaturmessung

Zur Untersuchung des thermischen Verhaltens von Kolbenkompressoren werden neben Wärmeflussmessungen vor allem Temperaturmessungen mittels Thermoelementen verwendet. Die Thermoelemente werden dabei an verschiedenen Bauteilen bzw. freihängend im Kompressorgehäuse befestigt. Sämtliche Kabel der Thermoelemente müssen bei hermetischen Hubkolbenkompressoren gasdicht aus dem Kompressorgehäuse geführt werden, was mitunter zu einer großen Herausforderung werden kann. Mögliche Leckagen können dabei vor allem zwischen Kabelummantelung und Gehäuse, aber auch innerhalb der Kabelummantelung auftreten. Um mehrere Thermoelemente platzsparend und leakagefrei aus dem Kompressorgehäuse führen zu können, wurde bei den in dieser Arbeit verwendeten Messungen eine spezielle Kabeldurchführung der Firma Conax verwendet, die die Temperaturmessung mit bis zu 13 Thermoelementen erlaubt. In der Veröffentlichung von Hopfgartner *et al.* (2016) [23] werden die Ergebnisse der Untersuchung des thermischen Verhaltens eines HTK 55 Kompressors bei unterschiedlichen Betriebsbedingungen präsentiert. Darin sind auch die Verteilung der Messpunkte und die verwendete Messtechnik ersichtlich, weshalb hier nicht weiter darauf eingegangen werden soll.

Neben der Temperaturverteilung im Kompressorgehäuse und der quantitativen Aussage, wie sich bestimmte Maßnahmen auf das thermische Verhalten des Hubkolbenkompressors auswirken, sind vor allem Werte für Temperaturrandbedingungen, die für die CFD-Berechnung benötigt werden, ein entscheidender Output dieser Messungen.

## 2.4 Erhaltungsgleichungen

Ausgehend von der Kontinuumshypothese (siehe Appendix A) werden bei einer massenfesten Betrachtungsweise mehrere Massenpunkte zu einer Kontrollmasse zusammengefasst, die das zeitlich veränderliche Volumen  $V(t)$  einnehmen. Die substantiellen Änderungen von Masse, Impuls und Energie für die betrachtete Kontrollmasse werden mit den Erhaltungsgleichungen beschrieben und können für das mitbewegte Volumen  $V(t)$  wie folgt angegeben werden (Truckenbrodt, 1996 [60]):<sup>7</sup>

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \, dV = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} \, dV = \mathbf{F}, \quad (2.7)$$

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \, dV = d\dot{A} + d\dot{A}^B + d\dot{Q} + d\dot{Q}_S. \quad (2.8)$$

Die Erhaltungsgleichungen beruhen auf den Axiomen, dass:

---

<sup>7</sup> Annahme: frei von Quellen und Senken.

- Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann.
- die zeitliche Änderung des Impulses einer Kontrollmasse gleich der an dieser Masse angreifenden Kräfte  $\mathbf{F}$  ist.
- die zeitliche Änderung der inneren und kinetischen Energie einer Kontrollmasse gleich der Leistungen der an der Masse angreifenden Kräfte  $d\dot{A}$ ,  $d\dot{A}^B$  und übertragenen Wärmeströme  $d\dot{Q}$ ,  $d\dot{Q}_S$  ist.

Da die zeitliche Verfolgung einzelner Massenpunkte einerseits sehr aufwändig ist und andererseits bei den meisten technischen Problemstellungen gar nicht gefordert wird, wird die ortsfeste der massenfesten Betrachtungsweise oft bevorzugt. Mittels des Reynoldsschen Transporttheorems und des Gaußschen Integralsatzes (siehe Appendix B) lässt sich die linke Seite der Gleichungen 2.6 bis 2.8 schreiben als:<sup>8</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV, \quad (2.9)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) \right) dV, \quad (2.10)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) dV = \int_V \left( \frac{\partial \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \right) \right) dV. \quad (2.11)$$

### 2.4.1 Massenerhaltungsgleichung

Wie schon erwähnt, beschreibt Gleichung 2.6, dass Masse weder erzeugt noch vernichtet werden kann. Da die Gleichung für beliebige Volumina gelten muss, muss der Integrand selbst Null werden und es folgt für die ortsfeste Betrachtungsweise (Steiner, 2011 [56]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_j}{\partial x_j} &= 0. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Beide Gleichungen stellen die Massenerhaltungsgleichung dar, obere in vektorieller Form und untere in der kompakten Indexschreibweise ( $j=1,2,3$  für  $x$ -,  $y$ - und  $z$ -Richtung). Der erste Term der Gleichung stellt die zeitliche Änderung der Dichte dar, der zweite den Massenfluss über die Begrenzungsflächen des Kontrollvolumens. Anders ausgedrückt bedeutet dies, dass die zeitliche Änderung der Dichte im Kontrollvolumen durch die Differenz zwischen zu- und abfließenden Massenstrom bestimmt wird.

<sup>8</sup>  $\mathbf{v} \otimes \mathbf{v}$  ist das dyadische Produkt.

### 2.4.2 Impulserhaltungsgleichungen

Die rechte Seite der Impulserhaltungsgleichungen 2.7 umfasst die auf das Volumen einwirkenden resultierenden Kräfte  $\mathbf{F}$ . Diese setzen sich in der Regel aus den Volumenkraften  $\mathbf{F}^B$ , die zum Beispiel durch die Erdanziehung und andere Beschleunigungskräfte oder magnetische Einwirkung verursacht werden können und den durch Spannungen an den Begrenzungsflächen verursachten Kräften  $\mathbf{F}^\sigma$  zusammen. Unter der Verwendung des spezifischen Volumenkraftvektors  $\mathbf{f}^B$  und des Spannungstensors  $\underline{\boldsymbol{\sigma}}$ , aufgeteilt in einen druckbedingten Anteil  $p$  und einen reibungsbedingten Anteil  $\boldsymbol{\tau}$ , kann der resultierende Kraftvektor  $\mathbf{F}$  geschrieben werden als (Steiner, 2011 [56]):

$$\mathbf{F} = \underbrace{\int_V (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV}_{\mathbf{F}^\sigma} + \underbrace{\int_V \rho \mathbf{f}^B dV}_{\mathbf{F}^B} . \quad (2.13)$$

Aus der Forderung, dass die Impulserhaltungsgleichungen für beliebige Volumina gelten müssen, folgt analog zur Massenerhaltungsgleichung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho \mathbf{v}}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v} \otimes \mathbf{v}) &= -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{f}^B , \\ \frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho f_i^B . \end{aligned} \quad (2.14)$$

Die untere Schreibweise der Impulserhaltungsgleichungen in Gleichung 2.14 entspricht wiederum der Indexschreibweise, wobei die Indizes  $i$  und  $j$  für die kartesischen Koordinatenrichtungen stehen. Der erste Term auf der linken Seite der Impulserhaltungsgleichungen stellt die zeitliche Änderung des Impulses für das untersuchte Kontrollvolumen dar, der zweite den konvektiven Term, der als Differenz zwischen ein- und austretenden Impulsfluss interpretiert werden kann. Die rechte Seite entspricht den am Kontrollvolumen angreifenden Kräften und stellt den Druckterm, den Spannungsterm und den Volumenkraftterm dar.

Zählt man die Massenerhaltungsgleichung mit, so stehen vier Gleichungen (je eine Impulserhaltungsgleichung pro Raumrichtung) für insgesamt 14 Unbekannte zu Verfügung. Es sind dies die Dichte  $\rho$ , der Druck  $p$ , die drei Geschwindigkeiten  $v_i$  sowie die neun Spannungen  $\tau_{ji}$ . Um dieses Gleichungssystem nun lösen zu können, benötigt man neben der Zustandsgleichung für das Medium weitere Gleichungen, die den Zusammenhang zwischen den Spannungen und den Geschwindigkeiten herstellen. Analog zu elastischen Feststoffen, bei denen der Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation mithilfe des Hookeschen Gesetzes beschrieben werden kann, kann für Newtonsche Fluide ein Ansatz, bei dem die Scherspannung proportional der Geschwindigkeitsänderung ist, verwendet werden. Als Newtonsches Fluid bezeichnet man ein Gas oder eine Flüssigkeit (Fluid), bei dem die Zähigkeit unabhängig vom Bewegungszustand ist, was

hier vorausgesetzt wird. Für diese Fluide können nun nach dem Stokeschen Gesetz die Spannungen wie folgt ausgedrückt werden (Truckenbrodt, 1996 [60]):<sup>9</sup>

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right), \quad (2.15)$$

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für: } i = j \\ 0 & \text{für: } i \neq j \end{cases}.$$

Die ersten zwei Terme der Gleichung sind auf die Verformung des Fluidelementes und der dritte Term auf die Volumenausdehnung zurückzuführen. Dabei ist  $\delta_{ij}$  das Kronecker-Delta, das die Tatsache berücksichtigt, dass die Dilatationsgeschwindigkeit nur bei Normalspannungen auftritt, mit der Scherzähigkeit bzw. dynamischen Viskosität  $\eta$ .

Werden die Zusammenhänge aus Gleichung 2.15 in die Impulserhaltungsgleichungen eingesetzt, so folgen die berühmten Navier-Stokesschen Gleichungen:

$$\frac{\partial \rho v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho v_i v_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \delta_{ij} \frac{2}{3} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \rho f_i^B. \quad (2.16)$$

Zusammen mit der Massenerhaltungsgleichung bilden die Navier-Stokesschen Gleichungen ein System von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen, dessen Lösung meist nur noch numerisch erfolgen kann. Obwohl dieses Gleichungssystem sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen geeignet ist, wird zur Berechnung von turbulenten Strömungen meist ein anderer Lösungsansatz gewählt (siehe Appendix C).

### 2.4.3 Energieerhaltungsgleichung

Die rechte Seite der Energieerhaltungsgleichung besteht aus der Bilanzierung der von äußeren Kräften geleisteten Arbeit pro Zeit  $d\dot{A}$ , der durch Volumenkräfte geleisteten Arbeit pro Zeit  $d\dot{A}^B$ , der Energieströme übertragen durch Wärmeleitung  $d\dot{Q}$  und der von außen zugeführten Energieströme  $d\dot{Q}_S$  (Brenn, 2010 [8] bzw. Oertel, 2015 [43]):

$$d\dot{A} = \int_V (-\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v})) dV, \quad (2.17)$$

$$d\dot{A}^B = \int_V \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^B dV, \quad (2.18)$$

$$d\dot{Q} = \int_V \nabla \cdot (\lambda \nabla T) dV, \quad (2.19)$$

<sup>9</sup> Annahme: Fluid ist isotrop, Volumenviskosität vernachlässigt.

$$d\dot{Q}_s = \int_V \dot{q}_s dV . \quad (2.20)$$

Wie schon bei den Massen- und Impulserhaltungsgleichungen müssen auch hier wiederum die Integranden selbst die Integralbilanz erfüllen und die Energiegleichung kann somit in vektorieller Form geschrieben werden als:

$$\frac{\partial \rho \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)}{\partial t} + \nabla \cdot \left( \rho \mathbf{v} \left( e + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) \right) = -\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^B + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \dot{q}_s . \quad (2.21)$$

Um die Energieerhaltungsgleichung auf eine für Strömungsvorgänge mit Wärmetransport geeignetere Form zu bringen, kann der Anteil der mechanischen Energie von Gleichung 2.21 abgezogen werden. Durch die skalare Multiplikation des Impulserhaltungsvektors mit dem Geschwindigkeitsvektor erhält man die mechanische Energiegleichung (Brenn, 2010 [8]):

$$\rho \frac{\partial \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right)}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right) = \underbrace{-\mathbf{v} \cdot \nabla p}_{-\nabla \cdot (p \mathbf{v}) + p \nabla \cdot \mathbf{v}} + \underbrace{\mathbf{v} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau})}_{\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v}) - (\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})} + \rho \mathbf{v} \cdot \mathbf{f}^B . \quad (2.22)$$

Subtrahiert man nun Gleichung 2.22 von Gleichung 2.21 erhält man die thermische Energiegleichung:

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \nabla e = -p \nabla \cdot \mathbf{v} + \underbrace{(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})}_{\eta \Phi} + \nabla \cdot (\lambda \nabla T) + \dot{q}_s . \quad (2.23)$$

Der Term  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  entspricht der Dissipationsfunktion, die gemäß dem Stokesschen Reibungsgesetzes wie folgt geschrieben werden kann:

$$\begin{aligned} \Phi = 2 & \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 \\ & + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 . \end{aligned} \quad (2.24)$$

Gleichungen 2.22 und 2.23 haben nur die Terme  $p \nabla \cdot \mathbf{v}$  und  $(\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{v})$  gemeinsam, jedoch mit unterschiedlichen Vorzeichen. Diese Terme beschreiben die wechselseitige Umwandlung von thermischer in mechanische Energie und umgekehrt. Der Druckterm kann entweder positiv oder negativ sein und stellt somit eine reversible Form des Energieaustausches dar. Die Dissipationsfunktion hingegen besteht rein aus quadratischen Termen und ist stets positiv, was mit einem irreversiblen Verlust von mechanischer Energie durch die Umwandlung in thermische Energie verbunden ist (Brenn, 2010 [8]). Wie auch bei den vorhin gezeigten Massen- und Impulserhaltungsgleichungen wurden bei den eben gezeigten Formen der Energieerhaltungsgleichung keine besonderen Einschränkungen gemacht, sondern lediglich eine homogene Strömung sowie ein Newtonsches Fluid vorausgesetzt.

## 2.5 Einteilung der Simulationsstrategien für hermetische Hubkolbenkompressoren

Grundsätzlich gibt es in der Literatur verschiedenste Strategien, um den Hubkolbenkompressor eines Kältekreislaufes zu simulieren. Die Einteilung kann grob in 0D, 1D und mehrdimensionale Modelle erfolgen. Die Auswahl des passenden Kompressormodells wird dabei einerseits vom erforderlichen Grad an Genauigkeit und Komplexität und andererseits vom numerischen Aufwand bestimmt. Trotz steigender Rechnerleistungen in den letzten Jahren, haben sowohl die komplexeren als auch die einfacheren Modelle heutzutage durchaus ihre Berechtigung. So kommen in transienten Berechnungen von Kältekreisläufen grundsätzlich 0D Modelle zum Einsatz, die sich durch relativ große Zeitschritte auszeichnen (Zeitschritte können vielfach größer als die Periodendauer einer Kurbelwellenumdrehung sein). Bei der detaillierten Untersuchung von Flatterventilen müssen vergleichsweise kleine Zeitschritte gewählt werden, um höherfrequente Bewegungen des Ventils auflösen zu können.

*0D:* Bei 0D Modellen werden der Kompressor und dessen Bauteile nur sehr stark vereinfacht dargestellt und in der Regel in mehrere thermische Massen unterteilt. Basierend auf der Energieerhaltungsgleichung können so grobe Aussagen über Wärmeströme zwischen den einzelnen Massen oder Leistungszahlen getroffen werden. Die Genauigkeit dieser Modelle ist sehr begrenzt, da Parameter wie Wärmeübergangs- oder Wärmeleit-zahlen nur durch Experimente bestimmt bzw. durch einfache Korrelationen abgeschätzt werden können. Des Weiteren können bestimmte physikalische Effekte nicht abgebildet werden. Nichtsdestotrotz werden diese Rechenmodelle häufig angewendet, da sie durch eine niedrige Rechenzeit bestechen. Als Beispiel dafür kann die Arbeit von Xie und Bansal (2000) [65] genannt werden.

*1D:* Bei den 1D Modellen wird der Gaspfad durch den gesamten Kompressor in endlich viele Kontrollvolumina aufgeteilt, die vom Kältemittel hintereinander durchströmt werden. Für jedes Kontrollvolumen werden die eindimensionalen, transienten Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie gelöst. Anwendungsbeispiele dafür sind in den Arbeiten von Perez-Segarra *et al.* (1994) [47] und Rigola *et al.* (2005) [51] zu finden.

Im Vergleich zur 0D Modellierung des Kompressors sind hier einfache gasdynamische Effekte enthalten. Des Weiteren können Effekte geometrischer Parameter besser abgebildet werden und somit Parameterstudien mit zum Beispiel veränderten Rohrlängen und -durchmessern effizient durchgeführt werden.

*Mehrdimensional:* Reicht die Genauigkeit von 1D Modellen nicht aus bzw. sollen komplexere Strömungseffekte untersucht werden, so kann der Kompressor durch eine mehrdimensionale CFD-Simulation abgebildet werden. Hierzu wird das zu berechnende

Gebiet in ein mehrdimensionales Rechengitter unterteilt und für jedes Teilvolumen die Erhaltungsgleichungen für Masse, Impuls und Energie gelöst.

Neben der zweidimensionalen Modellierung hat in letzter Zeit vor allem die dreidimensionale Modellierung stark an Bedeutung gewonnen. So stellt die 3D-CFD-Simulation ein entscheidendes Werkzeug dar, um die komplexen physikalischen Phänomene in einem Kompressor besser verstehen zu können und damit mögliche Verbesserungspotentiale zu erkennen. Auch ist es nicht immer einfach, Auswirkungen von Einzelmaßnahmen experimentell zu erfassen und eine qualitative Aussage zu tätigen, da sich oftmals mehrere Einflussfaktoren überlagern und sich teilweise aufheben können. Des Weiteren ist die Entwicklung der hermetischen Hubkolbenkompressoren mittlerweile auf einem relativ hohen Stand, bei denen sich einzelne Maßnahmen durch Effizienzsteigerungen weniger Prozentpunkte äußern und teilweise sogar innerhalb der Messtoleranz liegen können. Um trotzdem richtige Tendenzen einer Maßnahme abschätzen zu können, ist die dreidimensionale CFD-Simulation das Mittel der Wahl.

Als Beispiel für eine zweidimensionale, transiente Berechnung der Gasströmung in und aus dem Zylinder kann die Arbeit von Matos *et al.* (2006) [36] angeführt werden. Neben der gegenseitigen Beeinflussung von Ventilbewegung (1 DOF) und Strömung werden auch turbulente Strömungseffekte berücksichtigt. Eine dreidimensionale Berechnung des gesamten Gaspfades eines Kompressors für Haushaltskühlgeräte ist beispielsweise in der Arbeit von Pereira *et al.* (2007) [46] beschrieben. Auch hier wurden Fluid-Struktur-Interaktionen der Ventile durch Feder-Masse-Systeme berücksichtigt.

Eine zeitlich und räumlich hochaufgelöste 3D-CFD-Simulation des gesamten Kompressors (Gaspfad, Öl, Bauteile) ist aufgrund des enormen Rechenaufwandes nach wie vor nicht praktikabel. In der Forschung und Entwicklung von Kompressoren werden deshalb meist nur einzelne Teilbereiche betrachtet und Einflüsse aus der Umgebung durch geeignete Randbedingungen berücksichtigt. Als Beispiel dafür kann die Untersuchung von Flatterventilen oder der Ölströmung genannt werden, die in den Arbeiten von Estruch *et al.* (2014) [14] und Posch *et al.* (2017) [49] behandelt wurde.

## 2.6 Modellierungsansätze für Flatterventile

Dieses Kapitel soll einen kurzen Überblick über die in der Literatur verwendeten Modellierungsansätze für Flatterventile geben. Dazu werden die Ansätze in drei verschiedene Bereiche unterteilt:

- Feder-Masse-Systeme (i)
- Summationsmethode der Eigenschwingungsformen (ii)
- Finite-Elemente-Methode (iii)

*i:* Feder-Masse-Systeme zur Berechnung von Ventilbewegungen werden schon sehr lange eingesetzt. Costagliola (1949) [12] war einer der ersten, der die Ventildynamik von Flatterventilen bei Kolbenkompressoren mithilfe einfacher Feder-Masse-Systeme berechnete, wobei die Strömung durch die Ventile mittels stationärer Isentropengleichung beschrieben wurde. Basierend auf diesem Modell wurden unzählige weiterführende Arbeiten durchgeführt, die Öklebeeffekte, das Aufschlagen des Ventils auf den Ventilsitz oder mehrdimensionale Bewegungen des Ventils untersuchten (Khalifa und Liu (1998) [25], Touber (1976) [59], Machu (1994) [32]).

Bis zur Jahrtausendwende wurde aufgrund fehlender Rechnerleistungen die Betrachtung von Ventildynamik und Strömungsvorgängen meist getrennt betrachtet. Zu den ersten Veröffentlichungen, bei denen die gegenseitige Beeinflussung von Ventilbewegung und Strömungsvorgängen samt Kolbenbewegung berücksichtigt wurde, gehört beispielsweise die Arbeit von Matos *et al.* (2000) [35], bei der das Ventil durch eine ebene Platte mit einem Freiheitsgrad modelliert wurde.

Um die Einflüsse der Ventilschiefstellung zu berücksichtigen, können auch Ventilmodelle mit rotatorischen Freiheitsgraden anstelle von translatorischen eingesetzt werden, wie beispielsweise in der Arbeit von Mistry *et al.* (2012) [39]. Hierin wurde vor allem die Modellierung des Saugventils als kritisch eingestuft. Die Ventilbewegung des Modells mit rotatorischen Freiheitsgrad korrelierte dabei wesentlich besser mit den Messergebnissen als jene mit translatorischem Freiheitsgrad.

*ii:* Diese Modellierung basiert auf der von Thomson und Dahleh (1998) [58] beschriebenen Summationsmethode der Eigenschwingungsformen. Dabei wird angenommen, dass die Ventilbewegung aus einer Überlagerung einzelner Eigenschwingungsformen resultiert. Die Eigenschwingungsformen und die dazugehörigen Eigenfrequenzen müssen zuvor durch eine Modalanalyse bestimmt werden. In der Regel reicht es aus, die ersten paar Moden zu berücksichtigen, da diese die Ventilbewegung maßgeblich beeinflussen. Beispiele dafür sind in den Veröffentlichungen von Ooi *et al.* (1992) [44], Sheu und Hu (2000) [54] und Estruch *et al.* (2014) [14] zu finden. Für weitere Informationen bezüglich der genaueren Vorgangsweise sei hier auf diese Arbeiten verwiesen. Die Summationsmethode der Eigenschwingungsformen stellt bezüglich des numerischen Aufwandes und der Genauigkeit des Ergebnisses der Ventilbewegung eine Kombination aus Feder-Masse-Modellen und FEM-Modellen dar.

*iii:* Schon Nilsson *et al.* (1980) [42] verwendete die Finite-Elemente-Methode zur Untersuchung von ausgewählten Problemstellungen bei der Auslegung von Ventilen, wie die maximal auftretenden Materialspannungen beim Aufschlagen des Ventils auf den Ventilsitz. Durch die Finite-Elemente-Berechnung des Ventils konnte die überlagerte Bewegung sämtlicher Moden und die damit einhergehende „Peitschenhieb“-Bewegung nachgebildet werden, die zu einer signifikant höheren Maximalspannung und damit zu einer deutlich niedrigeren Lebensdauer führt. In der Literatur lassen sich noch etliche weitere Beispiele finden, in denen die Finite-Elemente-Berechnung zur Untersu-

chung der Ventildynamik verwendet wurde (Griner *et al.* (1980) [18], Yoshizumi *et al.* (2014) [64], usw.). Mit steigender Rechnerleistung wurde es schließlich möglich, die Strukturberechnung der Flatterventile mittels Finite-Elemente-Methode mit der CFD-Strömungssimulation zu koppeln und deren gegenseitige Beeinflussung zu berücksichtigen. Beispiele für diese dreidimensionale Fluid-Struktur-Interaktion sind in den Arbeiten von Kim *et al.* (2008) [26], Lang *et al.* (2009) [28], Wu und Wang (2014) [63] sowie Gasche *et al.* (2016) [15] gegeben und stellen den derzeitigen Stand der Technik dar.

# 3 Berechnung der Ventilbewegung mithilfe der Finite-Elemente-Methode

## 3.1 Theoretische Grundlagen der Berechnung von Festkörpern

### 3.1.1 Einleitung

Ziel der Festkörpermechanik ist es, das mechanische Verhalten von festen, verformbaren Körpern unter Einfluss äußerer Belastungen zu beschreiben. Dazu wird ein mathematisches Modell gewählt, das das physikalische Problem in geeigneter Weise wiedergeben kann. Zur Lösung dieser Aufgabe wird die Finite-Elemente-Methode angewendet. Um den physikalischen Zusammenhang zu beschreiben, werden nach Gross *et al.* (2014) [19] stets drei Arten von Gleichungen verwendet:

- Die Gleichgewichtsbedingungen im Inneren (Schnittgrößen) sowie auf der Oberfläche des Körpers
- Die kinematischen Beziehungen (Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehungen)
- Das Elastizitätsgesetz (Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen)

Eine exakte Nachbildung des physikalischen Problems ist in der Regel selbst bei äußerst umfangreichen bzw. genauen Annahmen für das mathematische Modell nicht möglich. Deshalb gilt es zwischen gewünschter Genauigkeit und numerischem Aufwand abzuwiegen.

Das Hauptaugenmerk dieser Arbeit liegt in der Untersuchung sogenannter Flatterventile. Diese druckgesteuerten Ventile haben einen erheblichen Einfluss auf den Wirkungsgrad hermetischer Hubkolbenkompressoren. Zur Untersuchung von Verbesserungspotentialen muss die gegenseitige Beeinflussung von Strömung und Ventilbewegung mittels sogenannter Fluid-Struktur-Interaktionen (FSI) berücksichtigt werden. Die Strukturberechnung kann dabei, wie in Kapitel 2.6 angegeben, sehr einfach durch das Lösen einer Gleichung für einen Feder-Masse-Schwinger oder aber auch mit größerem Aufwand durch eine komplette dreidimensionale Finite-Elemente-Berechnung erfolgen. Für

das Druckventil, das begrenzt durch einen Ventildämpfer nur über einen kurzen Zeitraum geöffnet ist, kann in guter Näherung die vereinfachte Berechnungsmethodik für den Feder-Masse-Schwinger verwendet werden. Das Saugventil hingegen wird während eines Saugtaktes mehrmals geöffnet und wieder geschlossen. Bei der Berechnung der Strömungsverluste bzw. der Ventilbewegung spielt die Neigung des Ventiltellers sowie die beim Aufprall absorbierte Energie eine weitaus größere Rolle. Erkenntnisse aus der Arbeit von Mayer *et al.* (2014) [37] zeigen, dass es zwar prinzipiell möglich wäre, die Saugventilbewegung mit Feder-Masse-Systemen nachzubilden, jedoch müssten die Ventilparameter an vorhandene Messdaten bzw. FE-Berechnungen angepasst werden.

Um die Darstellung zu vereinfachen, werden in den nachfolgenden Kapiteln Indexschreibweisen verwendet, die an dieser Stelle kurz erklärt werden sollen:

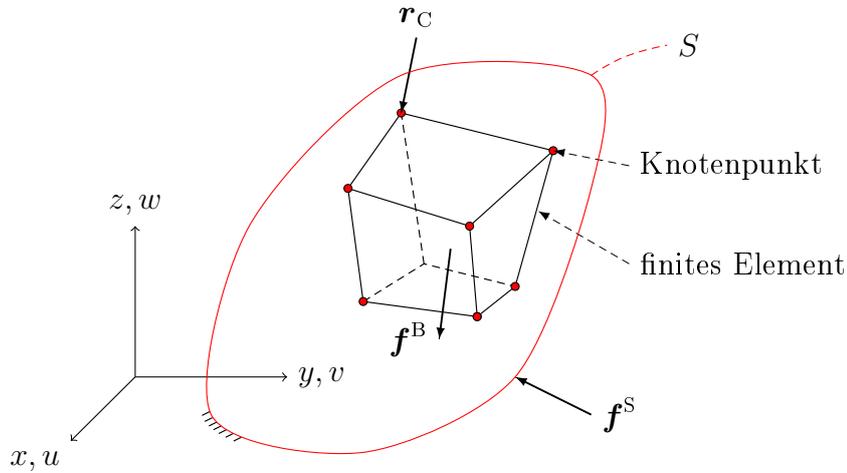
- $f_i$  bezeichnet die  $i$ -te Komponente des Vektors  $\mathbf{f}$ , wobei im Speziellen für Koordinatenachsen und analog für Verschiebungen  $x_1 \equiv x$ ,  $x_2 \equiv y$  sowie  $x_3 \equiv z$  gilt.
- $f_{i,j}$  bezeichnet die Ableitung der  $i$ -ten Komponente des Vektors  $\mathbf{f}$  nach  $j$ .
- ${}^t\mathbf{f}$  bezeichnet den Vektor  $\mathbf{f}$  zum Zeitpunkt  $t$
- $F_{ij}$  bezeichnet den Eintrag der Matrix  $\mathbf{F}$  mit dem Zeilenindex  $i$  und dem Spaltenindex  $j$ .

#### 3.1.2 Formulierung der Bewegungsgleichung

Es sei hier betont, dass dieses Kapitel keineswegs eine ausführliche Herleitung der Bewegungsgleichungen 3.8 bzw. 3.17 zum Ziel hat. Vielmehr soll die allgemeine Vorgehensweise zur Behandlung linearer bzw. nichtlinearer Berechnungsmethoden in der Festigkeitsberechnung gezeigt werden. Die im Folgenden gezeigte Herangehensweise zur Entwicklung dieser Bewegungsgleichungen fasst die in Bathe (2002) [6] beschriebene Methodik zusammen.

##### a) Für kleine Verformungen

Abbildung 3.1 zeigt einen dreidimensionalen, beliebigen Körper, der sich in einem ortsfesten kartesischen Koordinatensystem befindet. Dabei ist  $S$  die Oberfläche des Körpers und  $\mathbf{f}^S$  sind die Oberflächenspannungen. Des Weiteren wirken äußere Lasten wie die Volumenkräfte  $\mathbf{f}^B$  und Einzelkräfte  $\mathbf{r}_C$  auf den Körper ein. Der Körper stelle dabei ein vollkommenes Kontinuum dar. Im Inneren des Körpers muss für jedes infinitesimal kleine Teilvolumen des Körpers das Grundgesetz der Dynamik gelten. Dieses setzt die auf die Oberflächen des Teilvolumens wirkenden Spannungen  $\tau_{ij}$ , die örtlichen Volumenkräfte  $f_i^B$  und die Trägheitskräfte  $dm a_i$  in Beziehung (Parkus, 1966 [45]). Für das



**Bild 3.1:** Beliebiger dreidimensionaler Körper (Bathe, 2002 [6])

in Abbildung 3.2 gezeigte Volumenelement kann das Kräftegleichgewicht in  $x$ -Richtung geschrieben werden als:<sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \rightarrow x : \quad & \left( \tau_{xx} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} dx \right) dy dz - \tau_{xx} dy dz + \left( \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} dy \right) dx dz - \tau_{yx} dx dz \\ & + \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} dz \right) dx dy - \tau_{zx} dx dy + f_x^B dx dy dz = dm a_x . \end{aligned} \quad (3.1)$$

Für das Kräftegleichgewicht in  $y$ - und  $z$ -Richtung kann analog vorgegangen werden. Nach Division durch das Volumen  $dV = dx dy dz$ , wobei  $dV > 0$  gefordert wird, sowie nach Grenzübergang  $dV \rightarrow 0$  kann das Gleichgewicht in Indexschreibweise wie folgt angegeben werden:

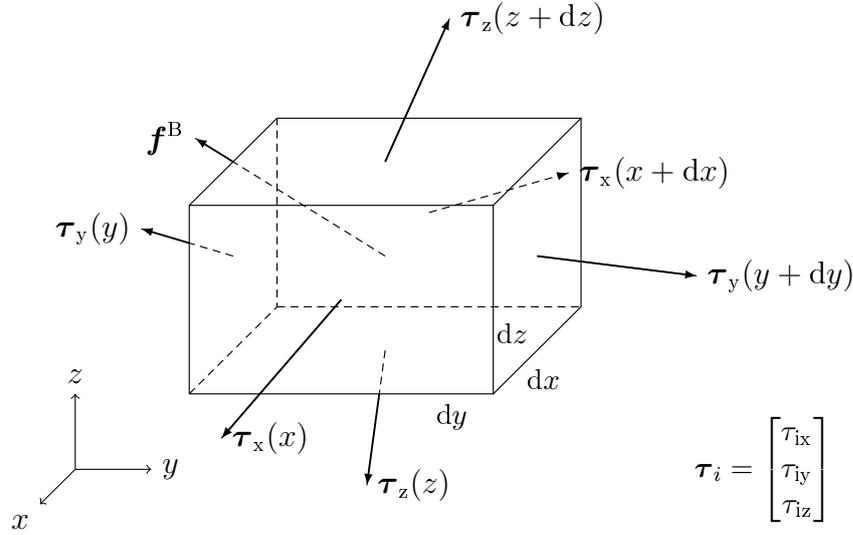
$$\tau_{j,i,j} + f_i^B = \rho a_i . \quad (3.2)$$

Unter Verwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen kann Gleichung 3.2 geschrieben werden als:

$$\int_V (\tau_{j,i,j} + f_i^B - \rho a_i) \delta u_i dV = 0 . \quad (3.3)$$

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen besagt, dass sich ein Körper unter Einwirkung äußerer Kräfte nur dann im Gleichgewicht befindet, wenn bei einer beliebigen virtuellen Verschiebung  $\delta u$  aus der aktuellen Lage heraus die Summe der virtuellen Arbeiten gleich null ist. Das heißt, dass die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte gleich

<sup>1</sup> Annahme: auf Oberfläche wirken vorerst keine Einzelkräfte  $r_C$ .



**Bild 3.2:** Volumenelement im rechtwinkligen kartesischen Koordinatensystem (Parkus, 1966 [45])

der Summe aus der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte und der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte sein muss (Bathe, 2002 [6]). Gleichung 3.3 geht mithilfe der mathematischen Identität über in:

$$\int_V \left[ (\tau_{ji} \delta u_i)_{,j} - \tau_{ji} \delta u_{i,j} + f_i^B \delta u_i - \rho a_i \delta u_i \right] dV = 0. \quad (3.4)$$

Nach Anwendung des Gaußschen Integralsatzes<sup>2</sup> und Berücksichtigung der Symmetrie des Spannungstensors  $\tau_{ji} = \tau_{ij}$  folgt:

$$\int_V (-\tau_{ij} \delta u_{i,j} + f_i^B \delta u_i - \rho a_i \delta u_i) dV + \int_S (\tau_{ij} \delta u_i) n_j dS = 0. \quad (3.5)$$

Die örtlichen Oberflächenspannungen  $f_i^S$  und die Spannungen  $\tau_{ji}$  können mithilfe des Cauchyschen Fundamentaltheorems (siehe Abbildung 3.3) ins Gleichgewicht gesetzt werden, wobei  $n_j$  die Komponenten des nach außen zeigenden Flächennormalenvektors sind (Parkus, 1966 [45]):

$$\tau_{ji} n_j = f_i^S. \quad (3.6)$$

Nach Einsetzen der äußeren Gleichgewichtsbedingung 3.6 ergibt sich:

$$\int_V (-\tau_{ij} \delta u_{i,j} + f_i^B \delta u_i - \rho a_i \delta u_i) dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS = 0. \quad (3.7)$$

<sup>2</sup>  $\int_V F_{i,i} dV = \int_S \mathbf{F} \mathbf{n} dS$ .

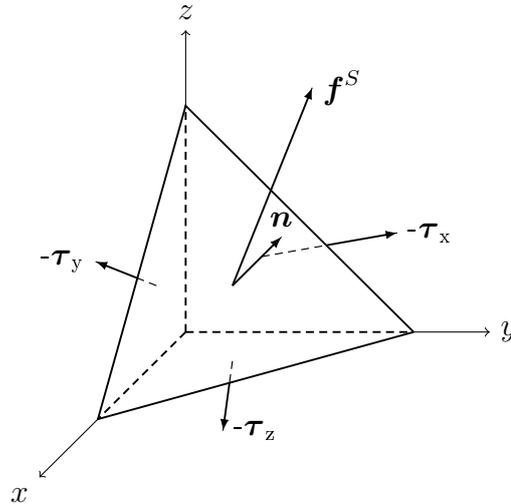


Bild 3.3: Cauchyscher Tetraeder (Parkus, 1966 [45])

Da bisher noch keine Einschränkungen bezüglich der Größe der Verformungen oder des Materials gemacht wurden, besitzen oben genannte Gleichungen allgemeine Gültigkeit. Unter der Annahme kleiner Verzerrungen (auf die sich diese Arbeit hier beschränkt) kann die linearisierte Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung  $\delta\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})$  verwendet werden und es folgt:

$$-\int_V \tau_{ij} \delta\epsilon_{ij} dV + \int_V f_i^B \delta u_i dV + \int_S f_i^S \delta u_i dS - \int_V \rho a_i \delta u_i dV = 0. \quad (3.8)$$

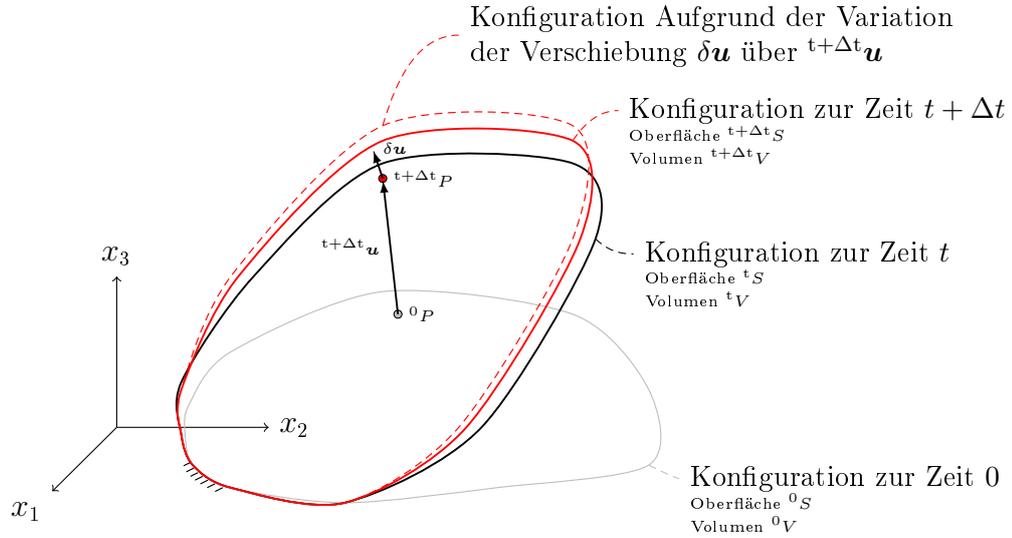
In der Gleichgewichtsbedingung 3.3 kommen noch die Ableitungen der Spannungen vor, in der Formulierung 3.8 jedoch nur mehr die Spannungen selbst. Mit dieser Vorgehensweise konnte somit die differentielle Ordnung des Systems um eine Ordnung verringert werden.

Nach Einführung der konstitutiven Beziehung  $\tau_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl}$  kann Gleichung 3.8 in Tensor Schreibweise wie folgt geschrieben werden:

$$\underbrace{-\int_V \delta\boldsymbol{\epsilon}^T \mathbf{C} \boldsymbol{\epsilon} dV}_{\text{virt. Arbeit innerer Kräfte}} + \underbrace{\int_V \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}^B dV + \int_S \delta\mathbf{u}^T \mathbf{f}^S dS}_{\text{virt. Arbeit äußerer Kräfte}} - \underbrace{\int_V \delta\mathbf{u}^T \rho \mathbf{a} dV}_{\text{virt. Arbeit Trägheitskräfte}} = 0. \quad (3.9)$$

## b) Für große Verformungen

Abbildung 3.4 zeigt die Bewegung eines beliebigen Körpers in einem stationären, kartesischen Koordinatensystem, wobei angenommen wird, dass der Körper großen Verformungen unterliegt und mit einer nichtlinearen Antwort reagiert. Die äußeren Lasten enthalten dabei zeitabhängige Terme (z.B.: Kontakt, Massenträgheit, usw.), womit die



**Bild 3.4:** Beliebig geformter dreidimensionaler Körper unter großen Verformungen (Bathe, 2002 [6])

Gleichgewichtsbeziehungen für den gesamten untersuchten Zeitbereich gelöst werden müssen. Dies kann effektiv mit einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Lösung erfolgen, wobei die Gleichgewichtsbeziehung für die jeweilige verformte Geometrie erfüllt werden muss. Angewendet auf das in Abbildung 3.4 skizzierte Problem kann das Gleichgewicht des Körpers zur Zeit  $t + \Delta t$  mit Hilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen in der inkrementellen Lagrangeschen Formulierung ausgedrückt werden als:

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{ij} \delta {}^{t+\Delta t} \epsilon_{ij} d {}^{t+\Delta t} V = {}^{t+\Delta t} R ,$$

$${}^{t+\Delta t} R = \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} f_i^B \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V + \int_{t+\Delta t S} {}^{t+\Delta t} f_i^S \delta u_i d {}^{t+\Delta t} S \quad (3.10)$$

$$- \int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \rho {}^{t+\Delta t} \ddot{u}_i \delta u_i d {}^{t+\Delta t} V .$$

Der erste Term in Gleichung 3.10 stellt die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte dar und der Term  ${}^{t+\Delta t} R$  fasst die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte zusammen. Analog zur linearen Berechnung wurde Gleichung 3.10 unter Annahme infinitesimal kleiner Verschiebungen aufgestellt. Das heißt, diese Beziehung wurde wie Gleichung 3.8 mit den Annahmen der linearen Berechnungsmethodik approximiert, nur wurde das Gleichgewicht nicht für die Ausgangskonfiguration, sondern für den deformierten Körper zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  aufgestellt. Generell ergibt sich beim Lösen von Gleichung

3.10 die Schwierigkeit, dass der Zustand des Körpers zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  nicht bekannt ist. Des Weiteren erhält man die Cauchyschen Spannungen  ${}^{t+\Delta t}\tau_{ij}$  nicht einfach, indem man den Spannungen zum Zeitpunkt  $t$  einen Spannungszuwachs addiert, da sich der Cauchysche Spannungstensor auch bei einer reinen Starrkörperdrehung verändern würde. Zur Abhilfe dieser Probleme führt die Verwendung geeigneter Spannungs- und Verzerrungsmaße sowie Materialbeziehungen. Ihr Ziel ist es, die innere virtuelle Arbeit in Gleichung 3.10 in Form eines Integrals über ein bekanntes Volumen auszudrücken und somit eine effektive, inkrementelle Zerlegung der Verzerrungen und Spannungen zu ermöglichen. Es gibt zwar mehrere mögliche Spannungs- und Verzerrungstensoren, die im Prinzip angewendet werden könnten, jedoch finden in dieser Arbeit nur der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor in Anlehnung an Bathe (2002) [6] Anwendung.

