

Robert Ellinger

**Verzahnungstheorie:
Grundlagen und
Visualisierung mit CAD-Software**

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Mag. rer. nat.

Lehramtsstudium Darstellende Geometrie und Mathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Ao.Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dr.techn. Anton Gferrer

Institut für Geometrie

Graz, Mai 2019

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

Datum

Unterschrift

Danksagung

Zu Beginn dieser Arbeit möchte ich mich bei meinem Betreuer Ao.Univ.-Prof. Anton Gferrer für die in vielen Besprechungen gebotenen Ratschläge, die Hilfsbereitschaft und nicht zuletzt für die große Geduld bedanken.

Ein besonderer Dank gilt meinem Bruder Simon, der nicht nur diese Arbeit auf sprachliche Fehler Korrektur gelesen hat, sondern auch immer wieder so manchen Verbesserungsvorschlag für die Arbeit parat hatte.

Des Weiteren möchte ich mich bei meinen Mitstudierenden und Freunden bedanken, die mich während meiner Studienzeit stets in vielerlei Hinsicht unterstützt haben. Besonders hervorheben möchte ich in diesem Zusammenhang meine Studienkollegen Michael Berr und Mag. Georg Eberharter, B.Sc. die mir im Laufe des Studiums bei den unterschiedlichsten Problemen geholfen haben und stets Vorschläge und Tipps parat hatten. Auch die unzähligen interessanten Gespräche und Erfahrungen an und abseits der Universität sollen nicht unerwähnt bleiben.

Zuletzt möchte ich mich bei meiner Familie bedanken, besonders bei meinen Eltern, die mir das Studium in Graz ermöglicht haben und gleichzeitig sehr viel Verständnis und Geduld für mich hatten und so manche schlechte Laune ertragen mussten.

Kurzfassung

Diese Diplomarbeit gibt einerseits eine Übersicht über verschiedene Verzahnungstypen, andererseits wurden die in der Arbeit thematisierten Verzahnungen mit geeigneter CAD-Software visualisiert.

Die Arbeit *Verzahnungstheorie: Grundlagen und Visualisierung mit CAD-Software* lässt sich in zwei große Bereiche unterteilen. Im ersten Teil der Arbeit werden Grundlagen der ebenen Kurventheorie und der ebenen Kinematik erörtert, um schließlich mit den dort erarbeiteten Resultaten verschiedene *Stirnradverzahnungen* realisieren zu können. Das ebene Verzahnungsgesetz, grundlegende Konstruktionen wie etwa die Erzeugung passender Zahnprofile nach Reuleaux oder Camus und auch die Analyse der auftretenden Zahnprofile und Zahnflanken sind Teil dieser Diplomarbeit. So lassen sich schließlich diverse in der Praxis eingesetzte Stirnradverzahnungen realisieren. Dazu gehören die Evolventenverzahnung, die Zykloidenverzahnung, die Triebstockverzahnung und die Geradflankenverzahnung.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit *Kegelradverzahnungen* und der zugrunde liegenden sphärischen Kinematik. Unter Berücksichtigung von Gesetzen der sphärischen Kinematik und des sphärischen Verzahnungsgesetzes lassen sich verschiedene Kegelräder herstellen. Diese Arbeit beschränkt sich auf evolventenverzahnte Kegelräder, deren Zahnprofile sphärische Kreisevolventen sind.

Von den in der Arbeit thematisierten Verzahnungen wurden mit dem Computerprogramm *PTC Creo* CAD-Modelle und in weiterer Folge STL-Dateien als Basis für Ausdrücke am 3D-Drucker sowie auch einige 3D-Ausdrücke erstellt.

Abstract

This work provides a survey of different types of gears. In addition to that, the gears that can be found in this work were visualized with suitable CAD-software.

Basically this work can be divided into two main parts. The first part deals with fundamentals of planar curve theory and planar kinematics. The results of those chapters are then used to build different types of cylindrical gears. The planar law of gearing, essential constructions like the construction of suitable tooth profiles according to Reuleaux or Camus as well as the analysis of the occurring tooth profiles and tooth flanks are part of this work. Hence different cylindrical gears which are used in practice are implemented including cylindrical involute gears, cycloidal gears, cylindrical lantern gears and straight-flank gears.

The second part of this work deals with bevel gears and with underlying spherical kinematics. Using fundamentals of spherical kinematics and the spherical law of gearing, different types of bevel gears can be implemented. We limit this work to involute bevel gears which feature spherical circle involutes as tooth profiles.

The gears that are presented in this work were generated with the program *PTC Creo*. The generated models then were used to generate STL-files to provide a basis for 3D-prints. Some of the models were also printed with a suitable 3D-printer.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	11
1 Grundlagen der ebenen Kurventheorie	13
1.1 Parametrisierung, Bogenlänge, Krümmung	13
1.2 Evolute und Evolvente	14
1.3 Konchoiden	16
2 Grundlagen der ebenen Kinematik	17
2.1 Ebene einparametrische Bewegungsvorgänge	17
2.2 Analytische Beschreibung eines ebenen einparametrischen Bewegungsvorgangs	17
2.3 Geschwindigkeiten, Momentanpol, Polkurven	18
2.4 Hüllkurvenpaare	20
2.5 Zusammensetzung von ebenen Bewegungsvorgängen; Satz von Kennedy-Aronhold	20
2.6 Zykloidenbewegung	24
2.7 Evolventenbewegung	26
2.8 Planetenbewegung	28
2.9 Ellipsenbewegung und Oldhambewegung	35
3 Verzahnung von Stirnrädern	43
3.1 Ebenes Verzahnungsgesetz, Konstruktion nach Reuleaux	46
3.2 Berechnung des Gegenprofils	49
3.3 Kenngrößen bei ebener Verzahnung	52
3.4 Evolventenverzahnung	54
3.5 Schrägverzahnung	62
3.6 Zykloidenverzahnung	63
3.7 Triebstockverzahnung	67
3.8 Geradflankenverzahnung	70
3.9 Allgemeine Stirnradverzahnung	74
4 Grundlagen der sphärischen Kinematik	77
4.1 Einparametrische sphärische Bewegungsvorgänge	77
4.2 Zusammensetzung von sphärischen Bewegungsvorgängen	80

5 Verzahnung von Kegelrädern	83
5.1 Das sphärische Verzahnungsgesetz	83
5.2 Kenngrößen bei der Kegelradverzahnung	86
5.3 Evolventenverzahnung von Kegelrädern	88
5.4 Evolventenverzahnte Kegelräder mit Geradflanken	97
5.5 Evolventenverzahnte Kegelräder mit Schrägflanken	98
Literaturverzeichnis	105

Einleitung

Im Zuge des Studiums aus Darstellender Geometrie bekommt man einen großen Überblick über verschiedenste geometrische Gebiete, von denen einige sehr abstrakt und so für Personen ohne Fachwissen nur schwer bis gar nicht zugänglich sind. Obwohl mich auch abstrakte geometrische Themen im Laufe meines Studiums durchaus fasziniert haben, so wollte ich doch die Abschlussarbeit zu einem Thema schreiben, zu dem auch Nicht-Geometer eine konkrete Vorstellung haben. Schließlich bot Ao.Univ.-Prof. Anton Gferrer an, eine Arbeit im Gebiet der Verzahnungstheorie zu betreuen. Aufgrund meines großen Interesses für den Einsatz von Geometrie in technischen Bereichen, war für mich schnell klar, dass eine Diplomarbeit zu diesem Thema eine spannende, wenn auch nicht einfache Aufgabe sein würde.

In dieser Diplomarbeit werden zwei grundlegende Verzahnungen vorgestellt, nämlich einerseits die Stirnräder, bei denen die Achsen der zusammenarbeitenden Räder zueinander parallel sind und andererseits die Kegelräder, bei denen sich die Achsen der zusammenarbeitenden Räder in einem Punkt schneiden. Zunächst werden im ersten Kapitel Grundlagen der ebenen Kurventheorie erörtert. Das zweite Kapitel beinhaltet grundlegende, für die Verzahnung von Stirnrädern nötige Sachverhalte der ebenen Kinematik. Die Ergebnisse dieses Kapitels können schließlich dazu verwendet werden, um unter Berücksichtigung des ebenen Verzahnungsgesetzes verschiedene Stirnradverzahnungen zu realisieren. Durch grundlegende Konstruktionen - wie etwa durch die Erzeugung passender Zahnprofile nach Reuleaux oder Camus - und durch die Forderung nach einer konstanten Übersetzung lassen sich schließlich diverse in der Praxis eingesetzte Verzahnungen herstellen. Dazu gehören die Evolventenverzahnung, die Zykloidenverzahnung, die Triebstockverzahnung und die Geradflankenverzahnung. Zudem werden neben den Konstruktionen jeweils die auftretenden geometrischen Formen der Zahnprofile und Zahnflanken und deren Entstehung analysiert. Auch Verzahnungen mit nicht konstanter Übersetzung werden in der Arbeit kurz thematisiert.

Der zweite Teil der Arbeit beschäftigt sich mit Kegelrädern und der zugrunde liegenden sphärischen Kinematik. Die Berücksichtigung grundlegender Sachverhalte der sphärischen Kinematik und des sphärischen Verzahnungsgesetzes erlauben schließlich die Herstellung verschiedener Kegelräder. Diese Arbeit beschränkt sich auf evolventenverzahnte Kegelräder, deren Zahnprofile als sphärische Kreisevolventen erkannt werden. Wie im Fall von Stirnrädern werden auch hier die Formen der Zahnflanken ana-

lysiert: Einerseits lassen sich evolventenverzahnte Kegelräder mit Geradflanken herstellen, andererseits gibt es auch evolventenverzahnte Kegelräder mit Schrägflanken, deren geometrisch exakte Herstellung Kenntnisse über geodätische Linien auf Drehkegeln erfordern.

In dieser Arbeit wird auf fertigungstechnische Details größtenteils verzichtet. Es wird stattdessen auf eine geometrisch fundierte Herstellung der Zahnräder eingegangen. Von den in der vorliegenden Arbeit thematisierten Verzahnungen wurden mit dem Computerprogramm *PTC Creo* CAD-Modelle und in weiterer Folge STL-Dateien als Basis für Ausdrücke am 3D-Drucker sowie auch einige 3D-Ausdrücke erstellt. Die Herstellung der in der Praxis eingesetzten evolventenverzahnten Kegelrädern mit Schrägflanken erfolgt maschinell näherungsweise und deshalb ohne die Verwendung von sphärischen Kreisevolventen. Diese Arbeit bietet nun eine geometrisch exakte, alternative Möglichkeit zur Herstellung evolventenverzahnter Kegelräder, die durch die im Zuge der Arbeit mit einem 3D-Drucker erstellten, funktionsfähigen 3D-Getriebe untermauert wird.

1 Grundlagen der ebenen Kurventheorie

In diesem Abschnitt werden einige grundlegende Begriffe der ebenen Kurventheorie erörtert. Für eine detailliertere Einführung in Differentialgeometrie sei auf die Literatur, etwa auf [10] und [16], verwiesen.

1.1 Parametrisierung, Bogenlänge, Krümmung

Definition 1.1 (Kurve). *Es sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall. Dann heißt die Abbildung*

$$c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \mathbf{c}(t) = (c_1(t), c_2(t))^\top$$

ebene Kurve, wenn c eine differenzierbare Abbildung aus dem Intervall I in die Ebene \mathbb{R}^2 ist.

Eine Kurve c ist dort *regulär*, wo $\dot{\mathbf{c}}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{c}(t) \neq 0$. Gilt $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq 0$ für alle $t \in I$, so liegt eine *reguläre Parametrisierung* von c vor. Denkt man sich $\mathbf{c}(t)$ als einen von der Zeit t abhängigen Punkt, so ist der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ sein Geschwindigkeitsvektor. Der Ableitungsvektor $\dot{\mathbf{c}}(t)$ gibt die Richtung der Tangente im Punkt $\mathbf{c}(t)$ an. Ist $\dot{\mathbf{c}}(t) = 0$, so ist $\mathbf{c}(t)$ ein *singulärer Punkt*.

Definition 1.2. *Eine reguläre Parametertransformation ist eine bijektive, stetig differenzierbare Abbildung $\gamma : I \rightarrow J$ aus einem Intervall I in ein Intervall J , für deren Ableitung $\dot{\gamma} = \frac{d}{dt}\gamma \neq 0$ für alle $t \in I$ gilt. Ist $\mathbf{c}(t) : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ eine reguläre Parametrisierung einer ebenen Kurve c , so heißt $\mathbf{c} \circ \gamma = \mathbf{c}(\gamma(t))$ die mit Hilfe von γ umparametrisierte Kurve.*

Definition 1.3 (Bogenlänge). *Die Bogenlänge einer ebenen Kurve c in einem Intervall $[a, b]$ ist definiert durch*

$$s = L_a^b(c) = \int_a^b \|\dot{\mathbf{c}}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{\dot{c}_1^2 + \dot{c}_2^2} dt \quad (1.1)$$

Eine Kurve c ist nach der Bogenlänge parametrisiert, falls $\|\dot{\mathbf{c}}(t)\| = 1$. Ist eine Kurve nach der Bogenlänge parametrisiert, so kann man sie sich als mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen vorstellen. Es gilt ferner der folgende Satz (ohne Beweis):

Satz 1.4. *Die Bogenlänge einer ebenen Kurve c ist invariant bei Parametertransformationen und bei Anwenden von euklidischen Kongruenztransformationen. Ferner gibt es für jede Kurve $c = \mathbf{c}(t)$ mit $\dot{\mathbf{c}}(t) \neq 0$ eine Parametertransformation γ , sodass $\mathbf{c} \circ \gamma$ nach der Bogenlänge parametrisiert ist.*

Definition 1.5 (Krümmung). *Die Krümmung κ einer ebenen Kurve c gibt jene Winkelgeschwindigkeit an, mit welcher der Einheitstangentenvektor (und damit die Kurventangente) rotiert, wenn c mit konstanter Geschwindigkeit durchlaufen wird.*

Die Krümmung κ einer ebenen Kurve c lässt sich wie folgt berechnen:

$$\kappa = \frac{\det(\dot{\mathbf{c}}, \ddot{\mathbf{c}})}{\|\dot{\mathbf{c}}\|^3}$$

1.2 Evolute und Evolvente

Das *Frenetsche Zweibein* einer ebenen Kurve ist jene positiv orientierte Orthonormalbasis $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^\top$, für die \mathbf{e}_1 der Tangenteneinheitsvektor und folglich \mathbf{e}_2 der Normaleneinheitsvektor ist.

Definition 1.6 (Krümmungskreis). *Es sei $\mathbf{c}(t)$ eine reguläre Parametrisierung einer ebenen Kurve c und $\mathbf{c}(t_0)$ ein Kurvenpunkt mit $\kappa(t_0) \neq 0$. Dann heißt der Kreis mit Mittelpunkt*

$$\mathbf{m}(t_0) = \mathbf{c}(t_0) + \frac{1}{\kappa(t_0)} \mathbf{e}_2(t_0)$$

und Radius

$$\rho(t_0) = \left| \frac{1}{\kappa(t_0)} \right|$$

Krümmungskreis. Der Mittelpunkt $\mathbf{m}(t_0)$ heißt Krümmungsmitte, während der Radius $\rho(t_0)$ Krümmungsradius genannt wird.

Definition 1.7 (Evolute). *Die von den Krümmungsmitteln $\mathbf{m}(t)$ bei $\kappa(t) \neq 0$ durchlaufene Kurve heißt Evolute der Ausgangskurve.*

Folgerung 1.8. *Die Evolute m einer ebenen Kurve c besitzt die folgende Parameterdarstellung:*

$$\mathbf{m}(t) = \mathbf{c}(t) + \frac{1}{\kappa(t)} \cdot \mathbf{e}_2(t)$$

Es gilt der folgende Satz (ohne Beweis):

Satz 1.9. *Die Evolute m einer ebenen Kurve c wird von den Kurvennormalen eingehüllt.*

Man sagt auch, die Evolute ist die *Hüllkurve* der Kurvennormalen.

Während es zu einer gegebenen ebenen Kurve genau eine Evolute gibt, führt die umgekehrte Aufgabe, nämlich zu einer gegebenen Evolute m eine Kurve k zu finden, die m als Evolute besitzt, auf unendlich viele Lösungen. Eine derartige Kurve muss nach Satz 1.9 alle Tangenten von m als Normalen besitzen, also alle Tangenten von m orthogonal schneiden. Man nennt eine ebene Kurve, die alle Kurven einer gegebenen Kurvenschar senkrecht schneidet, auch *Orthogonaltrajektorie* dieser Kurvenschar. Eine Kurve, die alle Tangenten der Evolute m orthogonal schneidet, ist eine Orthogonaltrajektorie dieser Tangentenschar und heißt *Evolvente*. Zwei verschiedene Evolventen von m erhält man, indem auf allen Normalen der Evolvente derselbe Abstand a aufgetragen wird. Somit sind verschiedene Evolventen derselben Kurve *Parallelkurven*. Eine Evolvente k von m kann erzeugt werden, indem zunächst ein Faden auf m aufgewickelt wird. Wird der Faden dann in gespanntem Zustand von m abgewickelt, beschreibt ein Punkt des Fadens als Bahnkurve eine Evolvente. Andere Punkte des Fadens liefern weitere Evolventen [20]. Man spricht hierbei von der *Fadenkonstruktion* der Evolvente. Es gilt der folgende Satz:

Satz 1.10 (Evolvente). *Sei $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto \mathbf{c}(t)$ eine reguläre Kurve und $t_0 \in I$ ein beliebiger Parameter. Weiter sei $L_{t_0}^t$ die Bogenlänge der Kurve von $\mathbf{c}(t_0)$ bis $\mathbf{c}(t)$ mit $t \in I$ und $\mathbf{e}_1(t)$ der Tangenteneinheitsvektor im Punkt $\mathbf{c}(t)$. Dann ist die Evolvente $\mathbf{k}_{c,t_0}(t)$ von c , die bei $t = t_0$ beginnt, die Kurve*

$$\mathbf{k}_{c,t_0}(t) = \mathbf{c}(t) - L_{t_0}^t \mathbf{e}_1(t). \quad (1.2)$$

Wie oben beschrieben, können wir jeden Punkt $P = \mathbf{c}(t_0)$ mit $t_0 \in I$ einer gegebenen Kurve c als Startpunkt einer Evolvente annehmen und erhalten damit zu jeder Kurve eine ganze Schar von Evolventen.

Beispiel 1.11 (Kreisevolvente). Da in dieser Arbeit die Kreisevolvente später von besonderem Interesse ist, soll diese hier als Beispiel angeführt werden. Wir betrachten einen Kreis c mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung:

$$\mathbf{c}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Startpunkt der Evolvente sei der Punkt $\mathbf{c}(t_0)$ mit $t_0 = 0$. Dann ist $L_{t_0}^t = r \cdot t$, nämlich der Kreisbogen von $\mathbf{c}(0)$ bis $\mathbf{c}(t)$. Für die Evolvente $\mathbf{k}_{c,0}(t)$ erhält man

$$\mathbf{k}_{c,0}(t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix} - rt \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(\cos t + t \sin t) \\ r(\sin t - t \cos t) \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

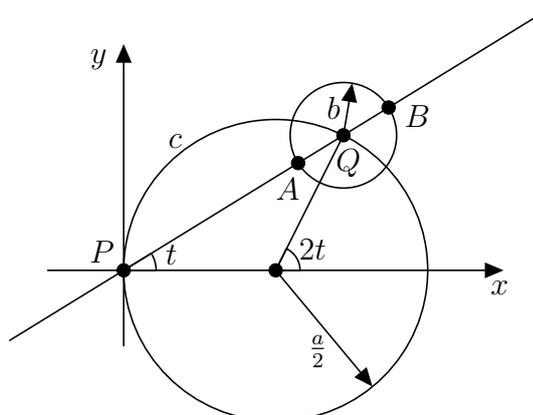


Abbildung 1.1: Parametrisierung der Pascal-Schnecke

1.3 Konchoiden

Definition 1.12. Gegeben seien eine ebene Kurve c , ein beliebiger Punkt P , sowie eine feste Länge b . Weiters sei Q ein Punkt, der sich auf c bewegt. Schneidet man einen Kreis mit Mittelpunkt Q und Radius b mit der Geraden PQ , so erhält man die Punkte A und B . Die Menge aller Punkte A und B , die man durch die Bewegung von Q auf c erhält, bilden die Konchoide der Kurve c bezüglich des Pols P und der Länge b .

Wählen wir als Kurve c einen Kreis mit Durchmesser a , auf dem zusätzlich der Punkt P liegt, so erhalten wir eine spezielle Konchoide, nämlich eine *Pascal-Schnecke*. Wir betrachten Abbildung 1.1 und können so die Pascal-Schnecke wie folgt parametrisieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos(2t) \\ \frac{a}{2} \sin(2t) \end{pmatrix} \pm b \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} &= \frac{a}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 + \cos(2t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \pm b \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Durch die Additionstheoreme für Sinus und Kosinus erhalten wir die folgende Parametrisierung der Pascal-Schnecke:

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cos^2 t + b \cos t \\ a \cos t \sin t + b \sin t \end{pmatrix} \quad (1.5)$$

mit $t \in [0, 2\pi]$.

Mit $\cos(\pi + t) = -\cos t$ und $\sin(\pi + t) = -\sin t$, erhält man für $t \in [0, 2\pi]$ mit Gleichung 1.5 beide Hälften der Pascal-Schnecke.

2 Grundlagen der ebenen Kinematik

In diesem Abschnitt werden grundlegende Begriffe der ebenen kinematischen Geometrie geklärt, die in der weiteren Arbeit benötigt werden. Es wird hierbei auf Herleitungen und Beweise größtenteils verzichtet; für eine umfangreichere Einführung in die kinematische Geometrie sei etwa auf [5], [7], [10] und [21] oder auch auf [3] verwiesen.

2.1 Ebene einparametrische Bewegungsvorgänge

Definition 2.1 (Ebener einparametrischer Bewegungsvorgang). *Ein ebener einparametrischer Bewegungsvorgang oder ebener Zwangslauf ist eine einparametrische Menge von gleichsinnigen Kongruenztransformationen der Ebene.*

Wir stellen uns bei einem ebenen Zwangslauf vor, dass eine Ebene Σ_1 über eine andere Ebene Σ_0 gleite und schreiben Σ_1/Σ_0 . Dabei nennt man Σ_1 *Gangebene* oder *Gangsystem* und Σ_0 *Rastebene* oder *Rastsystem*.

2.2 Analytische Beschreibung eines ebenen einparametrischen Bewegungsvorgangs

Wir wählen ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $S_0 = \{O_0, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\}$ in Σ_0 bzw. $S_1 = \{O_1, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\}$ in Σ_1 . Damit lässt sich ein Punkt X mit der Koordinatenspalte $(x_1, y_1)^\top$ bzgl. S_1 , wie aus Abbildung 2.1 unmittelbar ersichtlich ist, wie folgt in *Koordinatenschreibweise* bzgl. S_0 darstellen:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x(t) \\ d_y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Hierbei ist $\mathbf{d} = (d_x, d_y)^\top$ der Vektor $\overrightarrow{O_0O_1}$, dargestellt bzgl. S_0 . Werden Gang- und Rastebene jeweils als Gaußsche Zahlenebene interpretiert, so können wir Gleichung 2.1 auch in komplexen Zahlen anschreiben:

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{d}(t) + e^{i\varphi(t)} \cdot \mathbf{z}_1 \quad (2.2)$$

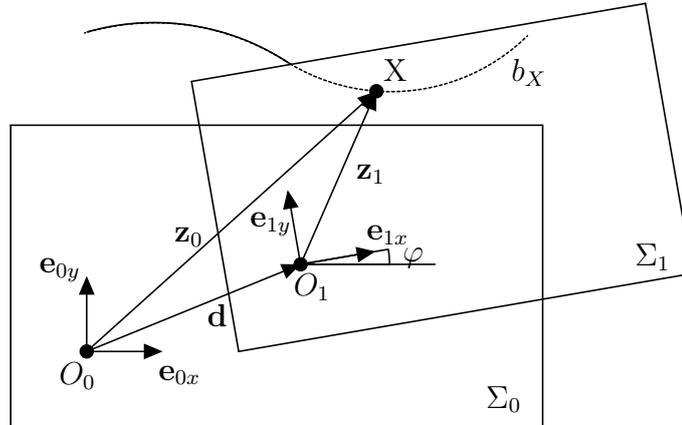


Abbildung 2.1: Parametrisierung eines ebenen Bewegungsvorgangs

Hierbei werden die Ortsvektoren $(x_0, y_0)^\top$ bzw. $(x_1, y_1)^\top$ von X bzgl. S_0 bzw. S_1 durch die komplexen Zahlen $\mathbf{z}_0 = x_0 + iy_0$ bzw. $\mathbf{z}_1 = x_1 + iy_1$ repräsentiert; dabei ist $i^2 = -1$. Weiters wird $(d_x, d_y)^\top$ durch $\mathbf{d} = d_x + id_y$ ersetzt; $e^{i\varphi(t)} = \cos \varphi(t) + i \sin \varphi(t)$ ist die Eulersche Identität. Der Parameter t , von dem der Schiebvektor \mathbf{d} und der reelle Drehwinkel φ abhängen, ist üblicherweise die Zeit.

Jeder Punkt X mit der Koordinatenspalte $(x_1, y_1)^\top$ bzgl. S_1 beschreibt bei einem ebenen Zwanglauf eine eindeutige Bahnkurve b_X in Σ_0 . Mit den Gleichungen 2.1 und 2.2 liegt eine Parametrisierung der Bahnkurve b_X des Punktes X vor. So ist etwa

$$\mathbf{b}_{O_1}(t) = \begin{pmatrix} d_x(t) \\ d_y(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos \varphi(t) & -\sin \varphi(t) \\ \sin \varphi(t) & \cos \varphi(t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{d}(t)$$

eine Parametrisierung der Bahnkurve \mathbf{b}_{O_1} des Koordinatenursprungs O_1 von S_1 .

2.3 Geschwindigkeiten, Momentanpol, Polkurven

Wir betrachten einen Punkt X , der in komplexer Schreibweise durch die komplexe Zahl $\mathbf{z}_1 \in \Sigma_1$ repräsentiert wird. In S_0 lässt sich X durch $\mathbf{z}_0 = \mathbf{d}(t) + e^{i\varphi(t)} \cdot \mathbf{z}_1$ darstellen. Nun ermitteln wir die *vektorielle Geschwindigkeit* von X , die wir durch Ableiten nach dem Parameter t erhalten:

$$\mathbf{v}_X = \dot{\mathbf{z}}_0 = \dot{\mathbf{d}} + i\omega e^{i\varphi} \cdot \mathbf{z}_1, \quad \omega = \dot{\varphi}.$$

Man nennt ω *Winkelgeschwindigkeit* zum Zeitpunkt t . Ist zu einem festen Zeitpunkt t die Winkelgeschwindigkeit $\omega \neq 0$, so existiert genau ein Punkt P mit $\mathbf{v}_P = 0$. Man nennt diesen Punkt P *Momentanpol* von Σ_1/Σ_0 zum Zeitpunkt t .

Bzgl. des Rastkoordinatensystems S_0 dargestellt erhalten wir für P in Koordinatenschreibweise die folgende Koordinatenspalte:

$$\begin{pmatrix} p_{0x} \\ p_{0y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_x - \frac{\dot{d}_y}{\omega} \\ d_y + \frac{\dot{d}_x}{\omega} \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

In komplexer Schreibweise erhalten wir für P bzgl. S_0 die folgende Darstellung:

$$\mathbf{p}_0 = \mathbf{d} + \frac{\dot{\mathbf{d}}i}{\omega} \quad (2.4)$$

Bzgl. S_1 lässt sich P in Koordinatenschreibweise bzw. komplexer Schreibweise folgendermaßen angeben:

$$\begin{pmatrix} p_{1x} \\ p_{1y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\omega} \cdot \begin{pmatrix} \dot{d}_x \sin \varphi - \dot{d}_y \cos \varphi \\ \dot{d}_x \cos \varphi + \dot{d}_y \sin \varphi \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

$$\mathbf{p}_1 = \frac{\dot{\mathbf{d}}i}{\omega \cdot e^{i\varphi}} \quad (2.6)$$

Betrachten wir eine Ebene Σ_1 , die sich gegenüber einer ruhende Ebene Σ_0 bewegt, so geht Σ_1 durch eine Drehung oder durch eine Translation in eine andere Lage Σ'_1 über. Σ_1 sei durch zwei Punkte A und B und Σ'_1 durch die Punkte A' und B' gegeben. Schneiden sich die Streckensymmetralen von AA' und BB' in einem eigentlichen Punkt M , so geht Σ_1 durch Drehung um den *Drehpol* M in Σ'_1 über. Falls sich die Streckensymmetralen nicht in einem eigentlichen Punkt schneiden, ist M ein Fernpunkt und Σ_1 geht durch eine Translation in Σ'_1 über. Nähert sich die Lage von Σ'_1 jener von Σ_1 , so geht die Gerade AA' in die Tangente der Bahnkurve b_A von A in A über. Analoges gilt für die Gerade BB' . Die Streckensymmetralen werden zu den Bahnnormalen von b_A bzw. b_B , der Bahnkurve von B . In einer bestimmten Lage von Σ_1 gehen damit alle Bahnnormalen durch einen festen Punkt P , dem *Momentanpol* dieser Lage. Damit kann die Bewegung von Σ_1 in jeder beliebigen Lage als infinitesimale Drehung um den Momentanpol interpretiert werden.

Das ist Inhalt des Satzes von M. Chasles (siehe [21], S. 17):

Satz 2.2 (1. Satz von M. Chasles). *In jedem Augenblick einer zwangläufigen Bewegung eines starren ebenen Systems bilden die Bahnnormalen aller Systempunkte ein Strahlbüschel, dessen Scheitel der Momentanpol ist.*

Ist $\omega = 0$, so geht der Momentanpol in einen Fernpunkt über. In diesem Fall sind die Geschwindigkeitsvektoren aller Punkte $X \in \Sigma_1$ identisch; es liegt eine *Momentanschiebung* vor.

Gilt $\dot{\varphi} = \omega \neq 0$ für alle t aus einem Intervall $[t_0, t_1]$, dann liegt zu jedem Zeitpunkt $t \in [t_0, t_1]$ ein eigentlicher Momentanpol P vor. Die Menge all dieser Punkte bildet eine

Kurve $\mathbf{p}_0(t) = \begin{pmatrix} p_{0x}(t) \\ p_{0y}(t) \end{pmatrix} \in \Sigma_0$ bzw. $\mathbf{p}_1(t) = \begin{pmatrix} p_{1x}(t) \\ p_{1y}(t) \end{pmatrix} \in \Sigma_1$. Man nennt $\mathbf{p}_0(t)$ *Rastpolkurve* und $\mathbf{p}_1(t)$ *Gangpolkurve*. Eine Parametrisierung der Rast- bzw. Gangpolkurve erhalten wir mit den Gleichungen 2.3 und 2.4 bzw. 2.5 und 2.6. Es gilt der folgende Satz (siehe [21], S. 20):

Satz 2.3 (2. Satz von M. Chasles). *Bei jedem ebenen Zwanglauf, der keine bloße Schiebung ist, rollt die Gangpolkurve ohne zu gleiten auf der Rastpolkurve. Der momentane Wälzpunkt stellt den Momentanpol der Bewegung dar.*

Eine zwangläufige Bewegung kann durch ihre Polkurven festgelegt werden.

2.4 Hüllkurvenpaare

Betrachten wir einen Zwanglauf Σ_1/Σ_0 , so nimmt eine in Σ_1 liegende Kurve c während des Bewegungsvorgang verschiedene Lagen c_1, c_2, c_3, \dots ein. Eine Kurve $h \subset \Sigma_0$, die jede dieser Lagen in einem Punkt H berührt, heißt *Hüllkurve* der Schar c_1, c_2, c_3, \dots . Man nennt c und h ein *Gleitkurvenpaar* oder *Hüllkurvenpaar* und den momentanen Berührungspunkt H von c und h (momentanen) *Hüllpunkt*. Es gilt der folgende Satz (siehe [21], S. 27):

Satz 2.4. *Die gemeinsame Normale eines Gleitkurvenpaares c, h im momentanen Hüllpunkt H ist ein Polstrahl und geht damit durch den Momentanpol der Bewegung.*

Gleiten etwa zwei Kurven a und b aus Σ_1 auf zwei Kurven a^* bzw. b^* in Σ_0 , so lässt sich nach Satz 2.4 der Momentanpol als Schnitt der beiden Hüllbahnnormalen ermitteln. Man nennt eine solche Bewegung *Gleitführung*.

2.5 Zusammensetzung von ebenen Bewegungsvorgängen; Satz von Kennedy-Aronhold

Wir betrachten nun ebene Mechanismen mit mehr als zwei Systemen und beginnen mit einer Definition (siehe [3], S. 30):

Definition 2.5.

- *Ein ebener Mechanismus besteht aus einer Anzahl von starren Systemen $\Sigma_0, \dots, \Sigma_{n-1}$, deren freie Beweglichkeit durch gewisse Verbindungen eingeschränkt ist. Besteht der Mechanismus aus n Systemen, so liegt eine n -gliedrige kinematische Kette vor.*

- Kann jedes System gegenüber jedem anderen nur einen einparametrischen Bewegungsvorgang ausführen, liegt eine Zwanglaufkette vor.

Es seien Σ_0 , Σ_1 und Σ_2 drei Systeme einer ebenen Zwanglaufkette. Dann finden drei *Relativbewegungen* oder *Teilbewegungen*, nämlich Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_1 und Σ_2/Σ_0 , statt. Die Bewegung Σ_2/Σ_0 erhält man durch Zusammensetzen (Komposition) der Bewegungen Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 .

Wir wählen in Σ_0 , Σ_1 und Σ_2 je ein Koordinatensystem $S_0 = \{O_0, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\}$ bzw. $S_1 = \{O_1, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\}$ bzw. $S_2 = \{O_2, \mathbf{e}_{2x}, \mathbf{e}_{2y}\}$. Dann werden die drei Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_1 und Σ_2/Σ_0 durch die folgenden drei Gleichungen in komplexer Schreibweise beschrieben (siehe Abbildung 2.2):

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{d}_{01}(t) + e^{i\varphi_{01}(t)} \cdot \mathbf{z}_1 \quad (2.7)$$

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{d}_{12}(t) + e^{i\varphi_{12}(t)} \cdot \mathbf{z}_2 \quad (2.8)$$

$$\mathbf{z}_0 = \mathbf{d}_{01}(t) + e^{i\varphi_{01}(t)} \cdot \mathbf{d}_{12}(t) + e^{i(\varphi_{01}(t)+\varphi_{12}(t))} \cdot \mathbf{z}_2 \quad (2.9)$$

Man erhält Gleichung 2.9, indem man \mathbf{z}_1 aus Gleichung 2.8 in Gleichung 2.7 einsetzt. Zudem ist der Drehwinkel φ_{02} der Bewegung Σ_2/Σ_0 die Summe der Drehwinkel φ_{01} und φ_{12} der Teilbewegungen Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 :

$$\varphi_{02} = \varphi_{01} + \varphi_{12} \quad (2.10)$$

Nun betrachten wir das Verhalten der Geschwindigkeiten bei zusammengesetzten Bewegungsvorgängen. Es seien wiederum Σ_0 , Σ_1 und Σ_2 drei Systeme einer ebenen Zwanglaufkette, Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 seien zwei ebene Zwangläufe und Σ_2/Σ_0 die daraus zusammengesetzte Bewegung. Ferner sei $\omega_{01} = \dot{\varphi}_{01}$ die Winkelgeschwindigkeit von Σ_1/Σ_0 . Analog sei $\omega_{12} = \dot{\varphi}_{12}$ die Winkelgeschwindigkeit von Σ_2/Σ_1 und $\omega_{02} = \dot{\varphi}_{02}$ jene von Σ_2/Σ_0 . Wir betrachten einen Punkt X bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 bzw. Σ_2/Σ_1 bzw. Σ_2/Σ_0 und bezeichnen seine Geschwindigkeit bei der entsprechenden Bewegung mit $\mathbf{v}_{X,01}$ bzw. $\mathbf{v}_{X,12}$ bzw. $\mathbf{v}_{X,02}$. Dann gilt für die Winkelgeschwindigkeit ω_{02} und die vektorielle Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{X,02}$ der Bewegung Σ_2/Σ_0 :

$$\omega_{02} = \omega_{01} + \omega_{12} \quad (2.11)$$

$$\mathbf{v}_{X,02} = \mathbf{v}_{X,01} + \mathbf{v}_{X,12} \quad (2.12)$$

Gleichung 2.11 folgt unmittelbar aus Gleichung 2.10 und der Ableitungsregel für Summen.

Gleichung 2.12 erhält man durch das Ableiten der Gleichungen 2.7, 2.8 und 2.9 und

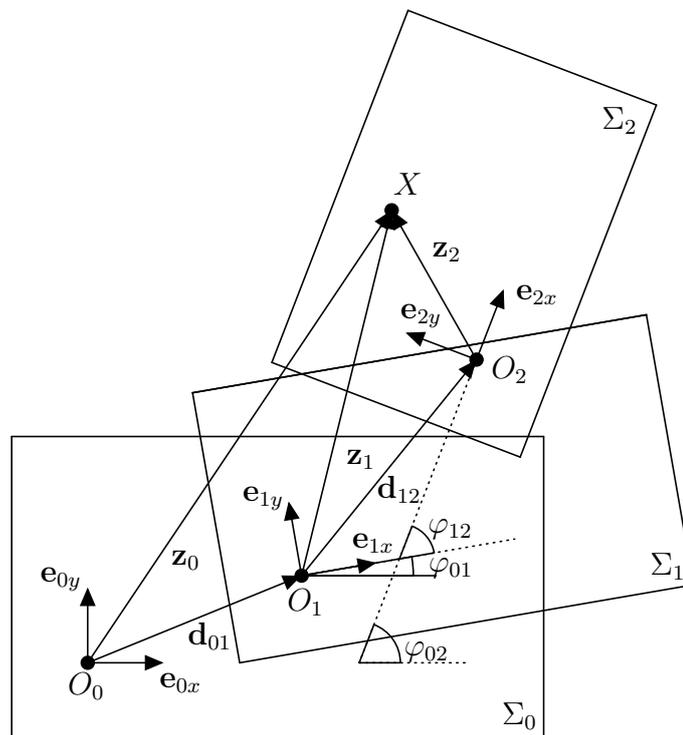


Abbildung 2.2: Zusammensetzung von ebenen Bewegungen

entsprechendes Summieren der Ableitungen. Es muss hierbei berücksichtigt werden, in welchem System die jeweilige Rechnung stattfindet.

Für einen Beobachter im System Σ_0 scheint das System Σ_0 bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 fest zu sein, während sich das System Σ_1 mit einer gewissen Geschwindigkeit bewegt. Befindet sich der Beobachter jedoch in Σ_1 , so wird für ihn das System Σ_1 als fest empfunden, während nun das System Σ_0 für ihn zum Gangsystem wird. Die von Σ_1 aus beobachtete Bewegung Σ_0/Σ_1 wird *Umkehrbewegung* von Σ_1/Σ_0 genannt. Beschreibt ein Punkt $A \in \Sigma_1$ bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 eine Bahnkurve $b_A \in \Sigma_0$, so gleitet bei der Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 die Kurve b_A immer durch den Punkt $A \in \Sigma_1$. Ist M jener Drehpol, durch den Σ_1 bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 von einer Lage in eine andere Lage Σ'_1 übergeht, so ist M auch jener Drehpol, durch den das entsprechende Lagenpaar der Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 ineinander übergeführt wird. Für den Momentanpol P und die Polkurven einer Bewegung und deren Umkehrbewegung gilt damit der folgende Satz (siehe [21], S. 30):

Satz 2.6. *Die Momentanpole einer Bewegung Σ_1/Σ_0 und deren Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 sind in jedem Augenblick identisch. Die Polkurven der beiden Bewegungen sind dieselben, vertauschen jedoch ihre Rollen.*

Es sei $p_0 \in \Sigma_0$ die Rastpolkurve der Bewegung Σ_1/Σ_0 und $p_1 \in \Sigma_1$ deren Gangpolkurve. Dann wird Σ_1/Σ_0 durch das Rollen von p_1 auf p_0 erzeugt. Die Umkehrbewegung erhält man, indem p_0 auf p_1 rollt. Die Zusammensetzung einer Bewegung Σ_1/Σ_0 und deren Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 ergibt die Identität. Die Winkelgeschwindigkeit und die vektorielle Geschwindigkeit eines Punktes X einer Bewegung Σ_1/Σ_0 und deren Umkehrbewegung Σ_0/Σ_1 hängen daher gemäß Gleichung 2.11 und Gleichung 2.12 wie folgt zusammen:

$$\begin{aligned}\omega_{10} &= -\omega_{01} \\ \mathbf{v}_{X,10} &= -\mathbf{v}_{X,01}\end{aligned}$$

Es gilt der folgende Satz (siehe [3], S. 36):

Satz 2.7 (Dreipolsatz von Aronhold). *Es seien $\Sigma_0, \Sigma_1, \Sigma_2$ drei Systeme einer ebenen Zwanglaufkette, Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 zwei ebene Bewegungsvorgänge und Σ_2/Σ_0 die daraus zusammengesetzte Bewegung. Weiters seien P_{01}, P_{12} und P_{02} die Momentanpole der Bewegungen $\Sigma_1/\Sigma_0, \Sigma_2/\Sigma_1$ und Σ_2/Σ_0 zu einem festen Zeitpunkt t und ω_{01}, ω_{12} und ω_{02} die zugehörigen momentanen Winkelgeschwindigkeiten. Dann gilt: Die Momentanpole P_{01}, P_{12} und P_{02} liegen kollinear und - falls nicht alle drei Momentanpole Fernpunkte sind - ist:*

$$\overrightarrow{P_{01}P_{12}} = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}} \overrightarrow{P_{02}P_{12}} \quad (2.13)$$

Sind zwei Momentanpole - etwa P_{01} und P_{12} - Fernpunkte, so muss aufgrund der Kollinearität der Momentanpole auch der dritte Punkt P_{02} auf der Ferngeraden liegen. Damit ist P_{02} ebenfalls ein Fernpunkt. Daher können die folgenden drei Fälle auftreten:

1. Die drei Momentanpole P_{01} , P_{12} und P_{02} sind eigentliche Punkte.
Dann gilt:

$$\omega_{01}\mathbf{p}_{01} + \omega_{12}\mathbf{p}_{12} = \omega_{02}\mathbf{p}_{02} \quad (2.14)$$

Dabei bezeichnet \mathbf{p}_{01} den Ortsvektor zum Momentanpol P_{01} bzgl. eines beliebig gewählten Koordinatensystems; analog für \mathbf{p}_{12} und \mathbf{p}_{02} .

2. Genau ein Momentanpol - o. B. d. A. der Punkt P_{01} - ist ein Fernpunkt.
Dann besitzt die Gerade $P_{12}P_{02}$ den Punkt P_{01} als Fernpunkt.
3. Alle drei Momentanpole P_{01} , P_{12} und P_{02} sind Fernpunkte.

In den folgenden Kapiteln 2.6 bis 2.9 werden einige spezielle Zwangsläufe thematisiert, die für die Verzahnung von Stirnrädern (vgl. Kapitel 3) von zentraler Bedeutung sind.

2.6 Zykloidenbewegung

Es sei die Gangpolkurve p_1 ein Kreis mit Mittelpunkt M und Radius r , der auf einer Geraden p_0 , der Rastpolkurve, rollt. Man nennt eine derartige Bewegung *Zykloidenbewegung*. Der bewegte Kreis p_1 repräsentiert dabei das Gangsystem Σ_1 , welches sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega > 0$ bewege, während die Gerade p_0 das Rastsystem Σ_0 repräsentiert. Der Momentanpol P liegt im Berührungspunkt der beiden Polkurven. Wir verwenden kartesische Rechtskoordinatensysteme $S_0 = \{O_0, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\}$ in Σ_0 bzw. $S_1 = \{O_1, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\}$ in Σ_1 . Zudem gelte in Ausgangslage: $\mathbf{e}_{0x} = \mathbf{e}_{1x}$, $\mathbf{e}_{0y} = \mathbf{e}_{1y}$. Die Richtung von \mathbf{e}_{0x} stimmt dabei mit jener der Geraden p_0 überein (siehe Abbildung 2.6). Es sei weiter $O_1 = M$ und O_0 liege in der Ausgangslage im Berührungspunkt von p_0 und p_1 und besitzt damit in Ausgangslage bzgl. S_1 die Koordinaten $(0, -r)^\top$. Dann bewegt sich der Mittelpunkt M von p_1 bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 offenbar auf einer zu p_0 parallelen Gerade, die von p_0 den Abstand r besitzt.

Nach einer gewissen Zeit t hat p_1 auf p_0 einen Bogen der Länge $r\omega t$ abgerollt. In dieser Position besitzt M bzgl. S_0 die Koordinaten $(-r\omega t, r)^\top$. Insgesamt lässt sich damit nach Gleichung 2.1 und unter Berücksichtigung von $\varphi = \omega t$ die Zykloidenbewegung wie folgt parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r\omega t \\ r \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \quad (2.15)$$

Betrachtet man speziell einen Punkt auf p_1 - etwa den Punkt Q mit den Koordinaten

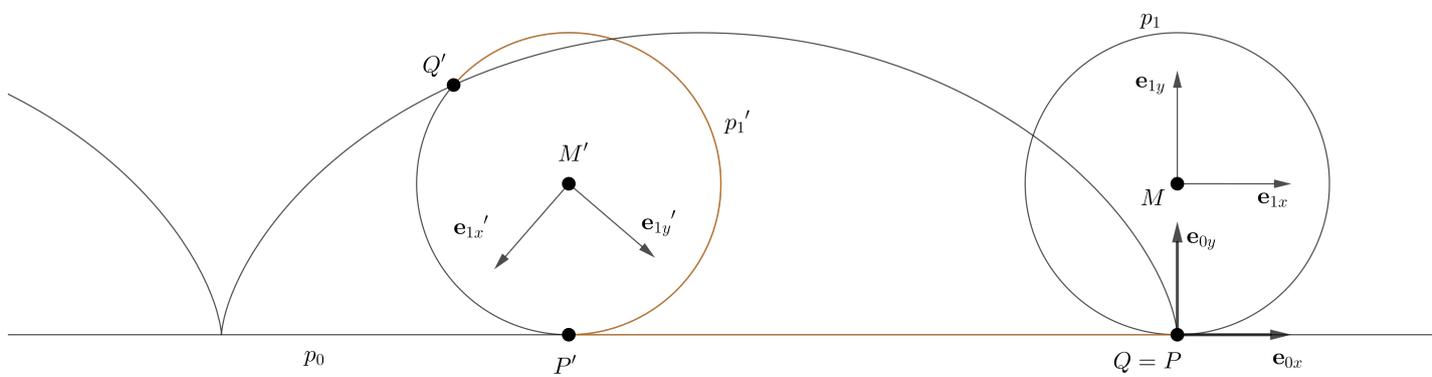


Abbildung 2.3: Zykloidenbewegung; die Bahnkurve des Punktes Q ist eine gespitzte Zykloide.