Um die Verformung eines Körpers zur Zeit  $t$  zu beschreiben, kann der Deformationsgradient  ${}^t_0\mathbf{X}$  wie folgt definiert werden:

$${}^t_0\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_1}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_2}{\partial^0 x_3} \\ \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_1} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_2} & \frac{\partial^t x_3}{\partial^0 x_3} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Eine der wichtigsten Eigenschaften des Deformationsgradienten ist seine Zerlegbarkeit in eine symmetrische Streckmatrix  ${}^t_0\mathbf{U}$  und eine orthogonale Drehmatrix  ${}^t_0\mathbf{R}$ . Damit kann die gesamte Verformung auch als eine Streckung, der danach eine Drehbewegung folgt, aufgefasst werden:

$${}^t_0\mathbf{X} = {}^t_0\mathbf{R} {}^t_0\mathbf{U}. \quad (3.12)$$

Ein wichtiges Merkmal von  ${}^t_0\mathbf{U}$  ist dabei die Unabhängigkeit gegenüber Starrkörperdrehungen. Mit der Streckmatrix  ${}^t_0\mathbf{U}$  bzw. mit dem Deformationstensor  ${}^t_0\mathbf{X}$  kann der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor  ${}^t_0\tilde{\boldsymbol{\epsilon}}$  laut Bathe (2002) [6] definiert werden als:

$$\begin{aligned} {}^t_0\tilde{\boldsymbol{\epsilon}} &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{U} {}^t_0\mathbf{U} - \mathbf{I}) \\ &= \frac{1}{2} ({}^t_0\mathbf{X}^T {}^t_0\mathbf{X} - \mathbf{I}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Der zum Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor passende Spannungstensor ist der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor  ${}^t_0\mathbf{S}$ , der in Abhängigkeit des Deformationsgradienten wie folgt definiert ist:

$${}^t_0\mathbf{S} = {}^t_0\mathbf{X} {}^t\boldsymbol{\tau} {}^t_0\mathbf{X}^T. \quad (3.14)$$

Beide vorhin definierten Tensoren, der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor und der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor, sind invariant gegenüber einer Starrkörpertranslation sowie einer Starrkörperdrehung. Diese Eigenschaft ist essentiell und

soll hiermit nochmals hervorgehoben werden. Ausgehend von einem stationär bleibenden rechtwinkligen Koordinatensystem kann Gleichung 3.10 unter Verwendung des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors und des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors auch geschrieben werden als (Bathe, 2002 [6]):

$$\int_{t+\Delta t V} {}^{t+\Delta t} \tau_{kl} \delta_{t+\Delta t} \epsilon_{kl} d^{t+\Delta t} V = \int_{{}^0 V} {}^{t+\Delta t} S_{ij} \delta^{t+\Delta t} \tilde{\epsilon}_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R. \quad (3.15)$$

Ein wichtiger Aspekt ist, dass die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte jetzt nicht mehr auf das Volumen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , sondern auf das bekannte Ausgangsvolumen  ${}^0 V$  bezogen wird. Es ist nicht zwingend, sich auf die Ausgangskonfiguration zu beziehen, genauso gut könnte auch eine bekannte Konfiguration zu einem anderen Zeitpunkt verwendet werden. Dies führt dazu, dass laut Bathe (2002) [6] im Allgemeinen zwei Formulierungen Anwendung finden: die totale Lagrangesche (TL) und die fortgeschriebene Lagrangesche (FL) Formulierung. Diese unterscheiden sich dadurch, dass sich die TL-Formulierung auf den Ausgangszustand und die FL-Formulierung auf den Zustand des vorherigen Zeitschrittes beziehen. In weiterer Folge wird hier nur mehr die TL-Formulierung verwendet.

Um die in Gleichung 3.15 gegebene nichtlineare Beziehung zu lösen, müssen die Spannungen und Verzerrungen zuerst inkrementell zerlegt und anschließend die Gleichgewichtsbeziehung um den Zustand zur Zeit  $t + \Delta t$  linearisiert werden. Mit der inkrementellen Zerlegung der Form  ${}^{t+\Delta t} \psi_{ij} = {}^t \psi_{ij} + {}_0 \psi_{ij}$ , wobei  $\psi$  für eine beliebige Größe (Spannung, Verzerrung, Verschiebung) steht, und der Zerlegung der inkrementellen Verzerrungen  ${}_0 \tilde{\epsilon}_{ij}$  in einen linearen  ${}_0 \tilde{\xi}_{ij}$  und nichtlinearen Anteil  ${}_0 \tilde{\eta}_{ij}$  kann Gleichung 3.15 geschrieben werden als:

$$\int_{{}^0 V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \tilde{\epsilon}_{ij} d^0 V + \int_{{}^0 V} {}^t S_{ij} \delta_0 \tilde{\eta}_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{{}^0 V} {}^t S_{ij} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0 V. \quad (3.16)$$

Der einzige noch nichtlineare Term in den inkrementellen Verschiebungen ist  ${}_0 S_{ij} \delta_0 \tilde{\epsilon}_{ij}$ , der mittels der Taylorsche Reihenentwicklung<sup>3</sup> linearisiert werden kann. Dies führt letztendlich zu:

$$\int_{{}^0 V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 \tilde{\xi}_{rs} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0 V + \int_{{}^0 V} {}^t S_{ij} \delta_0 \tilde{\eta}_{ij} d^0 V = {}^{t+\Delta t} R - \int_{{}^0 V} {}^t S_{ij} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0 V. \quad (3.17)$$

Da Gleichung 3.17 nur eine linearisierte Näherungslösung für den Zeitpunkt  $t + \Delta t$  ausgehend vom Zustand  $t$  liefert, kann der dabei auftretende Fehler teilweise signifikant werden. Um diesen Fehler möglichst gering zu halten, muss ein iteratives Lösungsverfahren angewendet werden. Gleichung 3.17 kann nun dazu verwendet werden, den inkrementellen Zuwachs der Verschiebungen  $\Delta u_i^{(i)}$  zu berechnen und damit neue Näherungslösungen für die Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen zur Zeit

---

<sup>3</sup>  $\int_{{}^0 V} {}_0 S_{ij} \delta_0 \tilde{\epsilon}_{ij} d^0 V \doteq \int_{{}^0 V} {}_0 C_{ijrs} {}_0 \tilde{\xi}_{rs} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0 V$  - Bathe (2002) [6].

$t + \Delta t$  zum Iterationsschritt (i) zu erhalten. Dabei wird solange iteriert, bis der Verschiebungszuwachs so klein wird, dass er vernachlässigbar wird. Ein solches, iteratives Lösungsverfahren ist in Kapitel 3.1.7 näher beschrieben.

In Gleichung 3.17 können äußere Lasten, die ihre Richtung nicht ändern, ermittelt werden, indem man das Integral nicht an der verformten Konfiguration, sondern an der Ausgangskonfiguration ansetzt. Somit lässt sich die Massenmatrix bei einer kinematischen Berechnung schon vor der inkrementellen Lösung der Bewegungsgleichung aufstellen. Für äußere Lasten, die ihre Richtung nicht beibehalten, wird unter Inkaufnahme geringer Ungenauigkeiten über das Volumen bzw. die Fläche integriert, die im letzten Iterationsschritt berechnet wurde.

### 3.1.3 Finite-Elemente-Methode

In Kapitel 3.1.2 wurden die Bewegungsgleichungen sowohl für den linearen als auch für den nichtlinearen Fall mithilfe des Prinzips der virtuellen Verschiebungen aufgestellt. Da im Allgemeinen sowohl die Randbedingungen als auch die Geometrie des Körpers beliebig sein können, führt eine analytische Lösung nur in Sonderfällen zum Ziel. Bei zunehmenden Komplexitätsgraden können diese Gleichungen letztendlich nur noch numerisch gelöst werden. Dieses Kapitel soll nun mithilfe der Finite-Elemente-Methode einen Lösungsansatz dieser rein verschiebungsbasierten Gleichungen liefern.

Bei einer Finite-Elemente-Berechnung wird der zu untersuchende Körper durch gedachte Linien und Flächen in finite Elemente unterteilt. Diese Elemente sind dabei an den Knotenpunkten auf den Elementgrenzen miteinander verbunden. Des Weiteren wird angenommen, dass alle angreifenden äußeren Lasten oder aber auch Kräfte aufgrund innerer Spannungen nur mehr an den Knotenpunkten übertragen werden.

Die Notation und die Vorgehensweise zur Herleitung der globalen Massenmatrix, der globalen Steifigkeitsmatrix sowie der globalen Lastvektoren in diesem Unterkapitel basieren auf Celigoj und Schmidt (1998) [11]. Für weiterführende Informationen sei hierauf verwiesen.

Das Verschiebungsfeld innerhalb eines jeden Elementes ( $m$ ), das man in der Regel in einem lokalen Koordinatensystem misst, wird durch geeignete Ansatzfunktionen angenähert:

$$\hat{\mathbf{u}}_{(x,y,z)}^{(m)} = \mathbf{H}_{(x,y,z)}^{(m)} \mathbf{u} . \quad (3.18)$$

Dabei ist  $\mathbf{H}^{(m)}$  die Matrix der Ansatzfunktionen, die die Beziehung zwischen den globalen Verschiebungen  $\mathbf{u}$  und den lokalen Verschiebungen  $\hat{\mathbf{u}}_{(x,y,z)}^{(m)}$  herstellt. Der Index  $m$  bezeichnet dabei das  $m$ -te Element. Grundsätzlich kann der Körper durch Elemente unterschiedlichster Geometrie und Knotenanzahl approximiert werden, es dürfen zwischen den Elementen jedoch keinerlei Lücken entstehen.

Ausgehend von der Gleichgewichtsbeziehung 3.9 können unter Verwendung der linearen Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung die Verzerrungen  $\boldsymbol{\epsilon}^{(m)}$  im Element als Funktion

der Knotenpunktverschiebungen wie folgt geschrieben werden:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(x,y,z)}^{(m)} = \mathbf{D} \hat{\mathbf{u}}_{(x,y,z)}^{(m)} . \quad (3.19)$$

Dabei ist  $\mathbf{D}$  die Differentialoperatormatrix und durch Einsetzen von Gleichung 3.18 ergibt sich:

$$\boldsymbol{\epsilon}_{(x,y,z)}^{(m)} = \underbrace{\mathbf{D} \mathbf{H}_{(x,y,z)}^{(m)}}_{\mathbf{B}_{(x,y,z)}^{(m)}} \mathbf{u} . \quad (3.20)$$

$\mathbf{B}_{(x,y,z)}^{(m)}$  ist dabei die Verzerrungs-Verschiebungs-Matrix. Analog kann für die Beziehungen zwischen Verzerrungen und Knotenpunktverschiebungen bzw. Elementverschiebungen und Knotenpunktverschiebungen für virtuelle Größen  $\delta\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\delta\hat{\mathbf{u}}$  Folgendes geschrieben werden:

$$\delta\boldsymbol{\epsilon}_{(x,y,z)}^{(m)} = \mathbf{B}_{(x,y,z)}^{(m)} \delta\mathbf{u} , \quad \delta\hat{\mathbf{u}}_{(x,y,z)}^{(m)} = \mathbf{H}_{(x,y,z)}^{(m)} \delta\mathbf{u} . \quad (3.21)$$

Des Weiteren können die Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen unter der Annahme eines linear-elastischen Materials für das  $m$ -te Element angegeben werden mit:

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{C}^{(m)} \boldsymbol{\epsilon}^{(m)} . \quad (3.22)$$

$\mathbf{C}^{(m)}$  ist dabei die Elastizitätsmatrix des  $m$ -ten Elements und wird in Kapitel 3.1.5 näher behandelt.

Die Gleichgewichtsbeziehungen aus Kapitel 3.1.2 für die gesamte Gruppierung von finiten Elementen können nun unter Verwendung der Gleichungen 3.21 und 3.22 sowie mithilfe der sogenannten direkten Steifigkeitsmethode als Summe von Integralen über das Volumen bzw. die Flächen aller finiten Elemente geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \delta\mathbf{u}^T \left( \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right) \mathbf{u} = \\ \delta\mathbf{u}^T \left( \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^B{}^{(m)} dV^{(m)} \right. \\ \left. + \sum_m \int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^S{}^{(m)} dS^{(m)} + \mathbf{r}_C \right) \\ - \delta\mathbf{u}^T \left( \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)} \right) \ddot{\mathbf{u}} . \end{aligned} \quad (3.23)$$

Der virtuelle Knotenverschiebungsvektor  $\delta\mathbf{u}$ , der globale Knotenverschiebungsvektor  $\mathbf{u}$  bzw. seine zeitliche Ableitung sind dabei aus den Summenzeichen herausgezogen, da sie unabhängig vom Element  $m$  sind. Die einzelnen Terme in Gleichung 3.23

können nun als globale Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$ , globale Massenmatrix  $\mathbf{M}$  und globale Lastvektoren aufgrund der Element-Volumenkräfte  $\mathbf{f}^{\text{B}(m)}$  bzw. aufgrund der Element-Oberflächenkräfte  $\mathbf{f}^{\text{S}(m)}$  als Summe der jeweiligen Elementbeiträge zusammengefasst werden:

$$\mathbf{K} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)\text{T}} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} \text{d}V^{(m)}}_{=\mathbf{K}^{(m)}}, \quad (3.24)$$

$$\mathbf{r}_\text{B} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)\text{T}} \mathbf{f}^{\text{B}(m)} \text{d}V^{(m)}}_{=\mathbf{r}_\text{B}^{(m)}}, \quad (3.25)$$

$$\mathbf{r}_\text{S} = \sum_m \underbrace{\int_{S^{(m)}} \mathbf{H}^{\text{S}(m)\text{T}} \mathbf{f}^{\text{S}(m)} \text{d}S^{(m)}}_{=\mathbf{r}_\text{S}^{(m)}}, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{M} = \sum_m \underbrace{\int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)\text{T}} \mathbf{H}^{(m)} \text{d}V^{(m)}}_{=\mathbf{M}^{(m)}}. \quad (3.27)$$

Gleichung 3.23 kann nun recht kompakt geschrieben werden:

$$\delta \mathbf{u}^\text{T} \left( \mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} - \underbrace{\mathbf{r}_\text{B} - \mathbf{r}_\text{S} - \mathbf{r}_\text{C}}_{=\mathbf{r}} \right) = \mathbf{0}. \quad (3.28)$$

Wie in Kapitel 3.1.2 erwähnt, muss obige Gleichung für beliebige virtuelle Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  Gültigkeit besitzen, was nur der Fall ist, wenn der Klammerausdruck verschwindet. Somit kann das zu lösende Gleichungssystem geschrieben werden als:

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{r}. \quad (3.29)$$

Gleichung 3.29 entspricht der allgemeinen Bewegungsgleichung verschiebungsbezogener Kontinuums-elemente bei Anwendung der linearen Berechnungsmethodik. Analoge Vorgehensweise gilt auch für den nichtlinearen Fall. Ausgehend von Gleichung 3.17 wird dabei die Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}$  durch einen linearen  ${}^t_0\mathbf{K}_\text{L}$  und einen nichtlinearen Anteil  ${}^t_0\mathbf{K}_\text{NL}$  ausgedrückt (Bathe, 2002, [6]):

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}_0 \ddot{\mathbf{u}} + ({}^t_0\mathbf{K}_\text{L} + {}^t_0\mathbf{K}_\text{NL}) \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}_0 \mathbf{r} - {}^t_0 \mathbf{f}. \quad (3.30)$$

Durch die Interpolationsfunktionen können die einzelnen Integrale der nichtlinearen Gleichung nun wie folgt als Summe von den Elementbeiträgen in Matrixschreibweise ausgedrückt werden (Bathe, 2002, [6]):

$$\begin{aligned}
 \int_{{}^0V} {}^0C_{ijrs} \tilde{\xi}_{rs} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0V &\rightarrow {}^t_0 \mathbf{K}_L \mathbf{u} = \left( \sum_m \int_{{}^0V^{(m)}} {}^t_0 \mathbf{B}_L^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} {}^t_0 \mathbf{B}_L^{(m)} d^0V^{(m)} \right) \mathbf{u} , \\
 \int_{{}^0V} {}^t_0 S_{ij} \delta_0 \tilde{\eta}_{ij} d^0V &\rightarrow {}^t_0 \mathbf{K}_{NL} \mathbf{u} = \left( \sum_m \int_{{}^0V^{(m)}} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL}^{(m)T} {}^t_0 \mathbf{S}^{(m)} {}^t_0 \mathbf{B}_{NL}^{(m)} d^0V^{(m)} \right) \mathbf{u} , \\
 \int_{{}^0V} {}^t_0 S_{ij} \delta_0 \tilde{\xi}_{ij} d^0V &\rightarrow {}^t_0 \mathbf{f} = \sum_m \int_{{}^0V^{(m)}} {}^t_0 \mathbf{B}_L^{(m)T} {}^t_0 \hat{\mathbf{S}}^{(m)} d^0V^{(m)} .
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

Die weitere Vorgehensweise für die Auswertung der Matrizen kann in Appendix E nachgelesen werden.

### 3.1.4 Isoparametrische finite Elemente

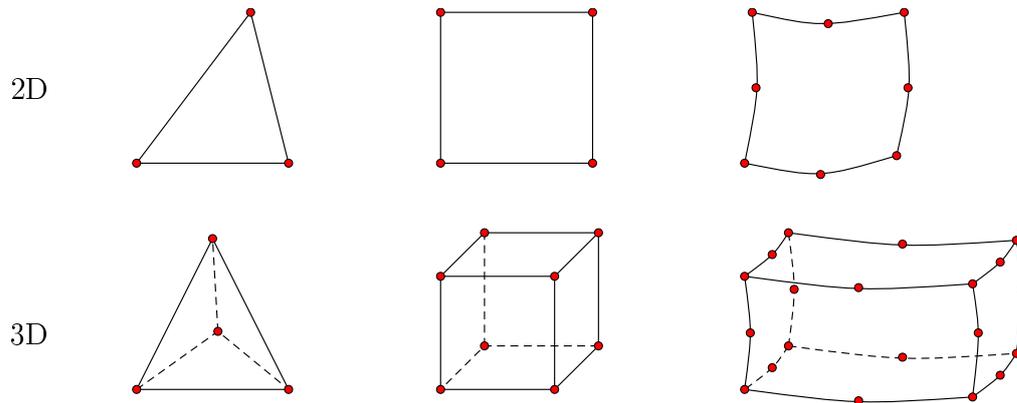
Das Besondere an den isoparametrischen Elementen ist, dass die Interpolation der Elementkoordinaten und der Elementverschiebungen mit denselben Ansatzfunktionen durchgeführt werden. Dadurch erreicht man, dass die Elementverschiebungen in einem beliebigen Punkt in direkten Zusammenhang zu den Elementknotenpunktverschiebungen stehen. Die Interpolationsfunktionen sind dabei nicht im globalen  $(x, y, z)$ , sondern in einem natürlichen  $(r, s, t)$  Koordinatensystem festgelegt.

Die Koordinateninterpolationen für beliebige dreidimensionale Elemente mit den Interpolationsfunktionen  $h_k$ , wobei  $k$  für den repräsentierten Knotenpunkt steht, können geschrieben werden als (Bathe, 2002, [6]):

$$x = \sum_{k=1}^N h_k x_k; \quad y = \sum_{k=1}^N h_k y_k; \quad z = \sum_{k=1}^N h_k z_k . \tag{3.32}$$

Abbildung 3.5 zeigt einige typische Kontinuums-elemente, die in Finite-Elemente-Berechnungen eingesetzt werden. Deren Interpolationsfunktionen können grundsätzlich zwar willkürlich gewählt werden, um jedoch brauchbare Ergebnisse erzielen zu können, müssen gewisse Anforderungen erfüllt werden (Bathe, 2002 [6]):

- Exakte Abbildung von Starrkörperbewegungen und konstanten Spannungszuständen müssen möglich sein
- Erfüllung der Kompatibilitätsbedingungen (es dürfen keine Lücken zwischen den verformten Elementen klaffen)
- Es sind nur stetige Funktionen physikalisch sinnvoll



**Bild 3.5:** Beispiele einiger Kontinuumselemente (Bathe, 2002 [6])

Die wichtigste Eigenschaft dieser Ansatzfunktionen ist, dass sie im natürlichen Koordinatensystem am Knoten  $k$  den Wert 1 und an allen anderen den Wert 0 besitzen. Für ein eindimensionales Drei-Knoten-Stabelement könnten somit Interpolationsfunktionen gefunden werden, die höchstens zweiter Ordnung sind. Natürlich gäbe es unzählige Alternativen höherer Ordnung, die aber numerisch aufwändiger wären.

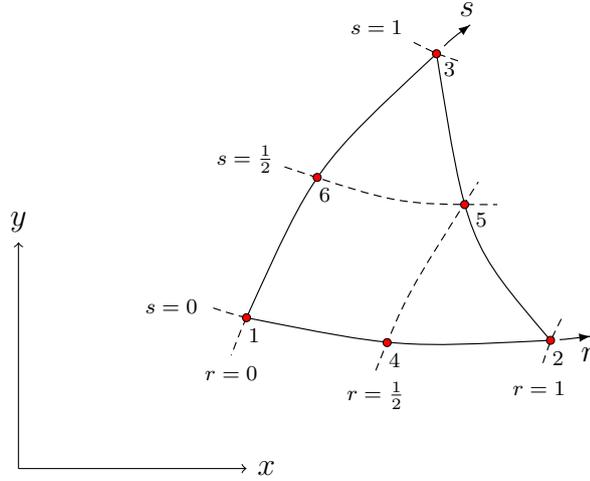
Die Interpolationsfunktionen sind im Allgemeinen Funktionen der natürlichen Koordinaten  $r$ ,  $s$  und  $t$ . Beispielsweise enthalten die Interpolationsfunktionen eines isoparametrischen Dreieckselementes zweiter Ordnung (siehe Abbildung 3.6) die Variablen  $r$  und  $s$ , die jeweils von 0 bis 1 laufen. Die Knotenpunkte 4 bis 6 werden dabei so gelegt, dass sie die Seiten des Dreiecks genau halbieren. Ebenfalls erwähnenswert ist, dass die Ränder finiter Elemente höherer Ordnung durch die Verwendung natürlicher Koordinaten auch ohne weiteres gekrümmt sein können, was bei Elementen mit generalisierten Koordinaten nicht der Fall ist (Bathe, 2002, [6]).

Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, werden die Interpolationsfunktionen nicht nur für die Näherung der Geometrie, sondern auch für die Interpolation der Verschiebungen verwendet:

$$u = \sum_{k=1}^N h_k u_k; \quad v = \sum_{k=1}^N h_k v_k; \quad w = \sum_{k=1}^N h_k w_k. \quad (3.33)$$

Das weitere Ziel ist, die im vorhergehenden Kapitel beschriebenen Matrizen als Funktionen natürlicher Koordinaten auszudrücken. Beispielsweise enthalten die Elementverzerrungen die Ableitungen  $\frac{\partial}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial}{\partial y}$  und  $\frac{\partial}{\partial z}$ . Um diese im natürlichen Koordinatensystem auszudrücken, wird der inverse Jacobi-Operator  $\mathbf{J}^{-1}$  verwendet (Krishnamoorthy, 2007, [27]):

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{J}^{-1} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3.34)$$



**Bild 3.6:** Koordinatensystem und Punkte eines Dreieck-Elementes zweiter Ordnung (Bathe, 2002 [6])

Die Jacobi-Matrix  $\mathbf{J}$  ist dabei definiert als:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} \\ \frac{\partial}{\partial s} \\ \frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} & \frac{\partial z}{\partial t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}}_{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}} . \quad (3.35)$$

Nach Anwendung von Gleichung 3.33 und 3.34 auf die Elementverzerrungsmatrix sind dessen Elemente Funktionen natürlicher Koordinaten. Somit kann die Elementsteifigkeitsmatrix geschrieben werden als:

$$\mathbf{K}^{(m)} = \int_{V_{(x,y,z)}^{(m)}} \mathbf{B}_{(r,s,t)}^{(m)\top} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}_{(r,s,t)}^{(m)} dV_{(x,y,z)}^{(m)} . \quad (3.36)$$

Der Zusammenhang zwischen den Elementvolumina ausgedrückt in globalen Koordinaten bzw. in natürlichen Koordinaten wird durch die Determinante der Jacobi-Matrix hergestellt. Damit kann das Volumendifferential  $dV$  bzw. Gleichung 3.36 geschrieben werden als (Krishnamoorthy, 2007, [27]):

$$dV = dx dy dz = \det \mathbf{J} dr ds dt , \quad (3.37)$$

$$\mathbf{K}^{(m)} = \int_r \int_s \int_t \mathbf{B}_{(r,s,t)}^{(m)\top} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}_{(r,s,t)}^{(m)} \det \mathbf{J} dr ds dt . \quad (3.38)$$

Mit der eben gezeigten Vorgehensweise kann die Auswertung der in Kapitel 3.1.3 genannten Volumen- und Flächenintegrale durch Integration über die natürlichen Koordinaten erfolgen (siehe Kapitel 3.2.4).

### 3.1.5 Materialgesetz

Um die im Kapitel 3.1.2 beschriebene Gleichgewichtsbeziehung tatsächlich lösen zu können, müssen zusätzlich konstitutive Beziehungen berücksichtigt werden. Viele im Maschinenbau verwendete Materialien verhalten sich unter Einhaltung bestimmter Grenzwerte für Spannungen und den damit hervorgerufenen Verzerrungen in guter Näherung elastisch. Diese Arbeit wird sich auf solche Materialien begrenzen. Des Weiteren sei hier der Einfluss thermisch induzierter mechanischer Spannungen nicht berücksichtigt (Mang und Hofstetter, 2013 [34]).

Das für kleine Verzerrungen geltende lineare Materialgesetz kann unter Verwendung des Elastizitätstensors  $C_{ijrs}$  geschrieben werden als (Bathe, 2002 [6]):

$$\tau_{ij} = C_{ijrs} \epsilon_{rs} . \quad (3.39)$$

Da kleine Verzerrungen aber nicht gleichbedeutend mit kleinen Verschiebungen oder kleinen Drehungen sind, können für große Starrkörperbewegungen die konstitutiven Beziehungen auch mithilfe des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor und dem Green-Lagrangeschen Verzerrungstensor wie folgt angegeben werden (Bathe, 2002 [6]):

$${}^t_0S_{ij} = {}^t_0C_{ijrs} {}^t\tilde{\epsilon}_{rs} . \quad (3.40)$$

Vorraussetzung für die Zulässigkeit dieser Vorgehensweise ist die Invarianz des zweiten Piola-Kirchhoffschen Spannungstensors und des Green-Lagrangeschen Verzerrungstensors gegenüber reiner Starrkörpertranslation oder -rotation (Bathe, 2002 [6]). Damit verändern sich die Komponenten des Spannungstensors tatsächlich nur bei einer Verzerrung des Materials. Bei großen Verschiebungen und großen Drehungen aber jedoch kleinen Verzerrungen, ist die Formulierung in Gleichung 3.40 somit dem Hookeschen Gesetz gleichwertig (Mang und Hofstetter, 2013 [34]). Der Elastizitätstensor  ${}^t_0C_{ijrs}$  entspricht dabei einem Tensor vierter Stufe und ist unter Annahme linearer und isotroper Materialeigenschaften konstant, wobei dessen Komponenten von nur zwei Materialkonstanten abhängig sind (Malvern, 1969 [33]):

$${}^t_0C_{ijrs} = \lambda \delta_{ij} \delta_{rs} + \mu(\delta_{ir} \delta_{js} + \delta_{is} \delta_{jr}) . \quad (3.41)$$

Dabei sind die Lameschen Konstanten  $\lambda$  und  $\mu$  sowie das Kronecker-Delta  $\delta_{ij}$  definiert durch:

$$\lambda = \frac{E \nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}; \quad \mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0; & i \neq j \\ 1; & i = j \end{cases} . \quad (3.42)$$

### 3.1.6 Ansatz zur Lösung der Bewegungsgleichung in dynamischen Berechnungen

In allgemeiner Form kann die Bewegungsgleichung für eine Gruppierung von finiten Elementen geschrieben werden als:

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{r} . \quad (3.43)$$

Durch Vernachlässigung des Dämpfungsterms  $\mathbf{D}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}}$  würde diese Beziehung in die schon genannte Gleichung 3.29 übergehen. Im mathematischen Sinne stellt diese Gleichung ein System nichtlinearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung dar. Zur Lösung dieses Systems eignen sich besonders direkte Integrationsmethoden wie die Newmark-Methode. Bei dieser Methode beruht die Lösung von  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$  auf der Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$ , weshalb dieses Verfahren auch zur Gruppe der impliziten Integrationsmethoden zählt. Ein Vorteil gegenüber expliziter Verfahren ist, dass sie ein unbedingt stabiles Integrationsschemata darstellen und somit nicht auf sehr kleine Zeitschritte angewiesen sind. Die Newmark-Methode stellt im Wesentlichen eine Erweiterung der linearen Beschleunigungsmethode dar und geht von den folgenden Annahmen aus (Bathe, 2002 [6]):

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = {}^t \dot{\mathbf{u}} + [(1 - \beta) {}^t \ddot{\mathbf{u}} + \beta {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}] \Delta t , \quad (3.44)$$

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^t \mathbf{u} + {}^t \dot{\mathbf{u}} \Delta t + \left[ \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) {}^t \ddot{\mathbf{u}} + \alpha {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} \right] \Delta t^2 . \quad (3.45)$$

Wenn man für  $\beta = \frac{1}{2}$  und  $\alpha = \frac{1}{4}$  setzt, so entspricht dies der bekannten Trapezregel. Formt man Gleichung 3.45 nach  ${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}}$  um und führt zusätzlich die Abkürzungen  $a_0$  bis  $a_7$  ein, so folgt für den Beschleunigungs- und den Geschwindigkeitsvektor:

$${}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} = a_0 ({}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^t \mathbf{u}) - a_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} - a_3 {}^t \ddot{\mathbf{u}} , \quad (3.46)$$

$${}^{t+\Delta t} \dot{\mathbf{u}} = {}^t \dot{\mathbf{u}} + a_6 {}^t \ddot{\mathbf{u}} + a_7 {}^{t+\Delta t} \ddot{\mathbf{u}} . \quad (3.47)$$

Mit den Abkürzungen:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\alpha \Delta t^2}; & a_1 &= \frac{\beta}{\alpha \Delta t}; & a_2 &= \frac{1}{\alpha \Delta t}; & a_3 &= \frac{1}{2\alpha} - 1; \\ a_4 &= \frac{\beta}{\alpha} - 1; & a_5 &= \frac{\Delta t}{2} \left( \frac{\beta}{\alpha} - 2 \right); & a_6 &= \Delta t (1 - \beta); & a_7 &= \beta \Delta t . \end{aligned} \quad (3.48)$$

Werden Gleichungen 3.46 und 3.47 in Gleichung 3.43 eingesetzt, so scheinen nur noch die Verschiebungen zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  als Unbekannte auf. Durch Umformen dieser

Beziehung ergibt sich schließlich:

$$\underbrace{(a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + \mathbf{K})}_{\mathbf{K}_{\text{eff}}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = \underbrace{{}^{t+\Delta t} \mathbf{r} + \mathbf{M}(a_0 {}^t \mathbf{u} + a_2 {}^t \dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^t \ddot{\mathbf{u}}) + \mathbf{D}(a_1 {}^t \mathbf{u} + a_4 {}^t \dot{\mathbf{u}} + a_5 {}^t \ddot{\mathbf{u}})}_{\mathbf{r}_{\text{eff}}} . \quad (3.49)$$

Durch Einführen der effektiven Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eff}}$  sowie des effektiven Lastvektors  $\mathbf{r}_{\text{eff}}$  kann obige Gleichung zusammengefasst werden zu:

$$\mathbf{K}_{\text{eff}} {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = \mathbf{r}_{\text{eff}} . \quad (3.50)$$

### 3.1.7 Lösung nichtlinearer Gleichungen

In Gleichung 3.8 wird von infinitesimal kleinen Verformungen ausgegangen - eine für viele Festigkeitsberechnungen zutreffende Annahme. Diese Beziehung entspricht im Grunde einer linearen Strukturberechnung der Form  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{r}$ , die das Gleichgewicht am unverformten System beschreibt. Dabei ist  $\mathbf{r}$  der Lastvektor,  $\mathbf{K}$  die Steifigkeitsmatrix und  $\mathbf{u}$  der Verschiebungsvektor. Im linearen Fall liefert ein um den Faktor  $\alpha$  geänderter Lastvektor  $\alpha \mathbf{r}$  eine ebenfalls um den Faktor  $\alpha$  geänderte Verschiebungsantwort  $\alpha \mathbf{u}$  (Bathe, 2002 [6]). Wenn aber die Verformungen groß, das Material nicht linear-elastisch oder die Randbedingungen zeitlich veränderbar sind (z.B.: Kontakt), so muss eine nichtlineare Berechnung durchgeführt werden. Die auf Bathe (2002) [6] basierende Vorgehensweise ist dabei analog zu jener der linearen Berechnung, nur wird im nicht-linearen Fall das Gleichgewicht nicht am unverformten Ausgangszustand, sondern am deformierten System gebildet.

Bei Systemen finiter Elemente entspricht das Lösen des nichtlinearen Problems, der Ermittlung des Gleichgewichts zwischen den auf den Körper einwirkenden Lasten und den resultierenden Knotenkräften im augenblicklich verformten Zustand  $t + \Delta t$ :

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{r} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{f} = \mathbf{0} . \quad (3.51)$$

Dabei repräsentiert der Vektor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{r}$  die resultierenden äußeren Knotenpunktkräfte in der Konfiguration zur Zeit  $t + \Delta t$  und der Vektor  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$  enthält die Knotenpunktkräfte, die den Elementspannungen des verformten Systems zur Zeit  $t + \Delta t$  entsprechen. In Gleichung 3.51 müssen sämtliche Nichtlinearitäten berücksichtigt werden und die mathematische Beziehung muss während des gesamten Belastungszyklus erfüllt sein. Dies führt dazu, dass diese Gleichgewichtsbeziehung zu sämtlichen Zeitpunkten des Zyklus zu lösen ist. Effektiv kann das mit einer inkrementellen Schritt-für-Schritt-Lösung ausgeführt werden (vergleiche Kapitel 3.1.2), die zur Annahme hat, dass die Lösung des vorherigen Zeitpunktes  $t$  bekannt ist und sie für einen Zeitpunkt  $t + \Delta t$  gesucht wird. Dabei kann man die Knotenpunktkräfte  ${}^{t+\Delta t} \mathbf{f}$  aufgrund der Elementspannungen

zum Zeitpunkt  $t + \Delta t$  als die Knotenpunktkräfte  ${}^t\mathbf{f}$  zum Zeitpunkt  $t$  summiert um einen Kräftezuwachs  $\Delta\mathbf{f}$  auffassen:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{f} = {}^t\mathbf{f} + \Delta\mathbf{f} . \quad (3.52)$$

Der Vektor  $\Delta\mathbf{f}$  kann mit der Tangentensteifigkeitsmatrix  ${}^t\mathbf{K}$ , die den Bedingungen zur Zeit  $t$  entspricht, angenähert werden:

$$\Delta\mathbf{f} \doteq {}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{u} . \quad (3.53)$$

$\Delta\mathbf{u}$  ist ein Vektor inkrementeller Knotenpunktverschiebungen und mit Gleichung 3.53 kann Gleichung 3.51 auch wie folgt geschrieben werden:

$${}^t\mathbf{K} \Delta\mathbf{u} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r} - {}^t\mathbf{f} . \quad (3.54)$$

Wird Gleichung 3.54 auf  $\Delta\mathbf{u}$  umgeformt, kann eine Näherung für die Verschiebung zur Zeit  $t + \Delta t$  angeschrieben werden:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} \doteq {}^t\mathbf{u} + \Delta\mathbf{u} . \quad (3.55)$$

Da in Gleichung 3.53 nur eine Näherung verwendet worden ist, gibt Gleichung 3.55 nicht die exakte Verschiebeantwort auf die einwirkende Last  ${}^{t+\Delta t}\mathbf{r}$  wieder. Der dabei entstehende Fehler kann abhängig vom zeitlichen Inkrement signifikant werden und somit zu Instabilitäten im Lösungsvorgang führen. Um diesen Fehler einzuschränken muss ein iteratives Verfahren, wie das Newton-Raphson-Verfahren, angewendet werden. Bei der Newton-Raphson-Iteration wird anhand Gleichung 3.56 der Verschiebungszuwachs berechnet und damit die Lösung für die Verschiebung zur Zeit  $t + \Delta t$  aktualisiert. Diese Schritte werden solange wiederholt, bis der Verschiebungszuwachs vernachlässigbar klein ist.

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)} \Delta\mathbf{u}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{r} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(i)} \quad (3.56)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i+1)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i)} + {}^{t+\Delta t}\Delta\mathbf{u}^{(i+1)} \quad (3.57)$$

Für den ersten Iterationsschritt entspricht die Bewegungsgleichung 3.56 bei Verwendung der Anfangsbedingungen (Gleichung 3.58) der Gleichung 3.54.

$$\begin{aligned} {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(0)} &= {}^t\mathbf{K} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(0)} &= {}^t\mathbf{f} \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(0)} &= {}^t\mathbf{u} \end{aligned} \quad (3.58)$$

Wendet man das Newton-Raphson Iterationsschema auf Gleichung 3.49 an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} (a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{D} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}^{(i)}) \Delta\mathbf{u}^{(i+1)} = \\ {}^{t+\Delta t}\mathbf{r} + \mathbf{M} [a_0 ({}^t\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i)}) + a_2 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_3 {}^t\ddot{\mathbf{u}}] \\ + \mathbf{D} [a_1 ({}^t\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{u}^{(i)}) + a_4 {}^t\dot{\mathbf{u}} + a_5 {}^t\ddot{\mathbf{u}}] - {}^{t+\Delta t}\mathbf{f}^{(i)} . \end{aligned} \quad (3.59)$$

Den ersten Klammerausdruck kann man wiederum als effektive Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eff}}$  und die gesamte rechte Seite der Gleichung als effektiven Lastvektor  $\mathbf{r}_{\text{eff}}$  auffassen, womit sich das zu lösende Gleichungssystem  $\mathbf{K}_{\text{eff}} \Delta \mathbf{u}^{(i+1)} = \mathbf{r}_{\text{eff}}$  ergibt. Diese Art von Gleichungssystem kommt in technischen Problemstellungen sehr häufig vor, weshalb es dazu eine Unmenge an Lösungsstrategien gibt (siehe Kapitel 3.1.8).

### 3.1.8 Lösung linearer Gleichungssysteme

Je nach Art und Anzahl der Knotenpunkte eines Finite-Elemente-Systems kann es sehr aufwändig sein, die Gleichgewichtsbeziehung der Form  $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{r}$  zu lösen. Manchmal wird dafür sogar über die Hälfte der Gesamtrechenzeit benötigt. Deshalb ist es äußerst wichtig, eine geeignete Methode zur Lösung dieser Differentialgleichungssysteme zu finden. Grundsätzlich gibt es zwei verschiedene Klassen von Verfahren zum Lösen linearer Gleichungssysteme: direkte Verfahren und iterative Verfahren. Direkte Verfahren erreichen die Lösung mit Schritten und Operationen, deren Anzahl und Vorgehensweise exakt definiert ist. Im Gegensatz dazu verwenden iterative Lösungsmethoden mehrere Iterationen, um eine Näherungslösung zu erhalten. Generell können direkte Methoden bei kleineren Gleichungssystemen effizient eingesetzt werden, wohingegen bei sehr großen Systemen eher die Klasse der iterativen Verfahren zu bevorzugen ist. Direkte Verfahren basieren in der Regel auf der Anwendung der Gaußschen Elimination. Wenngleich dieses Verfahren für nahezu jedes lineare Gleichungssystem angewendet werden kann, hängt dessen Effizienz bei Finite-Elemente-Berechnungen im großen Maße von den Eigenschaften der Steifigkeitsmatrix ab.

Das sich in Kapitel 3.1.7 ergebende lineare Gleichungssystem kann je nach Genauigkeit der räumlichen Gitterauflösung sehr schnell extrem groß werden. Im Allgemeinen besitzt die darin enthaltene Koeffizientenmatrix  $\mathbf{K}_{\text{eff}}$   $(m * n)^2$  Einträge, wobei  $m$  hier für die verwendete Knotenanzahl steht und  $n$  der Anzahl der Koordinatenrichtungen entspricht. Alleine der Aufwand zum Speichern solcher Matrizen im Falle einer vollen Besetzung wäre bei komplexeren Rechengittern immens und würde rasch den gesamten Arbeitsspeicher eines Rechners belegen. Da aber der Verformungszustand jedes finiten Elementes im Grunde nur von seinen benachbarten Elementen abhängig ist, sind auch die effektive Steifigkeitsmatrix und somit alle bisher in diesem Kapitel genannten globalen Matrizen sehr dünn besetzt. Der Besetzungsgrad beläuft sich meist auf unter 5% und damit ergeben sich über 95% Nulleinträge, die nicht gespeichert werden müssen. Die effiziente Speicherung solcher sogenannter *SPARSE*-Matrizen erfolgt meist dadurch, dass nur die Position und der Wert der Nichtnulleinträge gespeichert werden. Ein weiterer Vorteil dieser Speicherung ergibt sich meist durch die effizientere Lösung des Gleichungssystems.

Neben der Eigenschaft, dass die Matrizen dünn besetzt sind, sind sie außerdem aufgrund der Symmetrie des Spannungstensors symmetrisch. Werden nun die Randbedingungen einer korrekten Lagerung im Gleichungssystem ebenfalls berücksichtigt, d.h. eine Starrkörperbewegung des Gesamtsystems wird durch Eliminierung der Zeilen und

Spalten, die den eingeschränkten Freiheitsgraden entsprechen, verhindert, so entspricht die resultierende Koeffizientenmatrix einer positiv definiten, symmetrischen Matrix mit Bandstruktur (Steinke, 2015 [57]).

Da die Lösung von linearen Gleichungssystemen in vielen Bereichen der Wissenschaft ein zentrales Thema darstellt, wurden in den letzten Jahrzehnten unterschiedlichste Lösungsstrategien in unzähligen Computerprogrammen implementiert. Diese Lösungsalgorithmen sind in vielen Softwarebibliotheken frei zugänglich, weshalb in dieser Arbeit die Programmierung eines solchen Lösers nicht forciert wurde. Der nachfolgende Abschnitt soll nur kurz den theoretischen Hintergrund einiger Lösungsverfahren beleuchten.

### a) Direkte Lösungsverfahren

Zu den bekanntesten direkten Verfahren zählen das Gaußsche Eliminationsverfahren und das Cholesky-Verfahren, das als eine Sonderform der LU-Dekomposition angesehen werden kann. Beim Gaußschen Eliminationsverfahren wird die Koeffizientenmatrix in ein Produkt aus unterer  $\tilde{\mathbf{L}}$  und oberer  $\tilde{\mathbf{U}}$  Dreiecksmatrix zerlegt (Almbauer und Offner, 2016 [2]):

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{U}} . \quad (3.60)$$

Das lineare Gleichungssystem wird danach durch anschließendes Vorwärts- und Rückwärtseinsetzen gelöst:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{c} + \mathbf{r} &= \mathbf{0} , \\ \tilde{\mathbf{U}}\mathbf{u} - \mathbf{c} &= \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (3.61)$$

Für positiv definite, symmetrische Matrizen lässt sich das Cholesky-Verfahren anwenden, das im Grenzfall nur halb so viele Rechenschritte benötigt wie das Verfahren nach Gauß (Steinke, 2015 [57]). Bei diesem Verfahren wird die Steifigkeitsmatrix mithilfe der unteren Dreiecksmatrix  $\tilde{\mathbf{L}}$  folgendermaßen zerlegt:

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{L}}\tilde{\mathbf{L}}^{\text{T}} . \quad (3.62)$$

Ausgehend von dieser Zerlegung wird die Lösung des Gleichungssystems wiederum durch Vorwärtseinsetzen und anschließendem Rückwärtseinsetzen erhalten:

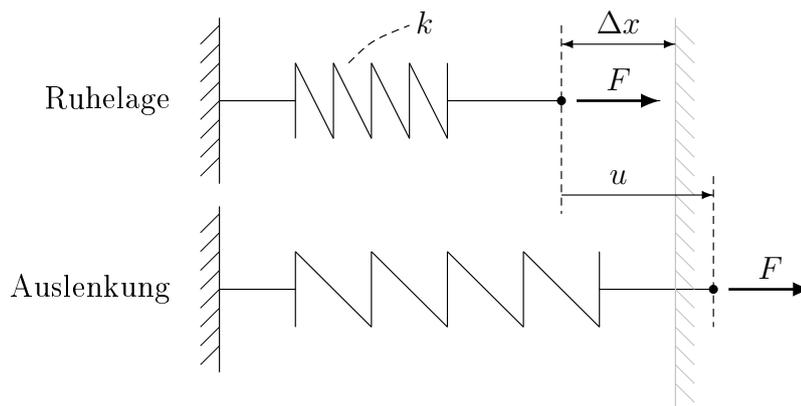
$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{L}}\mathbf{c} + \mathbf{r} &= \mathbf{0} , \\ \tilde{\mathbf{L}}^{\text{T}}\mathbf{u} - \mathbf{c} &= \mathbf{0} . \end{aligned} \quad (3.63)$$

## b) Iterative Lösungsverfahren

Iterative Lösungsverfahren ermitteln schrittweise Näherungslösungen durch Verwendung festgelegter Rechenvorschriften. Dies bedeutet, dass ein geeignetes Abbruchkriterium ausgewählt werden muss, das idealerweise die Iteration dann unterbricht, wenn der Fehler hinreichend klein ist. Einige weit verbreitete iterative Methoden sind die Verfahren nach Jacobi und Gauß-Seidel sowie die Methode der konjugierten Gradienten. Da die vorzufindenden Gleichungssysteme in dieser Arbeit verhältnismäßig klein sind, werden ausschließlich direkte Lösungsverfahren angewendet. Für nähere Informationen zu iterativen Lösungsverfahren sei auf Almbauer und Offner (2016) [2] verwiesen.

### 3.1.9 Kontakt

Der Kontakt zwischen zwei oder mehreren Körpern stellt ein nichtlineares Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen dar. Diese Kontaktprobleme können reibungsbehaftet oder reibungsfrei sein und reichen von kleinen Verschiebungen bis hin zu nichtlinearen Bedingungen bei großen Verzerrungen. Die zur Lösung verwendeten algorithmischen Methoden beruhen meist auf Penalty-Verfahren oder Lagrange-Multiplikator-Techniken. Bei dem in dieser Arbeit verwendeten Penalty-Verfahren wird das restringierte Ausgangsproblem durch eine unrestringierte und iterativ zu lösende Optimierungsaufgabe approximiert. Dafür wird das Ausgangsproblem mit einer sogenannten Penalty-Funktion erweitert. Diese Funktion „bestraft“ das Nichteinhalten der Nebenbedingung, wobei der Gewichtungsfaktor  $\alpha$  die „Stärke der Bestrafung“ darstellt (Nasdala, 2015 [41]).



**Bild 3.7:** Skizze eines einfachen Kontaktproblems (Nasdala, 2015 [41])

Betrachtet man das in Abbildung 3.7 gezeigte einfache Modellproblem, so kann die

potenzielle Energie des Systems geschrieben werden als:

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - u F . \quad (3.64)$$

Für statisches Gleichgewicht muss die potenzielle Energie  $\Pi$  ein Minimum sein und damit muss  $\frac{\partial \Pi}{\partial u} = 0$  eingehalten werden. Wenn  $u > \Delta x$  ist, d.h. Kontakt vorherrscht, so muss die Nebenbedingung  $u = \Delta x$  erzwungen werden. Dafür wird zu Gleichung 3.64 ein Penalty-Term addiert und das Optimierungsproblem lautet nun:

$$\Pi = \frac{1}{2} k u^2 - u F + \frac{1}{2} \alpha (u - \Delta x)^2 . \quad (3.65)$$

Die Bedingung  $\frac{\partial \Pi}{\partial u} = 0$  liefert:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial u} &= k u - F + \alpha (u - \Delta x) = 0 , \\ u(k + \alpha) &= F + \Delta x \alpha . \end{aligned} \quad (3.66)$$

Betrachtet man den Penalty-Term in Gleichung 3.65 genauer, so erkennt man, dass dieser der Federenergie formal gleicht. Das heißt, der Penalty-Parameter  $\alpha$  kann auch als Steifigkeit einer Feder, die der Durchdringung entgegenwirkt, interpretiert werden. Würde dieser Parameter unendlich groß bzw. steif gewählt werden, so könnte die Nebenbedingung  $u = \Delta x$  exakt eingehalten werden. Aus numerischen Gründen muss  $\alpha$  aber begrenzt werden und damit wird eine (wenn auch nur kleine) Durchdringung erlaubt (Nasdala, 2015 [41]).

Vorteile (Nasdala, 2015 [41]):

- Keine zusätzlichen Unbekannten
- Besseres Konvergenzverhalten als bei der Methode der Lagrangeschen Multiplikatoren

Nachteile (Nasdala, 2015 [41]):

- Kontaktbedingung  $u \leq \Delta x$  wird nicht exakt erfüllt
- Sehr hohe Penalty-Parameter führen zu Konvergenzproblemen
- Ergebnis hängt von der Wahl des Penalty-Parameters ab

## 3.2 Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf ein Flatterventil eines Hubkolbenkompressors

Bei der Strömungssimulation des Gaspfades hermetischer Hubkolbenkompressoren stellt die Berechnung der Ventilbewegung einen wichtigen Teil dar. Die dabei auftretende gegenseitige Beeinflussung von Strömung und Ventil wird auch als Fluid-Struktur-Interaktion (FSI) bezeichnet. Einerseits steuert die Ventilstellung die Strömung in und aus dem Zylinder, da dadurch Ein- bzw. Ausströmungsöffnungen gänzlich oder nur teilweise verschlossen werden, andererseits wirken die dadurch beeinflussten Druck- und Schubkräfte auf das Ventil ein, was die Ventilbewegung (und somit eine veränderte Ventilstellung) erst verursacht.

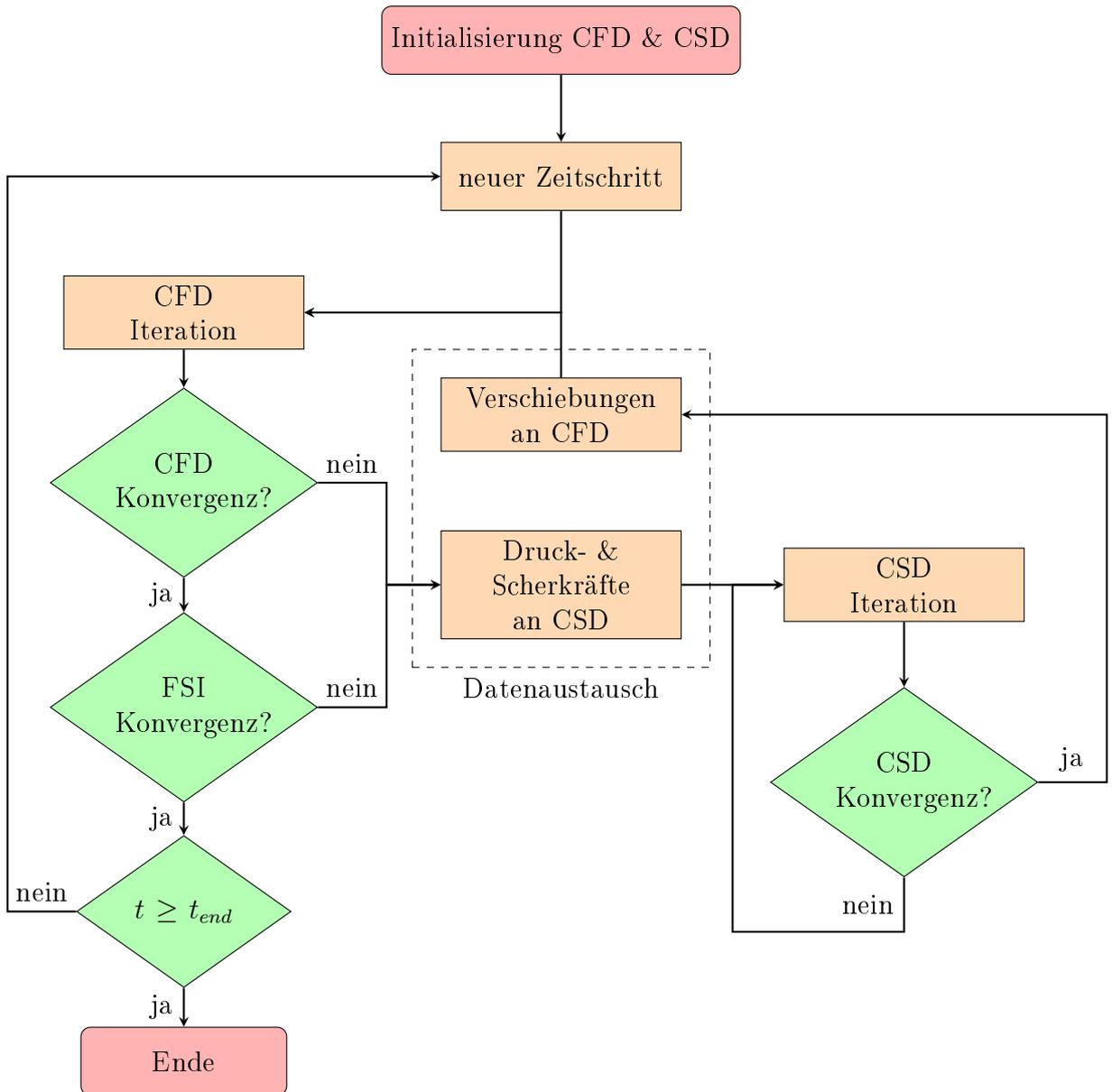
Nach Glück (2002) [16] kann bei Fluid-Struktur-Interaktionen prinzipiell zwischen der monolithischen und der partitionierten Kopplung unterschieden werden. Bei Ersterer wird ein Gleichungssystem, das sowohl das Fluid als auch die Struktur beschreibt, simultan gelöst. Dies führt in der Regel aufgrund der starken Kopplung zu guten Konvergenzeigenschaften, allerdings müssen dabei einheitliche Geometriemodellierungen und somit gleiche Diskretisierungen (z.B. FVM oder FEM) verwendet werden. Bei der partitionierten Kopplung hingegen werden die Gleichungen, die das Fluid bzw. die Struktur beschreiben, getrennt berechnet und über entsprechende Schnittstellen miteinander gekoppelt. Dabei können für die Struktur bzw. das Fluid die jeweils effektivsten Diskretisierungen (FEM bzw. FVM) und somit auch zwei separate Rechenprogramme verwendet werden. Bei der Auswahl der Kopplungsmethodik ist dies als entscheidender Vorteil gewertet worden, weshalb in dieser Arbeit die partitionierte Kopplung realisiert wurde. Innerhalb der partitionierten Kopplungsmethode kann nochmals zwischen explizitem und implizitem Verfahren unterschieden werden. Beim expliziten Verfahren (schwache Kopplung) findet der Datenaustausch zwischen Fluid- und Strukturberechnung nur einmal je Zeitschritt (oder noch seltener) statt, beim impliziten Verfahren (starke Kopplung) hingegen wird zwischen Fluid- und Strukturberechnung so lange iteriert, bis das Gleichgewicht<sup>4</sup> innerhalb des Zeitschrittes erreicht wird. Der wesentliche Vorteil der impliziten Kopplungsmethodik gegenüber der expliziten stellt die bessere Konvergenzeigenschaft dar, weshalb sie bei der hier beschriebenen Implementierung der Fluid-Struktur-Interaktion favorisiert wurde. Abbildung 3.8 zeigt ein Flussdiagramm, das den Ablauf der verwendeten Kopplungsmethodik veranschaulicht.

### 3.2.1 Einleitung

Die vorhin beschriebene Kopplung zwischen Ventilbewegung und Strömungssimulation wird durch Einbinden sogenannter UDFs (User Defined Functions) in die kommerzielle Strömungssimulationssoftware ANSYS Fluent realisiert. Diese UDFs werden in der Programmiersprache *C* verfasst und sind mit vordefinierten Makros ausgestattet,

---

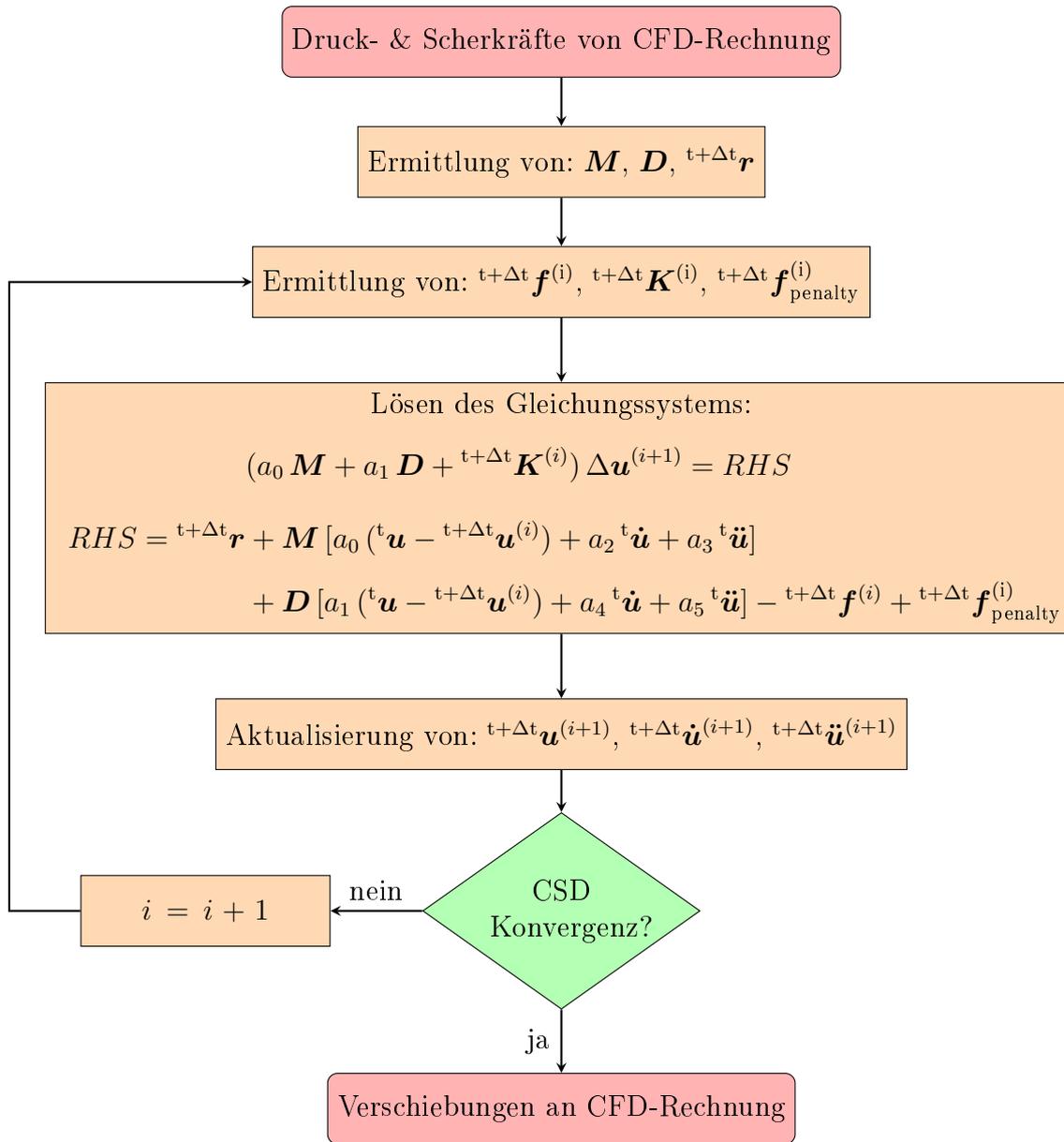
<sup>4</sup>Entspricht dem Erreichen einer Konvergenzschranke.



**Bild 3.8:** Flowchart der FSI-Kopplungsmethodik

die das Austauschen von Informationen (Druck, Knotenposition, usw.) zwischen dem CSD-Unterprogramm und dem CFD-Hauptprogramm ermöglichen. Die in Kapitel 3.1 beschriebene Vorgehensweise zur Berechnung von Verformungen an Bauteilstrukturen dient dabei als Ausgangspunkt für die Erstellung dieses Unterprogrammes.

Die verwendete Vorgehensweise zur Berechnung der Strukturbewegung aufgrund der am Ventil angreifenden Kräfte ist in Abbildung 3.9 beschrieben. Die Start- und Endpunkte im Flussdiagramm stellen dabei die Schnittstellen zwischen dem CSD-Unterprogramm und dem CFD-Hauptprogramm dar.



**Bild 3.9:** Flowchart der CSD-Iteration

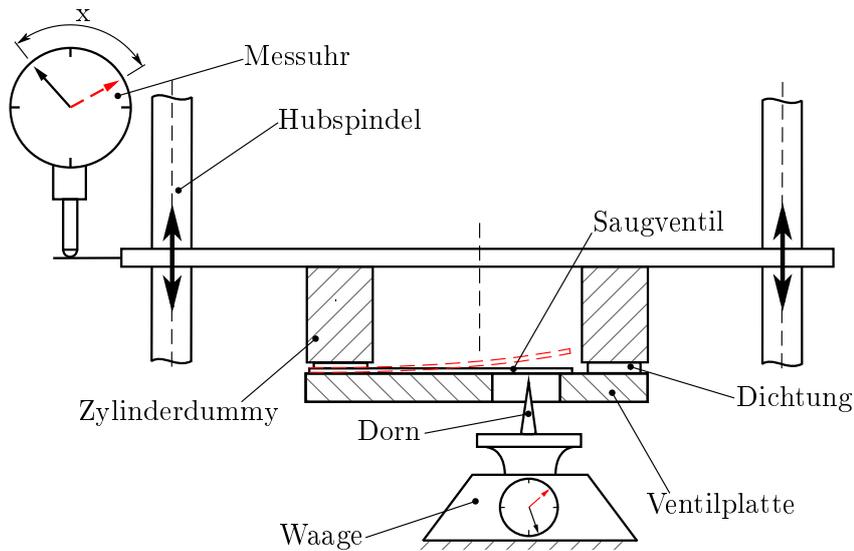
In den nachfolgenden Unterkapiteln werden zuerst Überlegungen zur Auswahl eines geeigneten Rechnetzes bezüglich Art der finiten Elemente und Knotenanzahl angestellt. Danach werden anhand dieser Erkenntnisse die Ansatzfunktionen für das ausgewählte Element aufgestellt und die Auswertung der Volumen- bzw. Flächenintegrale mittels numerischer Integration behandelt. Ebenfalls kurz beschrieben wird die Implementierung des Kontaktes zwischen Ventil und Ventilplatte sowie des verwendeten Löser des linearen Gleichungssystems.

#### 3.2.2 Auswahl der finiten Elemente

In FE-Berechnungen kommen je nach Problemstellung unterschiedlichste Elemente zur Anwendung. Diese können nach verschiedensten Gesichtspunkten wie etwa der Ordnung der Ansatzfunktionen oder aber auch grob in Struktur- und Kontinuumsselemente eingeteilt werden. Zu den Strukturelementen gehören nach Steinke (2015) [57] beispielsweise Stab-, Platten- oder Schalelemente. Diese finiten Elemente haben im Allgemeinen nur entlang der Stabachse bzw. auf der Mittelfläche der Platte oder Schale Knotenpunkte angeordnet, wobei sowohl translatorische, wie auch rotatorische Freiheitsgrade an den Knotenpunkten definiert sein können. Kontinuumsselemente weisen hingegen in der Regel meist nur Verschiebungen als Freiheitsgrade auf und werden zur Diskretisierung von 2- und 3-dimensionalen Aufgabenstellungen in der Kontinuumsmechanik verwendet. Für die Diskretisierung des Flatterventils eines Hubkolbenkompressors wären im Grunde sowohl Kontinuums- als auch Strukturelemente denkbar. Einerseits hätte die Nutzung von Strukturelementen zwar den Vorteil, ein eigentlich dreidimensionales Bauteil auf ein zweidimensionales Problem reduzieren zu können. Andererseits sind diese Elemente aber an gewisse Voraussetzungen gebunden und der relative Rechenzeitanteil der Festigkeitsberechnung innerhalb einer FSI-Schleife ist vergleichsweise gering. Aufgrund dieser Tatsache, sowie der Einschränkung nur eine Art finiter Elemente zu verwenden, fiel die Entscheidung auf Tetraederelemente, die für beliebige Geometrien universell einsetzbar sind.

Um das finite Element vollständig definieren zu können, muss neben der Festlegung auf eine Elementform auch die Anzahl der Elementknoten sowie die zugehörigen Interpolationsfunktionen angegeben werden. In der Praxis haben sich isoparametrische finite Elemente, wie sie in Kapitel 3.1.4 beschrieben sind, gegenüber Elementen, die in generalisierten Koordinaten ausgedrückt werden, durchgesetzt. Die Interpolationsfunktionen für diese isoparametrischen Elemente werden im natürlichen Koordinatensystem aufgestellt und können somit auf jedes globale Element angewendet werden.

Das einfachste Tetraederelement, bestehend aus vier Knotenpunkten, wird als lineares Tetraederelement bezeichnet, da die dabei verwendeten Interpolationsfunktionen lineare Polynome sind. Dieser Tetraeder besitzt den großen Vorteil, dass keine numerische Integration notwendig ist, um die globalen Matrizen des zu lösenden Gleichungssystems aufstellen zu können. Im Gegensatz dazu müssen bei Tetraedern höherer Ordnung die Volumenintegrale mittels numerischer Integration gelöst werden, was neben dem nicht unbedeutenden Aufwand auch zu Ungenauigkeiten führen kann, da nicht alle Integrale immer exakt gelöst werden können. Einen Tetraeder höherer Ordnung zeigt Abbildung 3.12. Es handelt sich dabei um ein Tetraederelement zweiter Ordnung der Serendipity-Klasse, das im Unterschied zum Element zweiter Ordnung der Lagrange-Klasse keinen Knoten im Inneren des Tetraeders besitzt. Neben diesem 10-Knoten-Tetraeder gibt es noch eine Vielzahl anderer Tetraeder, die in der Fachliteratur näher beschrieben sind.

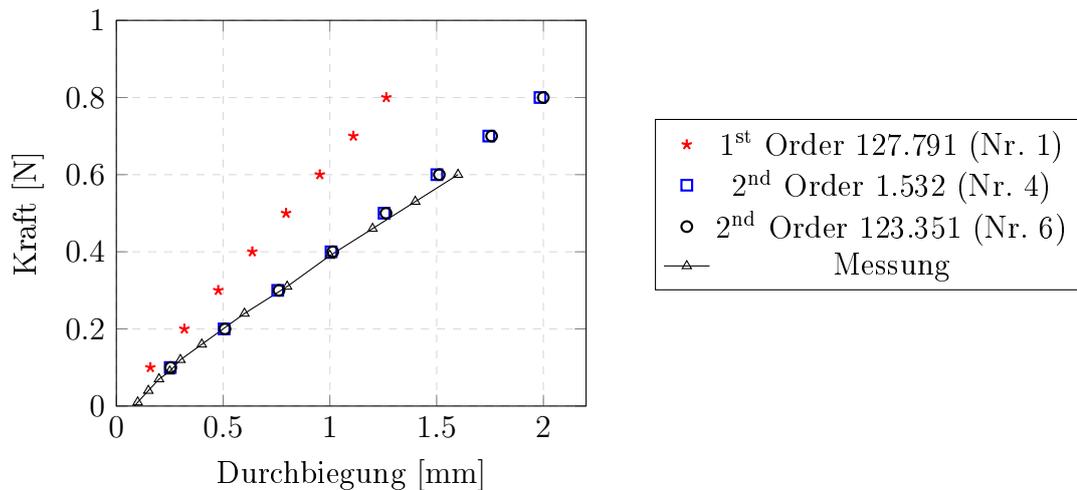


**Bild 3.10:** Messaufbau zur Ermittlung der Federkennlinie des Saugventils

Um den Unterschied zwischen Tetraederelementen erster und zweiter Ordnung zu veranschaulichen und die benötigte Elementanzahl für die Berechnung der Verformung des Flatterventils abzuschätzen, wurden Vergleichsrechnungen mit dem kommerziellen Strukturmechanikprogramm Mechanical von ANSYS durchgeführt (Vorspannung vorerst vernachlässigt). Gegenstand der Untersuchung war dabei das Saugventil des HTK 55. Die Last wurde dabei im Mittelpunkt des Ventiltellers eingebracht und wirkte entlang der Hauptauslenkungsrichtung (Zylinderachse). Für einen weiteren Vergleich wurde eine Messung der statischen Auslenkung eines Seriensaugventils durchgeführt. Der prinzipielle Aufbau dieser Messung ist in Abbildung 3.10 zu sehen. Hierbei wurde das Saugventil, vergleichbar mit dem realen Einbau zwischen Ventilplatte, Dichtung und einem Zylindergehäusedummy eingeklemmt. Die Position des Zylinderdummy samt Saugventil konnte dabei minutiös über eine Hubspindel verändert und über eine Messuhr abgelesen werden. Beim Absenken der Spindel drückte der Dorn mittig auf den Ventilteller und führte zum Öffnen des Saugventils. Die Kraft, die der Dorn zum Öffnen benötigte, konnte dabei indirekt über eine Waage ermittelt werden. Die Ventilvorspannung, die beim Öffnen erst überwunden werden musste, wurde beim Vergleich zwischen den gemessenen und den berechneten, statischen Auslenkungskurven in Abbildung 3.11 bereits berücksichtigt, indem die Messkurve um die Vorspannkraft parallel verschoben wurde. Die Auslenkungskurven entsprechen dabei der Bewegung des Ventiltellermittelpunktes entlang der Zylinderachse.

Ein Vergleich zwischen den einzelnen Auslenkungskurven zeigt, dass die Verwendung von Tetraederelementen erster Ordnung für die Strukturberechnung des Saugventils

eine Verschiebeantwort liefert, die viel zu steif ausfällt und somit unbrauchbar ist. Bei der Verwendung von Tetraederelementen zweiter Ordnung zeigt sich hingegen eine sehr gute Übereinstimmung der berechneten Verschiebeantwort mit den Messwerten. Im Bereich sehr kleiner, sowie sehr großer Auslenkungen treten zwar kleinere Abweichungen zwischen Messung und Berechnung auf, diese können aber einerseits durch die Vorspannung des Ventils und andererseits durch die Tatsache erklärt werden, dass aufgrund der Schiefstellung des Ventils der Messpunkt vom Ventiltellermittelpunkt geringfügig abweichen kann.



**Bild 3.11:** Statische Auslenkung des Saugventils

Nähere Details zu den in Abbildung 3.11 verwendeten, sowie drei weiteren Rechengittern sind Tabelle 3.1 zu entnehmen. Diese Tabelle zeigt neben der Anzahl der Elemente und Knoten auch die durchschnittliche Abweichung der statischen Auslenkung bezogen auf das Gitter mit circa 125.000 Tetraederelementen zweiter Ordnung (Nr. 6). Es zeigt sich, dass für eine durchschnittliche Abweichung kleiner 1% ein Gitter mit circa 1500 Tetraederelementen zweiter Ordnung ausreichend wäre. Aus diesem Grund wird für sämtliche weitere Betrachtungen des Saugventils ein mit Gitter Nr. 4 vergleichbares Rechenetz verwendet.

### 3.2.3 Interpolationsfunktionen

Die Interpolationsfunktionen für finite Elemente müssen den in Kapitel 3.1.4 angegebenen Anforderungen gerecht werden. Für isoparametrische finite Elemente bedeutet das, dass deren Ansatzfunktionen die Eigenschaft aufweisen müssen, im natürlichen Koordinatensystem am Knoten  $k$  den Wert 1 und an allen anderen den Wert 0 zu besitzen. Somit können für Tetraederelemente zweiter Ordnung mit 10 Knoten die in

**Tabelle 3.1:** Statische Auslenkung - Vergleich verschiedener Rechengitter

Nr.	Ordnung	Elemente	Knoten	Abweichung
<b>1</b>	1	127.791	31.135	37,11%
<b>2</b>	2	568	1.351	4,89 %
<b>3</b>	2	1.130	2.578	1,15 %
<b>4</b>	2	1.532	3.435	0,75 %
<b>5</b>	2	6.193	12.871	0,28 %
<b>6</b>	2	123.351	203.077	0,00 %

Tabelle 3.2 angegebenen Interpolationsfunktionen gefunden werden. Die Nummerierung der Knoten, sowie deren Lage im natürlichen Koordinatensystem ist Abbildung 3.12 zu entnehmen.

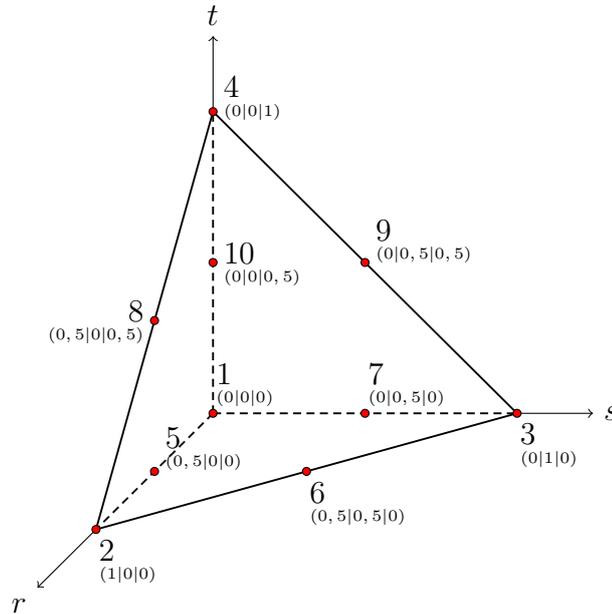
**Tabelle 3.2:** Interpolationsfunktionen für ein 10-Knoten-Tetraederelement (Bathe, 2002 [6])

Knoten Nr.	Interpolationsfunktion
$h_1 =$	$(1 - r - s - t)(1 - 2r - 2s - 2t)$
$h_2 =$	$r(2r - 1)$
$h_3 =$	$s(2s - 1)$
$h_4 =$	$t(2t - 1)$
$h_5 =$	$4r(1 - r - s - t)$
$h_6 =$	$4rs$
$h_7 =$	$4s(1 - r - s - t)$
$h_8 =$	$4rt$
$h_9 =$	$4st$
$h_{10} =$	$4t(1 - r - s - t)$

### 3.2.4 Numerische Integration

Ausgehend von den eben beschriebenen Interpolationsfunktionen müssen beim Aufstellen der Matrizen bzw. Vektoren für die Bewegungsgleichung Integrale über die Tetraederelemente gelöst werden. Diese Integrale sind in den Bereichen von 0 bis  $(1 - s - t)$  für die  $r$ -Koordinate, von 0 bis  $(1 - t)$  für die  $s$ -Koordinate sowie von 0 bis 1 für die  $t$ -Koordinate auszuwerten:

$$\int_0^1 \int_0^{1-t} \int_0^{1-s-t} \mathbf{F}_{(r,s,t)} dr ds dt . \quad (3.67)$$



**Bild 3.12:** 10-Knoten-Tetraeder (Bathe, 2002 [6])

Anders als bei linearen finiten Elementen enthält der Integrand aus Gleichung 3.67 im Normalfall gebrochen rationale Funktionen, was eine analytische Integration faktisch ausschließt. Somit muss zur Auswertung eine numerische Integrationsmethode angewendet werden. Die dabei verwendete Approximation lautet in der Regel (Bathe, 2002 [6]):

$$\int_t \int_s \int_r \mathbf{F}(r,s,t) \, dr \, ds \, dt = \sum_{i,j,k} \alpha_{i,j,k} \mathbf{F}(r_i,s_j,t_k) \cdot \quad (3.68)$$

Dabei stellen  $\alpha$  die Gewichtungsfaktoren,  $\mathbf{F}(r,s,t)$  die Matrix bzw. den Vektor und  $\mathbf{F}(r_i,s_j,t_k)$  die Matrix bzw. den Vektor, ausgewertet bei den in den Argumenten angegebenen Punkten dar. Die Genauigkeit dieser Näherungslösung hängt im Allgemeinen von der Anzahl und der Lage der Stützstellen  $i, j, k$  der Funktion  $\mathbf{F}(r,s,t)$  ab.

Zu den bekanntesten numerischen Integrationsverfahren zählen die Newton-Cotes-Quadratur und das Gaußsche Integrationsverfahren, wobei sich das zweitgenannte Verfahren bei FE-Anwendungen durchgesetzt hat. Obwohl auch diese Verfahren im allgemeinen nur für ganze rationale Funktionen bestimmt sind, werden Terme, die die Genauigkeit der numerischen Integration übersteigen, nicht vernachlässigt, sondern zumindest genähert berücksichtigt. Somit liefert die numerische Integration Ergebnisse, die zwar nicht exakt sind, bei dem die auftretenden Fehler aber, ausgenommen von Sonderfällen, toleriert werden können (Wissmann *et al.*, 2006 [62]).

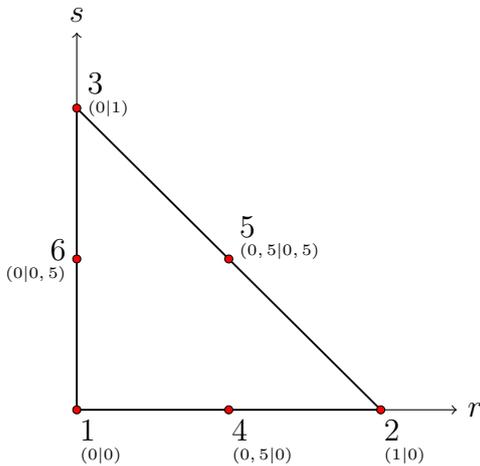
Für die Auswertung der auftretenden Integrale wurde eine Integration nach Gauß mit 11 Stützstellen verwendet, deren Gewichtungsfaktoren und Abtastpunkte in Tabelle 3.3 angegeben sind.

### 3.2 Anwendung der Finite-Elemente-Methode auf ein Flatterventil eines Hubkolbenkompressors

**Tabelle 3.3:** Gaußsche Integrationsmethode - Stützstellen und Gewichtungsfaktoren (CFD-online, 2016 [67])

<i>r</i> -Koordinate	<i>s</i> -Koordinate	<i>t</i> -Koordinate	Gewichtungsfaktor
0,250000000000000	0,250000000000000	0,250000000000000	-0.01215555555556
0,78571428571429	0,07142857142857	0,07142857142857	0,00762222222222
0,07142857142857	0,07142857142857	0,07142857142857	0,00762222222222
0,07142857142857	0,07142857142857	0,78571428571428	0,00762222222222
0,07142857142857	0,78571428571428	0,07142857142857	0,00762222222222
0,10059642383320	0,39940357616680	0,39940357616680	0,02488888888889
0,39940357616680	0,10059642383320	0,39940357616680	0,02488888888889
0,39940357616680	0,39940357616680	0,10059642383320	0,02488888888889
0,39940357616680	0,10059642383320	0,10059642383320	0,02488888888889
0,10059642383320	0,39940357616680	0,10059642383320	0,02488888888889
0,10059642383320	0,10059642383320	0,39940357616680	0,02488888888889

Neben Volumenintegralen treten im Finite-Elemente-Gleichungssystem aber auch Flächenintegrale auf, die aufgrund vereinfachender Annahmen sogar analytisch gelöst werden können. Dazu wird die Seitenfläche eines Tetraederelementes zweiter Ordnung betrachtet, die sich als Dreieck mit sechs Knoten darstellen lässt und im zweidimensionalen natürlichen Koordinatensystem mit den in Abbildung 3.13 angegebenen Interpolationsfunktionen beschrieben werden kann.