$(0, -r)^\top$ bzgl. S_1 - so beschreibt dieser die folgende Bahnkurve:

$$\mathbf{b}_Q(t) = \begin{pmatrix} -r\omega t \\ r \end{pmatrix} - r \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2.16)$$

$$\Leftrightarrow \mathbf{b}_Q(t) = r \cdot \begin{pmatrix} -\omega t + \sin(\omega t) \\ 1 - \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Diese Kurve ist eine *gespitzte Zykloide*. Die Bahnkurven von allgemeinen Punkten X , die nicht auf p_1 liegen, sind *geschlungene Zykloiden* (X liegt außerhalb von p_1) oder *gestreckte Zykloiden* (X liegt innerhalb von p_1).

2.7 Evolventenbewegung

Nun wird die Umkehrbewegung der Zykloidenbewegung erörtert. Nach Satz 2.6 stimmen die Polkurven von Bewegung und zugehöriger Umkehrbewegung überein, vertauschen aber ihre Rollen. Damit rollt im Fall der Umkehrbewegung der Zykloidenbewegung eine Gerade p_1 auf einem festen Kreis p_0 (mit Mittelpunkt O und Radius r). Man nennt eine derartige Bewegung *Evolventenbewegung*. Die Polkurven p_0 und p_1 repräsentieren das Rastsystem Σ_0 bzw. das Gangsystem Σ_1 . Wir wählen ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $S_0 = \{O_0, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\}$ in Σ_0 und ein ebensolches, nämlich $S_1 = \{O_1, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\}$, in Σ_1 . Es sei $O_0 = O$ und O_1 liege in der Ausgangslage auf der positiven x-Achse des Koordinatensystems S_0 und habe von O_0 den Abstand r (O_1 fällt also in Ausgangslage mit dem Berührungspunkt von p_0 und p_1 zusammen, siehe Abbildung 2.4). Die Gerade p_1 bewege sich mit der Winkelgeschwindigkeit ω .

Dann lässt sich die Evolventenbewegung nach Gleichung 2.1, wie in Abbildung 2.4 dargestellt, wie folgt parametrisieren:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} r \cos(\omega t) \\ r \sin(\omega t) \end{pmatrix} - r\omega t \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega t) \\ \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Damit lässt sich die Bahnkurve eines Punktes $Q \in p_1$ bestimmen. Wir betrachten den Punkt Q mit den Koordinaten $(0, 0)^\top$ bzgl. S_1 . Als Bahnkurve b_Q erhält man durch Einsetzen der Koordinaten in Gleichung 2.18:

$$\mathbf{b}_Q(t) = r \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega t) + \omega t \sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) - \omega t \cos(\omega t) \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

Es ist unmittelbar ersichtlich, dass es sich bei obiger Kurve um eine *Kreisevolvente* handelt, wie sie in Gleichung 1.4 beschrieben wurde, wobei jedoch von t nach ωt umparametrisiert wurde. Die Kreisevolvente wird später in der Geometrie der Zahnräder, konkret in Kapitel 3.4 von großer Bedeutung sein.

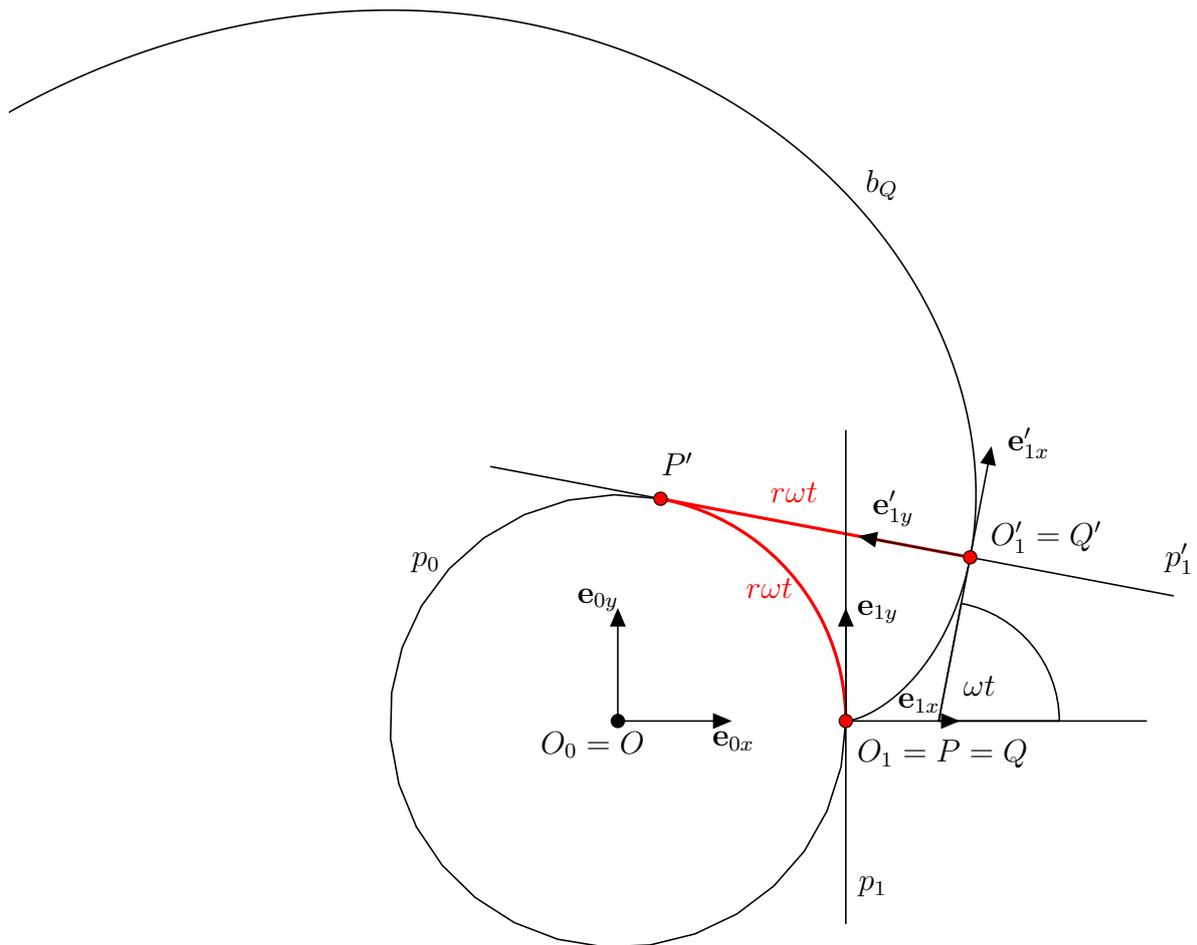


Abbildung 2.4: Eine Kreisevolvente

Bemerkung 2.1. Da die Evolventenbewegung die Umkehrbewegung der Zykloidenbewegung ist, erhält man eine Parametrisierung der Evolventenbewegung auch unmittelbar aus der Parametrisierung der Zykloidenbewegung, indem aus Gleichung 2.15 der Vektor $(x_1, y_1)^\top$ explizit berechnet wird.

2.8 Planetenbewegung

Für die nun folgende Bewegung sind drei Systeme nötig: Ein festes System Σ_0 und zwei bewegte Systeme Σ_1 und Σ_2 . Das System Σ_1 vollführe gegenüber Σ_0 eine reine Drehung mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} und Drehzentrum P_{01} . Das dritte, ebenfalls bewegte System Σ_2 vollführe eine reine Drehung gegenüber Σ_1 : Σ_2 rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{12} um das Drehzentrum P_{12} . Man nennt die Bewegung Σ_2/Σ_0 , welche durch das Zusammensetzen zweier Rotationen entsteht, *Planetenbewegung*. P_{01} ist als Drehzentrum der Bewegung Σ_1/Σ_0 der Momentanpol dieser Bewegung. Analog ist P_{12} der Momentanpol der Bewegung Σ_2/Σ_1 .

Nun wählen wir kartesische Rechtskoordinatensysteme wie folgt:

$$\begin{aligned} S_0 &= \{O_0, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\} \quad \text{mit } O_0 = P_{01} \\ S_1 &= \{O_1, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\} \quad \text{mit } O_1 = P_{01} \\ S_2 &= \{O_2, \mathbf{e}_{2x}, \mathbf{e}_{2y}\} \quad \text{mit } O_2 = P_{12} \end{aligned}$$

Ferner seien die drei Vektorbasen $\{\mathbf{e}_{ix}, \mathbf{e}_{iy}\}$ für $i = 0, 1, 2$ in der Ausgangslage identisch. Der Punkt P_{12} liege auf der positiven x-Achse von S_1 (vgl. Abbildung 2.5). Mit den Gleichungen 2.7, 2.8 und 2.9 lassen sich die Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_1 und Σ_2/Σ_0 wie folgt analytisch beschreiben:

$$\begin{aligned} \Sigma_1/\Sigma_0 \quad \dots \quad \mathbf{z}_0 &= e^{i\omega_{01}t} \cdot \mathbf{z}_1 \\ \Sigma_2/\Sigma_1 \quad \dots \quad \mathbf{z}_1 &= d + e^{i\omega_{12}t} \cdot \mathbf{z}_2 \\ \Sigma_2/\Sigma_0 \quad \dots \quad \mathbf{z}_0 &= d \cdot e^{i\omega_{01}t} + e^{i(\omega_{01}+\omega_{12})t} \cdot \mathbf{z}_2 \end{aligned}$$

Dabei ist $d = \text{dist}(P_{01}, P_{12})$, also $d > 0$.

In Koordinatenschreibweise lässt sich die Bewegung Σ_2/Σ_0 folgendermaßen angeben:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = d \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t) \\ \sin(\omega_{01}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos((\omega_{01} + \omega_{12})t) & -\sin((\omega_{01} + \omega_{12})t) \\ \sin((\omega_{01} + \omega_{12})t) & \cos((\omega_{01} + \omega_{12})t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.20)$$

Nun suchen wir die Polkurven der zusammengesetzten Bewegung Σ_2/Σ_0 . Wir verwenden Satz 2.7 bzw. Gleichung 2.14 und erhalten für \mathbf{p}_{02} :

$$\mathbf{p}_{02} = \frac{1}{\omega_{02}} (\omega_{01}\mathbf{p}_{01} + \omega_{12}\mathbf{p}_{12})$$

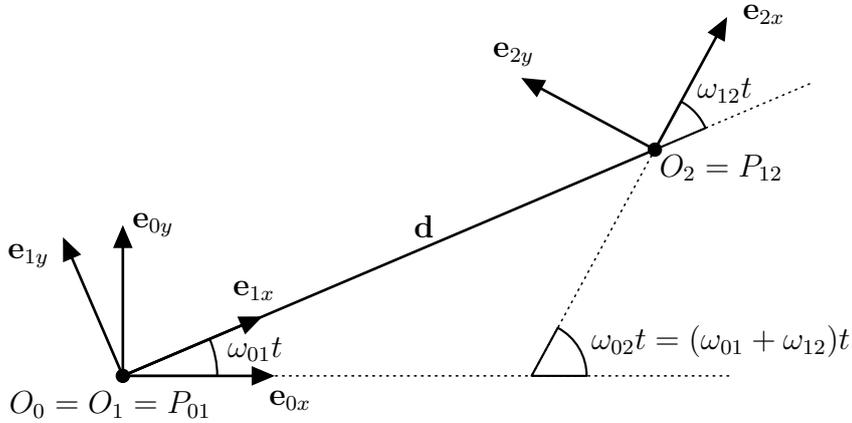


Abbildung 2.5: Planetenbewegung

Die Vektoren \mathbf{p}_{01} , \mathbf{p}_{12} und \mathbf{p}_{02} sind hierbei die Ortsvektoren zu den Momentanpolen P_{01} bzw. P_{12} bzw. P_{02} bzgl. S_0 . Dann ist $\mathbf{p}_{01} = \mathbf{o}$ und $\mathbf{p}_{12} = d \cdot e^{i\omega_{01}t}$. Wir erhalten für \mathbf{p}_{02} :

$$\mathbf{p}_{02} = \frac{\omega_{12}}{\omega_{02}} \mathbf{p}_{12} = \frac{\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \mathbf{p}_{12} = \frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} e^{i\omega_{01}t} \quad (2.21)$$

Damit ist die Rastpolkurve der zusammengesetzten Bewegung Σ_2/Σ_0 als Kreis p_0 mit Mittelpunkt $P_{01} = O_0 = O_1$ und Radius $r_0 = \left| \frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \right|$ erkannt.

Um die Gangpolkurve zu erhalten, setzen wir das Ergebnis von Gleichung 2.21 in die Gleichung der Bewegung Σ_2/Σ_0 ein:

$$\frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} = d + e^{i\omega_{12}t} \cdot \mathbf{z}_2$$

Dies liefert:

$$\mathbf{z}_2 = \frac{-d\omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \cdot e^{-i\omega_{12}t} \quad (2.22)$$

Es folgt, dass die Gangpolkurve p_2 ein Kreis mit Mittelpunkt P_{12} und Radius $r_2 = \left| \frac{-d\omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \right|$ ist. Zudem sehen wir, dass $\frac{r_0}{r_2} = \left| \frac{\omega_{12}}{\omega_{01}} \right|$. Unter Berücksichtigung des Teilverhältnisses $\sigma = TV(P_{01}, P_{12}, P_{02})$ der drei Momentanpole erhalten wir drei mögliche Fälle:

- (i) $P_{02} \in (P_{01}, P_{12}) \Leftrightarrow \sigma < 0$. Dabei bezeichnet (P_{01}, P_{12}) die offene Verbindungsstrecke von P_{01} und P_{12} .
- (ii) P_{02} liegt auf jener Halbgeraden von $P_{01}P_{12}$, die P_{12} als Anfangspunkt besitzt und P_{01} nicht enthält. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\sigma > 1$.
- (iii) P_{02} liegt auf jener Halbgeraden von $P_{01}P_{12}$, die P_{01} als Anfangspunkt besitzt und P_{12} nicht enthält. In diesem Fall ist $0 < \sigma < 1$.

Nach Satz 2.7 ist $TV(P_{01}, P_{02}, P_{12}) = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}$. Wir benötigen zunächst das folgende Lemma:

Lemma 2.8. *Es seien A, B und C drei verschiedene kollineare Punkte. Dann gilt für die Teilverhältnisse $TV(A, C, B)$ und $TV(A, B, C)$:*

$$TV(A, C, B) = 1 - TV(A, B, C)$$

Beweis. A, B und C seien drei Punkte, die o. B. d. A. auf einer Geraden liegen. Wir setzen $\lambda := TV(A, B, C)$ und $\mu := TV(A, C, B)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \lambda \cdot \overrightarrow{BC} \\ \overrightarrow{AB} &= \mu \cdot \overrightarrow{CB}\end{aligned}$$

Zudem gilt $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{CB}$.

Wir erhalten damit:

$$\begin{aligned}\mu \cdot \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} &= \lambda \cdot \overrightarrow{BC} \\ \Leftrightarrow (1 - \mu) \cdot \overrightarrow{BC} &= \lambda \cdot \overrightarrow{BC}\end{aligned}$$

Damit gilt $\mu = 1 - \lambda$. □

Mit Lemma 2.8 folgt:

$$TV(P_{01}, P_{12}, P_{02}) = \frac{\omega_{01} - \omega_{02}}{\omega_{01}} = \frac{-\omega_{12}}{\omega_{01}} \quad (2.23)$$

Es folgt, dass $P_{02} \in (P_{01}, P_{12})$ ist, falls ω_{01} und ω_{12} dasselbe Vorzeichen besitzen. Nun diskutieren wir die möglichen drei Fälle, wobei wir o. B. d. A. $\omega_{01} < 0$ voraussetzen:

1. $\omega_{12} < 0$:

Es ist $-\frac{\omega_{12}}{\omega_{01}} < 0$; Fall (i) liegt vor. Für die Radien r_0, r_2 und den Abstand d gilt:

$$\begin{aligned}r_0 &= \frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ r_2 &= \frac{d\omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ d &= r_0 + r_2\end{aligned}$$

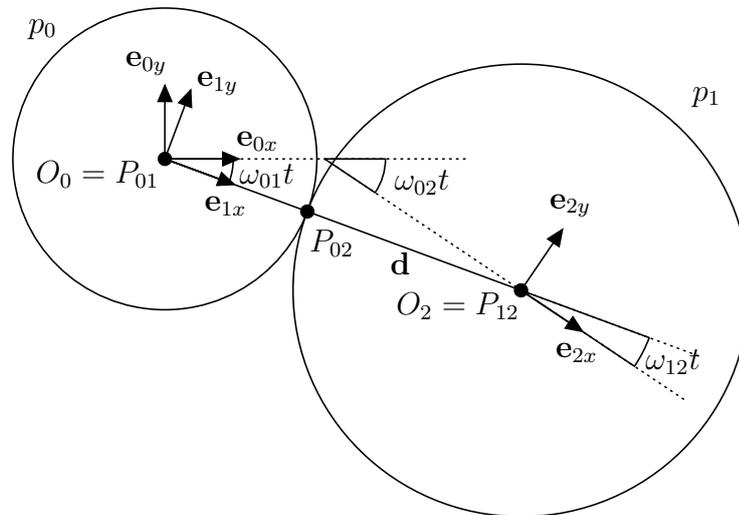


Abbildung 2.6: Planetenbewegung mit Polkurven im 1. Fall

In diesem Fall liegen die beiden Kreise p_0 und p_2 auf verschiedenen Seiten der Wälztangente.

2. $\omega_{12} > 0$:

a) $\omega_{01} + \omega_{12} < 0$:

Dies ist genau dann der Fall, wenn $-\frac{\omega_{12}}{\omega_{01}} < 1$; Fall (iii) liegt vor. Für die Radien r_0 , r_2 und den Abstand d gilt:

$$\begin{aligned} r_0 &= -\frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ r_2 &= \frac{d\omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ d &= r_2 - r_0 \end{aligned}$$

b) $\omega_{01} + \omega_{12} > 0$:

Dann ist $-\frac{\omega_{12}}{\omega_{01}} > 1$; Fall (ii) liegt vor. Für die Radien r_0 , r_2 und den Abstand d gilt:

$$\begin{aligned} r_0 &= \frac{d\omega_{12}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ r_2 &= -\frac{d\omega_{01}}{\omega_{01} + \omega_{12}} \\ d &= r_0 - r_2 \end{aligned}$$

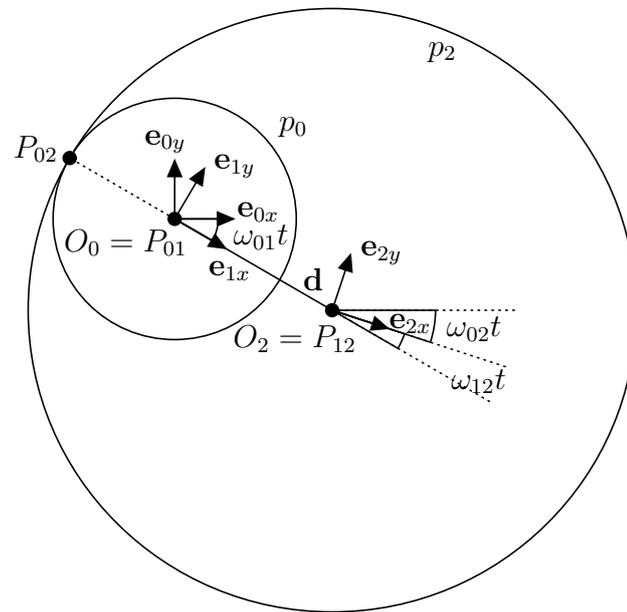


Abbildung 2.7: Planetenbewegung mit Polkurven im 2. Fall, a)

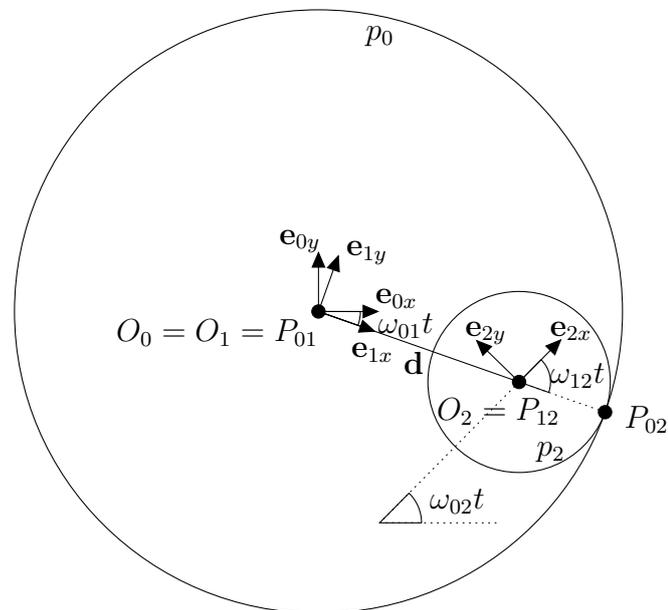


Abbildung 2.8: Planetenbewegung mit Polkurven im 2. Fall, b)

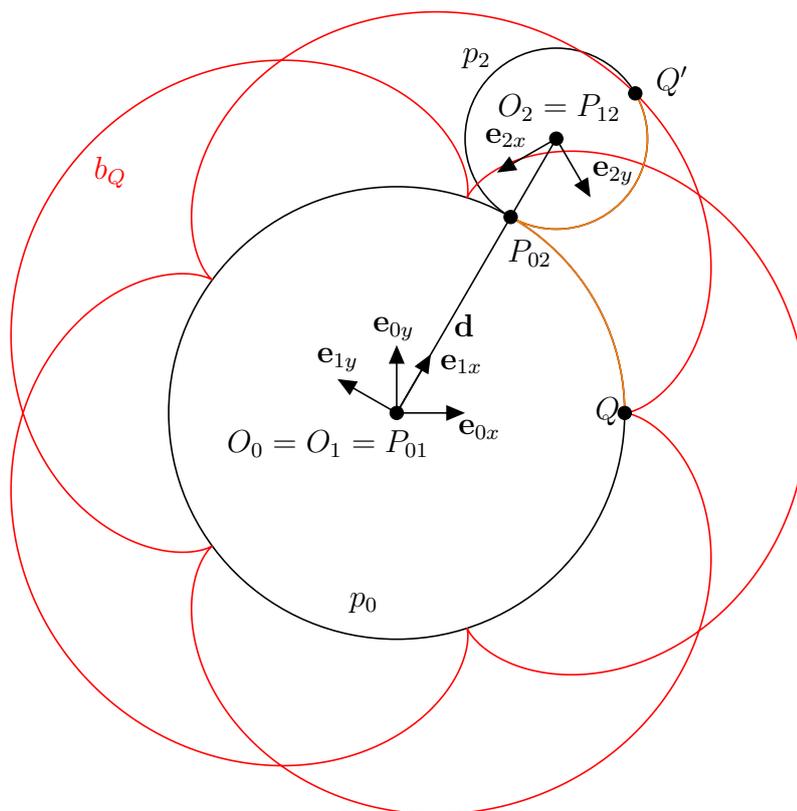


Abbildung 2.9: Eine gespitzte Epitrochoide b_Q mit den Polkreisen p_0 und p_2 .