Interpolationsfunktionen:

$$\begin{aligned}
 h_1^S &= (1 - r - s)(1 - 2r - 2s) \\
 h_2^S &= r(2r - 1) \\
 h_3^S &= s(2s - 1) \\
 h_4^S &= 4r(1 - r - s) \\
 h_5^S &= 4rs \\
 h_6^S &= 4s(1 - r - s)
 \end{aligned}$$

**Bild 3.13:** 6-Knoten-Dreieck (Bathe, 2002 [6])

Unter Verwendung dieser Interpolationsfunktionen kann das in Gleichung 3.26 auf-

tretende Integral über die Dreiecksfläche geschrieben werden als:

$$\mathbf{r}_S = \int_0^1 \int_0^{1-s} \mathbf{H}^{S^T} \mathbf{f}^S \underbrace{2 A_\Delta dr ds}_{dS} . \quad (3.69)$$

Setzt man den Zusammenhang zwischen den Oberflächenspannungen im kartesischen und natürlichen Koordinatensystem ein, so folgt:

$$\mathbf{r}_S = \int_0^1 \int_0^{1-s} \underbrace{\mathbf{H}^{S^T} \mathbf{H}^S}_{\mathbf{M}^S} \mathbf{p} 2 A_\Delta dr ds \quad (3.70)$$

$$\text{mit } \mathbf{p}^T = [p_{x_1}, p_{y_1}, p_{z_1}, p_{x_2}, \dots, p_{z_6}] .$$

Die in Matrix  $\mathbf{M}^S$  auftretende Polynome sind höchstens vierter Ordnung und können ohne größeren Aufwand integriert werden. Somit kann der Oberflächenkraftvektor  $\mathbf{r}_S$  geschrieben werden als:

$$\mathbf{r}_S = \frac{A_\Delta}{180} \begin{bmatrix} \mathbf{6} & -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & -\mathbf{4} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{6} & -\mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{4} \\ -\mathbf{1} & -\mathbf{1} & \mathbf{6} & -\mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{4} & \mathbf{32} & \mathbf{16} & \mathbf{16} \\ -\mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{16} & \mathbf{32} & \mathbf{16} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{4} & \mathbf{0} & \mathbf{16} & \mathbf{16} & \mathbf{32} \end{bmatrix} \mathbf{p} \quad (3.71)$$

wobei Folgendes für sämtliche Einträge gilt:

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{6} = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}; \quad \dots$$

### 3.2.5 Dämpfung

Im Allgemeinen kann die Dämpfungsmatrix  $\mathbf{D}$  nicht einfach wie die Massen- und Steifigkeitsmatrix durch Aufsummierung der einzelnen Elementbeiträge konstruiert werden. In der Praxis wird stattdessen ein Ansatz gewählt, der mithilfe der Massen- und Steifigkeitsmatrix sowie experimentell ermittelter Dämpfungswerte folgenden Zusammenhang herstellt (Nasdala, 2015 [41]):

$$\mathbf{D} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} . \quad (3.72)$$

Diese sogenannte Rayleigh-Dämpfung ist zwar meist nur eine grobe Näherung, stellt aber eine sehr einfache Methode dar, die Dämpfung überhaupt zu berücksichtigen.

Dabei wird angenommen, dass die gesamte Strukturdämpfung als Summe von Dämpfungen einzelner Moden aufgefasst werden kann (Bathe, 2002 [6]). Der massenproportionale Anteil  $\alpha$  dämpft dabei hauptsächlich die unteren Eigenfrequenzen, wohingegen der steifigkeitsproportionale Anteil  $\beta$  auf höhere Frequenzen wirkt. Mit den Dämpfungsmaßen für zwei verschiedene Frequenzen können somit die Dämpfungsparameter  $\alpha$  und  $\beta$  wie folgt ermittelt werden (Nasdala, 2015 [41]):

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{2(\omega_1 \zeta_1 - \omega_2 \zeta_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2}, \\ \alpha &= 2\omega_2 \zeta_2 - \frac{2(\omega_1 \zeta_1 - \omega_2 \zeta_2)}{\omega_1^2 - \omega_2^2} \omega_2^2.\end{aligned}\tag{3.73}$$

Das Lehrsche Dämpfungsmaß  $\zeta$  wurde dabei experimentell bestimmt, indem die Amplitudenabnahme der freien gedämpften Schwingung des Saugventils mittels Laser-Doppler-Vibrometrie gemessen wurde.

### 3.2.6 Lösen des Gleichungssystems

Aus Kapazitätsgründen des Arbeitsspeichers wird die in Kapitel 3.1.8 beschriebene Tatsache ausgenutzt, dass die in Gleichung 3.59 enthaltene Koeffizientenmatrix sehr dünn besetzt ist. Dadurch werden Einträge, die den Wert Null haben, nicht gespeichert und somit der Speicheraufwand um ein Vielfaches reduziert. Zur Lösung des linearisierten Gleichungssystems wird das Cholesky-Verfahren, das zu den direkten Lösungsverfahren zählt, verwendet. Das Cholesky-Verfahren wurde schon vielfach sehr effizient programmiert und ist in frei zugänglichen Softwarebibliotheken, wie der hier verwendeten *EIGEN*-Bibliothek enthalten. Für weitere Informationen sei hier auf die Dokumentation dieser Bibliothek [68] (2016) verwiesen.



# 4 Numerische Strömungssimulation

In diesem Kapitel wird die Vorgehensweise bei der numerischen Simulation der Kältemittelströmung durch den hermetischen Hubkolbenkompressor HTK 55 beschrieben. Als Rechenprogramm wurde dazu die kommerzielle CFD-Software Fluent von ANSYS verwendet. Die Bewegung der Ventile wurde hingegen mit einem selbstverfassten Programm<sup>1</sup> (Programmiersprache C) berechnet und mit Fluent gekoppelt. Neben den zum Lösen verwendeten Einstellungen des CFD-Programms finden sich nachstehend Einzelheiten bezüglich Randbedingungen und Rechengitter. Letztere beinhalten auch Besonderheiten, die bei der Verwendung von dynamischen Rechengittern beachtet werden müssen. Abschließend werden die Simulationsergebnisse von den Ventilerhebungskurven und den indizierten Drücken mit Messungen verglichen, um die Eignung der gewählten Modelle zu validieren.

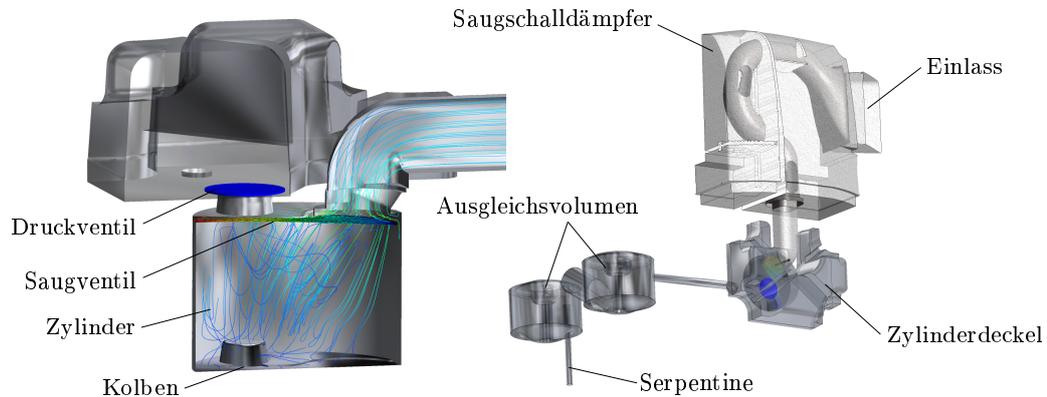
## 4.1 Rechendomäne

Das in Abbildung 4.1 gezeigte Rechengebiet der dreidimensionalen CFD-Simulation erstreckt sich vom Einlass des Saugschalldämpfers bis zum Ende der Serpentine, in der das Kältemittel das Kompressorgehäuse wieder verlässt. Beginnend beim Einlass des Saugschalldämpfers strömt das Kältemittel entlang eines geführten Kanals durch den Schalldämpfer bis hin zur Einströmöffnung in der Ventilplatte. Bei geöffnetem Saugventil wird das Gas durch die Abwärtsbewegung des Kolbens in den Zylinder gesaugt und dort bei der Aufwärtsbewegung komprimiert. Das verdichtete Kältemittel strömt nach dem Öffnen des Druckventils weiter in den Zylinderdeckel und über Bohrungen in zwei Ausgleichsvolumen. Nach dem zweiten Ausgleichsvolumen gelangt das verdichtete Gas über die Serpentine zum Auslass aus dem Kompressorgehäuse.

Anders als bei Verbrennungskraftmotoren werden bei Kolbenkompressoren für Kühlanwendungen üblicherweise sehr kleine Schadräume realisiert. Für den hier untersuchten Kompressor mit circa  $5,5\text{ cm}^3$  Hubraum können diese mit etwa  $0,08\text{ cm}^3$  angegeben werden. Dies entspricht einem Verdichtungsverhältnis von circa  $70 : 1$  und bedeutet bei einem Kolbendurchmesser von  $21,1\text{ mm}$  eine mittlere Spaltdicke von etwa  $0,2\text{ mm}$  zwischen Kolben und Ventilplatte im oberen Totpunkt. Bei der CFD-Rechnung stellt dieser enge Spalt bedingt durch den kleinen Schadraum eine wesentliche Herausforderung dar, da ausreichend Rechenzellen mit Rücksicht auf die Zellqualität platziert

---

<sup>1</sup> Ausnahme bildet der Löser des linearen Gleichungssystems (siehe Kapitel 3.2.6).



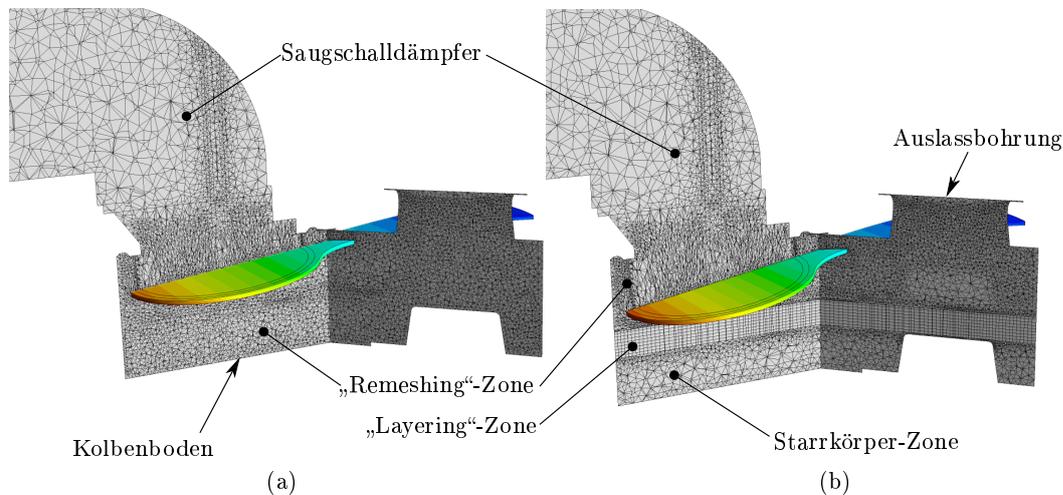
**Bild 4.1:** Darstellung des Simulationsrechengebietes

werden müssen. Vor allem für den Bereich rund um die Ventile und die Ventilplatte werden sehr viele kleine Tetraeder-Zellen benötigt. Um die maximale Zellenanzahl bei größeren Kolbenhuben zu verringern, wird deshalb ein Teil des Rechengitters im Zylinder zu bestimmten Zeitpunkten getauscht. Dabei wird der untere Bereich des Zylinders nach Erreichen eines bestimmten Kolbenhubes durch ein Rechengitter ersetzt, das die „Layering“-Technik unterstützt. Die Volumenänderung durch die Kolbenbewegung wird bei dieser Technik durch das Erzeugen bzw. Kollabieren von Schichten numerisch effektiver Hexaeder-Zellen realisiert. Der obere Bereich des Zylinders wird weiterhin mit den relativ kleinen Tetraeder-Elementen diskretisiert, um die Saugventilbewegung durch „Remeshing“- und „Smoothing“-Techniken zu ermöglichen. Der unterste Bereich nahe dem Kolbenboden wird mittels Starrkörpertranslation entlang der Zylinderachse bewegt und benötigt keine besondere Gitteradaption. Abbildung 4.2 zeigt das Rechengitter des Zylinders kurz vor und nach dem Gittertausch.

Mit der soeben beschriebenen Strategie ergibt sich ein Rechengitter, das abhängig von der Kolbenstellung zwischen 2,2 Mio Zellen im OT und 4,1 Mio Zellen im UT aufweist. Dabei fallen etwa 1 Mio Zellen für den Zylinderdeckel, 250 Tsd Zellen für die restliche Druckstrecke, 350 Tsd Zellen für den Saugschalldämpfer und zwischen 0,7 Mio bis 2,5 Mio Zellen für den Zylinder an.

Um die Netzunabhängigkeit des verwendeten Rechengitters zu untersuchen, wurden für die relativ grob aufgelösten Bereiche (Druckstrecke und Saugschalldämpfer) verschiedene Rechengitter miteinander verglichen.<sup>2</sup> Die dafür verwendeten Druck- und Temperaturrandbedingungen wurden aus vorangegangenen Strömungssimulationen extrahiert, um möglichst vergleichbare Temperatur- und Geschwindigkeitsprofile zu erhalten. Die Auswertungen der Massenströme, der übertragenen Wärmeströme sowie der

<sup>2</sup> Bereiche wurden einzeln untersucht und mit Vergleichsnetzen mit vierfacher Elementanzahl verglichen.



**Bild 4.2:** Rechennetz des Zylinders vor (a) und nach (b) dem Gittertausch

Gasaustrittstemperaturen ergaben akzeptabel geringe Abweichungen der untersuchten Netze. Diese Abweichungen liegen für den Saugschalldämpfer bei circa 0,7 % für den Massenstrom, 4,6 % für den Wärmestrom und unter 0,1 °C für die Austrittstemperatur. Vergleichbare Werte ergaben sich für die Druckstrecke mit 2,8 % für den Massenstrom, 7,3 % für den Wärmestrom und unter 0,1 °C für die Austrittstemperatur.

Da sowohl der Zylinder als auch der Zylinderdeckel aufgrund der Ventilbewegung deutlich genauer aufgelöst werden mussten als bei der Druckstrecke oder dem Saugschalldämpfer, wurde bei diesen Bereichen von Netzunabhängigkeit ausgegangen.

#### 4.1.1 Randbedingungen

Am Einlass (Saugschalldämpfereintritt) und am Auslass (Ende der Serpentine) des Rechengebietes wurden Druckrandbedingungen vorgegeben, die die jeweiligen Betriebsbedingungen widerspiegeln. Die für die Strömungssimulation notwendigen Temperaturrandbedingungen wurden durch Temperaturmessungen, wie sie in der Arbeit von Hopfgartner *et al.* (2016) [23] beschrieben sind, ermittelt. Dazu wurde ein Versuchskompressor mit mehreren Thermoelementen ausgestattet und bei verschiedenen stationären Betriebsbedingungen (nach ASHRAE Vergleichsprozessen) vermessen. Neben diversen Oberflächentemperaturen wurden auch Kältemitteltemperaturen an verschiedenen Stellen im Saugschalldämpfer gemessen, die in weiterer Folge zur Validierung der Sauggaserwärmung herangezogen wurden.

Bei den somit extrahierten Temperaturrandbedingungen handelte es sich um sogenannte Dirichlet-Randbedingungen, bei denen fixe Temperaturen vorgegeben wurden. Für

metallische Oberflächen wurden dabei die periodischen Temperaturänderungen während des Betriebes mit 50 Hz vernachlässigt. Bei dem aus Kunststoff gefertigten Saugschalldämpfer hingegen wurden diese periodischen Temperaturschwankungen durch einen eindimensionalen Wärmeleitungseffekt berücksichtigt. Die Materialwerte für den Kunststoff des Saugschalldämpfers können Tabelle 4.1 entnommen werden.

**Tabelle 4.1:** Materialwerte des Saugschalldämpfers (Ultradur B4300 G6)

Eigenschaft	Wert	Einheit
Dichte	1530	kg/m <sup>3</sup>
Wärmeleitfähigkeit	0,22	W/mK
Spezifische Wärmekapazität	1770	J/kgK

Die Materialdaten des Kältemittels Isobutan wurden mittels vereinfachenden Idealgasmodells implementiert. Dabei wurden für die spezifische Wärmekapazität, die thermische Leitfähigkeit sowie die Viskosität temperaturabhängige lineare Funktionen hinterlegt. Die Rechtfertigung das vereinfachende Idealgasmodell dem realistischeren Realgasmodell vorzuziehen, kann in der Arbeit von Lang (2010) [29] gefunden werden. Für beide Modelle zeigten sich vergleichbare Ergebnisse, jedoch war der rechnerische Aufwand bei der Verwendung des Realgasmodells nahezu das Vierfache.

Mit der Vernachlässigung von Strahlung und Leckagen wurden weitere Vereinfachungen getroffen. Letztere begründen sich auf den zu großen Unsicherheiten in deren Bestimmung. Vor allem beim manuellen Einbau des Saugventils kann das Dichtverhalten gegenüber von maschinell eingebauten Serienventilen deutlich verändert werden.

### 4.1.2 Lösereinstellungen

Analog zur Untersuchung der Gitterunabhängigkeit wurden an einigen Rohrquerschnitten die lokalen Reynoldszahlen ausgewertet, mit dem hydraulischen Durchmesser als charakteristische Länge. Für die Hauptströmung im Saugschalldämpfer lagen die Reynoldszahlen meist über 6000 und für die Strömung durch die Druckstrecke meist über 10000.<sup>3</sup> Dies lässt erkennen, dass in diesen Bereichen mit hoher Wahrscheinlichkeit mit einer turbulenten Strömung zu rechnen ist.

Der Einfluss verschiedener Turbulenzmodellierungen bei der Simulation kleiner Hubkolbenkompressoren auf den Massenfluss, die indizierte Leistung sowie die Saugverluste wurde von Rodrigues (2014) [52] untersucht. Neben den RANS-Modellansätzen  $k-\epsilon$  und  $k-\omega$  SST wurden auch LES-Ansätze mit Messungen verglichen, wobei sich nur marginale Differenzen für oben genannte Größen zwischen den einzelnen Modellansätzen

---

<sup>3</sup>Bei diesen Reynoldszahlen handelt es sich um zeitlich gemittelte Werte. Die Spitzenwerte liegen deutlich darüber.

zeigten. Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Simulationen wurde zur Modellierung der Turbulenz das  $k$ - $\epsilon$ -Turbulenzmodell *Realizable* mit den erweiterten Funktionen zur Behandlung wandnaher Bereiche ausgewählt. Die wichtigsten Lösereinstellungen sind in Tabelle 4.2 zusammengefasst. Die Bedeutung einzelner Einstellungen ist hier nicht weiter angeführt, kann aber in [3] nachgelesen werden.

**Tabelle 4.2:** Zusammenfassung der wichtigsten Lösereinstellungen

Druck-Geschwindigkeitskopplung	Pressure-based (coupled)
Diskretisierung der Gradienten	Green-Gauss Node Based
Interpolationsmethode für Druck	PRESTO!
Interpolationsmethode für Impuls, Turbulenz und Energie	Second Order Upwind

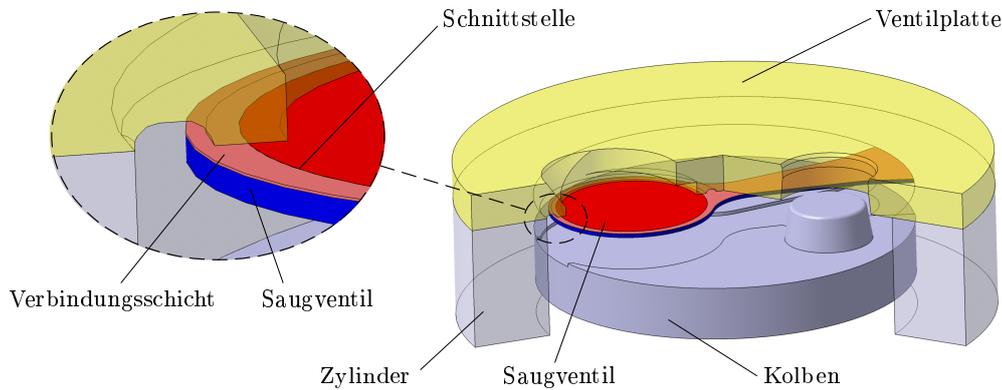
Bei den in dieser Arbeit durchgeführten Kalorimetermessungen wurde der Versuchskompressor mit einer Frequenz von 50 Hz betrieben. Im stationären Betrieb stellte sich aufgrund der Last eine etwas niedrigere Drehzahl ein (Asynchronmotor). Dies wurde in der Simulation mit einer verwendeten Drehzahl von 2950 rpm berücksichtigt. Die Zeitschritte wurden abhängig von der Ventilöffnung gewählt und variierten von 1,4  $\mu$ s während des Öffnens, Schließens und Aufprallens des Saugventils bis hin zu 17  $\mu$ s bei geschlossenen Ventilen. Dies entspricht einem Kurbelwinkel von 0,025° bis 0,3°.

## 4.2 Ventile

In hermetischen Hubkolbenkompressoren werden Flatterventile durch Druckunterschiede, die durch die Bewegung des Kolbens hervorgerufen werden, gesteuert. Um diese Ventilbewegungen zufriedenstellend nachbilden zu können, müssen Fluid-Struktur-Interaktionen berücksichtigt werden. Vor allem beim Saugventil, das während eines Saugtaktes mehrmals öffnet und wieder schließt, wurde auf eine möglichst genaue Modellierung großer Wert gelegt.

In diesem Kapitel werden die verwendeten Modelle für Druck- und Saugventil beschrieben und mit Messungen verglichen, die bei Betriebsbedingungen gemäß dem ASHRAE Vergleichsprozess<sup>4</sup> durchgeführt wurden. Zur Validierung der Ventilbewegung wurden Messungen von Nagy *et al.* (2008) [40] verwendet. Diese wurden mittels LDV durchgeführt, wobei der Laser jeweils auf die Ventiltellermitte gerichtet wurde. Für genauere Information dazu sei hier auf diese Arbeit verwiesen.

<sup>4</sup> –23,3 °C Verdampfungstemperatur, 54,4 °C Kondensationstemperatur und 32,2 °C Umgebungstemperatur.



**Bild 4.3:** Schließen des Saugventils in der Simulation

### 4.2.1 Schließen des Ventils

Die Strömungssimulation in ANSYS Fluent erfordert ein Rechengitter, das durchgehend miteinander verbunden ist. Das Schließen des Ventils kann deshalb nicht einfach durch beliebiges Erzeugen bzw. Entfernen von Zellen zwischen Ventil und Ventilplatte modelliert werden. Es muss dabei immer eine Art Verbindungsschicht zwischen den Bereichen vor und nach dem Ventil geben. Somit wäre aber ein permanenter Massenaustausch auch bei geschlossenem Ventil<sup>5</sup> möglich. Zum völligen Verschließen des Ventils wird deshalb die Verbindungsschicht durch eine Schnittstelle zweigeteilt, die in Abhängigkeit der Ventilposition ihre Eigenschaft von durchlässig “interior“ auf undurchlässig “wall“ ändern kann. Die Mindestdicke der Verbindungsschicht ist wiederum von der gewählten Größe der Zellen abhängig, die durch einen Kompromiss zwischen Genauigkeit und Gesamtanzahl der Rechenzellen, sowie gewisser Mindestanforderungen an die Zellqualität bestimmt wird. In Abbildung 4.3 ist diese Verbindungsschicht (rot) für das Saugventil des HTK 55 Kompressors dargestellt. Hierbei beträgt die gewählte Mindestdicke der Schicht 20  $\mu\text{m}$  und die beschriebene Schnittstelle befindet sich radial gesehen mittig am Ventilsitz. Analoges gilt für das Druckventil.

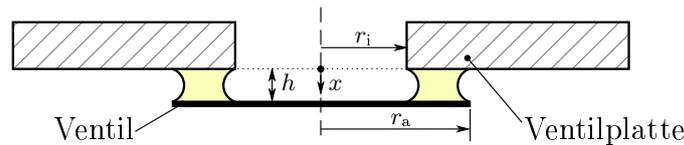
### 4.2.2 Ökleebeffekt

Das zur Schmierung verwendete Öl wird von der in der Kurbelwelle integrierten Ölpumpe vom Ölsumpf zu den bewegten Bauteilen gefördert und gelangt dabei unweigerlich auch zwischen Ventil und Ventilplatte. Der dabei entstehende Ölfilm bewirkt das sogenannte Ökleeben und führt zu einem verzögerten Öffnen des Ventils. Dieser Klebeeffekt lässt sich hauptsächlich auf viskose Kräfte aufgrund der Verformung des Ölfilms, sowie auf Kapillarkräfte zurückführen. Ein vereinfachendes Modell für diese Ökleebeekraft wird in Khalifa und Liu (1998) [25] sowie in Pizarro-Recabarren *et al.* (2012) [48] vorgestellt.

<sup>5</sup> Entspricht hier einem Ventilhub kleiner 22  $\mu\text{m}$ .

Das Modell geht dabei von einer kreisrunden Bohrung der Ventilplatte in Verbindung mit einer konzentrischen runden ebenen Platte als Ventil aus, die sich beim Öffnen parallel zur Ventilplatte bewegt (siehe Abbildung 4.4). Die dabei auftretende Öllebkraft, angegeben in Gleichung 4.1, ist geschwindigkeits- sowie positionsabhängig und verschwindet nach dem Reißen des Ölfilms.<sup>6</sup>

$$\begin{aligned}
 F_{\text{st}} &= F_{\text{t}} + F_{\text{v}} \\
 F_{\text{t}} &= -\pi r_{\text{i}}^2 (X^2 - 1) \frac{2 \sigma_{\text{st}} \cos \beta_{\text{st}}}{h} \\
 F_{\text{v}} &= \frac{3 \pi \eta}{2 h^3} \frac{dh}{dt} r_{\text{i}}^4 \left( 1 - X^4 + \frac{1 - 2 X^2 + X^4}{\ln X} \right) \\
 \text{wobei: } \quad X &= \frac{r_{\text{a}}}{r_{\text{i}}}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$



**Bild 4.4:** Geometrie des Öllebmodells (Khalifa und Liu, 1998 [25])

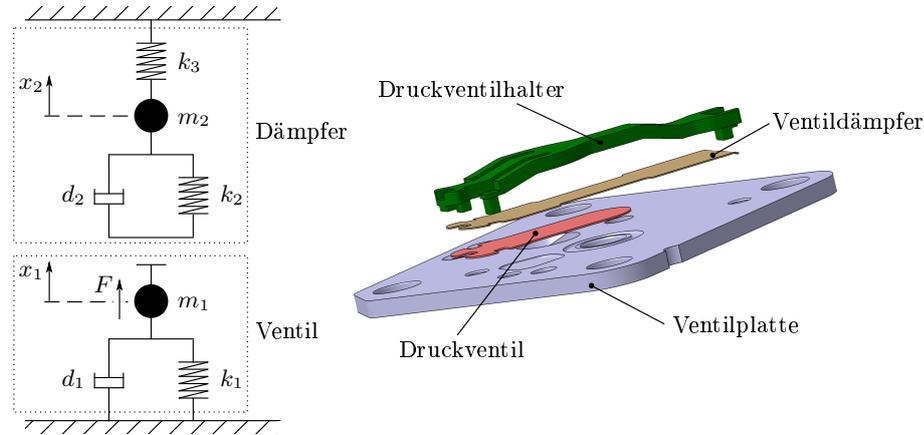
### 4.2.3 Modellierung des Druckventils

Für die Modellierung von Ventilen bei der Simulation von Kolbenkompressoren hat sich seit vielen Jahren das Modell des Feder-Masse-Schwingers bewährt. Erste wichtige Arbeiten dazu wurden von Costagliola (1949) [12] durchgeführt und stellen die Grundlage für die weiterführenden Arbeiten von Habing und Peters (2006) [20] sowie Aigner und Steinrück (2007) [1] dar. Die Bewegung des Feder-Masse-Schwingers mit einem Freiheitsgrad kann demnach wie folgt angeschrieben werden:

$$\begin{aligned}
 m_{\text{eff}} \ddot{x} + d \dot{x} + k x &= F_{\text{g}} - F_{\text{pre}} + F_{\text{st}} , \\
 \dot{x}(t^+) &= -e_{\text{res}} \dot{x}(t^-) \quad \text{für: } x \leq x_{\text{min}} .
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Neben den experimentell ermittelten Konstanten für die Steifigkeit  $k$  sowie der Dämpfung  $d$  muss die effektive Ersatzmasse  $m_{\text{eff}}$  an die Eigenfrequenz des Ventils angepasst werden, die entweder ebenfalls durch Experimente oder aber auch durch eine FE-Berechnung bestimmt werden kann. Die rechte Seite der Bewegungsgleichung setzt sich

<sup>6</sup>Das Reißen des Ölfilms wurde bei einem Ventilhub von 80  $\mu\text{m}$  angenommen.



**Bild 4.5:** Ersatzsystem und CAD-Zeichnung des Druckventils

aus Kräften aufgrund der Druckdifferenz  $F_g$ , der Ventilvorspannung  $F_{\text{pre}}$  und des Ölklebens  $F_{\text{st}}$  zusammen. Das Zurückspringen des Ventiltellers vom Ventilsitz (Ventilplatte) beim Aufprall wird durch Setzen einer neuen Anfangsbedingung der Differentialgleichung 4.2 modelliert. Unterschreitet der aktuelle Ventilhub  $x = x(t)$  den Minimalhub  $x_{\text{min}}$ , so wird für  $\dot{x}(t^+) = -e_{\text{res}} \dot{x}(t^-)$  gesetzt, wobei  $e_{\text{res}}$  den Rücksprungparameter bezeichnet, der aus Messungen der Ventilerhebungskurve ermittelt werden kann.

Die rechte Seite in Abbildung 4.5 zeigt eine CAD-Zeichnung des im HTK 55 verwendeten Druckventils. Dieses kann sich bis zu einer Ventilöffnung von 0,55 mm frei bewegen. Beim weiteren Öffnen trifft das Druckventil auf den Ventildämpfer, der das Ventil abbremst und somit den Gesamthub begrenzt. Die vorhin gezeigte Bewegungsgleichung ist somit nur für den ersten Teil der Ventilöffnung anwendbar. Für eine Ventilöffnung  $x_1 > 0,55$  mm muss das auf der linken Seite in Abbildung 4.5 gezeigte Ersatzsystem mit zwei Massen<sup>7</sup> benutzt werden. Aus dem Kräftegleichgewicht beider Massen resultiert somit folgendes Gleichungssystem:

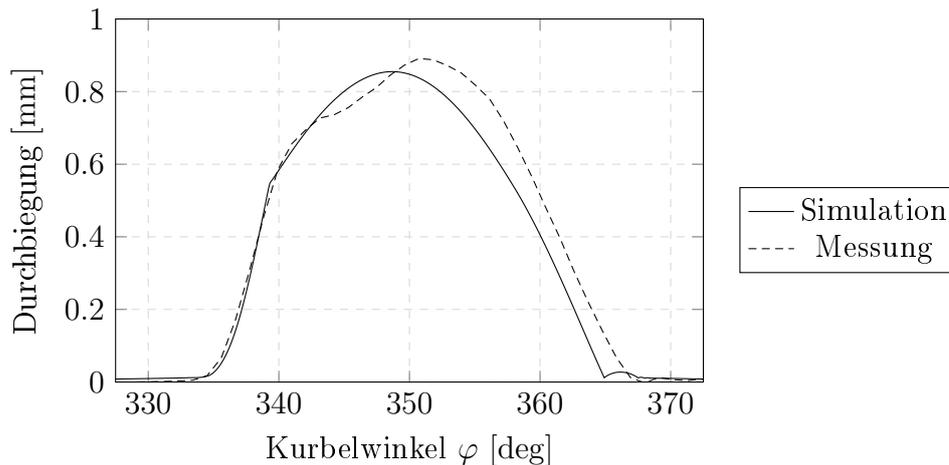
$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} d_1 + d_2 & -d_2 \\ -d_2 & d_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.3)$$

In einem weiteren Schritt wird das in Gleichung 4.3 gezeigte, inhomogene, lineare Differentialgleichungssystem zweiter Ordnung auf ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung reduziert (Vöth, 2006 [61]), das sich danach durch numerische Verfahren (z.B.: Runge-Kutta Verfahren) einfach berechnen lässt.

Wie schon erwähnt, können die Parameter  $k_1$ ,  $d_1$  sowie  $m_1$  experimentell bestimmt werden. Die restlichen Parameter hingegen müssen so angepasst werden, dass die mittels LDV gemessene Ventilerhebungskurve möglichst gut nachgebildet werden kann. Der

<sup>7</sup> Jede dieser Massen verfügt über je einen Freiheitsgrad.

in Abbildung 4.6 gezeigte Vergleich zwischen gemessener und simulierter<sup>8</sup> Ventilerhebungskurve zeigt bis zum Kontakt zwischen Druckventil und Ventildämpfer eine sehr gute Übereinstimmung. Der weitere Verlauf ist aufgrund von Schwingungen des realen Systems schwierig zu modellieren. Dennoch stimmen die maximale Ventilöffnung sowie der Schließzeitpunkt ebenfalls recht gut überein.



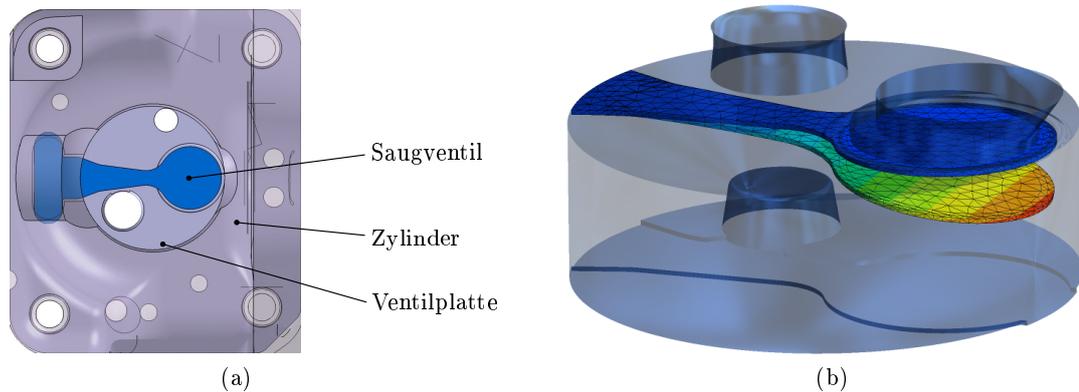
**Bild 4.6:** Vergleich zwischen gemessener und simulierter Erhebungskurve des Druckventils

#### 4.2.4 Modellierung des Saugventils

Anders als beim Druckventil wird für die Bewegung des Saugventils eine FE-Modellierung verwendet. Die Vorgehensweise dabei wurde bereits in Kapitel 3.2 ausführlich beschrieben. Das dafür verwendete Rechennetz besteht aus etwa 1500 10-Knoten-Tetraedern und ist in Abbildung 4.7 (b) für die Ruhestellung bzw. eine Auslenkung von etwa 1,5 mm gezeigt. Abbildung 4.7 (a) zeigt eine CAD-Zeichnung der realen Einbausituation des Saugventils, bei der das Ventil zwischen Zylinder und Ventilplatte festgeklemmt wird. In der Simulation wird diese Montagesituation durch eine feste Einspannung am Zylinderumfang approximiert.

Wie bereits erwähnt, führt das Saugventil während des Saugtaktes eine Schwingbewegung aus, bei der es mehrmalig am Ventilsitz aufschlägt. Während des Aufpralls auf den Ventilsitz wird ein Teil der kinetischen Energie des Ventils vor allem durch das vorhandene Öl absorbiert. Dieser Dämpfungseffekt durch das Öl muss auch in den Ventilmodellen berücksichtigt werden. Dafür werden jedem Knoten des Rechennetzes,

<sup>8</sup>Das Druckventil wird als eine parallelbewegende ebene, kreisrunde Platte approximiert.

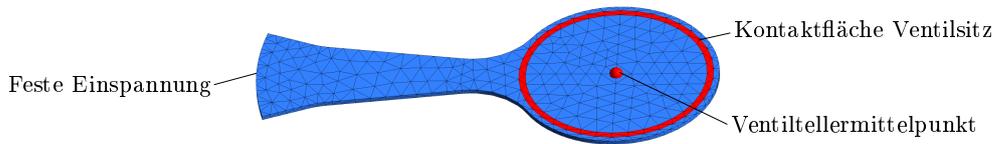


**Bild 4.7:** Darstellung der Einbausituation (a) sowie der Diskretisierung (b) des Saugventils

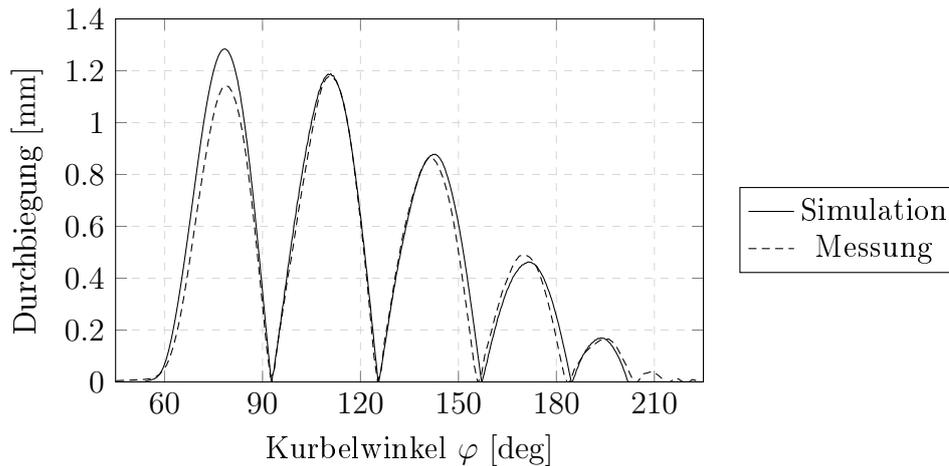
der einen bestimmten Abstand unterschreitet, geschwindigkeitsabhängige Dämpfungskräfte aufgeprägt.

Bei der Kontaktmodellierung des Ventils gilt es ferner, ein Hineinragen des Ventils in die Ventilplatte und somit das Erzeugen von Zellen mit “negativem“ Volumen zu verhindern. Bei dem für das Saugventil verwendeten Penaltyverfahren wird dazu eine Nebenbedingung ( $u \leq \Delta x$ , siehe Kapitel 3.1.9) eingeführt, deren strikte Einhaltung nur bei unendlich großen Penaltyparametern erreicht wird. Um Konvergenzprobleme zu umgehen, muss aber der Parameter auf einen endlichen Wert begrenzt werden, wodurch jedoch geringfügige Durchdringungen in Kauf genommen werden müssen. Bezieht man die Nebenbedingung nicht auf die exakte Geometrie der Ventilplatte, sondern auf eine fiktive Kontur innerhalb des Rechnernetzes, so können auch kleinere Durchdringungen akzeptiert werden. Dazu wird die Tatsache ausgenutzt, dass die Strömungssimulation ohnehin eine Verbindungsschicht benötigt, die sich zwischen bewegender Ventiloberfläche und starrer Begrenzung der Ventilplatte nahezu beliebig verformen lassen muss. Das nicht exakte Einhalten der Nebenbedingung beeinflusst zwar geringfügig die Mindestdicke der Zellen in der Verbindungsschicht, negative Zellen werden somit aber vermieden. Kräfte aufgrund des Kontaktes zwischen Ventil und Ventilplatte werden direkt an jenen Rechenknoten berücksichtigt, an denen Kontakt vorherrscht. Öllebkräfte werden, wie in Gleichung 4.1 angegeben, berechnet und gleichmäßig auf die mit dem Ventilsitz in Kontakt befindlichen Knoten aufgeteilt. Zusatzkräfte sowie die Vorspannung des Ventils werden hingegen im Mittelpunkt des Ventiltellers angesetzt, der in Abbildung 4.8 dargestellt ist.

Ein Vergleich zwischen gemessener und simulierter Ventilerhebungskurve ist in Abbildung 4.9 zu sehen. Bis auf eine kleine Abweichung in der Maximalauslenkung des ersten Ventilhubes stimmen Simulation und Messung sehr gut überein.



**Bild 4.8:** Darstellung der Kraftangriffspunkte des diskretisierten Saugventils



**Bild 4.9:** Vergleich zwischen gemessener und simulierter Erhebungskurve des Saugventils

## 4.3 Kolbenbewegung

Die Bewegung des Kolbenbodens wird mit der in Abbildung 4.10 angegebenen Gleichung vorgegeben. Durch den Offset des Kolbenbolzens wird der obere Totpunkt beim HTK 55 Kompressor bei einem Kurbelwinkel von etwa  $\varphi = 3^\circ$  erreicht. Der Maximalhub des Kolbens beträgt dabei etwa 16 mm.

Die Abmessungen der Kurbelgeometrie des Versuchskompressors sind Tabelle 4.3 zu entnehmen.

**Tabelle 4.3:** Abmessungen der Kurbelgeometrie des Versuchskompressors

		[mm]
Offset	$o$	3
Kurbelradius	$r$	7,985
Pleuellänge	$l$	47

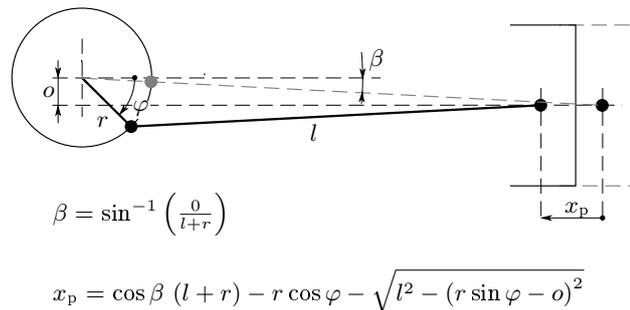


Bild 4.10: Kolbenbewegung

## 4.4 Validierung

Um das gesamte Simulationsmodell zu überprüfen, wurden neben den schon gezeigten Ventilerhebungskurven auch Druck- und Temperaturmessungen durchgeführt. Die Ergebnisse der Temperaturmessung wurden einerseits für die Temperaturrandbedingungen des Simulationsmodells verwendet, andererseits konnte damit auch die Sauggaserwärmung durch den Saugschalldämpfer überprüft werden. Als Sauggaserwärmung wird hier der Temperaturunterschied zwischen dem Einlass und dem Krümmer des Saugschalldämpfers verstanden, der bei der Messung etwa bei 4,8 °C und bei der Simulation bei 5,7 °C lag.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung des Zylinderdruckes wurde schon ausführlich in Kapitel 2.3.3 beschrieben. Zur Validierung der Simulationsergebnisse wurde dazu ein HTK 55 Kompressor bei Betriebsbedingungen entsprechend dem ASHRAE Vergleichsprozess bei einer Verdampfungstemperatur von −23,3 °C und einer Kondensationstemperatur von 54,4 °C vermessen. Abbildung 4.11 zeigt den Vergleich zwischen gemessenen und simulierten Drücken und Tabelle 4.4 fasst die ausgewerteten Ergebnisse zusammen. Die gemessenen Drucksignale wurden, wie in Kapitel 2.3.3 beschrieben, korrigiert und über 120 aufeinanderfolgenden Kompressorumdrehungen gemittelt. Generell zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung zwischen Messung und Simulation, wobei kleinere Abweichungen während des erstmaligen Öffnens des Saugventils und im letzten Bereich des Kompressionstaktes zu erkennen sind. Eine mögliche Erklärung für das zu starke Abfallen des simulierten Zylinderdruckes kann das „harte“ Schalten der Schnittstelle in der Verbindungsschicht sein. In der Simulation wird angenommen, dass das Ventil bis zum Erreichen eines gewissen Ventilhubes absolut dicht sei. In Realität tritt aber fast immer eine Leckage auf, die zu einem sanfteren Druckausgleich führt als beim abrupten Öffnen und Schließen des Ventils. Die Abweichungen am Ende des Kompressionstaktes können einerseits der leicht abweichenden Dynamik des Saugventils beim Schließen und andererseits den Leckagen<sup>9</sup> zugeschrieben werden. Bei der Serienausführung des HTK 55 Kompressors liegt die Gesamtleckage im Bereich von 4 %. Beim Versuchskom-

<sup>9</sup> Leckage zwischen Kolben und Zylindergehäuse bzw. Saugventil.

pressor kann diese aufgrund des manuellen Einbaus des Saugventils sogar noch höher liegen. Für die Simulation wurde keine Leckage angenommen, da sie erstens nur sehr grob geschätzt werden kann und sie zweitens für verschiedene Versuchsaufbauten unterschiedlich sein kann. Der Vergleich zwischen Messung und Simulation zeigt einen um rund 7% zu hohen, simulierten Massenstrom, was sich etwa mit der zu erwartenden Gesamtleckage deckt.

Beim Vergleichen der indizierten Leistung sowie der Strömungsverluste zwischen Messung und Simulation sei hier nochmals auf die Empfindlichkeit der genauen Bestimmung des Kurbelwinkels sowie des Offsetfehlers des Drucksignals auf die Messauswertung hingewiesen. So ändert sich beispielsweise bei einer Abweichung des oberen Totpunktes um  $0,5^\circ$  Kurbelwinkel, die indizierte Leistung um etwa 1 W. Das Nichtberücksichtigen des konstanten Offsetfehlers im Drucksignal kann sogar zu einem Vorzeichenwechsel der saugseitigen Strömungsverluste und somit zu physikalisch nicht sinnvollen Ergebnissen führen.

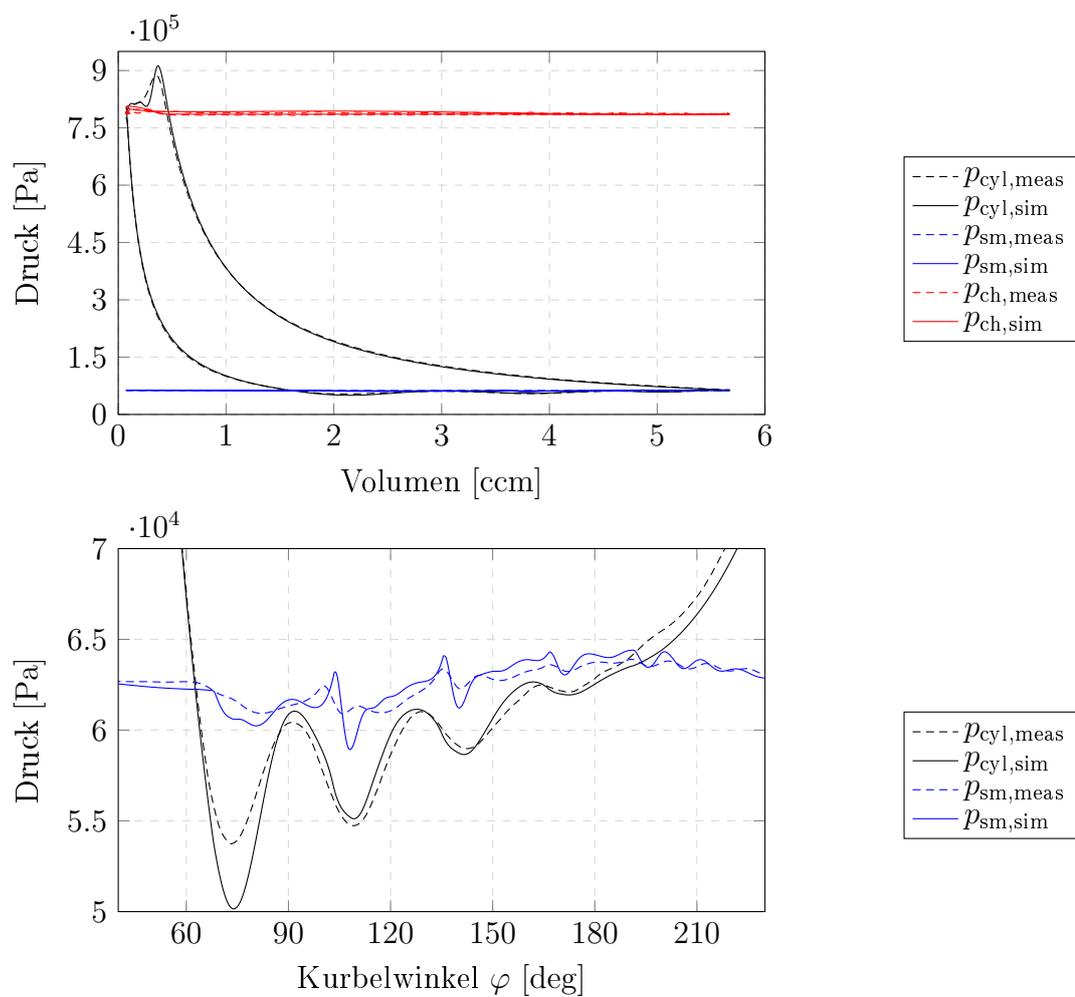
Die Simulationsergebnisse aus Tabelle 4.4 passen relativ gut mit den aus den gemessenen Drucksignalen berechneten Strömungsverlusten sowie der indizierten Leistung zusammen. Dabei ist die relativ große Standardabweichung bei den saugseitigen Verlusten auffällig, die auf die Ungenauigkeiten des Indizierdrucksignals bei niedrigen Drücken zurückzuführen ist. Da die simulierten Ergebnisse größtenteils innerhalb der gemessenen Standardabweichungen liegen, wird davon ausgegangen, dass das bestehende Simulationsmodell ausreichend abgestimmt wurde und für weitere Untersuchungen nun angewendet werden kann.

**Tabelle 4.4:** Vergleich der indizierten Leistung und der Strömungsverluste zwischen Messung und Simulation für den stationären ASHRAE-Zyklus  $-23,3^\circ\text{C}/54,4^\circ\text{C}$ <sup>10</sup>

	$f \oint p dV$	$P_{\text{SVI}}$	$P_{\text{SVII}}$	$P_{\text{DVI}}$	$P_{\text{DVII}}$
Messung [W]	$37,39 \pm 0,21$	$0,78 \pm 0,09$	$0,88 \pm 0,08$	$0,77 \pm 0,01$	$1,09 \pm 0,03$
Simulation [W]	37,45	0,76	0,95	0,75	1,12
$\Delta$ [%]	0,17	-2,94	7,39	-2,51	3,42

Es sei hier an dieser Stelle nochmals angemerkt, dass sich einzelne Parameter - im Speziellen das Schadvolumen und die Ventilvorspannung - bei unterschiedlichen Aufbauten des Versuchskompressors unterscheiden. Diese Veränderungen müssen in der Simulation (durch Anpassen an Messungen) berücksichtigt werden. Da vor allem das Schadvolumen einen sehr großen Einfluss hat, weisen die Versuchskompressoren auch bei gleichen Betriebsbedingungen leicht unterschiedliche Ergebnisse auf.

<sup>10</sup>Definition der Strömungsverluste siehe Kapitel 2.2.5.



**Bild 4.11:** Vergleich der gemessenen und simulierten Druckkurven für den stationären ASHRAE-Zyklus  $-23,3\text{ °C}/54,4\text{ °C}$

# 5 Kraftunterstützte Saugventile

Ventile in Kolbenkompressoren haben die Aufgabe, die Ein- und Auslassöffnung in den Zylinder zu bestimmten Zeitpunkten zu verschließen bzw. frei zu geben. Dies kann im Gegensatz zu Verbrennungskraftmaschinen nicht an vordefinierten Kurbelwinkelpositionen erfolgen, sondern muss an den Betriebspunkt des Kompressors angepasst werden. Ein mechanisch zwangsgeführtes Ventil sowie auch eine elektromechanische Ventilsteuerung ohne Sensoren sind hiermit in der Regel nicht praktikabel. Bestens geeignet hingegen sind selbststeuernde Flatterventile, die durch den Druckunterschied zwischen Zylinder und Saug- bzw. Druckschalldämpfer gesteuert werden. Diese Flatterventile sind bei hermetischen Kolbenkompressoren auch aufgrund hoher Zuverlässigkeit<sup>1</sup> und Einfachheit die einzige Lösung am Markt. Ein ausschlaggebendes Verkaufsargument sind die geringen Kosten dieser Blechblättchen.

Als Nachteil dieser simplen Ventile kann deren Effizienz gewertet werden. So können die Strömungsverluste durch das Saug- und Druckventil mit fast 50 % der thermodynamischen Verluste (Ribas *et al.*, 2008 [50]) abgeschätzt werden. Vor allem das Saugventil birgt aufgrund des relativ langen Saugtaktes ein hohes Potential zur Verbesserung in sich.

In der Vergangenheit wurden etliche Arbeiten veröffentlicht, in denen das Verhalten des Saugventils bei verschiedenen Betriebsbedingungen untersucht wurde. Als Beispiele dafür sollen die Arbeiten von Burgstaller *et al.* (2008) [9] und Leray (2011) [31] genannt werden.

Generell sollte das Ventil folgende Eigenschaften besitzen:

- Eine möglichst schnelle Ventilöffnung zum Zeitpunkt des Druckausgleiches.
- Das Ventil sollte weit geöffnet werden können und über den gesamten Saug- bzw. Ausstoßtakt geöffnet bleiben.
- Das Schließen des Ventils sollte einerseits so erfolgen, dass ein Rückströmen des Gases verhindert wird, andererseits ist ein zu frühes Schließen ebenfalls zu vermeiden.
- Eine begrenzte Schließgeschwindigkeit, um die geforderte Lebensdauer des Ventils gewährleisten zu können.

---

<sup>1</sup>Diese Art von Kompressoren sollten wartungsfrei über 15 Jahre betrieben werden können.

In der Regel sieht das reale Betriebsverhalten von Saugventilen in hermetischen Kolbenkompressoren wesentlich anders aus, wie in den Abbildungen 4.9 und 4.11 zu erkennen ist. Bevor ein Saugventil öffnet, muss neben der eigenen Trägheitskraft die sogenannte Öllebekraft und die Ventilvorspannung überwunden werden. Im weiteren Verlauf des Saugtaktes schlägt das Ventil mehrmals auf die Ventilplatte auf und springt von dort aus wieder zurück, bis es nahe dem unteren Totpunkt des Kolbens letztendlich durch die Ventilvorspannkraft und den steigenden Überdruck im Zylinder geschlossen wird. Neben den teilweise hohen Aufprallgeschwindigkeiten ist auch das Timing des Schließens nicht für jeden Betriebspunkt des Kompressors perfekt ausgelegt. Diese Problematik zum Anlass nehmend, werden im folgenden Kapitel zwei verschiedene Ansätze zur Minimierung der Saugverluste sowie zur Optimierung der Ventileigenschaften numerisch als auch experimentell untersucht.

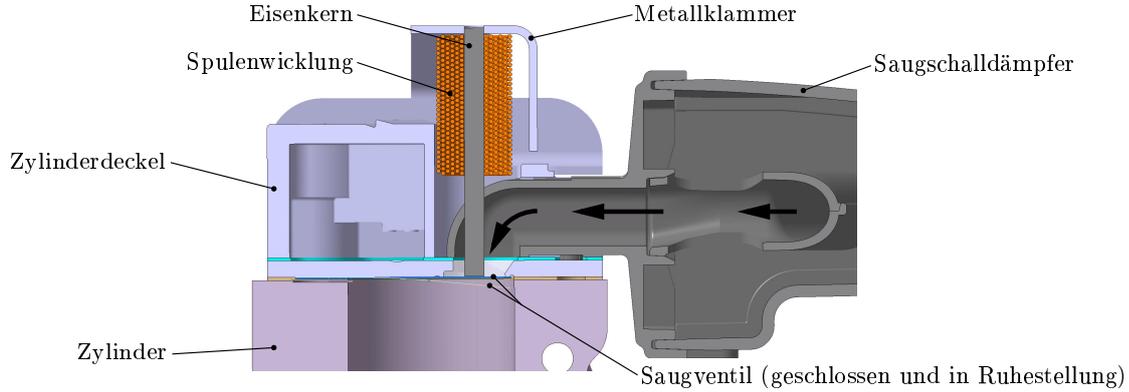
## 5.1 Elektromagnetisch unterstütztes Saugventil

Wie schon mehrere Veröffentlichungen, wie etwa jene von Burgstaller *et al.* (2008) [9] bestätigen, wirkt sich eine Verringerung der Ventilvorspannung positiv auf die Saugverluste und somit auch auf die Kompressorleistungszahl aus. Als Grenze gilt dabei, dass die Vorspannung nur soweit reduziert werden darf, dass das Ventil trotzdem noch rechtzeitig schließt. Die Idee in diesem Kapitel basiert nun auf der Vermutung, dass durch eine weitere Reduktion der Vorspannkraft die Leistungszahl weiter verbessert werden kann. Um das Schließen des Ventils dennoch gewährleisten zu können, wird eine elektromagnetische Spule verwendet. Der Inhalt dieses Kapitels basiert im Wesentlichen auf der Veröffentlichung von Hopfgartner *et al.* (2017) [24] und wurde um einige Details erweitert.

Auf Basis des Serienkompressors HTK 55 werden die Auswirkungen eines negativ vorgespannten Saugventils auf die Kompressorleistungszahl untersucht. Dazu wird das Seriensaugventil, das mit etwa 0,05 N vorgespannt ist, mit einem Saugventil mit einer Vorspannung von  $-0,16$  N ersetzt. Die zum Schließen des Saugventils verwendete Spule wird wie in Abbildung 5.1 gezeigt, zentral über dem Saugventilteller positioniert und der Eisenkern durch den Saugschalldämpferkrümmer geführt. Der Eisenkern schließt dabei nahezu bündig mit der Ventilplatte ab, um einen möglichst kleinen Wirkspalt und somit eine große Wirkkraft auf das Ventil zu erzeugen. Das andere Ende des Eisenkerns wird über eine Metallklammer mit den magnetischen Anbauteilen verbunden, um einen geschlossenen Magnetkreis zu erzeugen.

### 5.1.1 Elektromagnetische Spule

Die Vorauslegung der elektromagnetischen Spule erfolgte analog zu Glück *et al.* (2011) [17]. Mit der magnetischen Durchflutung  $\Theta = Ni$ , wobei  $N$  der Windungszahl und  $i$  dem Strom, der die Spule durchfließt, entspricht, kann der magnetische Fluss durch die



**Bild 5.1:** CAD-Darstellung der Einbausituation der elektromagnetischen Spule

Spule  $\Phi_c$  über das Hopkinsonsche Gesetz angegeben werden:

$$\Phi_c = \frac{\Theta}{\mathcal{R}}. \quad (5.1)$$

Dabei ist  $\mathcal{R}$  die äquivalente Reluktanz des Gesamtsystems, die sich aus der effektiven Reluktanz des Eisenkerns und der Metallklammer  $\mathcal{R}_c$ , der effektiven Reluktanz des Saugventils  $\mathcal{R}_v$ , der effektiven Reluktanz des Spaltes zwischen Ventil und Eisenkern  $\mathcal{R}_g$  und der Reluktanz  $\mathcal{R}_l$ , die die Leckageflüsse berücksichtigt, zusammensetzt. Mit der Ersatzschaltung aus Abbildung 5.2 kann die äquivalente Reluktanz  $\mathcal{R}_{(x)}$  somit geschrieben werden als:

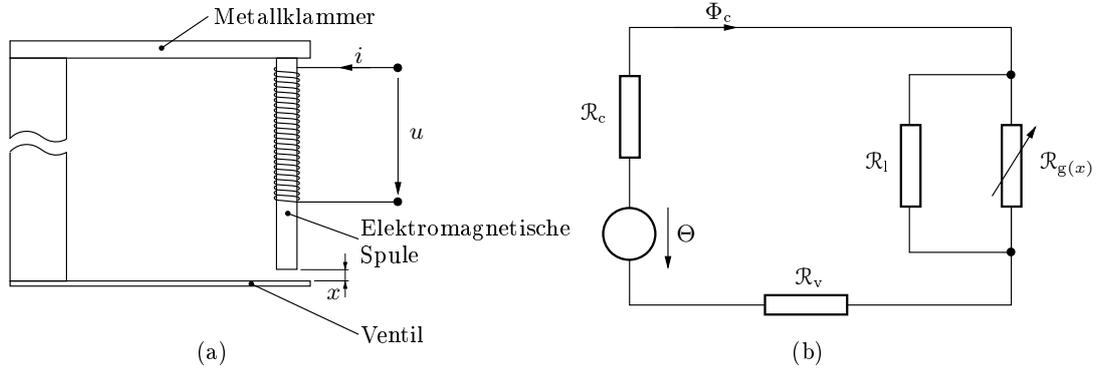
$$\mathcal{R}_{(x)} = \mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \frac{\mathcal{R}_l \mathcal{R}_{g(x)}}{\mathcal{R}_l + \mathcal{R}_{g(x)}} = \frac{l_c}{\mu_0 \mu_{rc} A_c} + \frac{l_v}{\mu_0 \mu_{rv} A_v} + \frac{\left(\frac{l_l}{\mu_0 A_l}\right) \left(\frac{\alpha x}{\mu_0 A_g}\right)}{\left(\frac{l_l}{\mu_0 A_l}\right) + \left(\frac{\alpha x}{\mu_0 A_g}\right)}. \quad (5.2)$$

Zur Vereinfachung werden die relativen Permeabilitäten  $\mu_{r*}$  als konstant angenommen.  $l_*$  und  $A_*$  sind die effektiven Längen und die effektiven Flächen der entsprechenden Teilreluktanzen. Mit dem verketteten Fluss der Spule  $\psi = N \Phi_c$  und dem Faradayschen Gesetz kann die Spannung  $u_L$  ausgedrückt werden als:

$$u_L = \frac{d\psi}{dt}. \quad (5.3)$$

Der Spulenstrom  $i$  kann als Funktion des Spaltes und des verketteten Flusses wie folgt angegeben werden:

$$i_{(x,\psi)} = \frac{\mathcal{R}_{(x)} \psi}{N^2}. \quad (5.4)$$



**Bild 5.2:** Schematisches Diagramm (a) und Ersatzschaltbild (b) des elektromagnetisch angesteuerten Saugventils

Ausgehend von der magnetischen Energie:

$$\begin{aligned}
 W_m &= \int_0^\psi i_{(x,\bar{\psi})} d\bar{\psi} = \int_0^\psi \frac{\mathcal{R}_{(x)} \bar{\psi}}{N^2} d\bar{\psi} = \frac{\mathcal{R}_{(x)} \psi^2}{2 N^2} \\
 &= \frac{N^2 i^2 \left( \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l \right)}{2 \left[ (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_l) \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v) \right]}
 \end{aligned} \tag{5.5}$$

kann die magnetische Kraft  $F_m$  abgeleitet werden:

$$F_m = \frac{\partial W_m}{\partial x} = - \frac{N^2 i^2 \frac{\alpha}{\mu_0 A_g} \mathcal{R}_l^2}{2 \left[ (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_l) \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v) \right]^2} . \tag{5.6}$$

Der Spulenstrom in Gleichung 5.6 ist im Grunde abhängig von der Einschaltzeit und der Spaltbreite. Für die Auslegung der Spule wird jedoch vereinfachend ein maximal zulässiger Spulenstrom  $i_{\max}$  angenommen. Mit der Anforderung, dass die veränderte Vorspannung des Saugventils und die zusätzlich aufgebrachte, magnetische Kraft äquivalent der Vorspannung des Serienventils sein sollte, folgt für das untersuchte Ventil (0,4 mm geöffnet im Ruhezustand) eine erforderliche magnetische Kraft von 0,212 N. Mit den Werten aus Tabelle 5.1, die auf groben Annahmen basieren, kann die erforderliche Windungszahl wie folgt abgeschätzt werden:

$$N_{\min} = \sqrt{\frac{2 F_m \mu_0 A_g}{\alpha} \frac{\mathcal{R}_g (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_l) + \mathcal{R}_l (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v)}{i_{\max} \mathcal{R}_l}} \approx 190 . \tag{5.7}$$

Die für die Versuche verwendete elektromagnetische Spule resultiert aus der erforder-

**Tabelle 5.1:** Annahmen für die Vorauslegung der elektromagnetischen Spule

	Wert	Einheit		Wert	Einheit
$x$	0,4	mm	$A_g$	3,14	mm <sup>2</sup>
$l_c$	50	mm	$A_c$	3,14	mm <sup>2</sup>
$l_v$	20	mm	$A_v$	0,5	mm <sup>2</sup>
$l_l$	0,4	mm	$A_l$	7,1	mm <sup>2</sup>
$\alpha$	2	-	$\mu_0$	$1,26 \cdot 10^{-6}$	Vs/Am
$i_{\max}$	2,3	A	$\mu_{rc}$	1000	-
$F_{\text{erf}}$	0,212	N	$\mu_{rv}$	850	-

**Tabelle 5.2:** Finale Hauptabmessungen der elektromagnetischen Spule

	Wert	Einheit
Windungszahl	190 ÷ 205	-
Länge des Eisenkerns	31,8	mm
Durchmesser des Eisenkerns	2,5	mm
Außendurchmesser der Spule	9,3	mm
Drahtdurchmesser	0,5	mm

lichen Windungszahl sowie geometrischer Restriktionen. Die Hauptabmessungen sind Tabelle 5.2 zu entnehmen.

Um die Anziehungskraft der Spule auf das Ventil auch in der Simulation zu berücksichtigen, muss in Gleichung 5.6 der veränderliche Spulenstrom eingesetzt werden. Dazu kann der elektrische Schaltkreis der Magnetspule im Grunde als Widerstand und Induktivität aufgefasst werden. Der zeitlich veränderbare Strom beim Einschaltvorgang ist für diese Schaltkreise allgemein bekannt und lässt sich wie folgt berechnen:

$$i(t) = \frac{u}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) . \quad (5.8)$$

Die darin enthaltene, charakteristische Zeitkonstante  $\tau$  setzt sich wiederum aus dem Verhältnis zwischen Induktivität  $L(x)$  und Widerstand  $R$  zusammen. Mit dieser Formulierung für den Strom kann die Gleichung für die Magnetkraft schlussendlich geschrieben werden als:

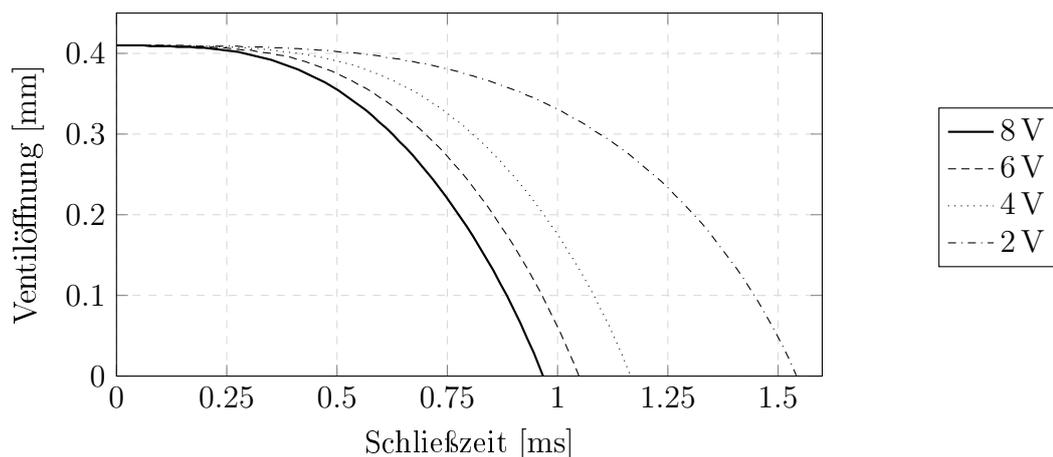
$$F_m = - \frac{N^2 \frac{\alpha}{\mu_0 A_g} \mathcal{R}_l^2}{2 \left[ (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_l) \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v) \right]^2} \frac{u^2}{R^2} \left( 1 - e^{-\frac{tR}{L(x)}} \right)^2 . \quad (5.9)$$

Die Induktivität verändert sich wiederum mit der Spaltbreite und kann berechnet wer-

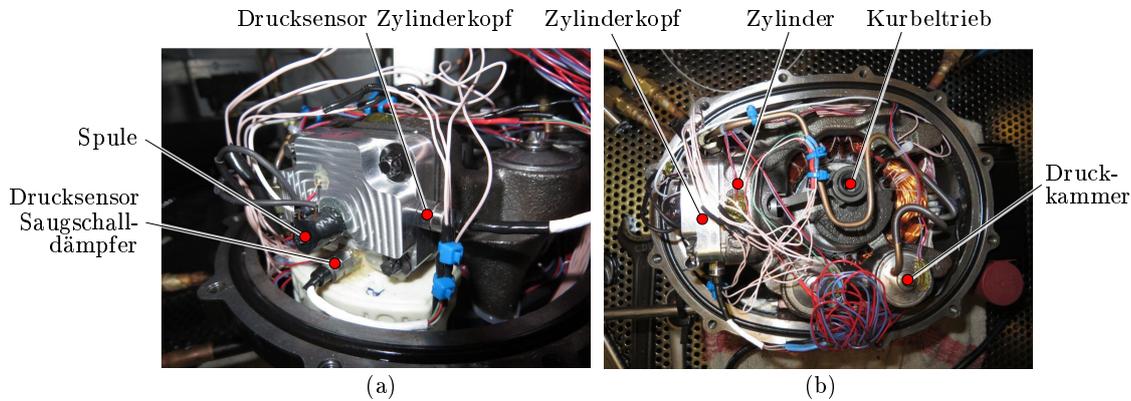
den mit:

$$L_{(x)} = \frac{N^2 \left( \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l \right)}{\left[ (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v + \mathcal{R}_l) \frac{\alpha x}{\mu_0 A_g} + \mathcal{R}_l (\mathcal{R}_c + \mathcal{R}_v) \right]} . \quad (5.10)$$

Um das Saugventil im richtigen Moment schließen zu können, muss einerseits die Kurbelwinkelposition und andererseits das Ansprechverhalten der elektromagnetischen Spule bekannt sein. Für ersteres wurde ein Sensor basierend auf dem Hall-Effekt verwendet, der einen in die Kurbelwange integrierten Dauermagneten detektiert und ein periodisches Signal mit einem signifikanten Peak liefert. Für letzteres wurden Versuche bei verschiedenen Spulenversorgungsspannungen durchgeführt, bei denen mittels Laser-Doppler-Vibrometer die Ventilbewegung während des Schließens gemessen wurde. Abbildung 5.3 zeigt die Ergebnisse dieser Versuche, bei denen das negativ vorgespannte Ventil von der Ruheposition aus geschlossen wurde. Der zeitliche Versatz zwischen Anlegen der Spannung an die elektromagnetische Spule und dem Aufprallen des Saugventils auf die Ventilplatte variiert zwischen 0,95 und 1,55 ms. Für Versorgungsspannungen kleiner 2 V konnte das Ventil nicht mehr aus der Ruhelage geschlossen werden. Um ein zeitgerechtes Schließen des Flatterventils möglichst gut sicherzustellen, wurde für die weiteren Versuche am realen Kompressor eine Versorgungsspannung von 8 V gewählt. Dabei wurde die Spule circa 1 ms vor dem Erreichen des unteren Totpunktes des Kolbens für 3 ms mit Spannung beaufschlagt. Die dafür verwendete Vollbrückenschaltung verfügte über zwei Steuereingänge, mit der man die Richtung der Spulenspannung wechseln konnte. Dadurch wurde der Eisenkern entmagnetisiert und ein verspätetes Öffnen des Saugventils durch magnetische Remanenz verhindert.



**Bild 5.3:** Schließvorgang des negativ vorgespannten Saugventils bei verschiedenen Versorgungsspannungen der elektromagnetischen Spule



**Bild 5.4:** Einbausituation der Drucksensoren (a) sowie einiger Temperaturmessstellen (b)

Die zur Simulation der magnetischen Kraft verwendete Gleichung 5.9 enthält einige Parameter, die nur mit großer Ungenauigkeit gemessen bzw. abgeschätzt werden konnten. Die Reluktanz aufgrund von Leckage  $\mathcal{R}_l$  sowie der Parameter  $\alpha$  mussten deshalb an die in Abbildung 5.3 gezeigte Bewegungskurve (8 V) angepasst werden.

### 5.1.2 Experimenteller Aufbau

Zusätzlich zur elektromagnetischen Spule und dem zur Kurbelwinkelbestimmung benötigten Hallsensor wurden Drucksensoren und Thermoelemente verwendet. Dabei wurde je ein Drucksensor zur Messung des Saug- und Gegendruckes im Saugschalldämpfer bzw. im Zylinderdeckel montiert (siehe Abbildung 5.4 (a)). Die Ergebnisse dieser Druckmessungen dienten zur Bestimmung geeigneter Druckrandbedingungen für die nachfolgende Simulation. Zur Ermittlung des thermischen Einflusses der Spule auf einzelne Komponenten des Kompressors wurden mehrere Thermoelemente verwendet, die zum Teil in Abbildung 5.4 (b) zu sehen sind. Einen vollständigen Überblick über die verwendeten Messmittel liefert Tabelle 5.3.

Bei hermetischen Kolbenkompressoren sind Kabeldurchführungen aus dem Inneren des Kompressors meist sehr problematisch, da Leckagen vor allem zwischen Kabelummantelung und Litzen auftreten können. Um dieser Problematik zu entgehen, wurde eine Spezialdurchführung der Firma Conax verwendet, die es erlaubt, 13 Thermoelemente und 14 zusätzliche Kupferleitungen gesammelt durch das Kompressorgehäuse zu führen.

**Tabelle 5.3:** Verwendete Messmittel für Versuche mit elektromagnetischem Ventil

Sensoren	Bezeichnung	Genauigkeit	Messbereich
Saugdrucksensor	Kulite XTL-123C-190M	0,5 %FSO	bis 1,7 bar
Gegendrucksensor	Kulite XTL-HA-123C-190M	0,5 %FSO	bis 17 bar
Thermoelement	Typ T	$\pm 1$ °C	>250 °C
Sonstige Hardware			
Durchführung	Conax HD31-450(13T/14CU)PG4AT		
Datenaufnahme	Brüel & Kjaer 3560-B-130		
Temperaturmessung	National Instruments c-DAQ, Modul NI 9214		
Spannungssignal Ausgang	National Instruments c-DAQ, Modul NI 9205		
Peak-Spannungsmessung Hallsensor	National Instruments c-DAQ, Modul NI 9263		

### 5.1.3 Ergebnisse

#### Messungen

Um die Auswirkungen des negativ vorgespannten Saugventils in Verbindung mit der elektromagnetischen Spule experimentell zu untersuchen, wurden Kalorimetermessungen durchgeführt. Der Kompressor wurde dabei unter zwei verschiedenen stabilisierten Betriebsbedingungen jeweils mit einer Frequenz von 50 Hz getestet. Gemäß den standardisierten ASHRAE-Vergleichsprozessen wurde das Kalorimeter mit einer Umgebungstemperatur von 32,2 °C, einer Verdampfungstemperatur von  $-23,3$  °C und einer Kondensationstemperatur von 45 °C bzw. 54,4 °C betrieben. Um die Vergleichbarkeit zwischen den Messergebnissen zu bewahren, wurde stets derselbe Kompressor, jedoch mit unterschiedlichen Saugventilen (Serie bzw. negativ vorgespannt) verwendet. Tabelle 5.4 zeigt den Unterschied zwischen den Referenzmessungen und den Messungen mit negativ vorgespanntem Saugventil. Die Werte in dieser Tabelle sind dabei als prozentuelle Abweichungen bezogen auf die Referenzmessungen zu verstehen.

**Tabelle 5.4:** Messergebnisse mit negativ vorgespanntem Ventil im Vergleich zu Referenzmessungen

ASHRAE-Zyklus	COP	Kälteleistung	el. Antriebsleistung
$-23,3$ °C/45 °C	1,72 %	0,98 %	$-0,73$ %
$-23,3$ °C/54,4 °C	0,39 %	$-0,32$ %	$-0,71$ %

Für beide Betriebsbedingungen kann eine vergleichbare Reduktion der elektrischen Antriebsleistung des Kompressors von etwa 0,7 % beobachtet werden, wohingegen die Veränderungen bei der Kälteleistung sehr unterschiedlich ausgefallen sind. Dies kann

im Grunde darauf zurückgeführt werden, dass die Saugverluste zwar in ähnlichem Maße verringert werden konnten, das Rückströmen durch die Saugöffnung im Bereich des unteren Totpunktes jedoch unterschiedlich ausgeprägt war. Damit verbunden war beim ASHRAE-Zyklus mit einer Kondensationstemperatur von  $54,4^{\circ}\text{C}$  sogar eine Abnahme des netto Kältemittelmassenstromes, womit die Verbesserung des COPs verglichen mit dem zweiten Zyklus relativ gering ausfiel.

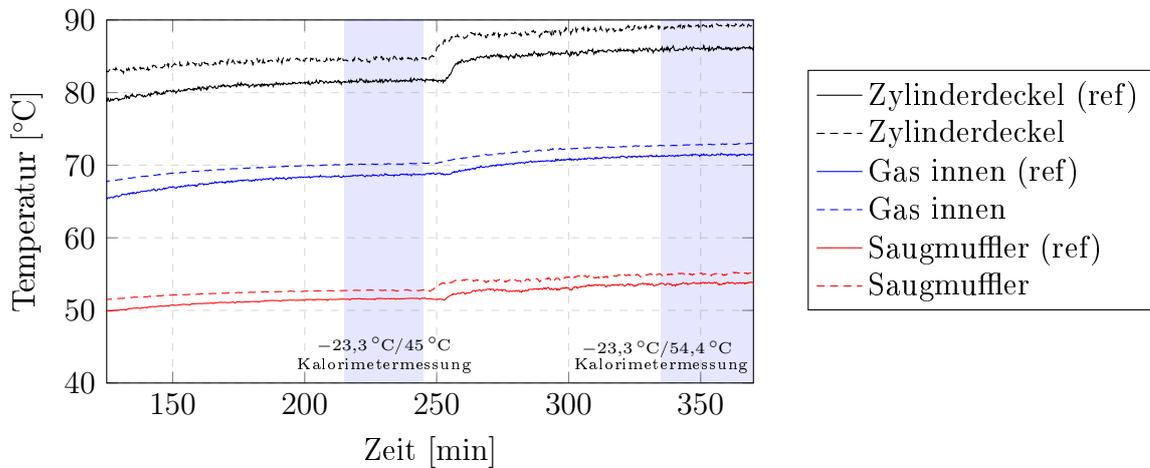
In der bisherigen Betrachtung der Messergebnisse wurde der Energieverbrauch der elektromagnetischen Spule noch nicht berücksichtigt. Deshalb sollen an dieser Stelle kurz zwei weitere Aspekte bei der Ergebnisbetrachtung diskutiert werden: (i) der Energieverbrauch der Spule müsste gesamtheitlich betrachtet dem Energieverbrauch des Kompressors zugerechnet werden und (ii) die Abwärme der Spule beeinflusst das Temperaturniveau des Kompressors und verschlechtert damit den gemessenen COP. Bezüglich (i) ist zu sagen, dass der serienmäßige Einsatz einer elektromagnetischen Spule in einem hermetischen Kolbenkompressor dieser Größe nur praktikabel wäre, sofern dieser über eine Leistungselektronik verfügen würde, mit der die Spule angesteuert werden könnte. Des Weiteren wäre auch eine Überarbeitung des Kompressor-Designs notwendig, um den magnetischen Fluss effizienter führen und damit die Wirkung der Spule verbessern zu können.

Ebenfalls nicht bei der Messauswertung korrigiert, jedoch zumindest diskutiert werden sollte der zweite Aspekt. Aus vorangegangenen Versuchen konnte die Energieaufnahme der Spule betrieben mit einer relativen Einschaltdauer von 15 % und einer Versorgungsspannung von 8 V mit circa 2,1 W bestimmt werden. Dies führt, wie die Temperaturmessungen in Abbildung 5.5 zeigen, zu einer durchschnittlichen Erwärmung im Kompressor von etwa  $2,5^{\circ}\text{C}$ . Basierend auf Versuchen, bei denen ein Serienkompressor durch eine externe Kühlung im Bereich des Zylinderdeckels gezielt gekühlt wurde, kann von einer Verschlechterung des COPs von 0,25 % aufgrund dieser Erwärmung ausgegangen werden.