Hypotrochoide oder *Hypozykloide*. Wählt man einen anderen, nicht auf p_2 liegenden Punkt X , so ist dessen Bahnkurve eine *geschlungene Hypotrochoide* (X liegt außerhalb von p_2) oder eine *gestreckte Hypotrochoide* (X liegt innerhalb von p_2).

In derselben Weise lassen sich die Bahnkurven von Punkten angeben, die entstehen, wenn der Gangpolkreis p_2 den Rastpolkreis p_0 umschließt. Früher wurden derartige Kurven *Peritrochoiden* genannt, was jedoch inzwischen durch die Kenntnis, dass es sich bei Epi- und Peritrochoiden bloß um verschiedene Erzeugungen derselben Kurven handelt, zu einer überflüssigen Einteilung wurde (siehe [21], S. 152).

Sowohl die Zykloiden- als auch die Evolventenbewegung kann offenbar als Spezialfälle der Planetenbewegung angesehen werden: Bei der Zykloidenbewegung ist der Rastpolkreis in eine Gerade, also in einen Kreis mit unendlich großem Radius, ausgeartet, während bei der Evolventenbewegung selbiges für die Gangpolkurve gilt.

2.9 Ellipsenbewegung und Oldhambewegung

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition der *Ellipsenbewegung* und deren Umkehrbewegung, der *Oldhambewegung*:

Definition 2.9 (Ellipsenbewegung). *Bewegen sich zwei Punkte X und $Y \in \Sigma_1$ auf zwei nicht parallelen Geraden x und $y \in \Sigma_0$, so heißt die Bewegung Σ_1/Σ_0 Ellipsenbewegung.*

Definition 2.10 (Oldhambewegung). *Schleifen zwei nicht parallele Geraden x und $y \in \Sigma_0$ durch zwei feste Punkte X und $Y \in \Sigma_1$, so nennt man die Bewegung Σ_0/Σ_1 Oldhambewegung.*

Es sei $\Sigma_0 \ni S = x \cap y$ der Schnittpunkt der beiden nicht parallelen Geraden x und y . Dann bewegt sich S bei der Bewegung Σ_0/Σ_1 nach dem Peripheriewinkelsatz auf einem Kreis $c \subset \Sigma_1$ (siehe Abbildung). Sei nun z eine weitere Gerade durch S . Nach dem Peripheriewinkelsatz schleift diese dann durch einen festen Punkt $Z \in c$. Für die Ellipsenbewegung Σ_1/Σ_0 gilt damit: Alle Punkte des Kreises c bewegen sich auf Geraden, die einem Strahlbüschel $S(x)$ angehören. Es ist also o. B. d. A. auch möglich, die Ellipsenbewegung als jene Bewegung zu definieren, bei der sich zwei Punkte X und $Y \in \Sigma_1$ auf zwei *orthogonalen* Geraden x und $y \in \Sigma_0$ bewegen.

Um die Polkurven der Ellipsenbewegung Σ_1/Σ_0 zu erhalten gehen wir wie folgt vor (siehe Abbildung 2.12): Es seien X und Y zwei Punkte, die sich auf orthogonalen Bahnen x und y , welche sich im Punkt O schneiden, bewegen. Im Schnitt der Bahnnormalen von X und Y befindet sich der Momentanpol P der Bewegung. Man erhält so ein Rechteck $YPXO$. Die Strecken \overline{OP} und \overline{XY} sind als Diagonalen des Rechtecks

und erhalten aus Gleichung 2.29:

$$\mathbf{b}_X(t) = \mathbf{a} \cdot \cos(\omega_{01}t) + \mathbf{b} \cdot \sin(\omega_{01}t). \quad (2.30)$$

Dies ist die Gleichung einer im Koordinatenursprung O_0 von S_0 zentrierten Ellipse mit konjugierten Durchmesservektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} , was den Namen *Ellipsenbewegung* rechtfertigt. Die Ellipse artet genau dann in eine Gerade aus, wenn die Vektoren \mathbf{a} und \mathbf{b} linear abhängig sind, also genau dann, wenn gilt:

$$\begin{vmatrix} \frac{r_0}{2} + x_2 & y_2 \\ y_2 & \frac{r_0}{2} - x_2 \end{vmatrix} = \frac{r_0^2}{4} - x_2^2 - y_2^2 = 0$$

Dies ist äquivalent zu:

$$x_2^2 + y_2^2 = \frac{r_0^2}{4}$$

Somit artet die Bahnkurve eines Punktes X dieser speziellen Planetenbewegung genau dann in eine Gerade aus, wenn X auf dem Gangpolkreis p_2 liegt.

Wir berechnen nun noch die Bahnkurve des Punktes P_{12} , also des Mittelpunktes des Gangpolkreises p_2 , der bzgl. S_2 die Koordinaten $(0, 0)^\top$ besitzt:

$$\mathbf{b}_{P_{12}}(t) = \frac{r_0}{2} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t) \\ \sin(\omega_{01}t) \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Kreis mit Mittelpunkt P_{01} und Radius $\frac{r_0}{2}$.

Man nennt die zu einer Ellipsenbewegung gehörenden Polkreise auch *Kardankreise*.

Nach Satz 2.6 sind die Polkurven einer Bewegung und deren Umkehrbewegung dieselben, vertauschen jedoch ihre Rollen. Damit liegt im Fall der Oldhambewegung eine Planetenbewegung vor, bei welcher der Rastpolkreis p_0 innerhalb des Gangpolkreises p_2 liegt. Für die Radien r_0 von p_0 und r_2 von p_2 und für die Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} und ω_{12} gilt:

$$\begin{aligned} r_2 &= 2 \cdot r_0 \\ \omega_{01} &= -2 \cdot \omega_{12} \end{aligned}$$

Die Oldhambewegung lässt sich, da es sich um einen Spezialfall der Planetenbewegung handelt, mittels Gleichung 2.20 parametrisieren:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t) \\ \sin(\omega_{01}t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_{01}t}{2}) & -\sin(\frac{\omega_{01}t}{2}) \\ \sin(\frac{\omega_{01}t}{2}) & \cos(\frac{\omega_{01}t}{2}) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

Wir berechnen die Bahnkurve eines Punktes Q , der bzgl. S_2 die Koordinaten $(q, 0)^\top$ besitzt, mit $q \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{b}_Q(t) = r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t) \\ \sin(\omega_{01}t) \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} \cos(\frac{\omega_{01}t}{2}) \\ \sin(\frac{\omega_{01}t}{2}) \end{pmatrix}$$

Wir setzen $\tau = \frac{\omega_0 t}{2}$ und erhalten:

$$r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \tau - \sin^2 \tau \\ 2 \cos \tau \sin \tau \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix}$$

Dies ergibt mit $\sin^2 \tau = 1 - \cos^2 \tau$:

$$2r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos^2 \tau \\ \cos \tau \sin \tau \end{pmatrix} + q \cdot \begin{pmatrix} \cos \tau \\ \sin \tau \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r_0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.32)$$

Gleichung 2.32 ist die Parametrisierung einer in x-Richtung um r_0 verschobenen Pascal-Schnecke, wie sie in Kapitel 1.3 zu finden ist. Im Unterschied zu Gleichung 1.5 wurde nun lediglich a durch $2r_0$ und b durch q ersetzt. Punkte, die der Oldhambewegung unterworfen werden, beschreiben damit als Bahnkurven Pascal-Schnecken. Jedoch beschreibt der Punkt P_{12} , welcher bzgl. S_2 die Koordinaten $(0, 0)^\top$ besitzt, als Bahnkurve die Rastpolkurve p_0 :

$$\mathbf{b}_{P_{12}} = r_0 \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) \end{pmatrix}$$

Die Bahnkurve eines Punktes Q , welcher der Oldhambewegung unterworfen wird, lässt sich nach [5], wie in Abbildung 2.13 dargestellt, folgendermaßen konstruieren: Zunächst schneidet man die Verbindungsgerade $q^* = P_{12}Q$ mit p_0 ; dies liefert einen Punkt Q^* auf p_0 . In Abbildung 2.13 fallen die Punkte Q und Q^* zusammen. Die Gerade q^* geht stets durch Q^* und durch den Punkt P_{12} , der sich auf p_0 bewegt. Damit erhält man die Punkte R der Bahnkurve b_Q von Q , indem man auf allen Geraden q^* durch Q^* von dem zweiten Schnittpunkt $P_{12} = q^* \cap p_0$ die Entfernung $dist(P_{12}Q)$ aufträgt; es entsteht eine Pascal-Schnecke. Wir werden in Kapitel 3.8 auf die Pascal-Schnecke zurückkommen. Abbildung 2.14 zeigt wie Abbildung 2.13 eine Pascal-Schnecke als Bahnkurve eines Punktes Q .

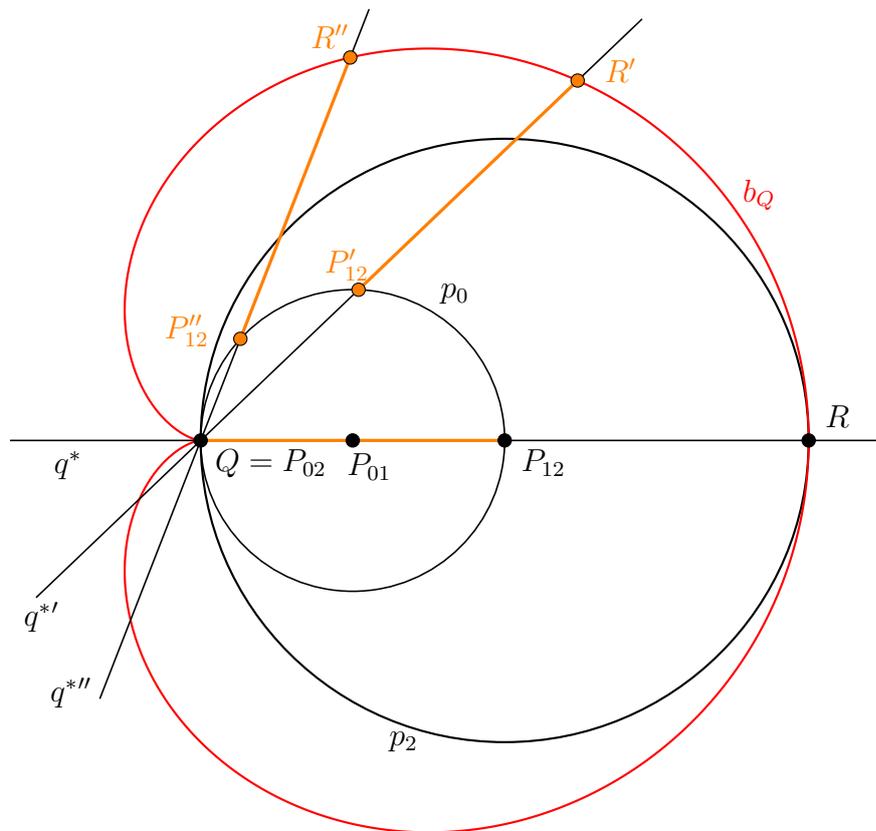


Abbildung 2.13: Eine Pascal-Schnecke als Bahnkurve b_Q eines Punktes Q bei der Oldhambewegung.

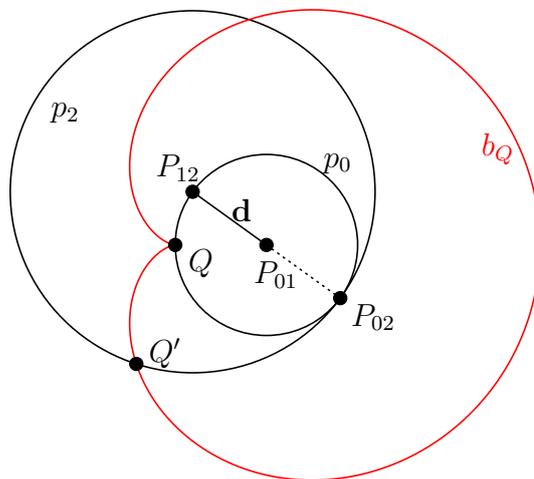


Abbildung 2.14: Pascal-Schnecke

3 Verzahnung von Stirnrädern

Zahnräder zielen darauf ab, die Drehung um eine Achse a_{01} auf die Drehung um eine andere Achse a_{02} zu übertragen. Durch die Forderung eines *konstanten Übersetzungsverhältnisses* $u = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ wird eine gleichförmige Drehung um die erste Achse auf eine gleichförmige Drehung um die zweite Achse gewährleistet. Wir betrachten hier Zahnradpaare mit konstanter Übersetzung. In diesem Kapitel sollen die Achsen der Zahnräder parallel sein - man spricht dann von *Stirnrädern*. Daneben gibt es auch Zahnräder, deren Achsen sich schneiden (*Kegelräder*, vgl. Kapitel 5) und solche, bei denen die Achsen windschief liegen (*Hypoidräder*¹). Anstatt wie im vorigen Kapitel mit ebenen Kurven zu arbeiten, liegt nun die folgende räumliche Situation vor: Es gibt zwei bewegte Systeme, die sich um je eine Achse drehen, sowie ein starres System, in dem die Achsen der bewegten Systeme angebracht werden. Um aber die im letzten Kapitel erarbeiteten Ergebnisse verwenden zu können, bedienen wir uns der folgenden Beobachtung: Nachdem die Achsen der Zahnräder in diesem Kapitel parallel sind und da die bewegten Systeme nur Drehungen um jeweils eine der Achsen vollführen, können wir die dreidimensionale Situation zweier zusammengehörender Stirnräder (man spricht hierbei auch von einem *Getriebe*) in einem sogenannten *Stirnschnitt* betrachten. Einen solchen erhält man, indem man die Räder bzw. das Getriebe mit einer Ebene orthogonal zu den beiden parallelen Achsen schneidet. In diesem Stirnschnitt liegt dann ein Problem der ebenen Kinematik vor, was es uns ermöglicht, die Kenntnisse aus Kapitel 2 zu verwenden. In einem Stirnschnitt liegt die folgende, ebene Situation vor: Zwei Systeme Σ_1 und Σ_2 rotieren mit konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} und ω_{02} um zwei feste Punkte P_{01} bzw. P_{02} . Diese Drehzentren sind die Durchstoßpunkte der beiden ursprünglichen Drehachsen a_{01} und a_{02} mit der Stirnschnittebene und repräsentieren das feste System Σ_0 , welches auch *Gestell* genannt wird. Wir verwenden im Folgenden kartesische Rechtssysteme $S_0 = \{O_0 = P_{01}, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}\}$, $S_1 = \{O_1 = P_{01}, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}\}$ und $S_2 = \{O_2 = P_{02}, \mathbf{e}_{2x}, \mathbf{e}_{2y}\}$ in Σ_0 bzw. Σ_1 bzw. Σ_2 . In der Ausgangslage sei $\mathbf{e}_{0x} = \mathbf{e}_{1x} = \mathbf{e}_{2x}$ und somit $\mathbf{e}_{0y} = \mathbf{e}_{1y} = \mathbf{e}_{2y}$. Zudem liege P_{02} auf der positiven x-Achse des Koordinatensystems S_0 ; P_{02} habe bzgl. S_0 die Koordinaten $(d, 0)^\top$ mit $d > 0$.

Bereits in Kapitel 2.8 haben wir uns mit drei Systemen Σ_0 , Σ_1 und Σ_2 und den sich daraus ergebenden ebenen Zwangsläufen beschäftigt, wobei Σ_0 fest war und Σ_1

¹Hypoidräder werden in dieser Arbeit nicht behandelt; Erklärungen hierzu können etwa in [8] oder [11] gefunden werden. (Üblicherweise werden Hypoidräder heute zu den Kegelrädern (mit Achsversatz) gezählt [8], S. 14)

und Σ_2 mit den konstanten Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} bzw. ω_{12} gegenüber Σ_0 bzw. Σ_1 rotierten. Nun rotieren Σ_1 und Σ_2 mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} bzw. ω_{02} gegenüber Σ_0 . Die Bewegungen Σ_1/Σ_0 und Σ_2/Σ_0 sind somit reine Rotationen mit den Rotationszentren P_{01} bzw. P_{02} . Die Relativbewegung Σ_2/Σ_1 ist daher als Zusammensetzung der beiden reinen Drehbewegungen Σ_2/Σ_0 (konstante Winkelgeschwindigkeit ω_{02} , Drehzentrum P_{02}) und Σ_0/Σ_1 (konstante Winkelgeschwindigkeit $-\omega_{01}$, Drehzentrum P_{01}) als Planetenbewegung (vgl. Kapitel 2.8) erkannt. Um die Ergebnisse aus Kapitel 2.8 verwenden zu können, müssen wir somit lediglich Σ_1 mit Σ_0 vertauschen und ω_{01} , ω_{12} , ω_{02} der Reihe nach durch $-\omega_{01}$, ω_{02} und ω_{12} ersetzen. Insbesondere folgt, dass die Rast- bzw. Gangpolkurve der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 ein Kreis p_1 bzw. p_2 mit Mittelpunkt P_{01} bzw. P_{02} ist. Für die Radien r_1 und r_2 der Kreise p_1 und p_2 gilt unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Änderung der Winkelgeschwindigkeiten:

$$r_1 = \left| \frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}} \right|, \quad r_2 = \left| \frac{d\omega_{01}}{\omega_{02} - \omega_{01}} \right|$$

Wie in Kapitel 2.8 erläutert, haben wir drei Fälle zu betrachten, da wir unterscheiden müssen, ob $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ größer oder kleiner Null ist, und die Radien r_1 und r_2 entsprechend zu ermitteln sind. Obwohl diese Rechnung bereits in Kapitel 2.8 für die Planetenbewegung ausgeführt wurde, soll die Fallunterscheidung der Vollständigkeit halber auch hier noch einmal mit den geänderten Winkelgeschwindigkeiten durchgeführt werden:

In der Diskussion der Fälle bei der Planetenbewegung wurde o. B. d. A. $\omega_{01} < 0$ gesetzt, weshalb wir nun durch die oben erläuterte Änderung der Winkelgeschwindigkeiten durch das Vertauschen der Systeme Σ_0 und Σ_1 im Fall des Stirnradgetriebes analog o. B. d. A. $\omega_{01} > 0$ voraussetzen:

1. $\omega_{02} < 0$:

Es ist $\frac{\omega_{01}}{\omega_{02}} < 0$; für die Radien und den Abstand d gilt daher:

$$r_1 = \frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}}, \quad r_2 = -\frac{d\omega_{01}}{\omega_{02} - \omega_{01}}, \quad d = r_1 + r_2$$

2. $\omega_{02} > 0$

a) $\omega_{02} - \omega_{01} > 0$ ($\Leftrightarrow \omega_{02} > \omega_{01}$):

$$r_1 = \frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}}, \quad r_2 = \frac{d\omega_{01}}{\omega_{02} - \omega_{01}}, \quad d = r_1 - r_2$$

b) $\omega_{02} - \omega_{01} < 0$ ($\Leftrightarrow \omega_{02} < \omega_{01}$):

$$r_1 = \frac{d\omega_{02}}{\omega_{01} - \omega_{02}}, \quad r_2 = \frac{d\omega_{01}}{\omega_{01} - \omega_{02}}, \quad d = r_2 - r_1$$

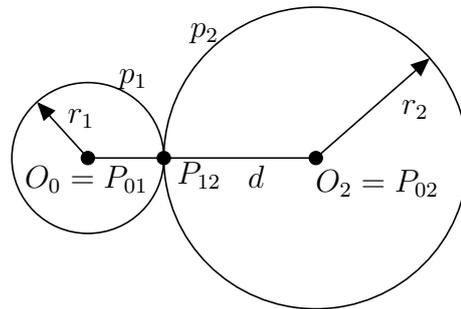


Abbildung 3.1: Fall 1

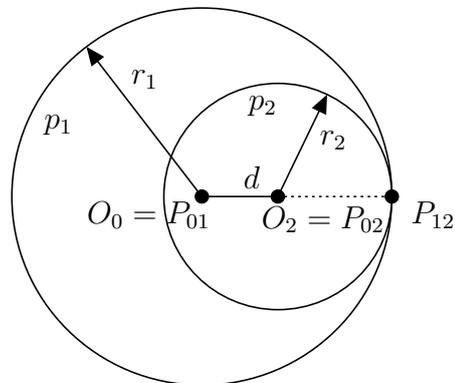


Abbildung 3.2: Fall 2, a)

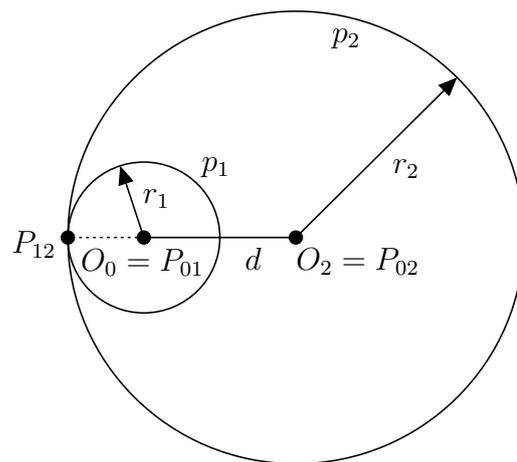


Abbildung 3.3: Fall 2, b)

Man spricht bei der oben vorgestellten Konstellation, bei der sich zwei Kreise, die sich im Momentanpol P_{12} berühren, mit Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} und ω_{02} gegeneinander bewegen, auch von *Reibrädern*. Nachdem obige Überlegungen in jedem Stirnschnitt unabhängig gelten, liegt im Raum die folgende Situation vor: Die Rast- bzw. *Gangpolfläche* der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 ist ein Drehzylinder Π_1 bzw. Π_2 mit Radius r_1 bzw. r_2 und Achse a_{01} bzw. a_{02} . Die auftretenden Drehzylinder Π_1 und Π_2 heißen auch *Polzylinder* bzw. *Wälzzylinder* und berühren sich längs einer gemeinsamen Erzeugenden, der *Momentandrehachse* a_{12} . Durch diese beiden Drehzylinder entsteht ein *Reibradgetriebe*, das jedoch nicht zur Übertragung größerer Kräfte geeignet ist. Um Bewegungen und auch größere Kräfte von einem Rad auf das andere übertragen zu können, werden auf den materiell ausgebildeten Reibrädern passende, ineinandergreifende Zahnkränze angebracht, wodurch *Rädergetriebe* entstehen. Die Konstruktion von zueinander passenden Zahnflanken ist Inhalt des nächsten Abschnitts.