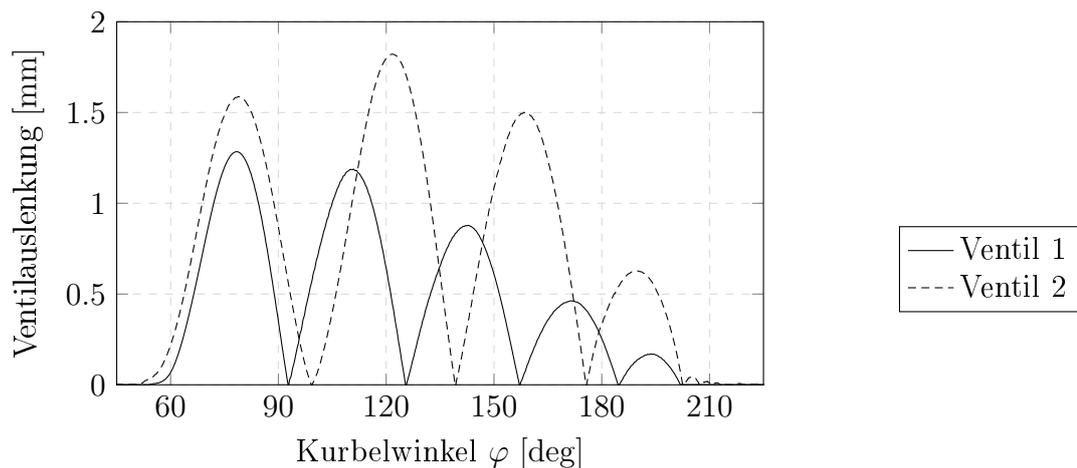
### Simulation

Die nachfolgenden Ergebnisse beziehen sich auf Simulationen des HTK 55 Kompressors im stationären Betriebspunkt passend zum ASHRAE-Zyklus mit einer Kondensationstemperatur von  $54,4^{\circ}\text{C}$ . Dabei sind jeweils die Ergebnisse des Seriensaugventils mit jenen des Saugventils mit veränderter Vorspannung gegenübergestellt. Wie zu erwarten war, ergeben sich signifikante Unterschiede im Bereich des Saugtaktes, die in Abbildung 5.6 und 5.7 grafisch dargestellt sind. Die simulierten Ventilerhebungskurven in Abbildung 5.6 zeigen für das Saugventil mit negativer Vorspannung ein um circa  $5^{\circ}$  Kurbelwinkel früheres Öffnen des Ventils. In weiterer Folge fällt der Druckabfall während der ersten Ventilöffnung im Vergleich zum Serienventil deutlich geringer aus.

Aufgrund der verschobenen Ruhelage des negativ vorgespannten Saugventils kann das Ventil einen größeren Bereich seiner Grundschwingung ausführen, bis es durch den

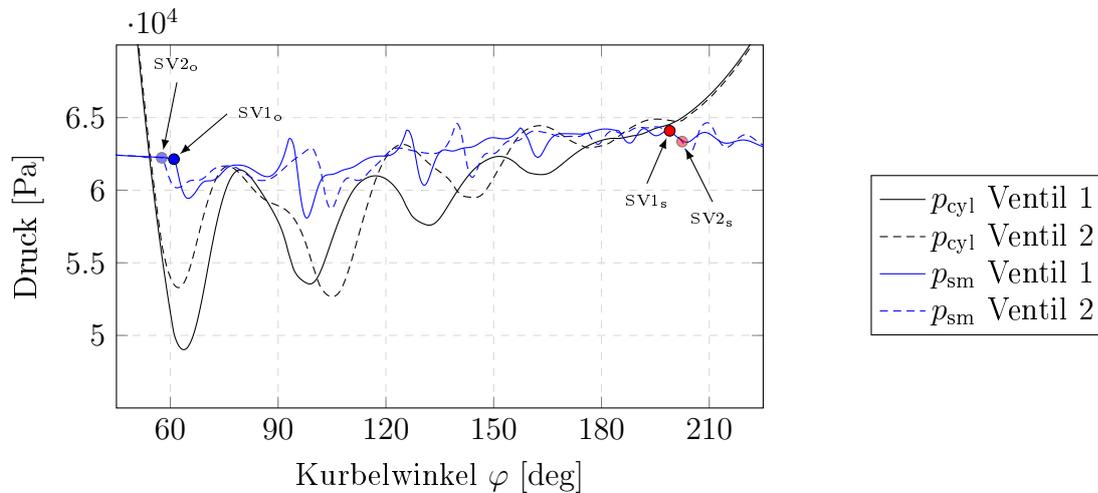


**Bild 5.5:** Temperaturverlauf ausgewählter Messstellen im Kompressor



**Bild 5.6:** Simulierte Ventilerhebungskurven des Seriensaugventils (Ventil 1) und des Saugventils mit negativer Vorspannung (Ventil 2)

Aufprall auf die Ventilplatte gestoppt wird. Dadurch ergeben sich veränderte Aufprallzeitpunkte und deutlich größere Ventilauslenkungen, die mitunter zu geringfügig höheren Aufprallgeschwindigkeiten führen. Eine Analyse der Aufprallgeschwindigkeiten der Ventilspitze zeigt für das negativ vorgespannte Ventil eine relativ geringe Geschwindigkeit für den ersten Aufprall und annähernd gleich große Aufprallgeschwindigkeiten während des zweiten bis vierten Aufpralls mit maximal 3,6 m/s. Im Vergleich dazu, erreicht das Seriensaugventil beim ersten Aufprall die höchsten Geschwindigkeiten von etwa 3,3 m/s mit um circa ein Viertel reduzierten Werten für die weiteren Aufprälle.



**Bild 5.7:** Simulierte Druckverläufe des Seriensaugventils (Ventil 1) und des Saugventils mit negativer Vorspannung (Ventil 2) im Bereich des Saugdruckes

Ebenfalls gut zu erkennen ist, dass das negativ vorgespannte Saugventil beim Aufprall kurz vor dem unteren Totpunkt (UT entspricht einem Kurbelwinkel von  $184,4^\circ$ ) durch die relativ große Aufprallenergie nochmals deutlich zurückspringt. Trotz der elektromagnetischen Zusatzkraft ist es nicht möglich, das Ventil vorzeitig zu schließen, da die Zusatzkraft mit zunehmendem Ventilhub stark abnimmt. Obwohl der Zeitpunkt des Ventilschließens im Vergleich zum Serienventil nur wenige Grad Kurbelwinkel verzögert wurde, tritt aufgrund des deutlich größeren Ventilhubes und des größeren Druckunterschiedes zwischen Zylinder und Saugschalldämpfer ein erhöhter Kältemittelmassenfluss zurück in den Saugschalldämpfer auf. Daraus resultierend verringert sich der tatsächlich geförderte Kältemittelmassenfluss um  $0,31\%$  im Vergleich zum Serienventil. Eine detailliertere Gegenüberstellung der simulierten Ergebnisse ist in Tabelle 5.5 zu finden, in der auch der zurückströmende Kältemittelmassenstrom  $\dot{m}_{\text{rev}}$  in Prozent bezogen auf den Gesamtmassenstrom  $\dot{m}$  angegeben ist. Die Unterschiede während der Kompressions-, Ausstoß- und Rückexpansionsphase fallen marginal aus und sollen hier deshalb nicht näher betrachtet werden.

Zusammenfassend zeigt sich, dass durch die negative Ventilvorspannung die Saugverluste  $P_{\text{SVI}}$  um rund ein Viertel verringert werden konnten, was sich in einer um  $0,68\%$  niedrigeren indizierten Arbeit äußert. Nichtsdestotrotz sinkt aufgrund des rückströmenden Kältemittels der Gesamtmassenstrom um  $0,31\%$ . Diese Ergebnisse decken sich recht gut mit den vorhin gezeigten Messungen, bei denen die elektrische Antriebsleistung des Kompressors um  $0,71\%$  und die Kälteleistung (und damit der Kältemittelmassenstrom) um  $0,32\%$  durch die Verwendung des negativ vorgespannten Saugventils verringert wurde.

**Tabelle 5.5:** Vergleich zwischen Seriensaugventil und negativ vorgespanntem Saugventil basierend auf den Simulationsergebnissen<sup>2</sup>

Ventil	$f \oint p dV$ [W]	$P_{SVI}$ [W]	$\dot{m}$ [g/s]	$\dot{m}_{rev}$ [%]
Serie	40,76	0,84	0,283	-0,26
negativ vorgespannt	40,49	0,60	0,282	-1,60

### 5.1.4 Fazit

Die Messergebnisse zeigten, dass abhängig vom untersuchten Betriebszustand eine Verbesserung der Kompressorleistungszahl von 0,4 bis 1,7 Prozent durch die Verwendung des negativ vorgespannten Saugventils erreicht werden konnte.<sup>3</sup> Interessant war der Umstand, dass sich beim ASHRAE-Zyklus mit einer Kondensationstemperatur von 54,4 °C die gemessene Kälteleistung sogar verringerte, wodurch die COP-Verbesserung wesentlich geringer ausfiel als beim zweiten Betriebspunkt. Unterstützt durch die CFD-Simulation konnte ein detaillierter Einblick in das Strömungsverhalten rund um das Saugventil des Kompressors gewährt werden. Durch Auswertung der Ventilerhebungskurven sowie der  $pV$ -Diagramme konnte die Verringerung der Kälteleistung auf die schlechte Abstimmung des Saugventils auf diesen Betriebspunkt zurückgeführt werden. Dabei ist die elektromagnetische Zusatzkraft nicht gänzlich in der Lage, die Rückprallenergie des Saugventils zu kompensieren und das Ventil im unteren Totpunkt vorzeitig zu schließen.

Gesamtheitlich betrachtet bietet das negativ vorgespannte Ventil, das mittels elektromagnetischer Zusatzkraft geschlossen wird, durchaus Potential, die durch das Saugventil verursachten Strömungsverluste zu verringern und somit die Kompressorleistungszahl zu erhöhen. Beim Einsatz dieser technischen Maßnahme in Serienkompressoren müsste jedoch die gesamte Kopfgruppe neu gestaltet werden. Neben der Neuauslegung des Saugventils (Eigenfrequenz, Steifigkeit, usw.) müsste vor allem auf die optimale Lenkung des magnetischen Flusses großer Wert gelegt werden. Dies würde neben der Reduzierung des Streuflusses aber auch eventuell die Verwendung von besser leitenden Materialien für das Saugventil beinhalten.

Ein weiterer Aspekt, der bei einer möglichen Umsetzung dieser Technologie in Serienkompressoren für Haushaltskühlgeräte betrachtet werden müsste, sind die Herstellungskosten. Hier muss ganz klar herausgestrichen werden, dass die Verwendung des Elektromagneten wirtschaftlich betrachtet nur dann Sinn machen würde, wenn der Kompressor ohnehin mit einer Leistungselektronik ausgestattet wäre, die einerseits die Ansteuerung des Magneten regeln könnte und andererseits über die Information des Kurbelwinkels verfügen würde.

<sup>2</sup> Definition der Strömungsverluste siehe Kapitel 2.2.5.

<sup>3</sup> Ohne Berücksichtigung des Leistungsbedarfs der elektromagnetischen Spule.

Da das Vorhandensein einer intelligenten Leistungselektronik wohl als Voraussetzung für eine wirtschaftliche Umsetzung des in diesem Kapitel untersuchten elektromagnetisch unterstützten Ventils angesehen werden kann, soll im nächsten Kapitel eine technische Maßnahme untersucht werden, die nicht auf diese Voraussetzung angewiesen ist.

## 5.2 Mechanisch unterstütztes Saugventil

Eine weitere sehr vielversprechende Idee ist das in diesem Kapitel beschriebene Saugventil, das durch eine mechanische Zusatzkraft beim Öffnen unterstützt wird. Durch diese unterstützende Kraft sollen gleich mehrere positive Effekte erzielt werden: (i) Reduktion der Saugventilverluste und damit Steigerung der Kompressorleistungszahl, (ii) Verringerung der Aufprallgeschwindigkeit sowie der Aufprallhäufigkeit des Saugventils und (iii) Vermeidung der Unterdruckspitze am Beginn des Saugtaktes. Als Nebeneffekt würde sich die Möglichkeit ergeben, durch die geringere mechanische Belastung andere Materialien als hochlegierte Stähle für Flatterventile einzusetzen. Des Weiteren hätten die verringerte Aufprallgeschwindigkeit des Ventils und die Vermeidung der Unterdruckspitze eine Reduktion der Schallemissionen zur Folge, was neben der Effizienzsteigerung eines der Kernthemen bei der Kompressorentwicklung ist.

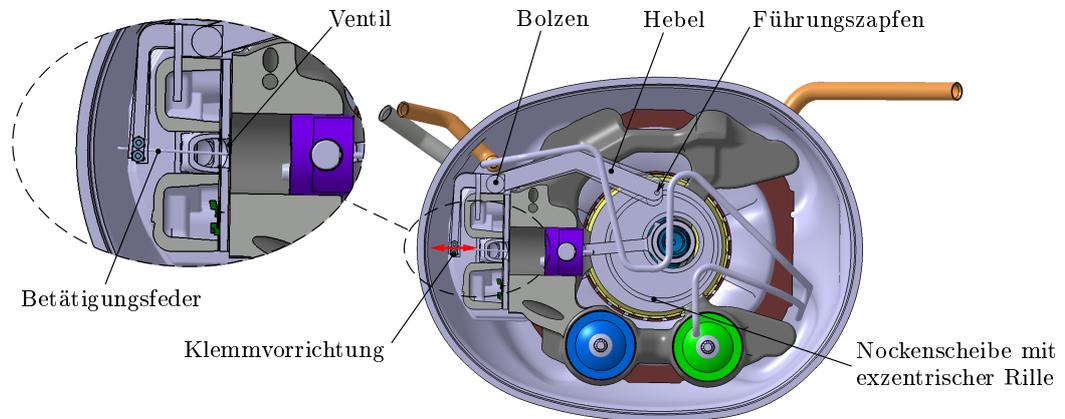
### 5.2.1 Kurbeltrieb

Die mechanische Zusatzkraft des untersuchten Kompressors wird durch einen Kurbeltrieb erzeugt, der eine auf den Ventilteller gerichtete Feder oszillierend bewegt. Dazu wurde ein serienüblicher HTK 55 Kompressor mit einer zusätzlichen Nockenscheibe, einer Hebellagerung sowie dem Hebel samt Betätigungsfeder ausgestattet. Der prinzipielle Aufbau ist in Abbildung 5.8 gezeigt. Die Nockenscheibe, die auf die Kurbelwange der bestehenden Kurbelwelle montiert wird, besitzt eine exzentrische kreisförmige Rille, in der der Führungszapfen des Hebels geführt wird. Dieser Hebel ist wiederum im Bereich des Zylinderdeckels durch einen fixen Bolzen gelagert und besitzt am anderen Ende eine Klemmvorrichtung, mit der die Betätigungsfeder fixiert werden kann.

Zur Vorauslegung des Kurbeltriebes wurde das Öffnungsverhalten des Saugventils bei verschiedenen Auslegungsparametern durch Lösen der Bewegungsgleichung eines Feder-Masse-Schwingersystems untersucht. Abbildung 5.9 zeigt dabei die Verläufe der am Saugventil angreifenden Kräfte beim erstmaligen Öffnen ohne Verwendung von Zusatzkräften. Der Druckunterschied zwischen Zylinder<sup>4</sup> und Saugschalldämpfer wird durch die Gaskraft repräsentiert, wobei der Druckausgleich bei etwa  $46,5^\circ$  Kurbelwinkel erreicht wird. Erst nachdem die aus allen Einzelkräften resultierende Kraft positiv wird, fängt das Saugventil an sich zu öffnen und erreicht bei etwa  $55^\circ$  Kurbelwinkel

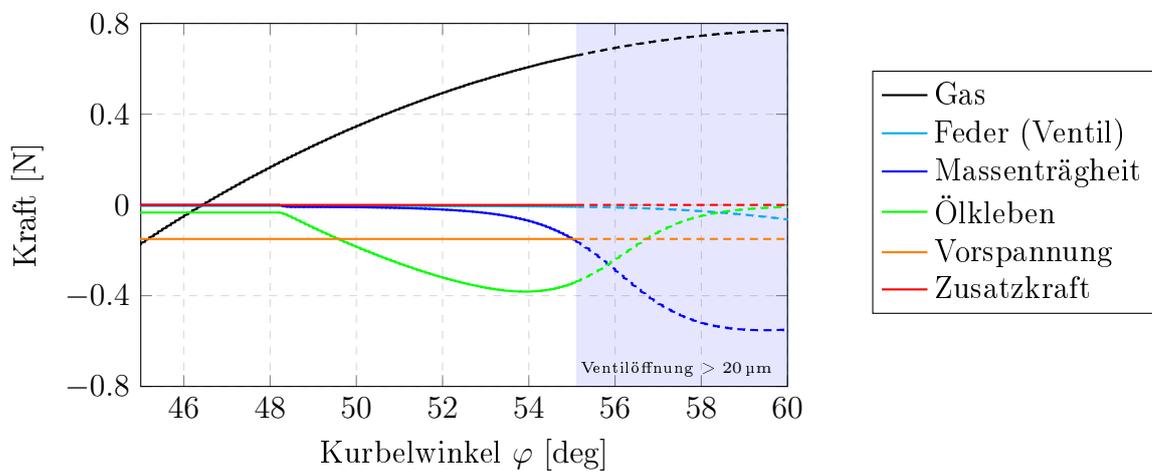
---

<sup>4</sup> Zylinderdruck aus Messungen bekannt.



**Bild 5.8:** Prinzipieller Aufbau des Kurbeltriebes zur Erzeugung der Zusatzkraft auf das Saugventil

eine Ventilöffnung von  $20\ \mu\text{m}$ . Der weitere Verlauf der Kräfte ist nur mehr strichliert dargestellt, da der reale Druckverlauf durch das Öffnen des Saugventils beeinflusst wird und hier nicht berücksichtigt ist.



**Bild 5.9:** Verläufe der am Saugventil auftretenden Kräfte beim Öffnen - ohne Zusatzkraft

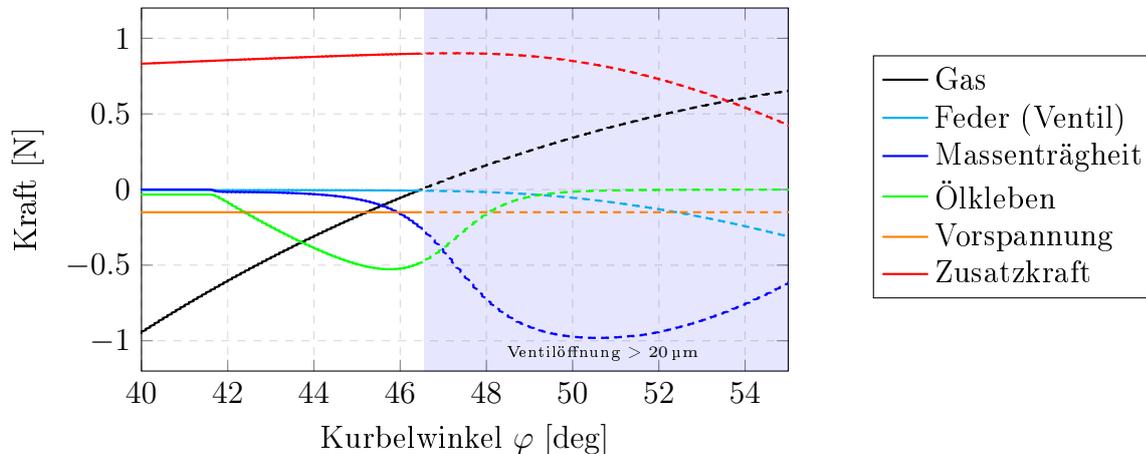
Folgende Restriktionen dienen zur Auslegung des mechanischen Kurbeltriebes: (i) die Betätigungsfeder darf im unteren Totpunkt nicht mehr im Eingriff sein, (ii) der maximale Ventilhub sollte vergleichbar mit dem des Serienventils sein und die maximale

Zusatzkraft sollte im Gleichgewicht mit den am Serienventil auftretenden Kräften sein und (iii) das Ventil sollte beim Erreichen des Druckausgleichs circa  $20\ \mu\text{m}$  geöffnet sein. Die Bewegung der Betätigungsfeder wird unter der Annahme einer kreisrunden Führungsrille (näherungsweise sinusförmige Bewegung) wie folgt beschrieben:

$$x_m = A \sin \left( 2\pi f \left( t + \frac{\Delta\varphi}{360 f} \right) \right) + o. \quad (5.11)$$

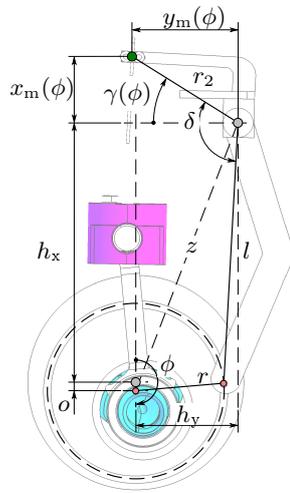
Mit einer Amplitude  $A$  von  $1,3\text{ mm}$ , einem translatorischen Offset  $o$  von  $0,2\text{ mm}$ , einer Phasenverschiebung  $\Delta\varphi$  von  $5^\circ$  Kurbelwinkel sowie einer Steifigkeit der Betätigungsfeder von  $750\text{ N/m}$  können sämtliche Bedingungen erfüllt werden. Dabei trifft die Betätigungsfeder  $10^\circ$  Kurbelwinkel vorm Erreichen des oberen Totpunktes erstmals auf das Saugventil. In weiterer Folge wird die Feder zusammengedrückt und dadurch die Zusatzkraft auf das Ventil erhöht, wobei die maximale Kraft circa während der ersten Ventilöffnung erreicht wird. Bis zum Erreichen des unteren Totpunktes des Kolbens wird die Feder schließlich vom Ventil abgehoben, um es sicher durch seine eigene Vorspannkraft schließen zu lassen.

Abbildung 5.10 zeigt die Kraftverläufe beim Öffnen des Saugventils mit mechanischer Zusatzkraft. Die in das Ventil zusätzlich eingebrachte Kraft führt dazu, dass das Saugventil schon circa  $6^\circ$  früher zu öffnen beginnt. Somit wird eine Ventilöffnung von  $20\ \mu\text{m}$  schon bei etwa  $46,6^\circ$  Kurbelwinkel erreicht, was ziemlich genau mit dem Zeitpunkt des Druckausgleiches zwischen Zylinder und Saugschalldämpfer zusammenfällt.



**Bild 5.10:** Verläufe der am Saugventil auftretenden Kräfte beim Öffnen - mit Zusatzkraft

Mit den Erkenntnissen aus dieser Voruntersuchung konnte die Geometrie für die Kurbelmechanik definiert werden. Die Hauptabmessungen dieser Geometrie sind in Abbildung 5.11 gezeigt und in Tabelle 5.6 angegeben. Des Weiteren beinhaltet diese Abbildung Gleichungen zur Berechnung der Bewegung der Einspannstelle, in der die Betätigungsfeder fixiert wird.



- feste Drehpunkte
- bewegte Punkte
- Einspannstelle

$$z = \sqrt{(h_y - o \sin \phi)^2 + (h_x - o \cos \phi)^2}$$

$$\gamma(\phi) = \delta - \tan^{-1} \left( \frac{h_x - o \cos \phi}{h_y - o \sin \phi} \right) - \cos^{-1} \left( \frac{z^2 + l^2 - r^2}{2lz} \right)$$

$$x_m(\phi) = r_2 \sin \gamma(\phi)$$

$$y_m(\phi) = r_2 \cos \gamma(\phi)$$

**Bild 5.11:** Ermittlung der Bewegungsgleichungen für den mechanischen Antrieb

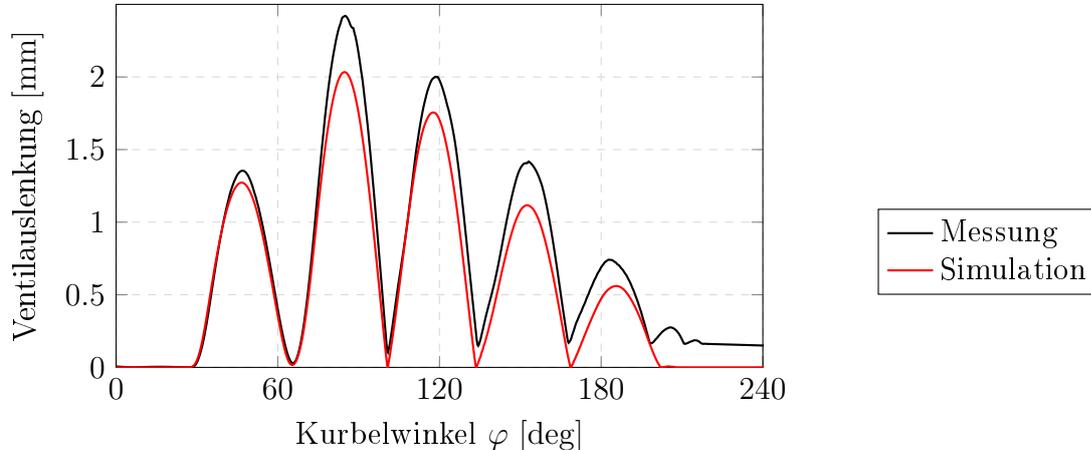
**Tabelle 5.6:** Abmessungen der Kurbelgeometrie zur Erzeugung der Zusatzkraft auf das Saugventil

Maß	Wert	Maß	Wert	Maß	Wert
$h_x$	70,75 mm	$r$	23,75 mm	$o$	3,15 mm
$h_y$	26,25 mm	$r_2$	32,80 mm	$l$	70,75 mm
$\delta$	116,91°				

## 5.2.2 Validierung an Luft

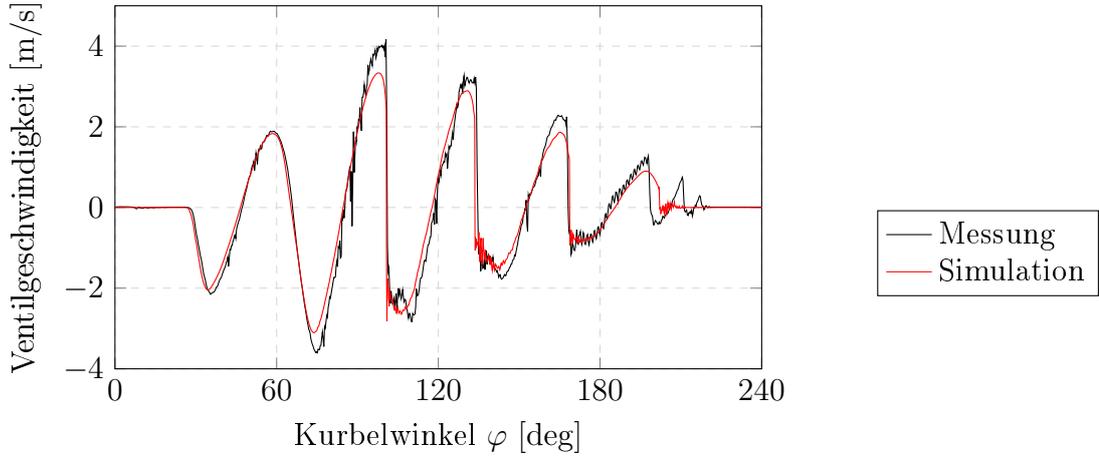
Zur Validierung der Simulation wurden wiederum Ventilerhebungskurven mittels LDV ermittelt. Dazu wurde der Versuchskompressor an Umgebungsluft mit geöffnetem Gehäuse sowie ohne Saugschalldämpfer betrieben, um mit dem Laserstrahl die Ventiltellermite fokussieren zu können. Der Durchfluss aus dem Druckrohr wurde mittels verstellbaren Regelventils während des Testbetriebes verändert, damit unterschiedliche Gegendrucke eingestellt werden konnten. Mit dem Saugdruck, der äquivalent dem Umgebungsdruck war, konnten somit Ventilerhebungskurven bei verschiedenen Druckverhältnissen aufgenommen werden. Der Vergleich zwischen simulierter und gemessener Bewegung des Saugventils wurde bei einem Gegendruck von etwa 5 bar durchgeführt. Abbildungen 5.12 und 5.13 zeigen den Unterschied zwischen Messung und Simulation bei demontierter Betätigungsfeder. Beim Vergleichen der Ventilauslenkungen ist zu erkennen, dass sich zwar die Absolutwerte der Auslenkungen unterscheiden, die Frequenz, mit der das Saugventil schwingt, wird hingegen sehr genau nachmodelliert. Da die Messung eine erhebliche Drift zeigt und angenommen werden muss, dass der Laser-

strahl nicht immer exakt auf die Ventiltellermitte gerichtet war, kann die Abweichung der Absolutauslenkung akzeptiert werden. Eine weitere erwähnenswerte Eigenheit dieser Ventilkurve ist die freie Schwingung am Anfang des Saugtaktes, die unter realen Betriebsbedingungen mit Kältemittel bei geschlossenem Kompressorgehäuse nicht auftritt. Die Schwierigkeit bei der Nachbildung dieser freien Schwingung ist, dass sich kleine Ungenauigkeiten im Simulationsmodell signifikant auf die weitere Ventilbewegung auswirken können. Da das Saugventil am Wendepunkt nahezu geschlossen ist, würde ein leicht veränderter Parameter in der Simulation ausreichen, um das Saugventil gerade noch auf den Ventilsitz aufprallen zu lassen. Dabei würde das Ventil wieder zurückspringen und die weitere Ventilbewegung wäre sofort um bis zu  $5^\circ$  Kurbelwinkel verschoben, da ein entscheidender Teil der freien Schwingung des Flatterventils nicht mehr abgebildet wäre. Diese freie Schwingung kann in Abbildung 5.13 anhand der gleichmäßigen Geschwindigkeitsänderung besser erkannt werden. Ein Aufprallen des Saugventils auf den Ventilsitz äußert sich hingegen in einer sprunghaften Geschwindigkeitsänderung. Des Weiteren erkennt man, dass das Aufprallen auch zur Aktivierung von höheren Schwingungsmoden führen kann, wie es vor allem beim dritten Aufschlag des Ventils ( $170^\circ$  Kurbelwinkel) zu sehen ist. Dies hängt jedoch im hohen Maße von der exakten Stellung des Ventiltellers beim Aufprall auf den Ventilsitz ab und ist in der Simulation aufgrund der verwendeten Rayleigh-Dämpfungsparameter nur sehr schwach ausgeprägt.



**Bild 5.12:** Auslenkung des Saugventils ohne mechanische Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

Um die auf das Saugventil wirkende Zusatzkraft zu modellieren, muss die Bewegung der Spitze der Betätigungsfeder möglichst exakt nachmodelliert werden. Dies ist nicht ganz trivial, da die Bewegung beim Einfedern als auch die Bewegung der Klemmvorrichtung selbst nicht rein oszillierend ist. Daraus folgt, dass die Spitze der Betätigungs-



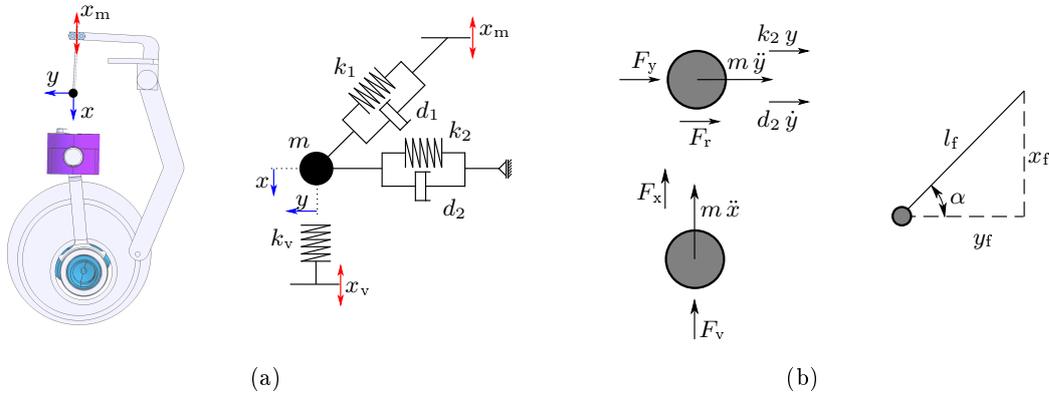
**Bild 5.13:** Geschwindigkeit des Saugventils ohne mechanische Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

feder am Ventilteller seitlich abrutscht und somit nicht die größtmögliche Kraft auf das Saugventil übertragen werden kann. Zur Modellierung der seitlichen Rutschbewegung wird ein vereinfachtes Ersatzsystem mit zwei Freiheitsgraden verwendet, das in Abbildung 5.14 (a) zu sehen ist. Dieses besteht aus der Ersatzmasse  $m$  der Feder, der Feder-Dämpfer-Einheit der Hauptbewegung ( $k_1, d_1$ ), der Feder-Dämpfer-Einheit der seitlichen Bewegung ( $k_2, d_2$ ) sowie der Federsteifigkeit  $k_v$ , mit welcher der Kontakt zwischen Feder und Saugventil modelliert wird. Die Bewegung des Hebels  $x_m$  kann wie in Abbildung 5.11 berechnet werden, wohingegen die Bewegung des Ventiltellermittelpunktes  $x_v$  aus der 3D-FE-Berechnung ermittelt wird.

Basierend auf der Kräftebilanz, der an der freigeschnittenen Punktmasse angreifenden Kräfte (siehe Abbildung 5.14 (b)) können folgende Bewegungsgleichungen aufgestellt werden:

$$\begin{aligned} \ddot{x} m &= - \left( F_v + \underbrace{\sin\alpha [k_1 \Delta l + d_1 \dot{x}]}_{F_x} \right), \\ \ddot{y} m &= - \left( \underbrace{F_v \mu}_{F_r} + \underbrace{\cos\alpha [k_1 \Delta l + d_1 \dot{x}]}_{F_y} + k_2 y + d_2 \dot{y} \right). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Die Reibkraft  $F_r$  ist richtungsabhängig und setzt sich aus einem Reibungskoeffizienten  $\mu$  und der auf den Ventilteller wirkenden Normalkraft  $F_v$  zusammen. Die Längenänderung  $\Delta l$  entlang der Hauptbewegungsrichtung sowie der Winkel  $\alpha$  zwischen den beiden Feder-Dämpfer-Einheiten sind in den Gleichungen 5.14 und 5.15 angegeben.  $l_0, x_0$  und  $y_0$  bezeichnen dabei die Abmessungen im Ruhezustand.



**Bild 5.14:** Ersatzsystem der mechanisch geführten Feder (a) sowie angreifende Kräfte an der freigeschnittenen Punktmasse (b)

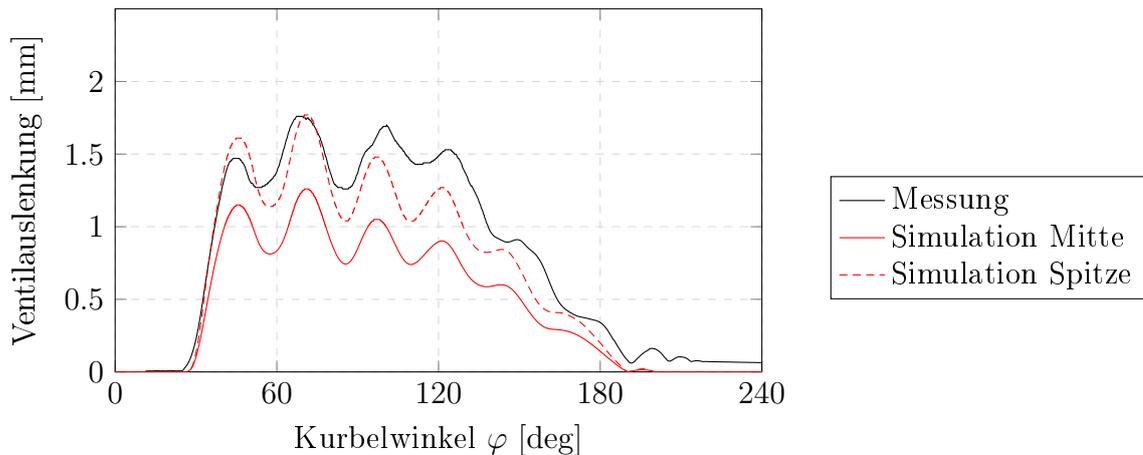
$$F_v = \begin{cases} (x - x_v) k_v & \text{für } x > x_v \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (5.13)$$

$$\Delta l = l_f - l_0 = \sqrt{(x_0 + x - x_m)^2 + (y_0 + y)^2} - l_0 \quad (5.14)$$

$$\alpha = \tan^{-1} \left( \frac{x_f}{y_f} \right) = \tan^{-1} \left( \frac{x_0 + x - x_m}{y_0 + y} \right) \quad (5.15)$$

Wie in Abbildung 5.15 ersichtlich, wird das Saugventil durch die mechanische Zusatzkraft über den gesamten Saugtakt offen gehalten. Der Vergleich zwischen gemessener (schwarz) und simulierter Ventilerhebungskurve (rot) zeigt, dass die Absolutwerte der Ventilöffnungen zwar abweichen, die Frequenz der Oberschwingung über weite Teile des Saugtaktes aber sehr gut übereinstimmen. Diese Abweichung des Absolutwertes ist aufgrund des Messaufbaus durchaus zu erwarten, da der Laserstrahl des Vibrometers aufgrund der Mechanik der Zusatzfeder nicht auf die Ventiltellermitte gerichtet werden konnte. Des Weiteren ist davon auszugehen, dass der Laserstrahl nicht ganz rechtwinklig auf das Ventil ausgerichtet wurde und man somit mit weiteren Unsicherheiten bei der Ermittlung des Absolutwertes rechnen muss. Zur besseren Veranschaulichung, wie sich ein (rein) paralleler Versatz des Laserstrahles auswirkt, ist in Abbildung 5.15 die simulierte Ventilbewegung an zwei verschiedenen Punkten des Saugventiltellers dargestellt. Die durchgezogene rote Linie beschreibt die Bewegung des Ventiltellermittelpunktes und die strichlierte rote Linie die Bewegung nahe der Ventilspitze.

Die Abweichung der Frequenz der Oberschwingung kann wiederum sehr ansehnlich anhand der Ventilgeschwindigkeiten dargestellt werden. Dazu ist in Abbildung 5.16 die

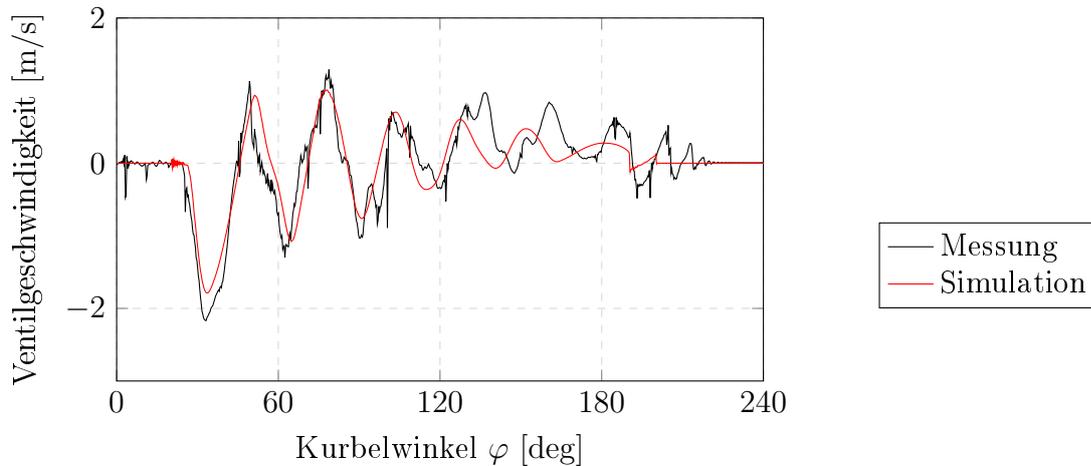


**Bild 5.15:** Auslenkung des Saugventils mit mechanischer Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

gemessene sowie die simulierte Ventilgeschwindigkeit (bezogen auf den Ventiltellermitelpunkt) überlagert und man erkennt vor allem für die ersten vier Oberschwingungen (bis circa  $120^\circ$  Kurbelwinkel) eine zeitlich sehr gute Übereinstimmung. Bis zu diesem Zeitpunkt scheint das Rutschen der Feder am Ventil mit dem vorhin gezeigten Ersatzsystem relativ gut vorhergesagt werden zu können. Um auch für den restlichen Saugtakt eine ähnlich gute Übereinstimmung zu erhalten, müsste das einfache Ersatzsystem wohl durch ein aufwändigeres ersetzt werden, in dem neben der Bewegung auch der Krafteinleitungspunkt in das Ventil genau berechnet wird. Da jedoch die Randbedingungen dafür (exakte Geometrie, Reibungskoeffizienten, usw.) ohnehin nur grob gemessen bzw. geschätzt werden können und die Auswirkung der Zusatzfeder auf das Saugventil mit dem Ersatzsystem in zufriedenstellendem Maße wiedergegeben werden kann, wird für die weitere Betrachtung das vereinfachte Ersatzsystem beibehalten.

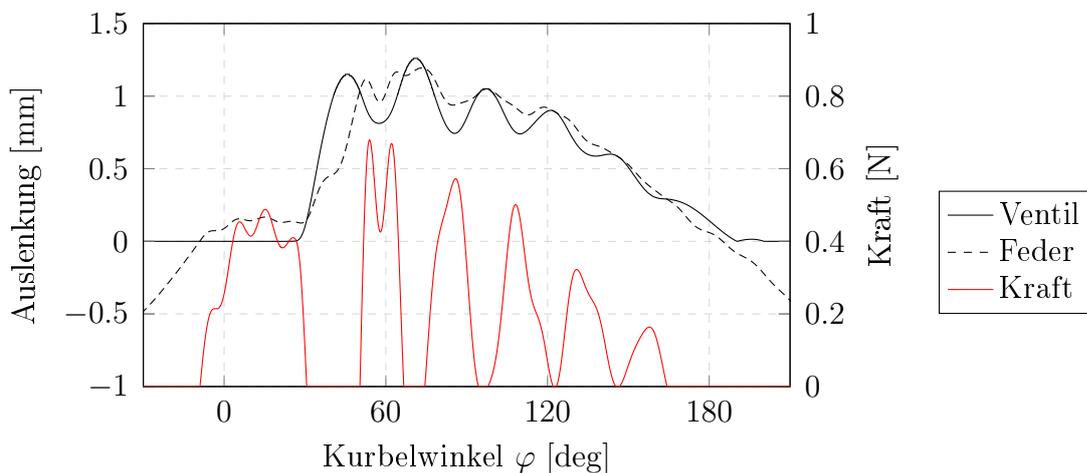
Wie in Gleichung 5.13 beschrieben, wirkt die Zusatzkraft auf das Ventil nur, wenn „Kontakt“ zwischen Federspitze und Saugventil besteht.<sup>5</sup> Dazu ist der zeitliche Verlauf der Bewegung des Ventiltellers  $x_v$  (schwarz durchgezogene Linie) sowie der Federspitze  $x$  (schwarz strichlierte Linie) in Abbildung 5.17 dargestellt. Die daraus resultierende Zusatzkraft ist in rot dargestellt und zeigt einen stark schwankenden zeitlichen Verlauf. Die Federspitze trifft dabei erstmals circa  $12^\circ$  Kurbelwinkel vor dem oberen Totpunkt auf das Saugventil auf und erzeugt bis zum Öffnen des Saugventils eine Kraft von etwa 0,5 N. Während der Öffnung des Ventils verliert die Federspitze den Kontakt zum Ventil und trifft circa  $20^\circ$  Kurbelwinkel später wieder auf das sich zurückbewegen-

<sup>5</sup>Kontakt bedeutet hier, dass  $x > x_v$  und somit die Feder mit der Steifigkeit  $k_v$  eingefedert ist. Die Verwendung dieser Feder kann mit der Penalty-Methode aus Kapitel 3.1.9 verglichen werden, bei der ein relativ kleiner Penaltyparameter eine gewisse Durchdringung erlaubt.



**Bild 5.16:** Geschwindigkeit des Saugventils mit mechanischer Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

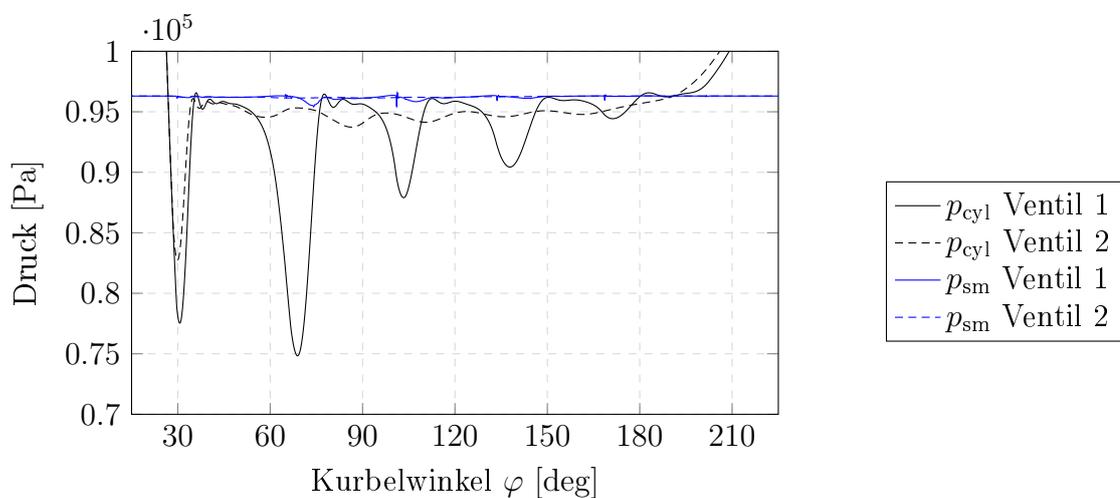
de Saugventil. Dabei wird auch die maximal auftretende Zusatzkraft von etwa 0,7 N erreicht und das Saugventil wird an seiner Schließbewegung gehindert. Während des restlichen Saugtaktes herrscht größtenteils Kontakt zwischen Federspitze und Saugventil, wobei die übertragene Zusatzkraft starken Schwankungen unterliegt. Im Bereich des unteren Totpunktes wird die Federspitze wieder vom Saugventil gehoben, um dieses durch die Ventilvorspannung in gewohnter Weise schließen zu lassen.



**Bild 5.17:** Bewegung der Zusatzfeder und Verlauf der mechanischen Zusatzkraft bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

Um in weiterer Folge das Potential dieser technischen Maßnahme abschätzen zu können, wurden der Saugverlust, die indizierte Arbeit und der Massenfluss der Simula-

tionen ausgewertet und in Tabelle 5.7 gegenübergestellt. Anhand des in Abbildung 5.18 gezeigten Druckverlaufes kann die signifikante Reduzierung der Saugverluste aufgrund der Zusatzkraft sichtbar gemacht werden. Unter Ventil 1 wird dabei die Simulation analog der Serienausführung verstanden und Ventil 2 repräsentiert die simulierten Ergebnisse bei wirkender Zusatzkraft. Das geringfügig frühere Öffnen des Saugventils führt dabei zu einer leichten Verringerung der ersten Unterdruckspitze und in weiterer Folge zeigt sich ein nahezu gleichbleibender Unterdruck auf niedrigem Niveau während der restlichen Saugphase. Ebenfalls deutlich zu erkennen ist das frühere Schließen des Ventils im Bereich des unteren Totpunktes, womit die Kompressionsphase früher beginnt als ohne Zusatzkraft.

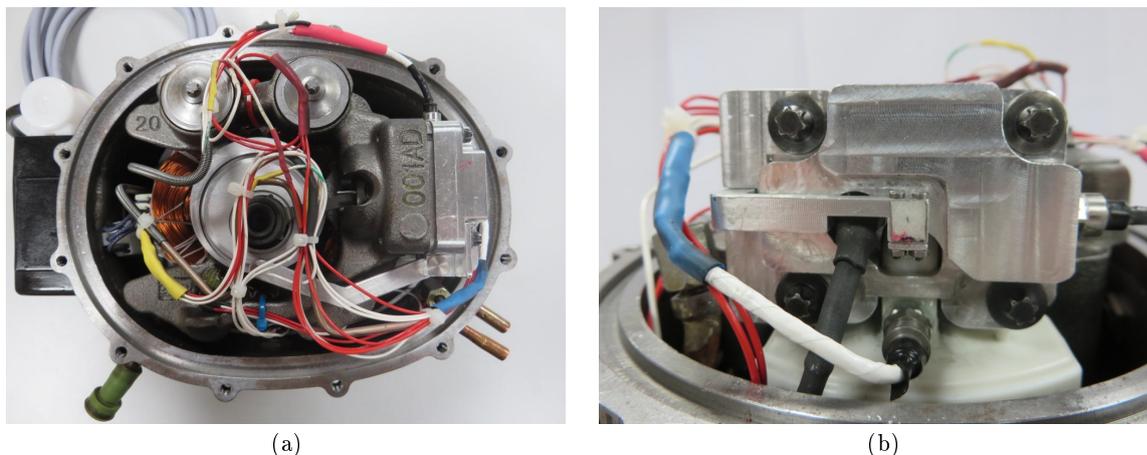


**Bild 5.18:** Gegenüberstellung der Druckverläufe während der Saugphase bei offenem Kompressorgehäuse und 5 bar Gegendruck

**Tabelle 5.7:** Vergleich zwischen Seriensaugventil und Saugventil mit Zusatzkraft basierend auf den Simulationsergebnissen<sup>6</sup>

Ventil	$f \oint p dV$ [W]	$P_{SVI}$ [W]	$\dot{m}$ [g/s]
Serie	54,65	0,96	0,281
mit Zusatzkraft	54,90	0,43	0,286
Veränderung	0.46 [%]	-55.44 [%]	1.89 [%]

<sup>6</sup>Definition der Strömungsverluste siehe Kapitel 2.2.5.



**Bild 5.19:** Mechanik der Saugventilunterstützung (a) und Anordnung der Drucksensoren ohne montierte Betätigungsfeder (b)

Anhand der Simulationsdaten aus Tabelle 5.7 ist prinzipiell mit einer Verbesserung der Kompressorleistungszahl durch die mechanische Zusatzkraft zu rechnen, da sich zwar die indizierte Leistung geringfügig erhöht, jedoch sollte dies durch die deutliche Steigerung des Massenstroms kompensiert werden können.

### 5.2.3 Versuche unter standardisierten ASHRAE-Betriebsbedingungen

Vorversuche an Luft bestätigten, dass durch das mechanisch unterstützte Saugventil nicht nur eine Verbesserung der Kompressorleistungszahl, sondern auch eine Reduktion der Druckschwankungen sowie der mechanischen Belastung des Saugventils durch das Aufprallen auf den Ventilsitz zu erwarten ist. Zur weiteren Untersuchung der technischen Maßnahme wurden deshalb Messungen und Simulationen<sup>7</sup> bei standardisierten ASHRAE-Betriebsbedingungen mit 45 °C bzw. 54,4 °C Kondensationstemperatur durchgeführt.

In Abbildung 5.19 ist der für die mechanische Saugventilunterstützung umgerüstete Serienkompressor ohne Betätigungsfeder dargestellt. Um die durch den mechanischen Aufbau verursachten Reibverluste zu messen, wurden Versuche bei teilweise montierter Mechanik durchgeführt. Die Auswertung zeigte dabei eine Erhöhung der elektrischen Antriebsleistung von etwa 0,3 W bei gleicher Kälteleistung und indizierter Leistung.

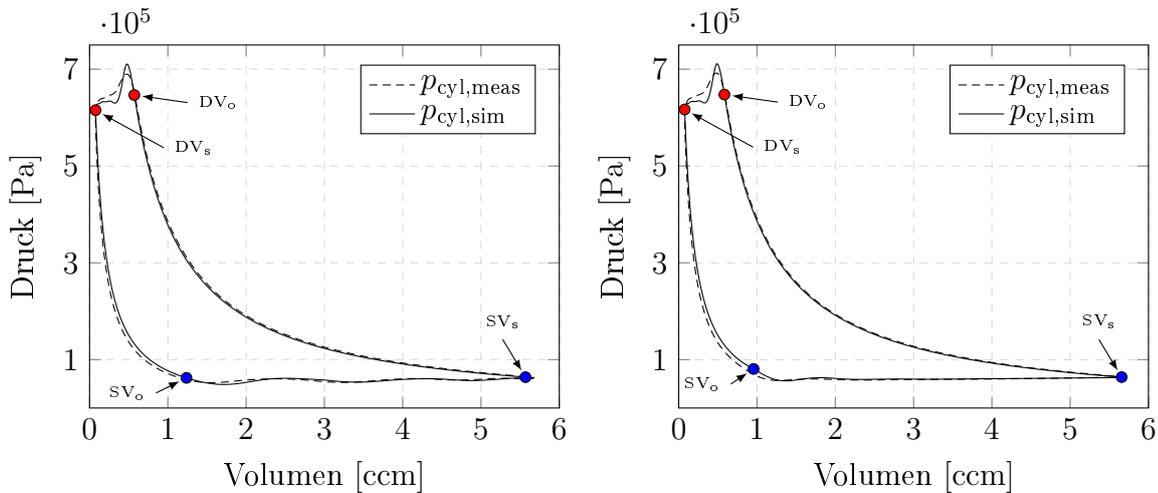
<sup>7</sup> Druckrandbedingung am Auslass der Serpentine sowie Dämpfungsparameter für das Druckventilmodell wurden im Vergleich zur Validierungssimulation leicht verändert, um dem realen Druckniveau und Ventilhub besser zu entsprechen.

Eine der größten Herausforderungen beim Aufbau des Prototyps war die exakte Einstellung der Betätigungsfeder. Mit Hilfe eines elektrischen Signals, das den Kontakt zwischen Saugventil und Betätigungsfeder anzeigte, konnte der Eingriffszeitpunkt der Feder bis auf wenige Grad Kurbelwinkel exakt eingestellt werden. Anders als bei den Versuchen an Luft musste die Betätigungsfeder diesmal durch den Krümmer des Saugschalldämpfers geführt werden. Um den Einfluss von angesaugtem Gas aus dem Kompressorgehäuse durch die dafür notwendige Bohrung möglichst gering halten zu können, musste diese relativ klein gewählt werden. Dadurch wurde die Betätigungsfeder nun jedoch in diesem Bereich seitlich geführt und das Betriebsverhalten der Feder deutlich verändert. Dieser wesentliche Aspekt wurde in der Simulation durch das Erhöhen der seitlichen Federsteifigkeit  $k_2$  (siehe Abbildung 5.14) berücksichtigt.

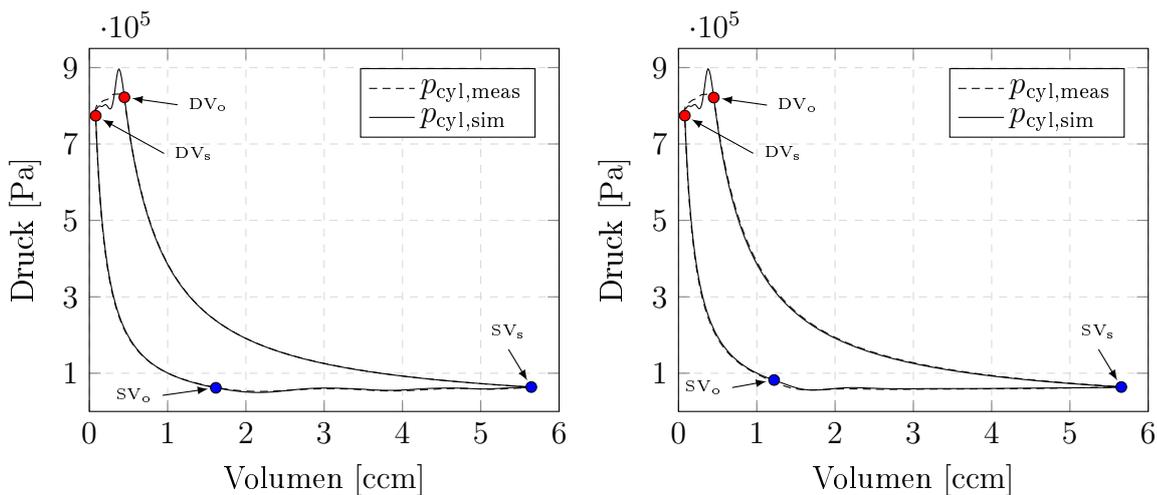
Um bei den Kalorimetermessungen neben der Kälteleistung und der elektrischen Antriebsleistung weitere Möglichkeiten zur Untersuchung der mechanischen Saugventilunterstützung zu haben, wurden die Drücke im Saugschalldämpferhals, im Zylinderkopf und im Zylinder ermittelt. Die Zylinderdruckindizierung erfolgte wie in Kapitel 2.3.3 beschrieben, jedoch wurde ein Druckaufnehmer mit einem kleineren Messbereich (bis 7 bar) gewählt, um den Bereich der Saugphase genauer messen zu können. Drücke ab 8,3 bar konnten mit diesem Sensor nicht mehr gemessen werden. Die Vergleichbarkeit des Prototypen mit und ohne Saugventilunterstützung ist jedoch gegeben, da sich die Druckverläufe während der Ausstoßphase nicht sonderlich unterscheiden.

Abbildungen 5.20 und 5.21 zeigen einen Vergleich der  $pV$ -Diagramme des Kompressors ohne und mit Saugventilunterstützung. Dabei ist jeweils der gemessene Druck gestrichelt und der simulierte Zylinderdruck durchgezogen dargestellt. Der Vergleich der gemessenen und simulierten Zylinderdrücke zeigt vor allem im Bereich der Ausstoßphase Abweichungen, die durch die Verwendung des einfachen Ventilmodells mit ebener, zylindrischer Platte zu erklären sind. Während der Zeitpunkt, in dem das Druckventil geschlossen wird, beim Betriebspunkt mit 54,4 °C Kondensationstemperatur scheinbar richtig berechnet werden konnte, dürfte das Druckventil beim zweiten Betriebspunkt nicht zugleich geschlossen worden sein und es trat in weiterer Folge eine leichte Abweichung bei der Rückexpansionsphase auf. Auch das ist nicht weiter verwunderlich, denn das Modell für das Druckventil wurde für den ersten Betriebspunkt angepasst. Diese Diskrepanz zeigt auch nochmals deutlich die Grenzen von einfachen Ventilmodellen auf, da diese bei verschiedenen Betriebsbedingungen immer an Messungen adaptiert werden müssen.

Während der Einfluss der Saugventilunterstützung auf den Hochdruckbereich marginal ausfällt, wird die Saugphase des Kompressors stark verändert. Neben dem deutlich gleichmäßigeren Druckverlauf während der Saugphase ist vor allem die signifikant frühere Öffnung des Saugventils ( $SV_o$ ) zu erkennen. Vergleicht man die Messungen miteinander, so zeigt sich, dass ab einem Zylinderdruck von etwas über 1 bar der Druck während der Expansionsphase mit aktiver Saugventilunterstützung deutlich schneller abnimmt. Dies lässt darauf schließen, dass das Saugventil nicht bei Druckausgleich,



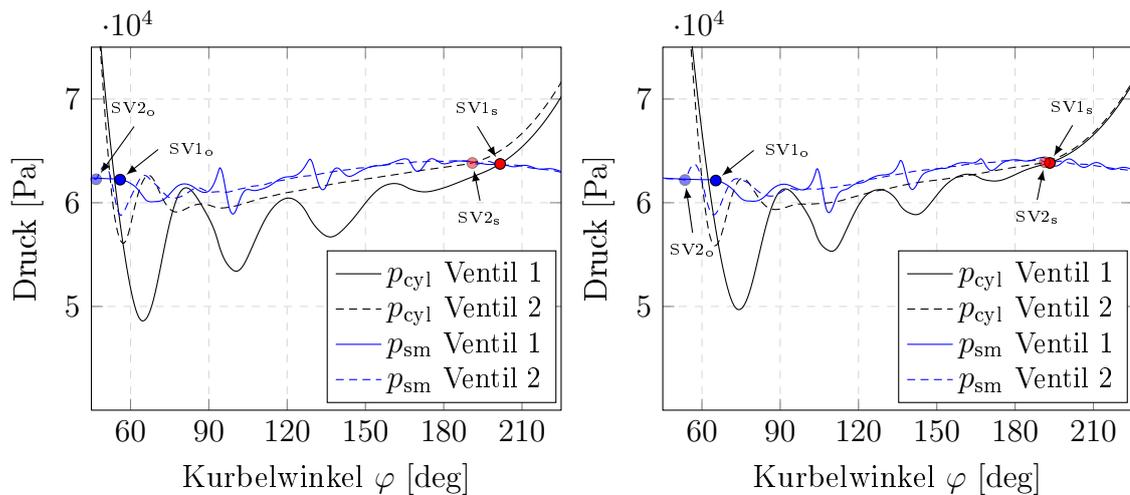
**Bild 5.20:** Vergleich der  $pV$ -Diagramme des Serienkompressors (links) und unter Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (rechts). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit  $45^\circ\text{C}$  Kondensationstemperatur.



**Bild 5.21:** Vergleich der  $pV$ -Diagramme des Serienkompressors (links) und unter Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (rechts). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit  $54,4^\circ\text{C}$  Kondensationstemperatur.

sondern sogar zu früh geöffnet wurde. Bedingt durch die veränderte Montagesituation aufgrund der Durchführungsbohrung durch den Saugschalldämpfer musste mit einem insgesamt steiferen Verhalten der Betätigungsfeder und somit einem früheren Öffnen des Ventils gerechnet werden. Abbildung 5.22 zeigt die simulierten Druckverläufe während der Saugphase im Detail. Darin ist zu erkennen, dass das zu frühe Öffnen des

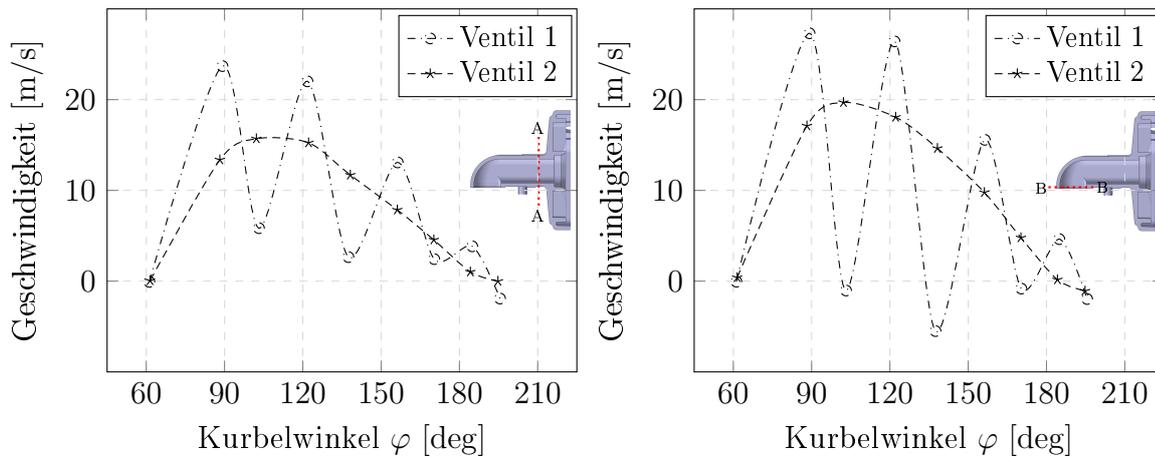
Saugventils zu einem Rückströmen des Kältemittels aus dem Zylinder in den Saugschalldämpfer und damit zu einem Druckabfall im Zylinder führte. Nach der ersten Unterdruckspitze, die deutlich geringer ausfiel als beim Serienkompressor, stellten sich ein gleichmäßiger Druckverlauf und ein deutlich geringerer Druckunterschied zwischen Zylinder und Saugschalldämpfer ein. Vor allem beim Vergleichsprozess mit 45 °C Kondensationstemperatur führte die deutlich größere Gasmasse im Zylinder zu einem höherem Zylinderdruck während der nachfolgenden Kompressionsphase.



**Bild 5.22:** Simulierte Druckverläufe während der Saugphase. Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 45 °C (links) bzw. 54,4 °C Kondensationstemperatur (rechts).

Um das gleichmäßigere Einströmen des Kältemittels in den Zylinder besser verdeutlichen zu können, sind in Abbildung 5.23 die über den Querschnitt gemittelten Geschwindigkeiten am Ein- und Austritt des Saugschalldämpferkrümmers bei bestimmten Kolbenstellungen dargestellt. Daraus geht nochmals deutlich hervor, dass das wiederholte Abbremsen und Beschleunigen der Strömung während der Saugphase, verursacht durch das mehrmalige Öffnen und Schließen des Saugventils, durch die mechanisch eingebrachte Zusatzkraft vermieden werden konnte.

Ein zahlenmäßiger Vergleich zwischen Serienkompressor und Kompressor mit mechanischer Saugventilunterstützung ist in den Tabellen 5.8 und 5.9 angegeben. Sowohl bei den Simulationen als auch bei den Messungen ergaben sich für beide Betriebsbedingungen deutlich erhöhte Massenflüsse und damit eine Vergrößerung der Kälteleistung  $\dot{Q}_0$ . Für den Betriebspunkt mit 45 °C Kondensationstemperatur zeigten sich dabei tendenziell stärkere Verbesserungen als beim zweiten untersuchten Betriebspunkt. Mit der größeren Kältemittelmasse im Zylinder ging auch ein geringfügig höherer Druck während der Kompressionsphase einher. Damit lassen sich auch die leicht gestiegenen indizierten Leistungen erklären. Eine Ausnahme bildet hier die Simulation des Ver-



**Bild 5.23:** Querschnittsgemittelte Strömungsgeschwindigkeiten während der Saugphase im Saugschalldämpferkrümmer in den Querschnitten A und B. Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit  $54,4^{\circ}\text{C}$  Kondensationstemperatur.

gleichsprozesses mit  $54,4^{\circ}\text{C}$  Kondensationstemperatur. Die dabei indizierte Leistung wurde insgesamt etwas verringert, da der Kältemittelmassenstrom nur geringfügig erhöht werden konnte, die Saugverluste jedoch signifikant gesenkt wurden.

Die Verluste verursacht durch das Druckventil sowie der Druckleitung wurden nicht wesentlich durch die Saugventilunterstützung verändert. Die saugseitigen Verluste konnten jedoch nahezu halbiert werden. In Summe konnte mit dieser Maßnahme die gemessene Leistungszahl um 0,7 bis 0,9% gesteigert werden, wobei die durch die Mechanik verursachte Verlustleistung schon berücksichtigt ist.

**Tabelle 5.8:** Vergleich des Serienkompressors (Ventil 1) mit dem Kompressor mit mechanischer Saugventilunterstützung (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit  $45^{\circ}\text{C}$  Kondensationstemperatur.<sup>8</sup>

	Simulation			Messung		
	Ventil 1	Ventil 2	Diff	Ventil 1	Ventil 2	Diff
$\dot{Q}_0$ [W]	94,13	97,28	3,34 %	91,82	94,04	2,41 %
$f \oint p dV$ [W]	36,04	36,23	0,53 %	$37,37 \pm 0,16$	$37,69 \pm 0,17$	0,86 %
$P_{\text{SVI}}$ [W]	1,00	0,28	-71,6 %	$0,89 \pm 0,03$	$0,47 \pm 0,05$	-46,6 %
$P_{\text{SVII}}$ [W]	1,19	0,49	-59,3 %	$1,08 \pm 0,11$	$0,67 \pm 0,08$	-38,5 %
$P_{\text{DVI}}$ [W]	0,92	0,95	3,95 %	$1,20 \pm 0,03$	$1,25 \pm 0,04$	4,1 %
$P_{\text{DVII}}$ [W]	1,10	1,14	4,21 %	$1,25 \pm 0,02$	$1,31 \pm 0,03$	4,8 %

<sup>8</sup> Definition der Strömungsverluste siehe Kapitel 2.2.5.

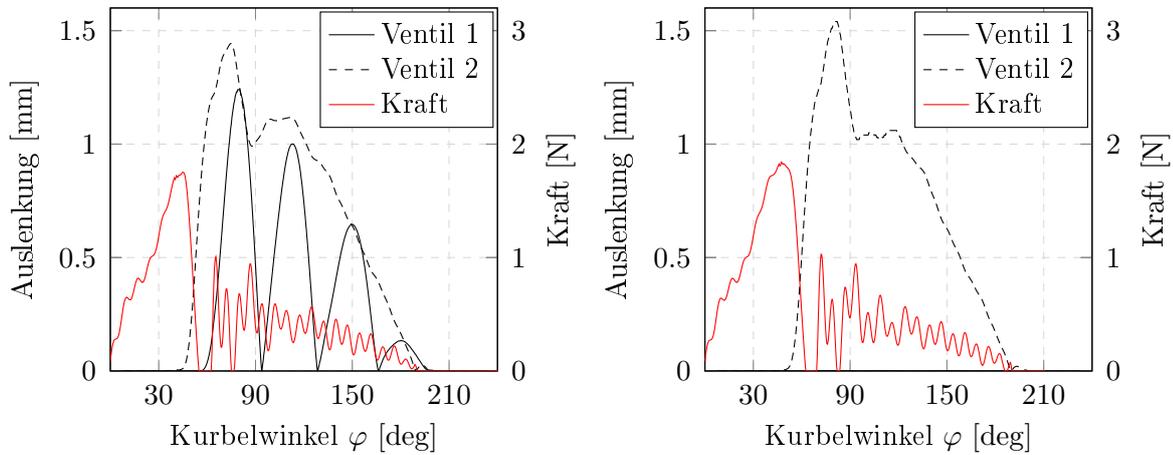
**Tabelle 5.9:** Vergleich des Serienkompressors (Ventil 1) mit dem Kompressor mit mechanischer Saugventilunterstützung (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 54,4 °C Kondensationstemperatur.

	Simulation			Messung		
	Ventil 1	Ventil 2	Diff	Ventil 1	Ventil 2	Diff
$\dot{Q}_0$ [W]	87,12	87,85	0,83 %	79,60	81,00	1,75 %
$f \oint p dV$ [W]	37,04	36,95	-0,25 %	37,29 ±0,20	37,70 ±0,19	1,09 %
$P_{S\text{VI}}$ [W]	0,76	0,26	-65,0 %	0,87 ±0,03	0,48 ±0,04	-45,3 %
$P_{S\text{VII}}$ [W]	0,94	0,46	-51,5 %	1,04 ±0,07	0,64 ±0,08	-38,2 %
$P_{D\text{VI}}$ [W]	0,77	0,79	2,0 %	0,81 ±0,02	0,84 ±0,02	2,9 %
$P_{D\text{VII}}$ [W]	0,85	0,87	2,2 %	0,78 ±0,02	0,80 ±0,02	2,9 %

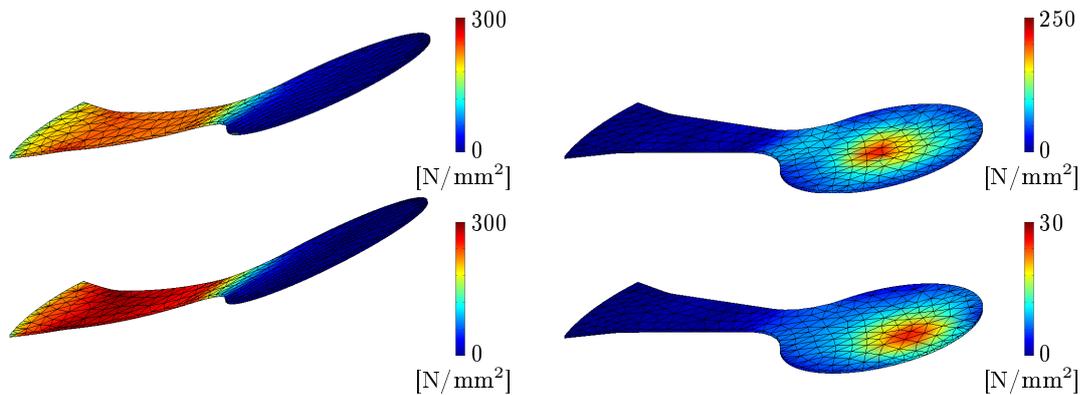
Die in Abbildung 5.24 dargestellten Erhebungskurven zeigen die Wirkung der mechanischen Kraft (rote Linie) auf die Saugventilbewegung (Ventiltellermitte). Dabei steigt die Kraft während der Rückexpansionsphase kontinuierlich an, bis sie zum Öffnen des Saugventils ihr Maximum erreicht, das knapp unter 2 N liegt. Danach führt die Ventilauslenkung zum Abheben der Betätigungsfeder vom Ventil und diese trifft kurze Zeit später wieder auf das Ventil auf. Während der restlichen Saugphase kann die schwankende Zusatzkraft das Saugventil bis zum unteren Totpunkt geöffnet halten. Durch die Betätigungsfeder ist das Ventil nahezu immer weiter geöffnet, als dies beim Serienventil bei der jeweiligen Kolbenstellung der Fall wäre. Vor allem im Bereich des unteren Kolbentotpunktes führt der relativ große Ventilhub zu einer erhöhten Durchflussrate und damit zu einer merklichen Steigerung des Gesamtkältemittelmassenstroms. Damit verbunden steigt der Zylinderdruck am Ende der Saugphase geringfügig schneller an und führt zu einem früheren Druckausgleich, der das Saugventil zeitiger schließen lässt. Die Geschwindigkeit, mit der das Saugventil nahe dem unteren Totpunkt geschlossen wird, ist dabei ebenfalls deutlich geringer als bei der Standardausführung.

Um die Veränderungen der mechanischen Beanspruchung des Saugventils miteinander zu vergleichen, wurden Vergleichsspannungen (von Mises) nach Gleichung 5.16 ausgewertet (Nilsson *et al.*, 1980 [42]). Diese Spannungen wurden an den Knoten des FEM-Rechengitters berechnet und sind in Abbildung 5.25 für den Betriebspunkt mit 54,4 °C Kondensationstemperatur grafisch dargestellt. Während die größten auftretenden Spannungen beim Erreichen der maximalen Ventilauslenkung nahezu ident sind, ergeben sich große Unterschiede beim Aufprallen des Ventils auf den Ventilsitz. Treten beim Serienventil aufgrund der hohen Geschwindigkeiten Höchstspannungen im Bereich von 250 N/mm<sup>2</sup> auf (Aufprall bei 104° Kurbelwinkel), so sind es beim mechanisch unterstützten Saugventil nur etwa 30 N/mm<sup>2</sup> (Aufprall bei 190° Kurbelwinkel).

$$\sigma_{v,M} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\tau_{xx} - \tau_{yy})^2 + (\tau_{yy} - \tau_{zz})^2 + (\tau_{zz} - \tau_{xx})^2] + 3 (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)} \quad (5.16)$$



**Bild 5.24:** Vergleich der simulierten Saugventilauslenkung beim Serienkompressor (Ventil 1) und bei Einwirkung der mechanischen Zusatzkraft (Ventil 2). Betriebsbedingungen gemäß ASHRAE-Vergleichsprozess mit 45 °C (links) bzw. 54,4 °C Kondensationstemperatur (rechts).



**Bild 5.25:** Auftretende Vergleichsspannungen beim Erreichen der maximalen Auslenkung (links) und beim Aufprallen auf den Ventilsitz (rechts). Die unteren Grafiken zeigen jeweils das Saugventil bei Verwendung der mechanischen Ventilunterstützung.



## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In dieser Arbeit wurden technische Maßnahmen zur Reduktion der Saugventilverluste untersucht. Zu diesem Zweck wurde ein auf finite Elemente basierendes Strukturberechnungsprogramm erstellt und in ein kommerzielles CFD-Rechenprogramm eingebunden. Nachdem das Gesamtmodell zufriedenstellend mit diversen Messungen validiert werden konnte, wurde die Simulationsmethode auf die Untersuchung von kraftunterstützten Saugventilen angewendet. Bei der Saugventilunterstützung wurden zwei verschiedene Strategien analysiert. Erstere basiert auf der Verwendung eines negativ vorgespannten Ventils und dem Schließen durch eine magnetische Kraft. Letztere auf der Verwendung einer mechanischen Ansteuerung über eine Feder, die neben anderen Vorteilen zu einer durchgehenden Öffnung des Ventils führt.

Durch die Reduzierung der Ventilvorspannung (negative Vorspannung) konnte zwar einerseits die Kompressorleistungszahl gesteigert werden, andererseits musste dafür eine elektromagnetische Spule eingesetzt werden, um das Schließen des Ventils am unteren Totpunkt des Kolbens zu gewährleisten. Zur Ansteuerung dieser Spule waren jedoch die Position der Kurbelwelle und eine elektrische Schaltung erforderlich. Alleine aus wirtschaftlichen Gründen beschränkt sich diese Maßnahme deshalb auf Kompressoren, die über eine intelligente Leistungselektronik verfügen. Ein weiterer Nachteil, der durch die Verringerung der Saugventilvorspannung in Kauf genommen werden musste, sind die etwas höheren Aufprallgeschwindigkeiten auf den Ventilsitz. Ohne Berücksichtigung der elektrischen Leistung für die magnetische Spule ergaben sich abhängig vom untersuchten Betriebspunkt Verbesserungen der gemessenen Leistungszahl von 0,4 bis 1,7 %. Aus den Erkenntnissen der Untersuchung des elektromagnetisch unterstützten Saugventils entstand die Idee, eine mechanisch erzeugte Zusatzkraft für die Ventilunterstützung zu nutzen. Zusammenfassend kann der mechanischen Ventilunterstützung ein durchaus großes Potential zugesprochen werden. Obwohl die Verbesserung der Kompressorleistungszahl bei den Kalorimetermessungen mit circa 0,7 bis 0,9 % geringer ausfiel als erwartet, konnte die mechanische Belastung auf das Saugventil deutlich vermindert werden. Durch das Offenhalten während der gesamten Saugphase wurde die Häufigkeit, mit der das Ventil auf den Ventilsitz aufprallt, auf ein Viertel reduziert. Des Weiteren wurde die Aufprallgeschwindigkeit deutlich verringert und somit die hohe Stoßbelastung, die sich äußerst negativ auf die Lebensdauer des Ventils auswirkt, reduziert. Die Untersuchung bei verschiedenen standardisierten ASHRAE-Betriebsbedingungen zeigte außerdem, dass die mechanische Ventilunterstützung unabhängig vom vorherrschenden Druckverhältnis gleichermaßen funktioniert.

Auch unter wirtschaftlichen Aspekten betrachtet ist die mechanische Ventilunterstüt-

zung durchaus interessant. Bei einer Neukonstruktion des Kompressors könnte die Mechanik der Ventilunterstützung in die Kurbelwelle sowie in das Zylindergehäuse integriert werden. Dadurch würden sich nur wenige Zusatzbauteile ergeben und die Herstellungskosten wären nur marginal höher. Ein weiterer Vorteil, der bei den Versuchen an Umgebungsluft deutlich wurde, sind die geringeren Geräuschemissionen. Bei Schallemissionsmessungen, die bei der Firma Secop durchgeführt wurden, zeigten sich zwar insgesamt nahezu keine Verringerungen, die Frequenzanalyse lässt jedoch darauf schließen, dass das Saugventil durch die Mechanik der Ventilunterstützung als Lärmquelle abgelöst wurde.

Um das volle Potential der mechanischen Saugventilunterstützung ausnützen zu können, bedarf es weiterer Simulationen. Dazu wurde ein Folgeprojekt gestartet, das in den nächsten zwei Jahren die mechanische Ansteuerung weiter verbessern und die Interaktion mit gänzlich neu gestalteten Saugschalldämpfern untersuchen soll.

In Anbetracht der vielen Vorteile kann man nur gespannt sein, inwiefern ein serienmäßiger Einsatz dieser Technologie das Design zukünftiger Kühltischkompressoren verändern wird.