3.1 Ebenes Verzahnungsgesetz, Konstruktion nach Reuleaux

Zum Übertragen von größeren Kräften sollen nun geeignete Zahnkränze ermittelt werden, sodass durch das Ineinandergreifen der Zähne zweier Räder Kräfte von einem Rad auf das andere übertragen werden können. Wie vorhin werden wir zum Ermitteln zusammenpassender Zahnkränze einen Stirnschnitt des Rädergetriebes betrachten. Jede Zahnflanke wird von der Stirnschnittebene nach einer Kurve c , dem sogenannten *Zahnprofil*, geschnitten. Bei einer *Geradverzahnung* entsteht die ursprüngliche Zahnflanke dann, indem c längs der Radachse extrudiert wird. Die Zahnflanke ist somit eine Zylinderfläche mit Leitkurve c ; die Erzeugenden dieser Zylinderfläche sind parallel zur Radachse. Die Forderung, dass eine Zahnflanke des ersten Rades eine Zahnflanke des zweiten Rades längs einer Erzeugenden berührt, ist also äquivalent zu der Forderung, dass die beiden Zahnprofile c_1 und c_2 zweier Zahnräder sich in einem Punkt berühren. Neben der Geradverzahnung gibt es noch die *Schrägverzahnung*, welche erst später, in Kapitel 3.5, thematisiert wird.

In der Verzahnungstheorie nennt man die Relativpolkurven p_1 und p_2 der Reibräder *Wälzkreise*. Die Relativbewegung, welche Σ_1 auf Σ_2 ausübt, nennt man das *Abwälzen* von p_1 auf p_2 . Der Berührungspunkt P_{12} von p_1 und p_2 , welcher gerade der Momentanpol dieser Relativbewegung ist, heißt *Wälzpunkt*. Bewegt sich p_1 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} um P_{01} und p_2 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{02} um P_{02} , so nennt man das Verhältnis $u = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$, wie bereits weiter oben erwähnt, *Übersetzungsverhältnis*. Wie ebenfalls bereits vorher angeführt, fordern wir ein konstantes Übersetzungsverhältnis. Nach Kapitel 2.4 hüllt ein Zahnprofil $c_1 \in \Sigma_1$ bei der Bewegung von Σ_1 eine Hüllkurve, nämlich das *Gegenprofil* c_2 , ein. Passende Zahnprofile c_1 und c_2 erhält man damit als Hüllkurvenpaar bei der Bewegung Σ_2/Σ_1 . Wie aus Satz 2.4 bekannt ist, geht die

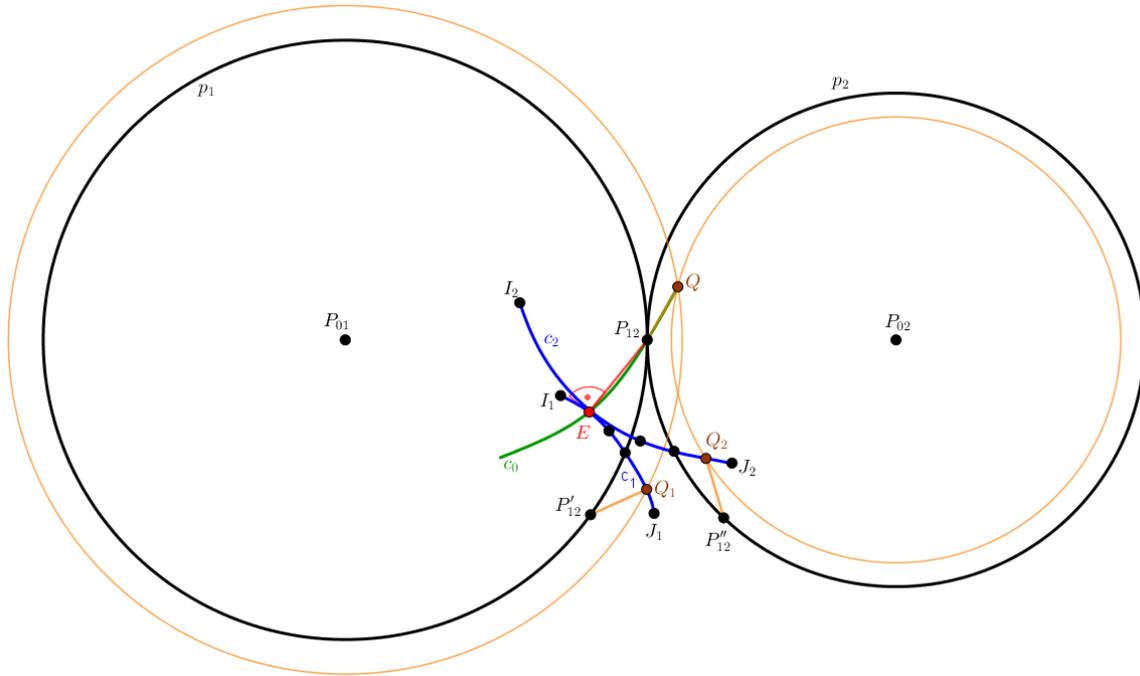


Abbildung 3.4: Die Konstruktion passender Zahnprofile nach F. Reuleaux: Zu einem Punkt $Q_1 \in c_1$ lässt sich der zugehörige Punkt Q_2 der Gegenflanke konstruieren. Q_1 und Q_2 kommen im Punkt Q zum Eingriff. Die Eingriffslinie c_0 ist bis Q eingezeichnet.

gemeinsame Normale zweier Hüllkurven im Berührungspunkt durch den Momentanpol der Bewegung. Damit muss die folgende Bedingung erfüllt sein, um die Winkelgeschwindigkeit ω_{01} , mit der sich p_1 bewegt, gleichförmig auf p_2 übertragen zu können (siehe Abbildung 3.4) [5, 7, 9, 12, 14, 15, 17, 21]:

Satz 3.1 (Ebenes Verzahnungsgesetz). *Es seien $c_1 \in \Sigma_1$ und $c_2 \in \Sigma_2$ zwei Zahnprofile, wobei c_1 bei der Bewegung von Σ_1 das Profil c_2 einhüllt. Des weiteren sei E ein Punkt, in dem sich c_1 und c_2 zu einem bestimmten Zeitpunkt berühren. Dann muss die gemeinsame Normale auf das Hüllkurvenpaar c_1 und c_2 in E durch den Momentanpol P_{12} der Relativbewegung gehen.*

Im Rastsystem Σ_0 beschreiben die Hüllpunkte eine Kurve c_0 . Diese heißt *Eingriffslinie*. Jener Punkt E , in dem sich c_1 und c_2 zu einem bestimmten Zeitpunkt berühren, heißt *Eingriffspunkt*.

Satz 3.1 ermöglicht, wie in Abbildung 3.4 dargestellt, die Konstruktion passender Zahnprofile nach F. Reuleaux (1875):² Zunächst wird ein beliebiges Zahnprofil c_1 in

²Franz Reuleaux (1829 - 1905) war ein deutscher Ingenieur, der sich ausgiebig mit theoretischer Kinematik beschäftigte.

Σ_1 angenommen. Um den Eingriffspunkt E zu erhalten, wird die Normale auf c_1 aus dem Wälzpunkt P_{12} gefällt. Die beiden Zahnprofile berühren sich im Eingriffspunkt, weshalb E sowohl auf c_1 als auch auf c_2 liegt. Dann wird ein beliebiger Punkt Q_1 auf c_1 angenommen, um einen weiteren Punkt Q_2 von c_2 zu erhalten. Die Normale auf c_1 in Q_1 schneidet p_1 im Punkt P'_{12} . Den Punkt P''_{12} auf p_2 , der P'_{12} entspricht, findet man, indem der Kreisbogen zwischen P_{12} und P'_{12} von p_1 auf p_2 von P_{12} bis P''_{12} abgewickelt wird. Bei der Drehung von p_1 wandert Q_1 auf einem Kreis mit Mitte in P_{01} und Radius $dist(P_{01}, Q_1)$. Q_1 wird dann zum Eingriffspunkt Q , wenn P'_{12} nach P_{12} gelangt und zum Wälzpunkt wird. Deshalb liegt Q auf dem Kreis $(P_{01}; dist(P_{01}, Q_1))$ und hat von P_{12} die Entfernung $dist(P'_{12}, Q_1)$. Der Punkt Q_2 auf c_2 , der Q_1 entspricht und mit c_1 in Q in Eingriff gelangt, liegt auf dem Kreis $(P_{02}; dist(P_{02}, Q))$ und hat von P''_{12} die Entfernung $dist(P'_{12}, Q_1)$. Wiederholte Anwendung dieser Konstruktion ergibt Punkte der Anfangslage von c_2 und auch die jeweiligen Tangenten. Die Eingriffspunkte liefern die Eingriffslinie c_0 . Im Rastsystem Σ_0 bilden die Berührungspunkte der Zahnprofile die Eingriffslinie c_0 . Sei nun T_1 ein Schnittpunkt von c_1 mit p_1 , so wird T_1 genau im Wälzpunkt P_{12} zum Eingriffspunkt. Es folgt, dass die Eingriffslinie den Wälzpunkt enthält. Der dem Punkt T_1 entsprechende Punkt T_2 liegt auf p_2 . Sein Abstand von P_{12} ist jener Kreisbogen auf p_2 , der dieselbe Länge wie der Kreisbogen von P_{12} nach T_1 auf p_1 hat.

Eine Verzahnung, bei der sich p_1 und p_2 von außen berühren, nennt man *Außenverzahnung*. Andernfalls spricht man von einer *Innenverzahnung*. Falls p_1 oder p_2 zu einer Gerade ausartet (in diesem Fall wäre dann P_{01} oder P_{02} ein Fernpunkt), entsteht eine *Zahnstange*. In allen drei Fällen ermöglicht die Konstruktion nach Reuleaux die Konstruktion zueinander passender Zahnprofile.

Die Konstruktion nach Reuleaux lässt sich auch wie folgt durchführen: Aus einem Punkt Q_1 von c_1 wird die Normale auf c_1 konstruiert und anschließend mit p_1 geschnitten. Der so erhaltene Punkt heiße P'_{12} . Der Punkt P'_{12} wird zum Wälzpunkt, wenn sich der Kreisbogen $P'_{12}P_{12}$ auf p_2 abgewälzt hat. Den Punkt P''_{12} auf p_2 , mit dem P'_{12} zur Deckung kommt, findet man also durch Abtragen des Kreisbogens $P'_{12}P_{12}$ auf p_2 . Nun wird aus P''_{12} die Strecke $\overline{P'_{12}Q_1}$ abgetragen, wobei der Winkel, den diese Strecke mit p_2 einschließt, gleich jenem Winkel, den $\overline{P'_{12}Q_1}$ mit p_1 einschließt, ist.

Verwendet man obige Konstruktion, ohne den Winkel zwischen $\overline{P'_{12}Q_1}$ und p_2 zu berücksichtigen, so erhält man passende Zahnprofile nach der ungenaueren Konstruktion nach J. V. Poncelet³. Dies soll hier nur am Rande erwähnt werden; wir werden stets die Konstruktion nach Reuleaux verwenden.

³Jean-Victor Poncelet war ein französischer Mathematiker, Ingenieur und Physiker und einer der Begründer der modernen projektiven Geometrie.

3.2 Berechnung des Gegenprofils

Ziel dieses Kapitels ist es, zu einem gegebenen Zahnprofil rechnerisch das zugehörige Gegenprofil zu ermitteln. Wir führen all unsere Berechnungen in einem Stirnschnitt durch, da wir dort mit ebenen Kurven rechnen und die Ergebnisse aus Kapitel 2 verwenden können. Es liegen drei Systeme vor: Zwei bewegte Systeme Σ_1 und Σ_2 und ein ruhendes System Σ_0 . In einem beliebigen Stirnschnitt sind die auftretenden Polkurven Kreise p_1 bzw. p_2 mit Mittelpunkten P_{01} bzw. P_{02} und Radien r_1 bzw. r_2 sind, die sich im Momentanpol P_{12} der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 berühren. Der Kreis p_i rotiere mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{0i} um P_{0i} für $i = 1, 2$. Wir verwenden wieder kartesische Rechtskoordinatensysteme $S_i = \{O_i, \mathbf{e}_{ix}, \mathbf{e}_{iy}\}$ in Σ_i für $i = 0, 1, 2$. Dabei sei $O_0 = O_1 = P_{01}$ und $O_2 = P_{02}$; in Ausgangslage sei $\mathbf{e}_{0x} = \mathbf{e}_{1x} = \mathbf{e}_{2x}$ und $\mathbf{e}_{0y} = \mathbf{e}_{1y} = \mathbf{e}_{2y}$. Ferner liege P_{02} auf der positiven x-Achse von S_0 und habe bzgl. S_0 die Koordinaten $(d, 0)^\top$ mit $d > 0$. Damit lassen sich die Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 wie folgt in komplexer Schreibweise angeben:

$$\begin{aligned}\Sigma_1/\Sigma_0 \dots \mathbf{z}_0 &= e^{i\omega_{01}t} \cdot \mathbf{z}_1 \\ \Sigma_2/\Sigma_0 \dots \mathbf{z}_0 &= d + e^{i\omega_{02}t} \cdot \mathbf{z}_2 \\ \Sigma_2/\Sigma_1 \dots \mathbf{z}_1 &= d \cdot e^{-i\omega_{01}t} + e^{i(\omega_{02}-\omega_{01})t} \cdot \mathbf{z}_2\end{aligned}$$

Für den Rastpolkreis p_1 bzw. den Gangpolkreis p_2 von Σ_2/Σ_1 ergeben sich damit die folgenden Rechnungen:

- Gangpolkreis \mathbf{p}_2 :

$$\begin{aligned}\mathbf{z}_1 &= 0 \Rightarrow -di\omega_{01} \cdot e^{-i\omega_{01}t} + i(\omega_{02} - \omega_{01}) \cdot e^{i(\omega_{02}-\omega_{01})t} \mathbf{z}_2 = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{p}_2 &= \frac{d\omega_{01}}{(\omega_{02} - \omega_{01})e^{i\omega_{02}t}} = \frac{d\omega_{01}}{\omega_{02} - \omega_{01}} \cdot e^{-i\omega_{02}t}\end{aligned}$$

- Rastpolkreis \mathbf{p}_1 :

$$\mathbf{p}_1 = d \cdot e^{-i\omega_{01}t} + \frac{d\omega_{01}}{\omega_{02} - \omega_{01}} \cdot e^{-i\omega_{01}t} = e^{-i\omega_{01}t} \cdot \frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}}$$

Das ebene Verzahnungsgesetz (Satz 3.1) kann auch mathematisch formuliert werden:

Ebenes Verzahnungsgesetz: Es sei c_1 eine Kurve in Σ_1 , gegeben durch eine reguläre Parametrisierung $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(s)$. Weiters sei c_2 eine durch eine reguläre Parametrisierung $\mathbf{c}_2 = \mathbf{c}_2(u)$ gegebene Kurve in Σ_2 . Die Kurven c_1 und c_2 bilden genau dann zusammenpassende Zahnprofile, wenn zu jedem Zeitpunkt t ein Punkt $C_1 \dots \mathbf{c}_1(s(t))$ auf c_1 und ein Punkt $C_2 \dots \mathbf{c}_2(u(t))$ auf c_2 mit $\mathbf{c}_1(s(t)) = \mathbf{c}_2(u(t))$ existiert, sodass gilt:

$$\left\langle \mathbf{c}_1(s(t)) - \mathbf{p}_1(t), \frac{d}{ds} \mathbf{c}_1 \Big|_{s=s(t)} \right\rangle = 0 \quad (3.1)$$

$$\left\langle \mathbf{c}_2(u(t)) - \mathbf{p}_2(t), \frac{d}{du} \mathbf{c}_2 \Big|_{u=u(t)} \right\rangle = 0 \quad (3.2)$$

Dabei ist $\mathbf{p}_1(t) = \mathbf{p}_2(t)$ der entsprechende Wälzpunkt zum Zeitpunkt t .

Mit dieser Bedingung können wir folgende Aufgabe lösen:

Gegeben: Eine Kurve $c_1 \subset \Sigma_1$ mit der Parametrisierung $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(s)$ bzgl. S_1 .

Gesucht:

- Das Gegenprofil $c_2 \subset \Sigma_2$
- Die zugehörige Eingriffslinie $c_0 \subset \Sigma_0$

Wir gehen wie folgt vor:

- a) Bestimme mit Hilfe von Gleichung 3.1 t als Funktion des Kurvenparameters s :

$$t = f(s) \quad (3.3)$$

- b) Mit Hilfe von Gleichung 3.3 erhalten wir eine Parametrisierung der Eingriffslinie:

$$\mathbf{c}_0(s) = \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}f(s)) & -\sin(\omega_{01}f(s)) \\ \sin(\omega_{01}f(s)) & \cos(\omega_{01}f(s)) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}_1(s) \quad (3.4)$$

- c) Eine Parametrisierung des Gegenprofils c_2 erhalten wir, indem wir die Eingriffslinie c_0 nach Σ_2 durchdrücken:

$$\mathbf{c}_2(s) = -d \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{02}f(s)) \\ -\sin(\omega_{02}f(s)) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos(\omega_{02}f(s)) & \sin(\omega_{02}f(s)) \\ -\sin(\omega_{02}f(s)) & \cos(\omega_{02}f(s)) \end{pmatrix} \cdot \mathbf{c}_0(s) \quad (3.5)$$

Wir geben zunächst c_1 als parametrische Kurve $\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(s)$ in Polarkoordinaten vor:

$$\mathbf{c}_1 = \mathbf{c}_1(s) = \rho(s) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta(s)) \\ \sin(\theta(s)) \end{pmatrix}$$

Im Folgenden seien Ableitungen nach s mit $'$ gekennzeichnet (es ist etwa $\mathbf{c}'_1(s) = \frac{d}{ds} \mathbf{c}_1(s)$). Gleichung 3.1 lautet damit (die Rechnung findet in Σ_1 statt):

$$\left\langle \rho \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} - \frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t) \\ -\sin(\omega_{01}t) \end{pmatrix}, \rho' \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \rho\theta' \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \quad (3.6)$$

Mit $\frac{d\omega_{02}}{\omega_{02} - \omega_{01}} = \pm r_1$ ergibt dies:

$$\begin{aligned} & \rho\rho' \mp r_1\rho'(\cos(\omega_{01}t)\cos\theta - \sin(\omega_{01}t)\sin\theta) \\ & \mp r_1\rho\theta'(-\cos(\omega_{01}t)\sin\theta - \sin(\omega_{01}t)\cos\theta) = 0 \end{aligned}$$

Dies ist nach den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus äquivalent zu

$$\rho\rho' \mp r_1\rho' \cdot \cos(\omega_{01}t + \theta) \pm r_1\rho\theta' \cdot \sin(\omega_{01}t + \theta) = 0. \quad (3.7)$$

Wir bezeichnen den Polarwinkel der noch nicht berechneten Eingriffslinie c_0 mit θ_0 . Dieser ist $\theta_0 = \theta + \omega_{01}t$. Damit erhalten wir:

$$\rho\rho' \mp r_1\rho' \cdot \cos(\theta_0) \pm r_1\rho\theta' \cdot \sin(\theta_0) = 0 \quad (3.8)$$

Diese Gleichung ist nach θ_0 zu lösen, um t zu erhalten.

Wir können Gleichung 3.8 aber noch weiter umschreiben und auf eine einfachere Form bringen. Dazu betrachten wir zunächst \mathbf{c}'_1 :

$$\mathbf{c}'_1 = \rho' \cdot \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + \rho\theta' \cdot \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \rho' \\ \rho\theta' \end{pmatrix}$$

Damit besitzt \mathbf{c}'_1 in Polarkoordinaten den Betrag $\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}$ und den Winkel β mit

$$\begin{aligned} \cos \beta &= \frac{\rho' \cos \theta - \rho\theta' \sin \theta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} \\ \sin \beta &= \frac{\rho' \sin \theta + \rho\theta' \cos \theta}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} \\ \cos(\beta - \theta) &= \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} \\ \sin(\beta - \theta) &= \frac{\rho\theta'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} \end{aligned}$$

Wir betrachten Gleichung 3.7 und erhalten:

$$\rho\rho' \mp r_1 \cdot [(\rho' \cos \theta - \rho\theta' \sin \theta) \cos(\omega_{01}t) - (\rho' \sin \theta + \rho\theta' \cos \theta) \sin(\omega_{01}t)] = 0$$

Division durch $\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}$ liefert

$$\frac{\rho\rho'}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}} = \pm r_1 \cdot \cos(\beta + \omega_{01}t)$$

Wir verwenden $\cos(\beta - \theta) = \frac{\rho}{\sqrt{\rho'^2 + \rho^2\theta'^2}}$ und erhalten als Ergebnis:

$$\rho \cdot \cos(\beta - \theta) = \pm r_1 \cdot \cos(\beta + \omega_{01}t) \quad (3.9)$$

Diese Gleichung ermöglicht das Berechnen des Parameters t wie folgt:

$$t = \left(\arccos \left(\pm \frac{\rho}{r_1} \cos(\beta - \theta) \right) - \beta \right) \cdot \frac{1}{\omega_{01}} \quad (3.10)$$

Mit Hilfe von t können wir nun mit den Gleichungen 3.4 und 3.5 die Eingriffslinie $c_0 = \mathbf{c}_0(s)$ sowie das Zahnprofil $c_2 = \mathbf{c}_2(s)$ ermitteln. Wir erhalten ähnlich wie [1] das folgende Ergebnis:⁴

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_0(t(s)) &= \rho(s) \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{01}t(s) + \theta(s)) \\ \sin(\omega_{01}t(s) + \theta(s)) \end{pmatrix} \\ \mathbf{c}_2(t(s)) &= -d \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega_{02}t(s)) \\ -\sin(\omega_{02}t(s)) \end{pmatrix} + \rho(s) \cdot \begin{pmatrix} \cos((\omega_{01} - \omega_{02})t(s) + \theta(s)) \\ \sin((\omega_{01} - \omega_{02})t(s) + \theta(s)) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

3.3 Kenngrößen bei ebener Verzahnung

Betrachtet man etwa in Abbildung 3.4 die Bogenlängen der Verbindungen EQ_1 auf c_1 und EQ_2 auf c_2 , so fällt auf, dass die Zahnprofile nicht aufeinander rollen, sondern aufeinander gleiten. Der Punkt E , welcher sich in Anfangslage im Eingriff befindet, gehört sowohl zu c_1 als auch zu c_2 . Die Geschwindigkeit von E auf c_1 ist jedoch verschieden von der Geschwindigkeit von E auf c_2 , da $c_1 \in \Sigma_1$ und $c_2 \in \Sigma_2$. Die Differenz der beiden Geschwindigkeiten liefert jene Geschwindigkeit, mit der c_1 auf c_2 gleitet. Je näher der Eingriffspunkt E dem Wälzpunkt P_{12} ist, desto geringer wird diese Gleitgeschwindigkeit; im Wälzpunkt selbst ist die Gleitgeschwindigkeit gleich Null. Deshalb verwendet man, wie in Abbildung 3.5 illustriert, nicht den gesamten Bogen von c_1 , sondern begrenzt diesen durch zwei mit p_1 konzentrische Kreise. Diese Kreise heißen *Kopfkreis* k_1 und *Fußkreis* f_1 . Analog bezeichnet man Kopf- und Fußkreis des zweiten Rades, welche konzentrisch zu p_2 sind, mit k_2 und f_2 . Mit Hilfe dieser Kreise wird die tatsächlich wirksame Eingriffslinie auf jenen Bereich eingeschränkt, der innerhalb von k_1 und k_2 liegt. Um die bekannten Zahnräder zu erhalten, werden die so begrenzten kleinen Bögen von c_1 und c_2 in regelmäßigen Abständen auf beiden Rädern angeordnet. Zusätzlich werden diese beiden Zahnprofile noch an einem Durchmesser von p_1 bzw. p_2 gespiegelt und an die entsprechenden Räder angebracht, um auch die Möglichkeit der Verwendung der Zahnräder im umgekehrten Drehsinn zu gewährleisten.

Um den Radius von Kopf- bzw. Fußkreis zu erhalten, benötigt man den sogenannten *Modul*. Sei z_1 die Anzahl der Zähne des ersten Rades und z_2 die Anzahl der Zähne des zweiten Rades. Dann bezeichnet man

$$\tau = \frac{2r_1\pi}{z_1} = \frac{2r_2\pi}{z_2} = \frac{u_1}{z_1} = \frac{u_2}{z_2}$$

⁴In [1] wird das Stirnradgetriebe anders angeordnet; das Rotationszentrum des zweiten Rades liegt hier auf der y -Achse des zu Σ_0 gehörenden Koordinatensystems.

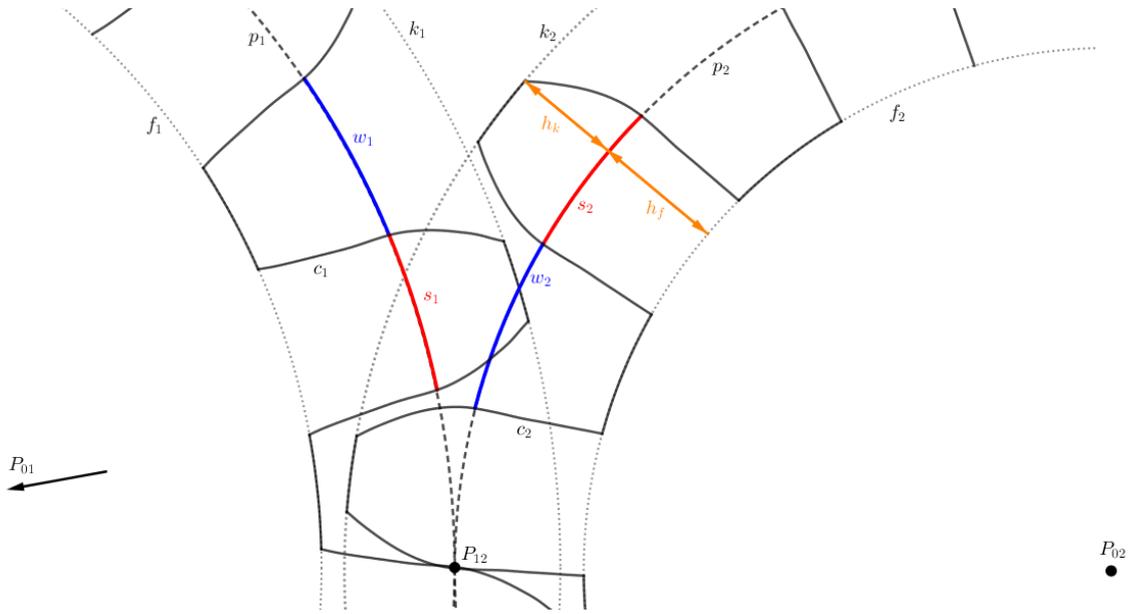


Abbildung 3.5: Kenngrößen der ebenen Verzahnung.

als die *Teilung*. Dabei sind r_1 und r_2 die Radien der Wälzkreise und u_1 und u_2 die zugehörigen Umfänge. Die Teilung ist die Länge des Wälzkreisbogens zwischen den Mitten benachbarter Zähne. Es folgt sofort, dass die Radien r_1, r_2 und Anzahl der Zähne z_1, z_2 zweier ineinandergreifender Räder nicht beliebig vorgegeben werden können, sondern die Gleichung $r_1 z_2 = r_2 z_1$ erfüllen müssen.

Mit Hilfe der Teilung τ lässt sich der *Modul* angeben:

$$m = \frac{\tau}{\pi} = \frac{2r_1}{z_1} = \frac{2r_2}{z_2} = \frac{d_1}{z_1} = \frac{d_2}{z_2}$$

Zur Ermittlung der Radien von Kopf- und Fußkreis benötigt man die Werte der *Kopfhöhe* h_k sowie der *Fußhöhe* h_f . Üblicherweise werden hier nach [21] die folgenden Werte verwendet: $h_k = m, h_f = \frac{6}{5}m$. Kopfhöhe und Fußhöhe werden vom jeweiligen Wälzkreis aus radial gemessen. Die Radien von Kopf- und Fußkreis erhält man, indem zum Radius des entsprechenden Wälzkreises noch die Kopfhöhe addiert wird bzw. die Fußhöhe subtrahiert wird.

Die *Zahnstärke* bezeichnet man mit s , während man die *Lückenweite* mit w bezeichnet. Beide Werte werden als Bögen auf dem entsprechenden Wälzkreis gemessen. In der Praxis wählt man die Zahndicke etwas kleiner als die Lückenweite, um überflüssige Reibung zu vermeiden. Das so entstehende *Flankenspiel* $S_f = w_1 - s_1 = w_2 - s_2$ gibt die Differenz dieser beiden Größen an. Für das Flankenspiel gilt nach [21] üblicherweise: $S_f = \frac{\tau}{20}$. Ebenso erhält man das *Kopfspiel* $S_k = h_f - f_k = \frac{m}{5}$. Das Kopfspiel gibt den Abstand des Kopfkreises vom Fußkreis des Gegenrades an und wird auf der Verbindungsgerade $P_{01}P_{02}$ gemessen. Für die Zahnstärke s , die Lückenweite w und die

Teilung τ gilt:

$$s = \frac{\tau - S_f}{2}$$

$$w = \frac{\tau + S_f}{2}$$

Damit erhalten wir bei dem üblicherweise verwendeten Flankenspiel $S_f = \frac{\tau}{20}$ zwischen s und τ bzw. zwischen w und τ das folgenden Resultat:

$$s = \frac{19\tau}{40} \quad (3.11)$$

$$w = \frac{21\tau}{40} \quad (3.12)$$

Das Kopfspiel wird benutzt, um den Übergang zwischen Zahnfuß und Fußkreis abzurunden und dadurch eine bessere Festigkeit zu gewährleisten. Diese Abrundung kann nicht willkürlich gewählt werden. Es ist hier zu berücksichtigen, auf welchem Bogen von c_1 bzw. c_2 tatsächlich der Eingriff erfolgt. Greift etwa vom Zahnkopf auf c_1 der Bogen $P_{12}K_1$ und kommt vom Zahnfuß auf c_2 der Bogen $P_{12}K_2$ zum Eingriff, so kann die Abrundung auf c_2 in K_2 beginnen. Jedoch muss die Bahnkurve von K_1 bei der Relativbewegung des Abwälzens von p_1 auf p_2 berücksichtigt werden. K_1 beschreibt bei dieser Relativbewegung bei einer Außenverzahnung etwa eine geschlungene Epitrochoide. Diese liefert die Grenze für die Abrundung. Analog ist die Grenze der Abrundung des anderen Rades zu ermitteln.

Damit Zahnräder richtig funktionieren, ist es essentiell, dass zu jedem Zeitpunkt beide Zahnräder in mindestens einem Punkt in Eingriff stehen (vgl. Ebenes Verzahnungsgesetz 3.1). Deshalb darf die Anzahl der Zähne der beiden Räder eine gewisse Mindestgrenze nicht unterschreiten. Seien etwa auf c_1 Bögen EQ_1 und entsprechend auf c_2 Bögen EQ_2 konstruiert und sei P'_{12} jener Punkt, in dem die Normale auf c_1 in Q_1 den Kreis p_1 schneidet (analog für P''_{12} , c_2 , Q_2 und p_2), dann nennen wir die gleich langen Kreisbögen $P'_{12}P_{12}$ bzw. $P''_{12}P_{12}$ auf p_1 bzw. p_2 *Wälzkreisbögen* l . Um zu gewährleisten, dass zu jedem Zeitpunkt mindestens ein Eingriffspunkt vorliegt, muss gelten, dass $l > \tau$. Wenn man $l = \varepsilon\tau$ setzt, so muss $\varepsilon > 1$ sein, damit obige Bedingung erfüllt ist. Nebenbei dürfen Zähne, die nicht in Eingriff stehen, einander nicht stören, da sonst ein richtiges Funktionieren der Zahnräder nicht möglich ist.

3.4 Evolventenverzahnung

Obwohl es unter Berücksichtigung des Ebenen Verzahnungsgesetzes 3.1 grundsätzlich möglich ist, ein beliebiges Zahnprofil c_1 vorzugeben und dazu das passende Gegenprofil c_2 zu konstruieren (vgl. Kapitel 3.1), werden in der Praxis doch vor allem Verzahnungen verwendet, die gewissen Anforderungen genügen. Zudem treten bei der beliebigen

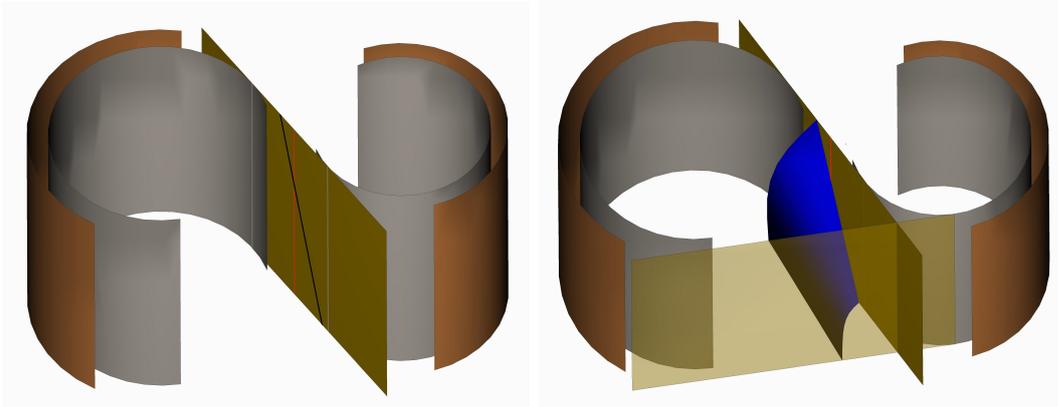


Abbildung 3.6: Wälzzylinder, Grundzylinder und Eingriffsfläche; durch das Rollen der Ebene auf dem jeweiligen Grundzylinder erhält man für eine Kurve k (schwarz eingezeichnet) passende Zahnflanken. Die Wälzzylinder berühren sich längs der rot eingezeichneten Momentandrehachse a_{12} . Auch die Erzeugenden, in denen die Eingriffsfläche die Grundzylinder berührt, sind dargestellt.

Vorgabe von c_1 mitunter geometrisch komplizierte Gegenzahnprofile auf, was entsprechende Verzahnungen aufgrund hoher Kosten in der Herstellung und eventuell ungünstiger Abnutzungs- und Festigkeitseigenschaften für die Praxis uninteressant macht. Die heutzutage gängigste Verzahnung ist die von Leonhard Euler (1765) beschriebene Evolventenverzahnung [4, 5, 17].

In Kapitel 2 wurde beschrieben, wie eine Evolvente als Bahnkurve eines Punktes entsteht, wenn eine Gerade auf einem Kreis rollt. Wir werden dieses Kenntnis in diesem Kapitel nutzen, wollen uns aber zunächst zum besseren Verständnis auch mit der räumlichen Situation auseinandersetzen. Nachdem im Fall von Stirnrädern Wälzzylinder Π_1 und Π_2 als Polflächen auftreten, betrachten wir anstatt einer Gerade, die auf einem Kreis rollt, zunächst das zugehörige räumliche Analogon, also eine Ebene ε , die auf einem Drehzylinder Π rollt; die Ebene ist hierbei das bewegte System Σ_1 im Raum und berührt Π längs der Erzeugenden a , während der Drehzylinder das ruhende System Σ_0 darstellt. Ein Punkt $P \in \varepsilon$, der dieser Bewegung unterworfen wird, beschreibt dabei als Bahnkurve b_P eine Kreisevolvente; sie schneidet alle Tangentialebenen des Drehzylinders Π orthogonal. Wird eine beliebige Kurve $k \in \varepsilon$ der obigen Bewegung unterworfen, so beschreibt die Kurve k im Allgemeinen eine *Mongesche Fläche*⁵. Φ_k mit der Gratlinie g (siehe Abbildung 3.6 und [2], S. 316). Der Normalvektor der Fläche Φ_k liegt in der Ebene ε . Wenn wir unsere Kurve k spezieller als Gerade wählen, so erhalten wir durch das Aufwickeln der Geraden auf dem Drehzylinder als Gratlinie

⁵Mongesche Flächen werden gerade von ebenen Kurven überstrichen, wenn die Trägerebene der Kurve auf einer abwickelbaren Fläche rollt [2]

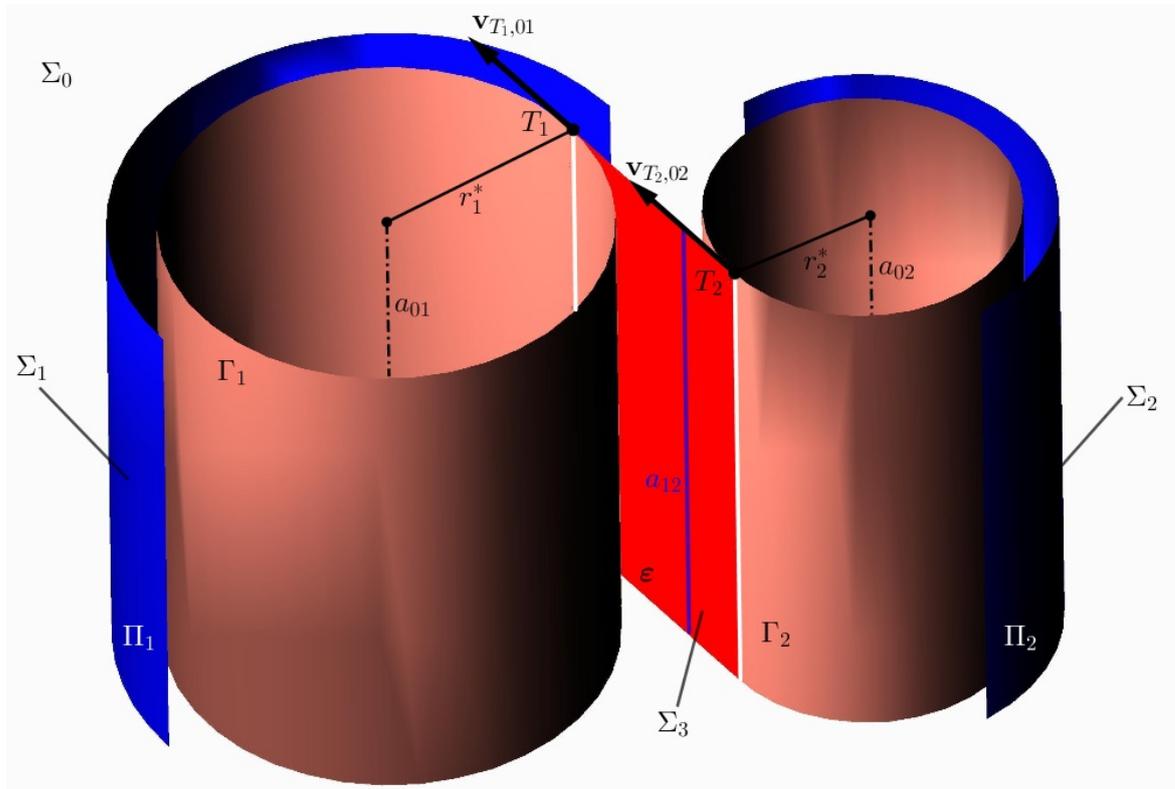


Abbildung 3.7: Die Eingriffsebene ε rollt auf den Grundzylindern Γ_1 und Γ_2 , da die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ übereinstimmen.

eine Schraublinie g auf Π . Die von k erzeugte Fläche Φ_k ist dann die Tangentenfläche der Schraublinie g , also eine Schraubtorse. Wählt man die Kurve k noch spezieller als Gerade, die parallel zur Erzeugenden a von Π (und damit parallel zu allen Erzeugenden von Π) liegt, so ist die Gratlinie g eine Erzeugende von Π , während die von k erzeugte Fläche Φ_k eine Zylinderfläche ist.

Wir verwenden dieses Prinzip, um die Evolventenverzahnung zu realisieren: Es seien Σ_1 und Σ_2 , wie in Abbildung 3.7 dargestellt, zwei bewegte Systeme, repräsentiert durch die Wälzylinder Π_1 und Π_2 , die sich um die Achsen a_{01} und a_{02} drehen. Σ_0 sei ein ruhendes System, nämlich das Gestell, in dem die Achsen a_{01} und a_{02} von Π_1 und Π_2 angebracht sind. Zusätzlich sei Σ_3 ein weiteres bewegtes System, nämlich jenes, das durch die *Eingriffsebene* ε repräsentiert wird. Die Eingriffsebene ε geht durch die Momentandrehachse a_{12} und ist das räumliche Analogon zur Eingriffslinie im Stirnschnitt; ε bestimmt die Form der Zahnflanken. Ferner sei τ die gemeinsame Tangentialebene an Π_1 und Π_2 in a_{12} , die mit ε den festen Winkel α einschließt. Man nennt α *Eingriffswinkel*. Zudem betrachten wir den zu Π_1 bzw. Π_2 coaxialen Drehzylinder Γ_1 bzw. Γ_2 , der ε als Tangentialebene besitzt. Γ_1 und Γ_2 heißen *Grundzylinder*. Den Radius r_1^*

von Γ_1 erhält man durch:

$$r_1^* = r_1 \cdot |\cos \alpha| \quad (3.13)$$

Analog erhalten wir den Radius r_2^* von Γ_2 :

$$r_2^* = r_2 \cdot |\cos \alpha| \quad (3.14)$$

Das erste Rad drehe sich gegenüber Σ_0 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} , während das zweite Rad mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{02} um die Achse a_{02} rotiere. Die Eingriffsebene ε berührt die beiden Grundzylinder jeweils nach einer Erzeugenden. In jedem Stirnschnitt erhält man somit einen Berührungspunkt T_1 auf Γ_1 bzw. einen Berührungspunkt T_2 auf Γ_2 . Nun ist zu zeigen, dass die Ebene ε derart bewegt werden kann, dass die Relativbewegung Σ_3/Σ_1 bzw. Σ_3/Σ_2 das Rollen von ε auf Γ_1 bzw. auf Γ_2 ist. Wir betrachten zu diesem Zweck den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_1,01}$ des Berührungspunktes T_1 auf Γ_1 bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 und den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_2,02}$ des Berührungspunktes T_2 auf Γ_2 bei der Bewegung Σ_2/Σ_0 : Der Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_1,01}$ steht orthogonal auf jene Ebene, welche durch die Achse a_{01} und den Berührungspunkt T_1 aufgespannt wird, während $\mathbf{v}_{T_1,01}$ orthogonal auf jene Ebene, die durch die Achse a_{02} und den Berührungspunkt T_2 aufgespannt wird, steht. Nachdem diese beiden Ebenen parallel sind - sie stehen orthogonal auf die Eingriffsebene ε - haben die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ dieselbe Richtung (vgl. Abbildung 3.7). Für die Längen der Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{T_1,01}\| &= \|r_1^* \cdot \omega_{01}\| = r_1^* \cdot |\omega_{01}| = r_1 \cdot |\cos \alpha| \cdot |\omega_{01}| = \\ &= r_2 \cdot |\cos \alpha| \cdot |\omega_{02}| = r_2^* \cdot |\omega_{02}| = \|r_2^* \cdot \omega_{02}\| = \|\mathbf{v}_{T_2,02}\| \end{aligned}$$

Damit stimmen die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ überein. Die Eingriffsebene ε kann somit derart in sich selbst verschoben werden, dass die Relativbewegung Σ_3/Σ_1 bzw. Σ_3/Σ_0 das Rollen von ε auf dem Grundzylinder Γ_1 bzw. Γ_2 ist. Lässt man ε samt einer darin liegenden Kurve k einmal auf Γ_1 und einmal auf Γ_2 rollen, so sind die von k beschriebenen Flächen passende Zahnflanken (siehe [21]). Die Kurve k wird dabei üblicherweise nicht beliebig, sondern als Gerade gewählt. Liegt k parallel zur Momentandrehachse a_{12} , so erhält man als Zahnflanken Zylinderflächen mit einer Kreisevolvente als Leitkurve, andernfalls treten Schraubtorsen auf; Schraubtorsen besitzen Kreisevolventen als Normalschnitte [5, 21]. Man spricht bei der ersten von einer *Geradverzahnung* und bei der zweiten von einer *Schrägverzahnung*. Denkbar wären aber auch Verzahnungen, deren Zahnprofile man mittels einer anderen Kurve k erhält. Betrachtet man die Situation in einem Stirnschnitt, so gibt man eine durch den Wälzpunkt P_{12} gehende Gerade als Eingriffslinie c_0 vor. Die gemeinsame Wälztangente an die Wälzkreise im Wälzpunkt wird von c_0 unter dem festen Eingriffswinkel α geschnitten. Wir betrachten die zu den Wälzkreisen p_1 bzw. p_2 konzentrischen Kreise g_1 bzw. g_2 ein, welche c_0 als gemeinsame Tangente besitzen und *Grundkreise* genannt

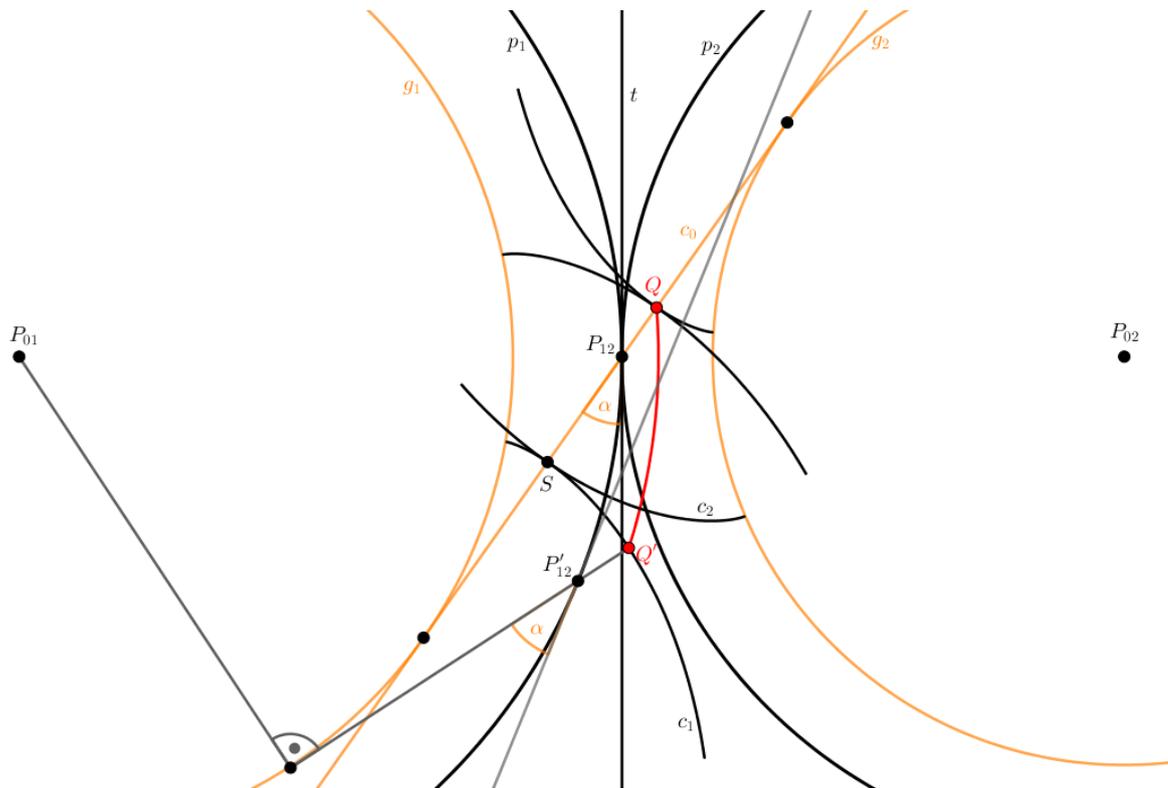


Abbildung 3.8: Kreisevolventen der Grundkreise g_1 und g_2 als passende Zahnprofile c_1 und c_2 .

werden und lassen die Gerade c_0 auf g_1 bzw. g_2 rollen. Ein Punkt, der dieser Bewegung unterworfen wird, beschreibt als Bahnkurve eine Kreisevolvente c_1 bzw. c_2 .⁶ Die zu den Grundkreisen g_1 bzw. g_2 gehörenden Kreisevolventen c_1 bzw. c_2 sind passende Zahnprofile. Umgekehrt schneiden alle Normalebenen der zu ε bzw. c_0 gehörenden Zahnprofile c_1 bzw. c_2 die Wälzzyylinder Π_1 bzw. Π_2 längs Erzeugenden und schließen mit den dortigen Tangentialebenen stets den festen Winkel α ein, da die Erzeugenden gerade durch Rotation aus der gemeinsamen Erzeugenden a_{12} der beiden Wälzzyylinder hervorgehen. Somit hüllen die Normalebenen von c_1 bzw. c_2 genau die zwei zu Π_1 bzw. Π_2 koaxialen Drehzyylinder Γ_1 bzw. Γ_2 ein, die ε als gemeinsame Tangentialebene besitzen.