# Literaturverzeichnis

- [1] Aigner, R., Steinrück, H.: „*Modelling Fluid Dynamics, Heat Transfer and Valve Dynamics in a Reciprocating Compressor*“, 5th Conf. of the EFRC, Prag, Seite 171-180, 2007
- [2] Almbauer, R., Offner, G.: „*Numerische Methoden in der angewandten Thermodynamik*“, Institut für Verbrennungskraftmaschinen und Thermodynamik an der Technischen Universität Graz, Vorlesungsskriptum, 2016
- [3] ANSYS, Inc.: „*ANSYS Fluent Theory Guide*“, ANSYS Inc., Release 15.0, 2013
- [4] ASHRAE: „*Methods of Testing for Rating Positive Displacement Refrigerant Compressors and Condensing Units*“, ANSI/ASHRAE Standard 23-2005, 2005
- [5] Bauer, F.: „*Valve Losses in Reciprocating Compressors*“, Proc. Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Vol.1, Seite 263-70, 1998
- [6] Bathe, K. J.: „*Finite-Elemente-Methoden*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, Aus d. Engl. übers. v. Peter Zimmermann, 2. Auflage, 2002
- [7] BDEW: „*Energie-Info: Stromverbrauch im Haushalt*“, BDEW Bundesverband der Energie- und Wasserwirtschaft e.V., Berlin, 2016
- [8] Brenn, G.: „*Strömungslehre und Wärmeübertragung I*“, Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung an der Technischen Universität Graz, Vorlesungsskriptum, korrigierte Auflage, 2010
- [9] Burgstaller, A., Nagy, D., Almbauer, R., Lang, W.: „*Influence of the Main Parameters of the Suction Valve on the Overall Performance of a Small Hermetic Reciprocating Compressor*“, 19th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1315, Seite 1-8, 2008
- [10] Burgstaller, A.: „*Ansätze zu thermodynamischen Analysen und Bewertungen von hermetisch verschlossenen Systemen am Beispiel von Kleinkältemittelkompressoren*“, Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Graz, Dissertation, 2009
- [11] Celigoj, C. C., Schmidt, M. O.: „*Methode der Finiten Elemente*“, Institut für Festigkeitslehre an der Technischen Universität Graz, Vorlesungsskriptum Version 2.1, 1998

- [12] Costagliola, M.: „*Dynamics of a Reed Type Valve*“, Dissertation, Massachusetts Institute of Technology, 1949
- [13] Europäische Union: „*Delegierte Verordnung (EU) Nr. 1060/2010 der Kommission vom 28. September 2010 zur Ergänzung der Richtlinie 2010/30/EU des Europäischen Parlaments und des Rates im Hinblick auf die Kennzeichnung von Haushaltskühlgeräten in Bezug auf den Energieverbrauch*“, Ergänzung zur EU-Richtlinie 2010/30/EU, 2010
- [14] Estruch, O., Lehmkuhl, O., Rigola, J., Perez-Segarra, C. D.: „*Fluid-Structure Interaction of a Reed Type Valve Subjected to Piston Displacement*“, 22nd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1659, Seite 1-10, 2014
- [15] Gasche, J. L., Dias, A. D. S. L., Bueno, D. D., Lacerda, J. F.: „*Numerical Simulation of a Suction Valve: Comparison Between a 3D Complete Model and a 1D Model*“, 23rd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1358, Seite 1-8, 2016
- [16] Glück, M.: „*Ein Beitrag zur numerischen Simulation von Fluid-Struktur-Interaktionen - Grundlagenuntersuchungen und Anwendung auf Membrantragwerke*“, Technische Fakultät der Universität Erlangen-Nürnberg, Dissertation, 2002
- [17] Glück, T., Kemmetmüller, W., Kugi, A.: „*Trajectory optimization for soft landing of fast-switching electromagnetic valves*“, Proc. of the 18th World Congress - The International Federation of Automatic Control, Milano, Seite 11532-37, 2011
- [18] Griner, G. C., Gatecliff, G. W., Richardson, H.: „*Static and Dynamic Analysis of Reed Valves Using a Minicomputer Based Finite Element Systems*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 327, Seite 172-175, 1980
- [19] Gross, D., Hauger, W., Schröder, J., Wall, W. A.: „*Technische Mechanik 2 - Elastostatik*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 12. Auflage, 2014
- [20] Habing, R. A., Peters, M. C. A. M.: „*An experimental method for validating compressor valve vibration theory*“, Journ. of Fluids and Structures, 22, Seite 683-697, 2006
- [21] Herwig, H.: „*Strömungsmechanik A-Z, Eine systematische Einordnung von Begriffen und Konzepten der Strömungsmechanik*“, Friedrich Vieweg & Sohn Verlag Wiesbaden, 1. Auflage, 2004
- [22] Herwig, H., Schmandt, B.: „*Strömungsmechanik, Physik - mathematische Modelle - thermodynamische Aspekte*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 3. Auflage, 2015

- 
- [23] Hopfgartner, J., Heimes, M., Berger, E., Posch, S., Almbauer, R., Stangl, S.: „*Experimental Study on the Thermal Behavior of a Domestic Refrigeration Compressor during Transient Operation in a Small Capacity Cooling System*“, 23rd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1216, Seite 1-8, 2016
- [24] Hopfgartner, J., Posch, S., Zuber, B., Almbauer, R., Krischan, K., Stangl, S.: „*Reduction of the suction losses through reed valves in hermetic reciprocating compressors using a magnet coil*“, Int. Conference on Compressors and their Systems, London, Seite 309-318, 2017
- [25] Khalifa, H. E., Liu, X.: „*Analysis of Stiction Effect on the Dynamics of Compressor Suction Valve*“, Proc. Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Vol.1, Seite 87-92, 1998
- [26] Kim, H., Ahn, J., Kim, D.: „*Fluid Structure Interaction and Impact Analysis of Reciprocating Compressor Discharge Valve*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1112, Seite 1-9, 2008
- [27] Krishnamoorthy, C. S.: „*Finite Element Analysis: Theory and Programming*“, Tata McGraw-Hill Publishing Company Limited, New Delhi, 2nd Edition, 17. Nachdruck, 2007
- [28] Lang, W., Almbauer, R. A., Nagy, D.: „*Comparison of two different approaches to model the suction valve dynamics of a hermetic reciprocating compressor*“, Proc. of the 7th Int. Conf. on Compressors and Coolants, Papiernicka, Slovakia, 2009
- [29] Lang, W.: „*Erstellung von Simulationsmodellen für ausgewählte Problemstellungen bei der Entwicklung von hermetischen Kolbenkompressoren*“, Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Graz, Dissertation, 2010
- [30] Launder, B. E., Spalding, D. B.: „*Lectures in Mathematical Models of Turbulence*“, Academic Press, London, England, 1972
- [31] Leray, D.: „*Influence of suction valve parameter on volumetric efficiency and power loss - valve design chart*“, 7th Int. Conference on Compressors and their Systems, London, Seite 167-179, 2011
- [32] Machu, E. H.: „*The Two-Dimensional Motion of the Valve Plate of a Reciprocating Compressor Valve*“, Proc. Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1012, Seite 403-408, 1994
- [33] Malvern, L. E.: „*Introduction to the mechanics of a continuous medium*“, Prentice-Hall Englewood Cliffs - New Jersey, 1969
- [34] Mang, H. A., Hofstetter, G.: „*Festigkeitslehre*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4. erweiterte Auflage, 2013

- [35] Matos, F. F. S., Prata, A. T., Deschamps, C. J.: „*A Numerical Methodology for the Analysis of Valve Dynamics*“, 15th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1411, Seite 383-390, 2000
- [36] Matos, F. F. S., Deschamps, C. J., Prata, A. T.: „*A Two-Dimensional Simulation Model for Reciprocating Compressors with Automatic Valves*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1798, Seite 1-8, 2006
- [37] Mayer, J., Bjerre, P., Brune, F.: „*A Comparative Study Of Different Numerical Models For Flapper Valve Motion*“, 22nd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1315, Seite 1-8, 2014
- [38] Merker, G.P., Baumgarten, C.: „*Fluid- und Wärmetransport Strömungslehre*“, B.G. Teubner Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden, 1.Auflage, 2000
- [39] Mistry, H., Bhakta, A., Dhar, S., Bahadur, V., Dey, S.: „*Capturing Valve Dynamics in Reciprocating Compressors through Computational Fluid Dynamics*“, 21st Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1210, Seite 1-6, 2012
- [40] Nagy, D., Almbauer, R. A., Lang, W., Burgstaller, A.: „*Valve Lift Measurement for the Validation of a Compressor Simulation Model*“, 19th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1274, Seite 1-8, 2008
- [41] Nasdala, L.: „*FEM-Formelsammlung Statik und Dynamik. Hintergrundinformationen, Tipps und Tricks*“, Springer Fachmedien Wiesbaden, 3. aktualisierte Auflage, 2015
- [42] Nilsson, J. O., Nilsson, L., Oldenburg, M.: „*Impact Stresses in Flapper Valves - A Finite Element Analysis*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 364, Seite 390-395, 1980
- [43] Oertel, H., Böhle, M., Reviol, T.: „*Strömungsmechanik für Ingenieure und Naturwissenschaftler*“, Springer-Verlag Wiesbaden, 7. überarbeitete Auflage, 2015
- [44] Ooi, K. T., Chai, G. B., Kwek, E. C.: „*A Simple Valve Model to Study the Performance of a Small Compressor*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 803, Seite 147-155, 1992
- [45] Parkus, H.: „*Mechanik der festen Körper*“, Springer-Verlag Wien New York, 2. Auflage, 1966
- [46] Pereira, E. L. L., Deschamps, C. J., Ribas Jr., F. A.: „*Performance analysis of reciprocating compressors through CFD simulation*“, Int. Conference on Compressors and their Systems, London, Seite 309-318, 2007

- [47] Perez-Segarra, C. D., Escanes, F., Oliva, A.: „*Numerical Study of the Thermal and Fluid-Dynamic Behaviour of Reciprocating Compressors*“, 12th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 971, Seite 145-150, 1994
- [48] Pizarro-Recabarren, R. A., Barbosa, J., Deschamps, C. J.: „*Modeling the Stiction Effect in Automatic Compressor Valves*“, 21st Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 2044, Seite 1-9, 2012
- [49] Posch, S., Hopfgartner, J., Berger, E., Zuber, B., Schöllauf, P., Almbauer, R.: „*Numerical analysis of a hermetic reciprocating compressor oil pump system*“, International Journal of Refrigeration, In Press, Accepted Manuscript, Available online 5 October 2017
- [50] Ribas, F. A., Deschamps, C. J., Fagotti, F., Morriesen, A., Dutra, T.: „*Thermal Analysis of Reciprocating Compressors - A Critical Review*“, Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1306, Seite 1-8, 2008
- [51] Rigola, J., Perez-Segarra, C. D., Oliva, A.: „*Parametric studies on hermetic reciprocating compressors*“, International Journal of Refrigeration, Volume 28, Issue 2, Seite 253-266, 2005
- [52] Rodrigues, T. T.: „*Turbulence Modelling Evaluation for Reciprocating Compressor Simulation*“, 22nd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1274, Seite 1-8, 2014
- [53] Sharpe, W. N.: „*Springer Handbook of Experimental Solid Mechanics*“, Springer Science+Business Media, LLC New York, 2008
- [54] Sheu, H. C., Hu, Y. Z. R.: „*Nonlinear Vibration Analysis of Reed Valves*“, 15th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1419, Seite 437-442, 2000
- [55] Smith, P., Zappe, R. W.: „*Valve Selection Handbook*“, Gulf Professional Publishing, 5. Auflage, 2004
- [56] Steiner, H.: „*Höhere Strömungslehre und Wärmeübertragung*“, Institut für Strömungslehre und Wärmeübertragung an der Technischen Universität Graz, Vorlesungsskriptum, 2011
- [57] Steinke, P.: „*Finite-Elemente-Methode. Rechnergestützte Einführung*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 5. bearbeitete und ergänzte Auflage, 2015
- [58] Thomson, W. T., Dahleh, M. D.: „*Theory of Vibration with Applications*“, Prentice-Hall Inc., 5. Auflage, 1998

- [59] Touber, S.: „*A contribution to the improvement of compressor valve design*“, Department of Mechanical, Maritime and Materials Engineering, Delft University of Technology, Netherlands, Doctoral Thesis, 1976
- [60] Truckenbrodt, E.: „*Fluidmechanik - Band 1*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 4. Auflage, 1996
- [61] Vöth, S.: „*Dynamik schwingungsfähiger Systeme. Von der Modellbildung bis zur Betriebsfestigkeitsrechnung mit MATLAB/SIMULINK*“, Friedr. Vieweg und Sohn Verlag, Wiesbaden, 1. Auflage, 2006
- [62] Wissmann, J., Sarnes, K.-D.: „*Finite Elemente in der Strukturmechanik*“, Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1. Auflage, 2006
- [63] Wu, S., Wang, Z.: „*A Numerical Simulation of Fluid-Structure Interaction for Refrigerator Compressors Suction and Exhaust System Performance Analysis*“, 22nd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1131, Seite 1-7, 2014
- [64] Yoshizumi, F., Kondoh, Y., Moroi, T., Tamano, S., Morinishi, Y.: „*Numerical Simulation on the Opening Delay of a Discharge Reed Valve in Compressors*“, 22nd Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Beitragsnummer 1428, Seite 1-9, 2014
- [65] Xie, G., Bansal, P. K.: „*Dynamic Simulation Model of a Reciprocating Compressor in a Refrigerator*“, 15th Int. Compressor Engineering Conf. at Purdue, Seite 129-136, 2000
- [66] Zippl, G.: „*Erstellung der Energiebilanz eines Kältemittelkompressors*“, Fakultät für Maschinenbau der Technischen Universität Graz, Diplomarbeit, 2002
- [67] CFD-online: „[http://www.cfd-online.com/Wiki/Code:\\_Quadrature\\_on\\_Tetrahedra](http://www.cfd-online.com/Wiki/Code:_Quadrature_on_Tetrahedra)“, zugegriffen am 19. Dezember 2016
- [68] Eigenbibliothek: „<https://eigen.tuxfamily.org/dox/>“, zugegriffen am 21. Dezember 2016
- [69] Green Cooling Initiative: „[www.green-cooling-initiative.org/technology/domestic-refrigeration/](http://www.green-cooling-initiative.org/technology/domestic-refrigeration/)“, zugegriffen am 09. August 2017
- [70] Statista: „<https://de.statista.com/outlook/16010100/102/kuehlschraenke/europa>“, zugegriffen am 09. August 2017

# Appendix

## A Kontinuumshypothese

Zur Beschreibung von Flüssigkeiten und Gasen wird in der Strömungslehre meist von der Kontinuumshypothese ausgegangen, die das Fluid als Kontinuum auffasst. Dabei wird angenommen, dass Materie kontinuierlich im Raum verteilt ist und dessen Zustand (Dichte, Geschwindigkeit, Temperatur, usw.) durch stetige Felder beschrieben werden kann (Merker, 2000 [38]).

Das Kontinuum besteht aus einer Vielzahl an Teilchen, die lückenlos aneinandergereiht sind und jeweils mehrere Moleküle zusammenfassen. Damit das vereinfachende mathematische Modell der Kontinuumshypothese angewendet werden kann, muss ein Teilchen einerseits zumindest so viele Moleküle umfassen, dass deren mittlere Zustandsgrößen unabhängig von mikroskopischen Einflüssen sind. Andererseits sollen die Volumina der Teilchen jedoch sehr klein gegenüber der makroskopischen Ausdehnung des zu untersuchenden Gebietes sein. Für viele technische Anwendungen, wie auch bei der in dieser Arbeit untersuchten Strömung des Kältemittels durch den hermetischen Hubkolbenkompressor, sind diese Anforderungen erfüllt.<sup>1</sup> Im Sinne der Kontinuumsmechanik kann somit jedem Massenpunkt eine Dichte  $\rho$ , ein Spannungsvektor  $\boldsymbol{\sigma}$  und ein spezifischer Volumenkraftvektor  $\boldsymbol{f}^B$  zugeordnet werden (Truckenbrodt, 1996 [60]):

$$\begin{aligned}\rho &:= \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}, \\ \boldsymbol{\sigma} &:= \lim_{\Delta O \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}^O}{\Delta O}, \\ \boldsymbol{f}^B &:= \lim_{\Delta m \rightarrow 0} \frac{\Delta \boldsymbol{F}^B}{\Delta m}.\end{aligned}\tag{A.1}$$

## B Reynoldssches Transporttheorem

Mit Hilfe des in Gleichung A.2 für eine beliebige Größe  $\phi$  dargestellten Reynoldsschen Transporttheorems, kann von einer massenfesten auf eine ortsfeste Betrachtungsweise gewechselt werden. Damit kann die totale zeitliche Änderung (i) in eine lokale zeitliche

<sup>1</sup>Kontinuumsmechanische Gleichungen gültig für Knudsen-Zahlen  $Kn \ll 1$ , weitere Informationen siehe Oertel *et al.* (2015) [43].

Änderung (ii) und eine konvektive Änderung (iii) übergeführt werden (Steiner, 2011 [56]).

$$\underbrace{\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dV}_{(i)} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \int_V \phi \, dV}_{(ii)} + \underbrace{\oint_S \phi (\mathbf{v} \cdot d\mathbf{A})}_{(iii)} \quad (\text{A.2})$$

Das Oberflächenintegral (iii), das dem Fluss der Größe  $\phi$  über die Oberflächen des ortsfesten Kontrollvolumens entspricht, kann ferner mithilfe des Gaußschen Integralsatzes in ein Volumenintegral übergeführt werden und es folgt:<sup>2</sup>

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \phi \, dV = \int_V \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot (\phi \mathbf{v}) \right) dV . \quad (\text{A.3})$$

## C Turbulenz

Eine einheitliche Definition turbulenter Strömungen lässt sich in der Literatur kaum finden, jedoch wird darunter in der Regel eine instationäre, dreidimensionale Strömung mit stark und unregelmäßig schwankenden Strömungsgeschwindigkeiten und Drücken verstanden. Turbulente Strömungen entstehen aus laminaren Strömungen, wenn kleine Störungen nicht mehr weggedämpft werden, sondern zeitlich und räumlich anwachsen (Herwig und Schmandt, 2015 [22]). Ob eine Strömung in laminarer oder turbulenter Form vorliegt, kann mittels der dimensionslosen Reynoldszahl  $Re$  abgeschätzt werden:

$$Re := \frac{L v \rho}{\eta} . \quad (\text{A.4})$$

Hierin sind  $L$  und  $v$  die charakteristische Länge und Geschwindigkeit und  $\rho$  und  $\eta$  die Dichte sowie die dynamische Viskosität des Fluides. Die Reynoldszahl wird dabei häufig als das Verhältnis zwischen Trägheits- und Zähigkeitskräften interpretiert. Für kleinere Reynoldszahlen liegt die Strömung in laminarer Form vor, übersteigt sie jedoch die kritische Reynoldszahl (abhängig von der jeweiligen Problemstellung) wird die Strömung zunehmend instabil und kleine Störungen können zu einem Umschlag von laminar zu turbulent führen.

Die zeitlich stark schwankenden Geschwindigkeiten turbulenter Strömungen können auch als zeitlich gemittelte Bewegungen mit überlagerten Schwankungsbewegungen aufgefasst werden. Analog kann auch der kinetische Energiegehalt der Wirbel so aufgeteilt werden, dass diese von der mittleren sowie der überlagerten Schwankungsbewegung abhängig sind. Die Verteilung des mechanischen Energiegehaltes (aufgrund der Schwankungsbewegungen) auf Wirbel unterschiedlicher Größenordnungen ist in Abbildung A.1 qualitativ dargestellt. Im doppelt-logarithmischen Diagramm ist auf der Ordinate die spektrale Verteilung der kinetischen Energie der Schwankungsbewegung

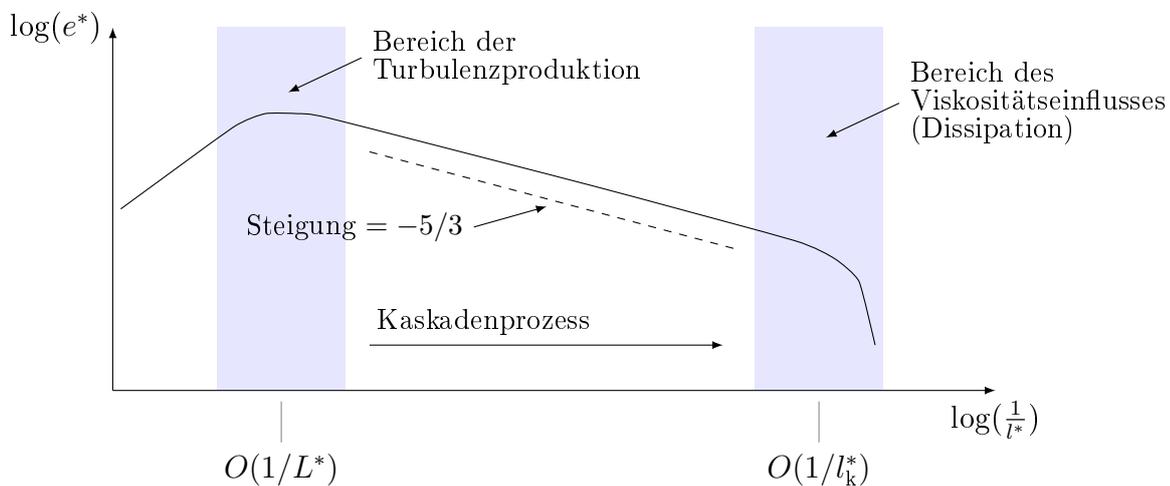
---

<sup>2</sup>Zur Erklärung des Nabla-Operators  $\nabla$  siehe Appendix D.

der Wirbel und auf der Abszisse der Kehrwert der Größenordnung der Wirbelstruktur aufgetragen. Dabei ist ersichtlich, dass der Großteil der Energie in den größeren Wirbelstrukturen steckt und mit kleiner werdender Wirbelabmessung stark abnimmt.

Richtung kleinerer Wirbelabmessungen scheint das Spektrum begrenzt zu sein, was darauf zurückzuführen ist, dass in diesem Bereich der Einfluss der molekularen Viskosität zur Dissipation von kinetischer in thermische Energie führt. Die kleinsten dabei auftretenden Wirbel können durch die sogenannte Kolmogorov-Länge  $l_k^*$  abgeschätzt werden. Soll in weiterer Folge die Turbulenz in der Strömung aufrechterhalten werden (kinetische Energie wird der Schwankungsbewegung durch Dissipationseffekte entzogen), muss diese mechanische Energie der Strömung wieder zugeführt werden. Dies erfolgt durch mittlere Bewegungen, die großräumige Wirbelbewegungen indizieren und als Turbulenzproduktion aufgefasst werden kann (Herwig, 2004 [21]).

Die energiereichen großen Wirbelstrukturen transferieren in weiterer Folge mechanische Energie an immer kleiner werdende Wirbel, bis diese kleinsten Wirbel wiederum durch Dissipation aufgelöst werden. Der Transfer von mechanischer Energie von größeren Wirbeln in Richtung kleinerer Wirbel wird als Kaskadenprozess bezeichnet. Die Bereiche der Turbulenzproduktion und der Dissipation sind vor allem bei größeren Reynoldszahlen deutlich voneinander getrennt und der Verlauf des Energiespektrums zwischen diesen Bereichen kann im Grenzfall  $Re \rightarrow \infty$  mit der charakteristischen Steigung von  $-5/3$  (im doppeltlogarithmischen Diagramm) beschrieben werden (Herwig, 2004 [21]).



**Bild A.1:** Typischer Verlauf der Spektraldichte der kinetischen Energie in einer turbulenten Strömung (Herwig, 2004 [21])

## Numerische Simulation turbulenter Strömungen

Generell kann die Lösung turbulenter Strömungsprobleme auf drei unterschiedliche Arten erfolgen:

- DNS - Direkte Numerische Simulation
- LES - Grobstruktur-Simulation
- RANS - Lösung der Reynolds-gemittelten Navier-Stokesschen Gleichungen

*DNS*: Die Erhaltungsgleichungen aus Kapitel 2.4 wurden für ein infinitesimales Fluid-element aufgestellt und gelten sowohl für laminare als auch für turbulente Strömungen Newtonscher Fluide. Zusammen mit den Anfangs- und Randbedingungen bilden die Navier-Stokesschen Gleichungen ein Gleichungssystem, das nur numerisch gelöst werden kann. Bei der DNS werden sämtliche Wirbel direkt berechnet. Dafür muss das gesamte Rechengebiet sowohl örtlich als auch zeitlich sehr genau aufgelöst werden, damit sogar kleinste Wirbelstrukturen bis hin zur Kolmogorov-Länge erfasst werden können. Die Beschränkung der zeitlichen Auflösung ergibt sich aus der Prämisse, dass ein Fluidteilchen während eines Zeitschrittes nicht mehr als einen Gitterabstand zurücklegen darf. Da der Aufwand zur Lösung dieses Gleichungssystems jedoch enorm hoch ist, spielt die DNS nur in wissenschaftlichen Bereichen eine Rolle (Herwig, 2004 [21]).

*LES*: Die Grobstruktur-Simulation stellt eine Kombination aus DNS und RANS dar, bei der jedoch eine sogenannte Filterung (örtliche Mittelung) durchgeführt wird. Hierbei werden größere Wirbel direkt berechnet, kleinere Wirbel werden mit Feinstruktur-Turbulenzmodellen berücksichtigt. Da der Energiegehalt kleinerer Wirbel im Vergleich zu größeren Wirbel gering ist, sind Ungenauigkeiten in diesen Modellen relativ unkritisch. Der Vorteil dieses Lösungsansatzes ist, dass die Grenze zwischen direkter Simulation (große Wirbel) und Modellierung (kleine Wirbel) an die vorhandenen Rechnerleistungen angepasst werden können (Herwig, 2004 [21]).

*RANS*: Hier werden Strömungsgrößen als statistisch schwankende Variablen betrachtet, bei denen die Momentanwerte  $\Phi$  zusammengesetzt aus dem Mittelwert  $\bar{\Phi}$  und der Schwankungsgröße  $\Phi'$  aufgefasst werden. Ihr Mittelwert  $\bar{\Phi}$  kann wie folgt berechnet werden:

$$\bar{\Phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} \Phi dt . \quad (\text{A.5})$$

Da im allgemeinen Fall der zeitliche Verlauf der Strömungsgröße  $\Phi$  nicht als konstant (stationär) betrachtet werden kann, muss das Mittelungsintervall  $[t, t+\Delta t]$  entsprechend gewählt werden, dass einerseits der berechnete Wert tatsächlich den Mittelwert repräsentiert und andererseits aber instationäre Verläufe nicht herausgemittelt werden. Eine

weitere Möglichkeit, zeitabhängige turbulente Strömungen zu mitteln, ist die Ensemble-Mittelung, die hier aber nicht näher ausgeführt werden soll.

Um die in Kapitel 2.4 eingeführten Erhaltungsgleichungen nun zu mitteln, wird wie in Oertel *et al.* (2015) [43] eine dichtegewichtete Mittelung, die Favre-Mittelung, verwendet:

$$\tilde{\Phi} = \frac{\overline{\rho \Phi}}{\bar{\rho}} \quad \text{mit} \quad \overline{\rho \Phi} = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} (\rho \Phi) dt . \quad (\text{A.6})$$

Während der Druck  $p$  und die Dichte  $\rho$  mit Gleichung A.5 gemittelt werden, wird für die Geschwindigkeiten  $u, v$  und  $w$ , die Temperatur  $T$  und die innere Energie  $e$  die dichtegewichtete Mittelung verwendet. Die Momentanwerte der Strömungsgrößen werden wie nachstehend durch deren Mittelwert und Schwankungsgröße approximiert, wobei der zweite Hochstrich ( $\Phi''$ ) auf die Schwankungsgröße der Favre-Mittelung hinweist:

$$\begin{aligned} \rho &= \bar{\rho} + \rho', & p &= \bar{p} + p', \\ u &= \tilde{u} + u'', & v &= \tilde{v} + v'', & w &= \tilde{w} + w'', \\ T &= \tilde{T} + T'', & e &= \tilde{e} + e''. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Abschließend sind noch folgende Rechenregeln zu beachten (Oertel *et al.*, 2015 [43]):

$$\overline{\rho \Phi''} = 0, \quad \frac{\partial \tilde{\Phi}}{\partial s} = \frac{\partial \bar{\Phi}}{\partial s}, \quad \overline{\Phi_1 + \Phi_2} = \bar{\Phi}_1 + \bar{\Phi}_2, \quad \overline{\rho' \tilde{\Phi}} = 0. \quad (\text{A.8})$$

Wird die oben genannte Vorgehensweise der Mittelung unter Berücksichtigung der Rechenregeln auf die Massenerhaltungsgleichung (Gleichung 2.12) angewendet, so ergibt sich diese zu:

$$\frac{\partial \bar{\rho}}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_j}{\partial x_j} = 0 . \quad (\text{A.9})$$

Analog ergeben sich die Impulserhaltungsgleichungen von Gleichung 2.14 zu:

$$\frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i}{\partial t} + \frac{\partial \bar{\rho} \tilde{v}_i \tilde{v}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{\tau}_{ji}}{\partial x_j} - \frac{\partial \overline{\rho v_i'' v_j''}}{\partial x_j} + \bar{\rho} f_i^B . \quad (\text{A.10})$$

Durch die Mittelung der Impulserhaltungsgleichungen entstehen zusätzliche Terme, die die Schwankungsbewegung der Strömung berücksichtigen. Obwohl diese Terme Trägheitsglieder repräsentieren, werden sie oft als zusätzliche Reibungsglieder interpretiert, da sie ähnliche Auswirkungen auf die Strömung haben wie Reibungsterme. Mit diesen zusätzlichen Unbekannten ist das Gleichungssystem aber nicht mehr geschlossen und benötigt zur Lösung weitere Gleichungen, die Turbulenzmodelle.

Analoges Vorgehen führt zur Reynolds-gemittelten Energiegleichung, die hier nicht weiter angeführt ist, jedoch in Herwig und Schmandt (2015) [22] nachgelesen werden kann.

## Turbulenzmodellierung

Bei der statistischen Mittelung der Strömungsgrößen treten turbulente Zusatzterme in den Erhaltungsgleichungen auf, die zusätzliche Unbekannte des Gleichungssystems darstellen. Für die Lösung des resultierenden Gleichungssystems bedarf es weiterer Gleichungen, der Turbulenzmodellgleichungen. Häufig basieren diese Turbulenzmodellgleichungen auf dem Ansatz der sogenannten Wirbelviskosität, der auf Boussinesq zurückgeht. In Analogie zum Stokesschen Gesetz (siehe Gleichung 2.15) wird für die zusätzlich auftretenden Terme in Gleichung A.10<sup>3</sup>

$$\tau'_{ij} = -\overline{\rho v_i'' v_j''} = \eta_t \left( \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \tilde{v}_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial \tilde{v}_k}{\partial x_k} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \bar{\rho} k \quad (\text{A.11})$$

angesetzt (Herwig und Schmandt, 2015 [22]). Dabei ist  $\delta_{ij}$  wieder das Kronecker-Delta,  $\eta_t$  die turbulente Wirbelviskosität und  $k$  die kinetische Energie der Schwankungsbewegung, definiert als:

$$k = \frac{1}{2} \left( \overline{v_j''^2} \right). \quad (\text{A.12})$$

Bei der turbulenten Wirbelviskosität  $\eta_t$  aus Gleichung A.11 handelt es sich nicht um eine Stoffgröße, sondern um eine Impulsaustauschgröße, die von der Strömung abhängig ist und keine Richtungsabhängigkeit berücksichtigt.

Über den Boussinesq-Ansatz werden die unbekanntenen Zusatzterme in Abhängigkeit nur noch einer skalaren Größe, der Wirbelviskosität, beschrieben. Diese Modelle werden als Wirbelviskositäts-Turbulenzmodelle bezeichnet und können nach der Anzahl ihrer partiellen Differentialgleichungen eingeteilt werden in:

- Null-Gleichungsmodelle: Bestimmung der Wirbelviskosität über algebraische Gleichungen.
- Ein-Gleichungsmodelle: zur Modellierung der turbulenten Wirbelviskosität wird eine partielle Differentialgleichung verwendet.
- Zwei-Gleichungsmodelle: zur Ermittlung von  $\eta_t$  werden zwei partielle Differentialgleichungen verwendet.

Für weitere Informationen sei hier auf Herwig und Schmandt (2015) [22] verwiesen.

### k- $\epsilon$ -Turbulenzmodell

Das Standard k- $\epsilon$ -Modell ist eines der weitverbreitetsten Turbulenzmodelle und wurde erstmals von Launder und Spalding (1972) [30] präsentiert. Neben dem Standard k- $\epsilon$ -Modell gibt es noch eine Reihe von modifizierten k- $\epsilon$ -Turbulenzmodellen, die in der

<sup>3</sup>Diese Zusatzterme werden als zusätzliche Spannungen aufgefasst und sind als Reynoldsspannungen bekannt.

einschlägigen Fachliteratur näher beschrieben sind.

Exemplarisch soll hier das in ANSYS Fluent implementierte Standard  $k$ - $\epsilon$ -Modell kurz dargestellt werden. Die turbulente Wirbelviskosität  $\eta_t$  wird wie folgt aus  $k$  und  $\epsilon$  berechnet:

$$\eta_t = \rho C_\eta \frac{k^2}{\epsilon} . \quad (\text{A.13})$$

Die zwei zusätzlichen Transportgleichungen für die turbulente kinetische Energie  $k$  und die Dissipationsrate  $\epsilon$  können dabei geschrieben werden als (ANSYS, 2013 [3]):

$$\frac{\partial \rho k}{\partial t} + \frac{\partial \rho k v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + G_k + G_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k , \quad (\text{A.14})$$

$$\frac{\partial \rho \epsilon}{\partial t} + \frac{\partial \rho \epsilon v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \eta + \frac{\eta_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (G_k + C_{3\epsilon} G_b) - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon . \quad (\text{A.15})$$

In den oben genannten Gleichungen repräsentieren  $C_{1\epsilon}$ ,  $C_{2\epsilon}$ ,  $C_{3\epsilon}$ ,  $C_\eta$ ,  $\sigma_k$  und  $\sigma_\epsilon$  Konstanten.  $G_k$  und  $G_b$  repräsentieren die Produktion der turbulenten kinetischen Energie aufgrund von Geschwindigkeitsgradienten bzw. aufgrund des Auftriebs,  $Y_M$  entspricht dem Beitrag der schwankenden Dilatation bei kompressiblen Strömungen und  $S_\epsilon$  sowie  $S_k$  sind Quellterme. Die Definitionen für diese Terme sind in Gleichungen A.16 bis A.18 angegeben.

$$G_k = -\overline{\rho v_i'' v_j''} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (\text{A.16})$$

$$G_b = \beta g_i \frac{\eta_t}{\text{Pr}_t} \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad \text{mit:} \quad \beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{A.17})$$

$$Y_M = 2 \rho \epsilon M_t^2 \quad \text{mit:} \quad M_t = \sqrt{\frac{k}{a^2}} \quad (\text{A.18})$$

Für weitere Informationen sei hier auf ANSYS (2013) [3] verwiesen.

## D Nabla-Operator $\nabla$

Für den dreidimensionalen Raum (kartesisches Koordinatensystem) soll gelten, dass  $f$  eine differenzierbare skalare Funktion,  $\mathbf{v}$  ein differenzierbares Vektorfeld und  $\mathbf{T}$  ein differenzierbares Tensorfeld zweiter Stufe sei:

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} , \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} . \quad (\text{A.19})$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ergibt einen Vektor und wird mittels Nabla-Operator  $\nabla$  wie folgt dargestellt:

$$\text{grad}f = \nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Die Anwendung des Nabla-Operators auf ein Vektorfeld ergibt ein Skalarfeld und wird dargestellt mit:

$$\text{div}\mathbf{v} = \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}. \quad (\text{A.21})$$

Auf ein Tensorfeld zweiter Stufe angewendet ergibt der Nabla-Operator ein Vektorfeld:

$$\text{div}\mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial T_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zx}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zy}}{\partial z} \\ \frac{\partial T_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial T_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.22})$$

## E Auswertung der Matrizen der nichtlinearen Bewegungsgleichung

Die Auswertung der Matrizen von Gleichung 3.31 erfolgt analog zu Bathe (2002) [6]. Dafür werden die Koordinaten- und Verschiebungsinterpolationen für isoparametrische Elemente verwendet:<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} {}^0x_i &= \sum_{k=1}^N h_k {}^0x_i^k, & {}^t x_i &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t x_i^k, & i &= 1, 2, 3, \\ {}^t u_i &= \sum_{k=1}^N h_k {}^t u_i^k, & u_i &= \sum_{k=1}^N h_k u_i^k, & i &= 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Damit kann der Verschiebungsvektor geschrieben werden als:

$$\mathbf{u} = [u_1^1 \quad u_2^1 \quad u_3^1 \quad u_1^2 \quad u_2^2 \quad u_3^2 \quad \dots \quad u_1^N \quad u_2^N \quad u_3^N] \quad (\text{A.24})$$

$$\text{mit} \quad u_j^k = {}^{t+\Delta t}u_j^k - {}^t u_j^k.$$

Mit den Ableitungen:

$$l_{ij} = \sum_{k=1}^N {}^0 h_{k,j} {}^t u_i^k, \quad {}^0 h_{k,j} = \frac{\partial h_k}{\partial {}^0 x_j} \quad (\text{A.25})$$

---

<sup>4</sup>  $N$  entspricht der Knotenanzahl des finiten Elementes; isoparametrische Elemente werden in Kapitel 3.1.4 behandelt.

können die linearen bzw. nichtlinearen Verzerrungs-Verschiebungs-Transformationsmatrizen aus Gleichung 3.31 wie folgt angegeben werden:

$${}^t_0\mathbf{B}_L^{(m)} = {}^t_0\mathbf{B}_{L0}^{(m)} + {}^t_0\mathbf{B}_{L1}^{(m)}, \quad (\text{A.26})$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{L0}^{(m)} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \dots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,3} & 0 & \dots & {}_0h_{N,3} \\ {}_0h_{1,2} & {}_0h_{1,1} & 0 & {}_0h_{2,2} & \dots & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,3} & {}_0h_{1,2} & 0 & \dots & {}_0h_{N,2} \\ {}_0h_{1,3} & 0 & {}_0h_{1,1} & {}_0h_{2,3} & \dots & {}_0h_{N,1} \end{bmatrix}, \quad (\text{A.27})$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{L1}^{(m)} = \begin{bmatrix} l_{11} {}_0h_{1,1} & l_{21} {}_0h_{1,1} & l_{31} {}_0h_{1,1} \\ l_{12} {}_0h_{1,2} & l_{22} {}_0h_{1,2} & l_{32} {}_0h_{1,2} \\ l_{13} {}_0h_{1,3} & l_{23} {}_0h_{1,3} & l_{33} {}_0h_{1,3} \\ (l_{11} {}_0h_{1,2} + l_{12} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,2} + l_{22} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,2} + l_{32} {}_0h_{1,1}) \\ (l_{12} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,2}) & (l_{22} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,2}) & (l_{32} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,2}) \\ (l_{11} {}_0h_{1,3} + l_{13} {}_0h_{1,1}) & (l_{21} {}_0h_{1,3} + l_{23} {}_0h_{1,1}) & (l_{31} {}_0h_{1,3} + l_{33} {}_0h_{1,1}) \\ l_{11} {}_0h_{2,1} & \dots & l_{31} {}_0h_{N,1} \\ l_{12} {}_0h_{2,2} & \dots & l_{32} {}_0h_{N,2} \\ l_{13} {}_0h_{2,3} & \dots & l_{33} {}_0h_{N,3} \\ (l_{11} {}_0h_{2,2} + l_{12} {}_0h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}_0h_{N,2} + l_{32} {}_0h_{N,1}) \\ (l_{12} {}_0h_{2,3} + l_{13} {}_0h_{2,2}) & \dots & (l_{32} {}_0h_{N,3} + l_{33} {}_0h_{N,2}) \\ (l_{11} {}_0h_{2,3} + l_{13} {}_0h_{2,1}) & \dots & (l_{31} {}_0h_{N,3} + l_{33} {}_0h_{N,1}) \end{bmatrix}, \quad (\text{A.28})$$

$${}^t_0\mathbf{B}_{NL}^{(m)} = \begin{bmatrix} {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & 0 & 0 & \dots & {}_0h_{N,1} & 0 & 0 \\ {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & {}_0h_{2,2} & 0 & 0 & \dots & {}_0h_{N,2} & 0 & 0 \\ {}_0h_{1,3} & 0 & 0 & {}_0h_{2,3} & 0 & 0 & \dots & {}_0h_{N,3} & 0 & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & 0 & \dots & 0 & {}_0h_{N,1} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & {}_0h_{2,2} & 0 & \dots & 0 & {}_0h_{N,2} & 0 \\ 0 & {}_0h_{1,3} & 0 & 0 & {}_0h_{2,3} & 0 & \dots & 0 & {}_0h_{N,3} & 0 \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,1} & 0 & 0 & {}_0h_{2,1} & \dots & 0 & 0 & {}_0h_{N,1} \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,2} & 0 & 0 & {}_0h_{2,2} & \dots & 0 & 0 & {}_0h_{N,2} \\ 0 & 0 & {}_0h_{1,3} & 0 & 0 & {}_0h_{2,3} & \dots & 0 & 0 & {}_0h_{N,3} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.29})$$

Zur Ermittlung des nichtlinearen Anteils der Steifigkeitsmatrix und des Kraftvektors aus Gleichung 3.31 werden zusätzlich noch der zweite Piola-Kirchhoffsche Spannungstensor und Spannungsvektor benötigt:

$${}^t_0\mathbf{S}^{(m)} = \begin{bmatrix} {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad {}^t_0\tilde{\mathbf{S}} = \begin{bmatrix} {}^t_0S_{11} & {}^t_0S_{12} & {}^t_0S_{13} \\ {}^t_0S_{21} & {}^t_0S_{22} & {}^t_0S_{23} \\ {}^t_0S_{31} & {}^t_0S_{32} & {}^t_0S_{33} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

$${}^t_0\hat{\mathbf{S}}^{(m)\text{T}} = [{}^t_0S_{11} \quad {}^t_0S_{22} \quad {}^t_0S_{33} \quad {}^t_0S_{12} \quad {}^t_0S_{23} \quad {}^t_0S_{31}] \quad (\text{A.31})$$

Zur Ermittlung der Einzelkomponenten  ${}^t_0S_{ij}$  muss noch die konstitutive Beziehung mit-einbezogen werden (siehe Abschnitt 3.1.5).