Die Vorteile der Evolventenverzahnung liegen vor allem darin, dass sich die Richtung des Zahndrucks nicht ändert, aber auch in der einfachen und genauen Herstellung. Setzen wir außerdem $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ voraus, so können die Beträge in den Gleichungen 3.13 und 3.14 weggelassen werden. Die Grundkreise geben auch an, welche Punkte von c_0 als Eingriffspunkte relevant sind. Es sind dies solche, die zwischen den Berührungspunkten

⁶Um anzugeben, dass c_1 und c_2 Evolventen eines Kreises sind, wäre der Name *Kreisevolventenverzahnung* aussagekräftiger.

von c_0 mit g_1 und g_2 liegen. Bei Verwendung von Punkten auf c_0 außerhalb dieser Strecke würden nämlich Spitzen auf c_1 bzw. c_2 auftreten. Jedoch liegen die tatsächlichen Eingriffspunkte, wie in Kapitel 3.3 angegeben, innerhalb der beiden Kopfkreise k_1 und k_2 . Als Eingriffspunkte treten also jene Punkte auf c_0 auf, die innerhalb der beiden Schnittpunkte K_1 und K_2 von c_0 mit k_1 und k_2 liegen. Wiederum müssen für die in der Praxis angewandte Abrundung der Zahnfüße die Bahnen von K_1 und K_2 bei der Relativbewegung von p_1 gegenüber p_2 berücksichtigt werden. Üblicherweise wird nach [5] ein Eingriffswinkel von $\alpha = 20^\circ$ gewählt.

Nun können wir auf Kapitel 2.7 zurückgreifen, um die Zahnprofile zu parametrisieren. Damit lassen sich dann in einem geeigneten CAD-Programm - etwa in PTC-Creo - Zahnradgetriebe modellieren. Wir verwenden insbesondere Gleichung 2.19, wobei zu berücksichtigen ist, dass unsere Evolvente, die als Zahnprofil c_1 verwendet wird, zum Grundkreis g_1 gehört und damit den Radius r_1^* besitzt. Analog gehört die Evolvente, welche das Profil c_2 darstellt, zum Grundkreis g_2 mit dem Radius r_2^* . Die evolventenförmigen Zahnprofile c_1 und c_2 lassen sich dann mit Gleichung 2.19 wie folgt in Abhängigkeit von t parametrisieren:

$$\mathbf{c}_1(t) = r_1^* \cdot \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{c}_2(t) = r_2^* \cdot \begin{pmatrix} \cos t + t \sin t \\ \sin t - t \cos t \end{pmatrix} \quad (3.16)$$

Nachdem wir die Zahnprofile im CAD Programm entsprechend drehen können, spielt es keine Rolle, in welchem Punkt von g_1 die Evolvente, welches das Profil c_1 liefert, beginnt. Selbiges gilt für g_2 und c_2 . Wie in Kapitel 3.3 erläutert, werden die Zahnprofile c_1 und c_2 von den jeweiligen Kopf- und Fußkreisen begrenzt. Zudem werden die Zahnprofile den Lückenweiten entsprechend an Geraden durch die Mittelpunkte der Wälzkreise p_1 und p_2 gespiegelt und der Teilung entsprechend regelmäßig angeordnet. Schließlich verwendet man die evolventenförmigen Zahnprofile, um sie entlang der Wälzylinderachsen zu extrudieren. So erhält man eine Evolventenverzahnung mit Geradflanken - die Zahnflanken sind, wie bereits erwähnt, Zylinderflächen. Die Abbildungen 3.9 und 3.10 zeigen ein derart in PTC-Creo erzeugtes geradverzahntes Evolventengetriebe. Schrägverzahnungen werden im folgenden Kapitel 3.5 genauer thematisiert. Der große Vorteil der Schrägverzahnung liegt in der besseren Laufruhe.

Was passiert, wenn einer der Wälzkreise - etwa p_2 - in eine Gerade ausartet? Dann erhält man für c_2 gerade Zahnprofile, da deren Normalen die Teilgerade p_2 unter dem festen Eingriffswinkel α schneiden und daher parallel sein müssen. Insbesondere ist c_2 orthogonal zur Eingriffslinie c_0 .

Evolventenzahnräder stellen nach [5] die einzigen Zahnräder dar, die eine geringfügige Änderung des Achsabstandes erlauben, sodass das Übersetzungsverhältnis dennoch

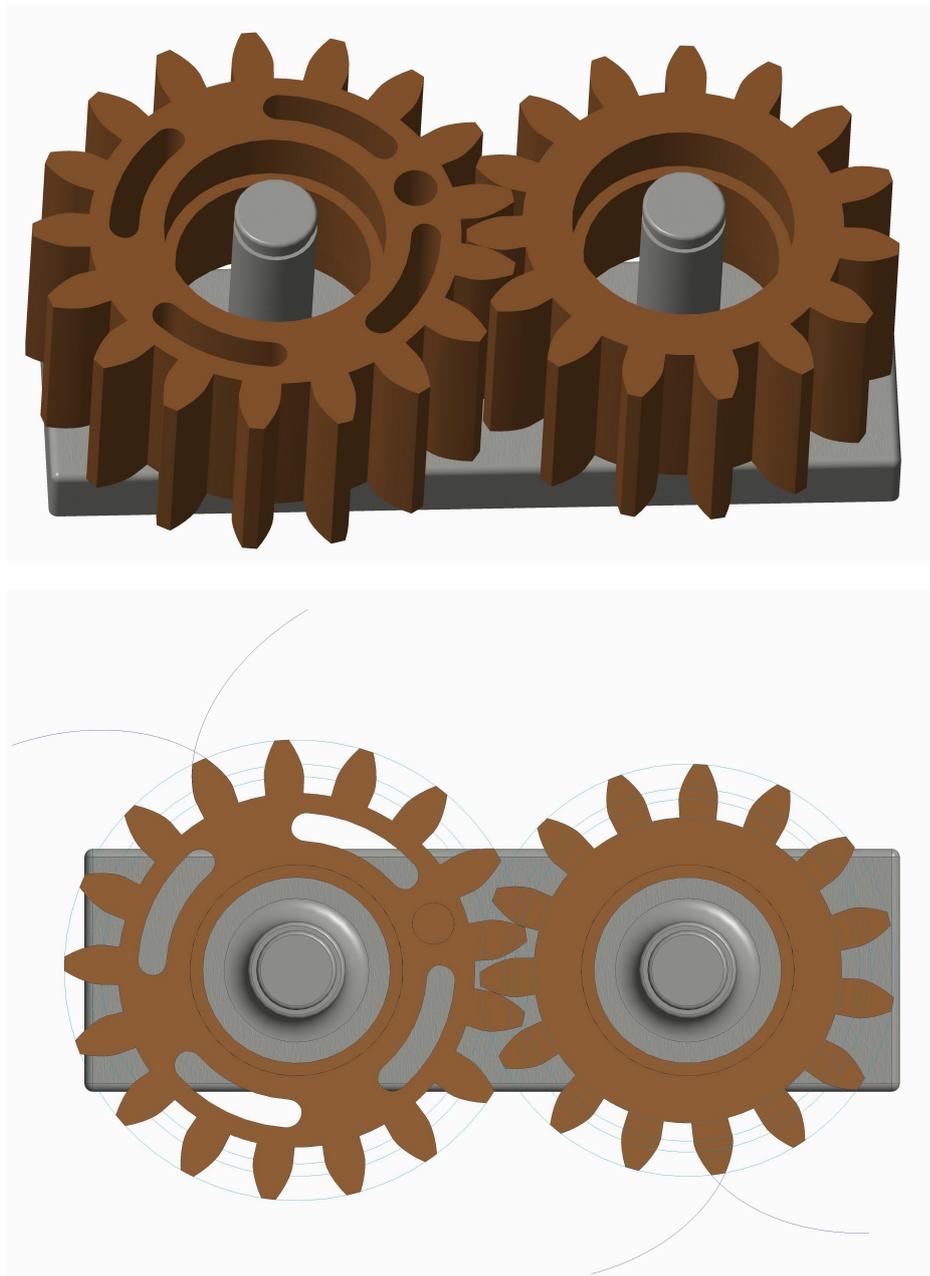


Abbildung 3.9: Zusammenpassende Evolventenzahnräder mit Geradflanken

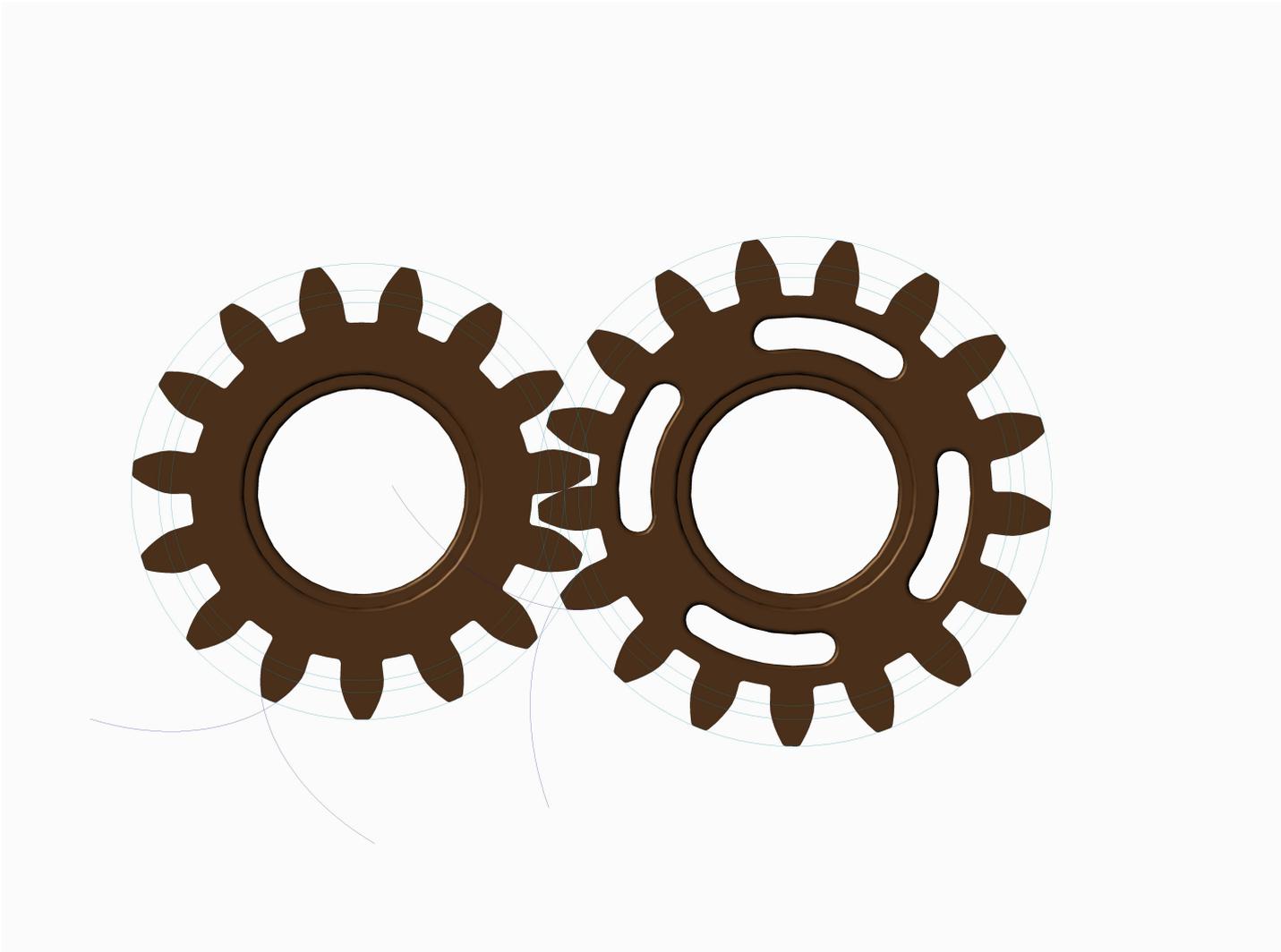


Abbildung 3.10: Das Getriebe aus Abbildung 3.9; Fuß-, Grund-, Teil- und Kopfkreis sind eingezeichnet.

dasselbe bleibt. Bei einer Verschiebung der Wälzkreismittelpunkte P_{01} und P_{02} ändern sich damit auch die Mittelpunkte der Grundkreise g_1 und g_2 . Eine gemeinsame Tangente an die verschobenen Grundkreise g_1^* und g_2^* stellt die neue Eingriffslinie dar. Letztere schneidet die Verbindungsstrecke der Mittelpunkte im Punkt P_{12}^* , welcher den neuen Wälzpunkt darstellt, durch den die neuen Wälzkreise p_1^* , p_2^* bestimmt sind. Das Verhältnis der Radien der beiden Wälzkreise bleibt dabei unverändert und ist gleich dem Radienverhältnis der Grundkreise. Es ändert sich zwar der Eingriffswinkel α , jedoch nicht das Übersetzungsverhältnis. Dies ist eine in der Praxis nützliche Eigenschaft, als dadurch auch geringe Fehler, die bei der Montage solcher Zahnräder auftreten können, keine Auswirkung haben. Nachteile der Evolventenverzahnung entstehen vor allem bei geringer Zähnezahl. Unter anderem ergibt sich daraus ein zu geringer Überdeckungsgrad.

3.5 Schrägverzahnung

Wie zu Beginn des Kapitels 3.4 bereits thematisiert, können Evolventenzahnräder mit Gerad- oder Schrägflanken angefertigt werden. Die Lage der Geraden k , die beim Rollen der Eingriffsfläche ε auf dem Grundzylinder die Zahnprofile liefert, ist ausschlaggebend dafür, ob Gerad- oder Schrägflanken entstehen. Bei Geradflanken liegt k parallel zu den Wälzzylinderachsen, während sie bei Schrägflanken allgemeine Lage besitzt und als Zahnflanken Schraubtorsen auftreten (vgl. Abbildung 3.6). Der Verlauf der Zahnflanken einer Schrägverzahnung ist durch den *Schrägungswinkel* β bestimmt. Dies ist jener Winkel, den die Gerade k , welche den Verlauf der Zahnflanken vorgibt, mit der Grundfläche des Wälzzylinders einschließt. Daneben kann der Zahnflankenverlauf auch mit dem *Steigungswinkel* γ angegeben werden, wobei die Winkel β und γ wie folgt zusammenhängen (siehe Abbildung 3.11 bzw. [17], S. 717):

$$\beta + \gamma = 90^\circ$$

Je nachdem ob eine Links- oder eine Rechtsschraubung vorliegt, unterscheidet man zwischen *linkssteigenden* und *rechtssteigenden* Flanken. Nach [9] ist nach vereinbarter Vorzeichenkonvention bei rechtssteigenden Flanken $\beta > 0$ und bei linkssteigenden Flanken $\beta < 0$. Ferner gilt, dass bei einem schrägverzahnten Außenradpaar ein Rad rechtssteigende und das Gegenrad linkssteigende Flanken besitzt. Bei einer Innenverzahnung haben beide Räder dieselbe Flankenrichtung [17].

Im Gegensatz zur Geradverzahnung erfolgen Eingriff und Austritt bei der Schrägverzahnung nicht gleichzeitig entlang der gesamten Zahnbreite sondern allmählich über mehrere Zahnpaare verteilt. Es sind somit mehr Zähne gleichzeitig in Eingriff, was bessere Laufruhe und größere Belastbarkeit ermöglicht [9, 17]. Nachteile der Schrägverzahnung sind unter Belastung auftretende Axialkräfte, welche Lager und Wellen der Räder zusätzlich belasten können. Es können als Gegenmaßnahmen *Doppelschrägverzahnungen* oder *Pfeilverzahnungen* verwendet werden, die in [17] thematisiert werden.

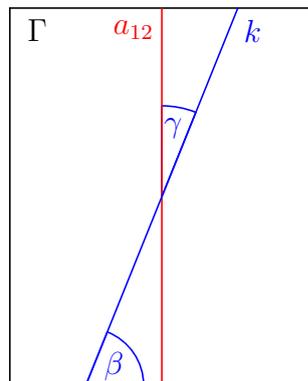


Abbildung 3.11: Der Schrägungswinkel β und der Steigungswinkel γ bei einer Schrägverzahnung.

Bei Schrägverzahnungen verwendet man - besonders in der Herstellung - nicht nur einen Stirnschnitt, der vor allem über die Eingriffsverhältnisse Auskunft gibt, sondern auch einen *Normalschnitt*. Letzteren erhält man, indem man das schrägverzahnte Rad mit einer Ebene orthogonal zu den Schraublinien am Grundzylinder schneidet. Man kann über den Schrägungswinkel β von einem Stirnschnitt in den entsprechenden Normalschnitt umrechnen. Dabei enthalten Stirn- und entsprechender Normalschnitt denselben Punkt auf der Radachse. Bei einer Evolventenverzahnung mit schrägen Flanken liegt zwar in jedem Stirnschnitt eine Evolvente als Zahnprofil vor, im Normalschnitt erscheint das Zahnprofil jedoch nicht als Evolvente.

3.6 Zykloidenverzahnung

In der Feinmechanik (beispielsweise im Uhrenbau) wird vor allem auf die Zykloidenverzahnung zurückgegriffen, die auf Ph. de La Hire⁷ (1694) zurückgeht [5, 9, 15]. Die Konstruktion erfolgt nach der folgenden von Ch. E. L. Camus⁸ (1733) beschriebenen Methode (siehe auch [21] und [15]):

Konstruktion nach Camus:

Lässt man eine allgemeine Hilfskurve h auf den Wälzkreisen p_1 und p_2 abrollen, ohne zu gleiten, dann sind die Bahnkurven c_1 und c_2 eines mit der Hilfskurve h starr verbundenen Punktes P passende Zahnprofile.

Dies erkennt man wie folgt (vgl. Abbildung 3.13 - hier wurde die Hilfskurve h wie in der folgenden Erläuterung als Kreis gewählt): Wie in den vorigen Kapiteln benö-

⁷Philippe de La Hire (1640 - 1718) war ein französischer Mathematiker.

⁸Charles Étienne Louis Camus (1699 - 1768) war ein französischer Mathematiker und Physiker, der sich vor allem mit Problemen der Mechanik beschäftigte.

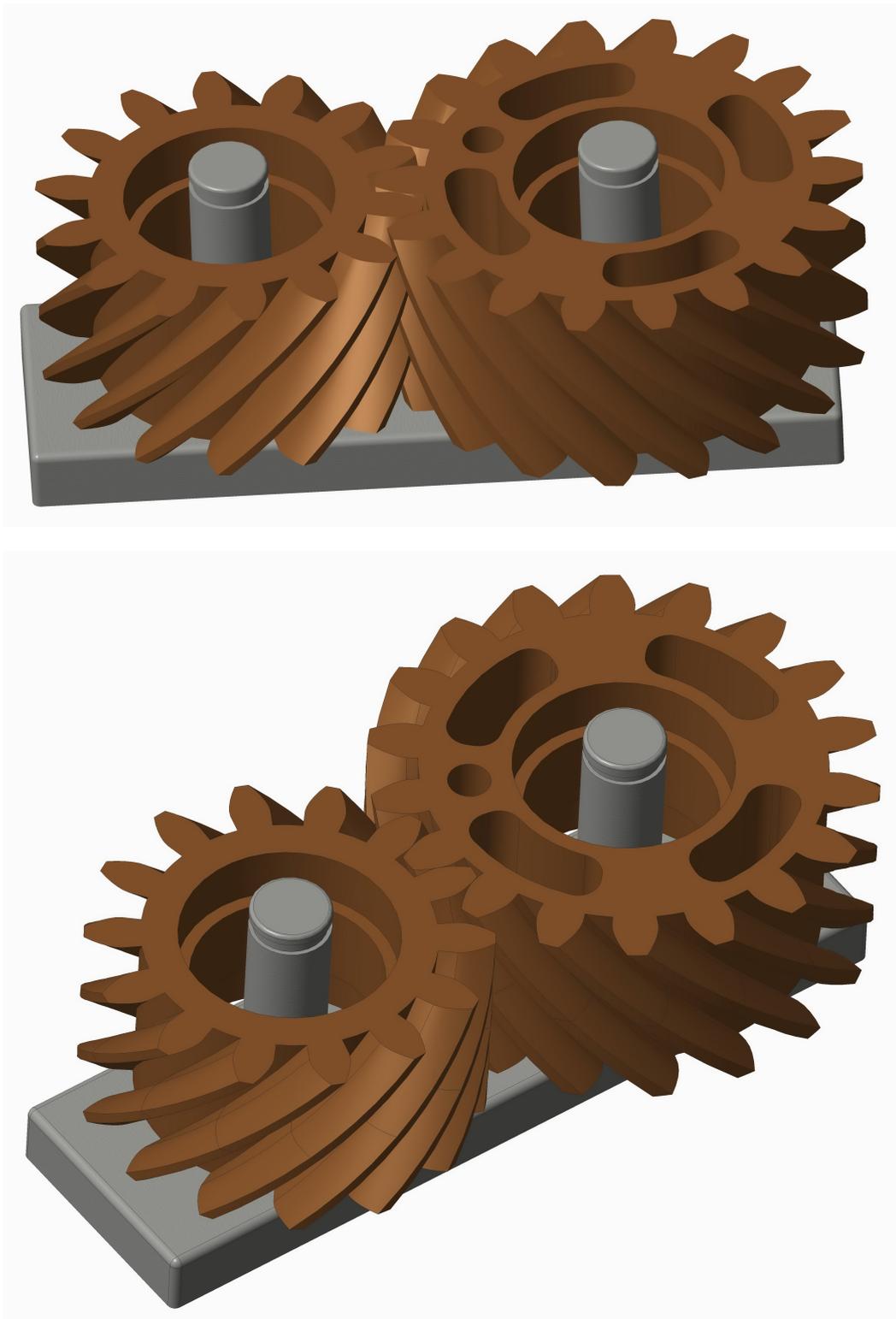


Abbildung 3.12: Evolventenzahnradgetriebe mit Schrägflanken

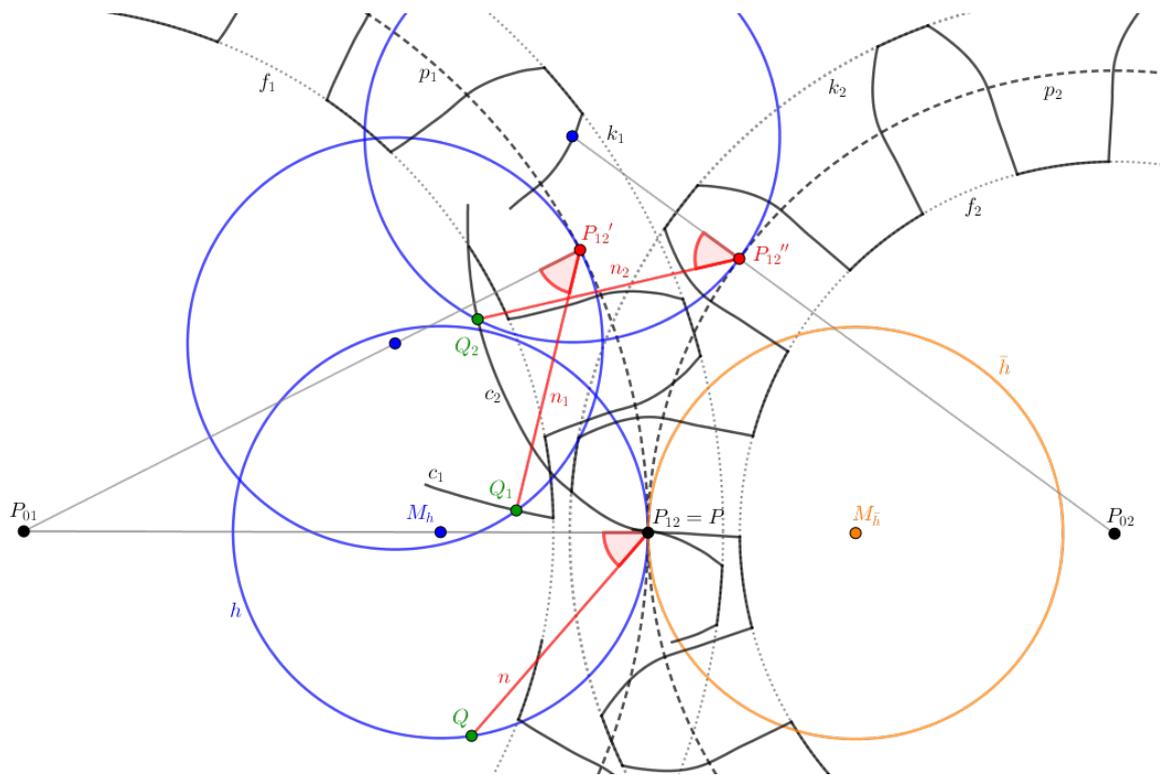


Abbildung 3.13: Konstruktion nach Camus; hier sind die Hilfskurven h und \bar{h} Kreise mit gleich großen Radien.

tigt man auch bei der Zykloidenverzahnung ein Gestell, welches das Rastsystem Σ_0 repräsentiert, sowie die Wälzkreise p_1 und p_2 , welche die bewegten Systeme Σ_1 und Σ_2 darstellen. Nun benötigt man jedoch zusätzlich ein weiteres bewegtes System Σ_3 , nämlich eine Hilfskurve h , die auf den beiden Wälzkreisen p_1 und p_2 rollt. Wir wählen die Hilfskurve h beispielsweise als Kreis, der die Wälzkreise p_1 und p_2 im Wälzpunkt P_{12} berührt⁹ und auf p_1 bzw. p_2 abrollt. Ein Punkt P , der diesen beiden Abrollbewegungen unterworfen wird und o. B. d. A. in der Anfangslage mit dem Wälzpunkt P_{12} zusammenfällt, beschreibt, wie aus Kapitel 2.8 bekannt ist, einerseits als Bahnkurve relativ zu Σ_1 eine Hypozykloide c_1 und andererseits als Bahnkurve relativ zu Σ_2 eine Epizykloide c_2 . Diese Bahnkurven c_1 und c_2 sind passende Zahnprofile: Der Kreis h kommt nach einer gewissen Zeit durch das Abrollen auf p_1 im Punkt P'_{12} und durch das Abrollen auf p_2 im Punkt P''_{12} zu liegen. Errichtet man aus P'_{12} die Normale n_1 auf c_1 , so erhält man einen Punkt Q_1 auf c_1 . Ebenso erhält man einen Punkt Q_2 auf c_2 , wenn man aus P''_{12} das Lot n_2 auf c_2 fällt. Gelangen P'_{12} und P''_{12} zum Wälzpunkt P_{12} , so treffen sich Q_1 und Q_2 im Eingriffspunkt $Q \in h$ und die Normalen n_1 und n_2 fallen mit der Geraden n durch P_{12} und Q zusammen; n ist die gemeinsame Normale auf c_1 und c_2 . Damit ist das ebene Verzahnungsgesetz 3.1 erfüllt.

Durch das Abrollen von h auf p_1 erhält man einerseits die Fußflanken der Zähne des ersten Rades, andererseits erhält man durch das Abrollen von h auf p_2 die Kopfflanken der Zähne des zweiten Rades. Lässt man eine zusätzliche Hilfskurve \bar{h} , welche die gemeinsame Wälztangente im Wälzpunkt von der anderen Seite berührt, ebenfalls auf p_1 und p_2 abrollen, so erhält man auch die Kopfflanken der Zähne des ersten Rades und die Fußflanken der Zähne des zweiten Rades. Die Radien der Rollkreise können, müssen aber nicht gleich groß sein. Die Eingriffslinie enthält jene Punkte, die auf je einem Bogen von h und \bar{h} innerhalb der beiden Kopfkreise k_1 und k_2 liegen. Üblicherweise wird die Zykloidenverzahnung durch das Rollen von Hilfskreisen auf p_1 bzw. p_2 realisiert, es wären aber auch andere Hilfskurven denkbar.

Wir verwenden Kapitel 2.8, um die Zahnprofile c_1 und c_2 einer Zykloidenverzahnung als parametrische Kurven angeben und sie mit einem geeigneten CAD-Programm modellieren zu können. Die Kopfflanke des Zahnprofils c_1 erhalten wir durch das Rollen eines Kreises \bar{h} mit Radius $r_{\bar{h}}$ auf p_1 . Wir verwenden Gleichung 2.25 und können damit die Kopfflanke von c_1 , eine Epizykloide, angeben:

$$(r_1 + r_{\bar{h}}) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - r_{\bar{h}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 + \frac{r_1}{r_{\bar{h}}}\right) \cdot t\right) \\ \sin\left(\left(1 + \frac{r_1}{r_{\bar{h}}}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Die Fußflanke von c_1 ist eine durch das Rollen des Kreises h mit Radius r_h auf p_1 erzeugte Hypozykloide:

$$(r_1 - r_h) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r_h \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 - \frac{r_1}{r_h}\right) \cdot t\right) \\ -\sin\left(\left(1 - \frac{r_1}{r_h}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

⁹Der Kreis h besitzt in P_{12} damit als Tangente die gemeinsame Wälztangente von p_1 und p_2 .

Analog erhalten wir die Kopf- und Fußflanke, welche das Zahnprofil c_2 bilden. Die Kopfflanke von c_2 ist eine durch das Rollen von h auf p_2 erzeugte Epizykloide:

$$(r_2 + r_h) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - r_h \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 + \frac{r_2}{r_h}\right) \cdot t\right) \\ \sin\left(\left(1 + \frac{r_2}{r_h}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Durch das Rollen von \bar{h} auf p_2 erhält man die Fußflanke von c_2 ; es handelt sich dabei um eine Hypozykloide:

$$(r_2 - r_{\bar{h}}) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r_{\bar{h}} \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 - \frac{r_2}{r_{\bar{h}}}\right) \cdot t\right) \\ -\sin\left(\left(1 - \frac{r_2}{r_{\bar{h}}}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Setzt man jeweils die Kopf- und Fußflanke entsprechend zusammen, so kann man durch obige Parametrisierungen die Zahnprofile c_1 und c_2 in einem geeigneten CAD-Programm erzeugen. Wie im Fall von Evolventenzahnrädern werden die Zahnprofile c_1 und c_2 von den jeweiligen Kopf- und Fußkreisen begrenzt und die Zahnprofile den Lückenweiten entsprechend an Geraden durch P_{01} und P_{02} gespiegelt. Dann werden die Zahnprofile unter Berücksichtigung der Teilung regelmäßig entlang der Wälzkreise angeordnet. In Abbildung 3.14 sind zusammenpassende Zykloidenzahnräder abgebildet, die mit PTC-Creo erzeugt wurden.

Ein großer Nachteil der Zykloidenverzahnung ist nach [21] deren schwierige Herstellung sowie die im Hinblick auf die Festigkeit ungünstige Form der Zähne. Andererseits ergibt genau diese Form der Zähne eine gute Berührung im Eingriffspunkt, was zu geringerem Verschleiß führt.

Ist der Hilfskreis h genau halb so groß wie der Wälzkreis p_1 , so ist die Relativbewegung Σ_3/Σ_1 eine Ellipsenbewegung: Ein Kreis $h \subset \Sigma_3$ rollt in einem doppelt so großen Kreis $p_1 \subset \Sigma_1$ (siehe Kapitel 2.9). In diesem Fall ist das Zahnprofil - als Bahnkurve des auf h liegenden Punktes P - Teil einer durch P_{01} gehenden Geraden. Diese Art der Zykloidenverzahnung ist aufgrund der geraden Zahnflanken in ihrer Herstellung billig; es liegt die in Kapitel 3.8 thematisierte Geradflankenverzahnung vor, die sich somit offenbar mit der Konstruktion nach Camus realisieren lässt.

3.7 Triebstockverzahnung

Einen Spezialfall der Zykloidenverzahnung erhält man, falls der Durchmesser des Rollkreises h gleich dem Durchmesser eines Wälzkreises gewählt wird; man erhält so die *Triebstockverzahnung* (siehe [14], S. 392 und [17], S. 685). Die Zahnprofile entstehen wie bei der Zykloidenverzahnung durch das Abrollen von h auf den Wälzkreisen. Dabei geht das Fußprofil eines Rades in einen Punkt über, welcher in der Praxis durch einen Bolzen, den *Triebstock*, ersetzt wird, der im Stirnschnitt als Kreis erscheint.

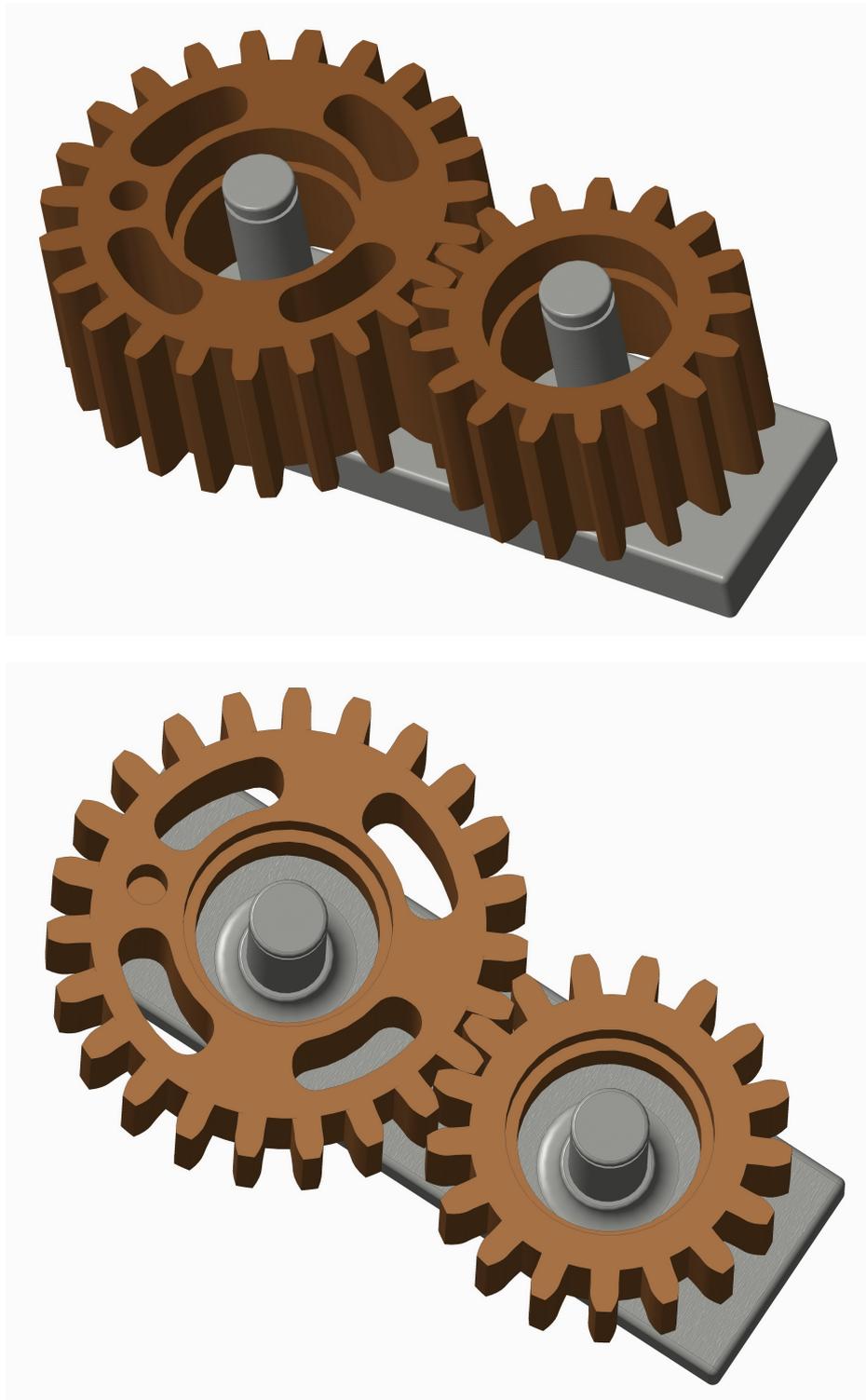


Abbildung 3.14: Zykloidenzahnradgetriebe mit Geradflanken

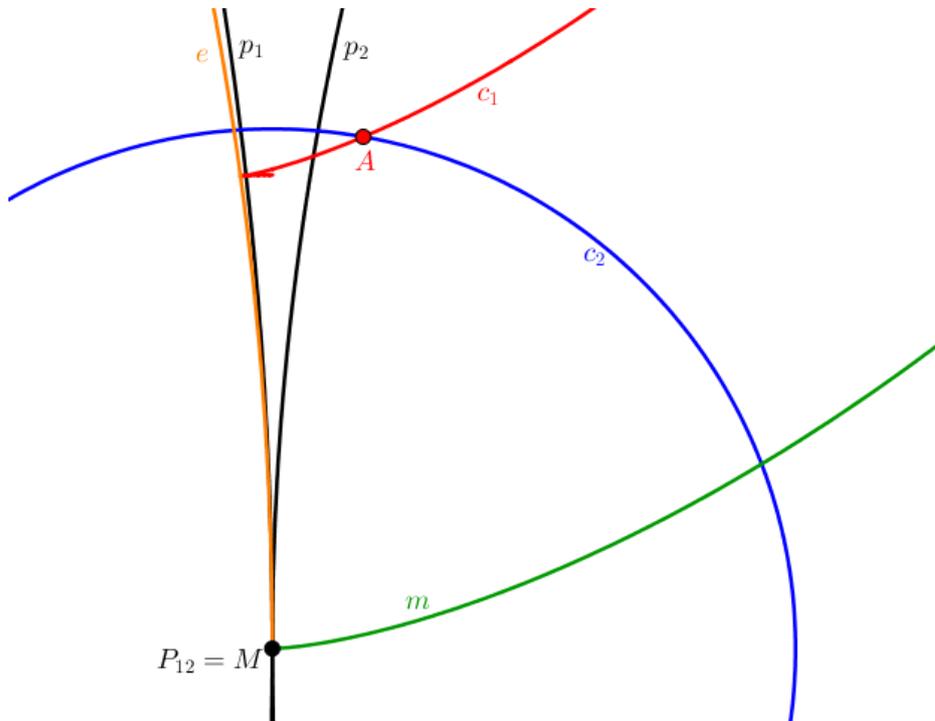


Abbildung 3.15: Ein Kreis als Zahnprofil c_2 bei der Triebstockverzahnung. Das Gegenprofil c_1 besteht aus einem Teil der Parallelkurve einer Epitrochoide und aus einem Kreisbogen. (Die Abmessungen sind zur Verdeutlichung übermäßig gewählt.)

Um die Zahnprofile der in der Praxis verwendeten Triebstockverzahnung zu finden, gibt man als Zahnprofil, etwa c_2 , einen Kreis, dessen Mittelpunkt M auf dem Wälzkreis p_2 liegt, vor. Das zu c_2 gehörende Gegenprofil ist dann Parallelkurve der Bahnkurve m von M , die man bei der durch das Rollen von p_2 auf p_1 erzeugten Planetenbewegung Σ_2/Σ_1 erhält. Die Bahnkurve m ist bei dieser Planetenbewegung nach Kapitel 2.8 eine gespitzte Epitrochoide (Außenverzahnung) oder eine gespitzte Hypotrochoide (Innenverzahnung).

Grundsätzlich wäre das richtige Gegenprofil c_1 eine um den Radius r des Kreises c_2 verschobene Parallelkurve zu m , allerdings ist dieses Profil nach [5] nicht gänzlich verwendbar, wie Abbildung 3.15 zeigt: Betrachtet man die Evolute e von m , so sieht man, dass c_1 jene Evolute innerhalb von c_2 schneidet, da die Strecke vom Wälzpunkt bis zum Schnittpunkt von c_1 mit der Evolute e kürzer ist als die auf e gemessene Bogenlänge von P_{12} zum Schnittpunkt. Damit kann die Parallelkurve nur bis zu den Schnittpunkten A und B der Parallelkurve c_1 mit c_2 verlaufen und muss anschließend zwischen den Schnittpunkten A und B mit dem auf c_2 liegenden Kreisbogen ergänzt werden. Bei großem Radius des Wälzkreises ist das Eindringen des Halbkreises in das Zahnprofil c_2 kaum merkbar und spielt aufgrund der Tatsache, dass die Triebstockver-

zahnung vor allem für große Übersetzungen angewandt wird, in der Praxis keine Rolle. Die Eingriffslinie c_0 erhält man auch hier, indem aus dem Wälzpunkt die Normale auf alle Lagen von c_2 gefällt wird. Da c_2 ein Kreis ist, geht die Normale stets durch den Mittelpunkt M von c_2 . Die Eingriffslinie c_0 der Triebstockverzahnung ist eine Pascal-Schnecke (siehe [21], S. 210).

Um ein Triebstockgetriebe mit einem CAD-Programm erzeugen zu können, benötigen wir auch hier zumindest die Parametrisierung des Zahnprofils c_1 . Wir konstruieren deshalb im CAD-Programm einen Kreis c_2 mit Radius r als Zahnprofil des einen Rades.

Handelt es sich um eine Außenverzahnung, ist das Gegenprofil zu c_2 eine Parallelkurve einer Epizykloide. Wir können im CAD-Programm eine Epizykloide als parametrische Kurve angeben und deren Parallelkurve etwa mit dem Befehl *offset* errichten. Nachdem wir im CAD-Programm Objekte auch beliebig drehen und verschieben können, ist es nicht von Bedeutung, in welchem Punkt auf p_1 die Epizykloide, deren Parallelkurve das Gegenprofil von c_2 ist, beginnt. Daher können wir jene Epizykloide mit Gleichung 2.25 als parametrische Kurve angeben:

$$\mathbf{c}_1(t) = (r_1 + r_2) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \cdot t\right) \\ \sin\left(\left(1 + \frac{r_1}{r_2}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Liegt hingegen eine Innenverzahnung vor, so ist das zu c_2 gehörige Gegenprofil eine Parallelkurve einer Hypozykloide. Letztere lässt sich durch die folgende Parametrisierung darstellen:

$$\mathbf{c}_1(t) = (r_1 - r_2) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} + r_2 \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \cdot t\right) \\ -\sin\left(\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix}$$

Abbildung 3.16 zeigt eine mit PTC-Creo erzeugte Triebstock-Außenverzahnung.

3.8 Geradflankenverzahnung

Nun verwenden wir die Konstruktion nach Camus, um einen weiteren Spezialfall der Zykloidenverzahnung zu erhalten [13]: Wir betrachten, wie in Abbildung 3.17 dargestellt, eine durch p_1 und p_2 festgelegte Außenverzahnung mit einem innerhalb von p_1 liegenden Hilfskreis h , dessen Durchmesser halb so groß wie jener von p_1 ist. Dann lassen wir h auf p_1 rollen, wobei h die Wälzkreise in der Anfangslage im Wälzpunkt P_{12} berührt. Wird ein Punkt P , der in der Anfangslage mit dem Wälzpunkt P_{12} zusammenfällt und starr mit h verbunden ist, dieser Bewegung unterworfen, so beschreibt P nach Kapitel 2.9 als Bahnkurve einen Durchmesser d_1 von p_1 . (Die Hypozykloide artet in diesem Fall in eine Gerade aus.) Gibt man diesen Durchmesser als Zahnprofil vor, so erhält man das dazu passende Gegenprofil d_2 , indem man h auch auf p_2 rollen lässt. Dabei beschreibt der mitgenommene Punkt P eine Epizykloide. Gibt man stattdessen

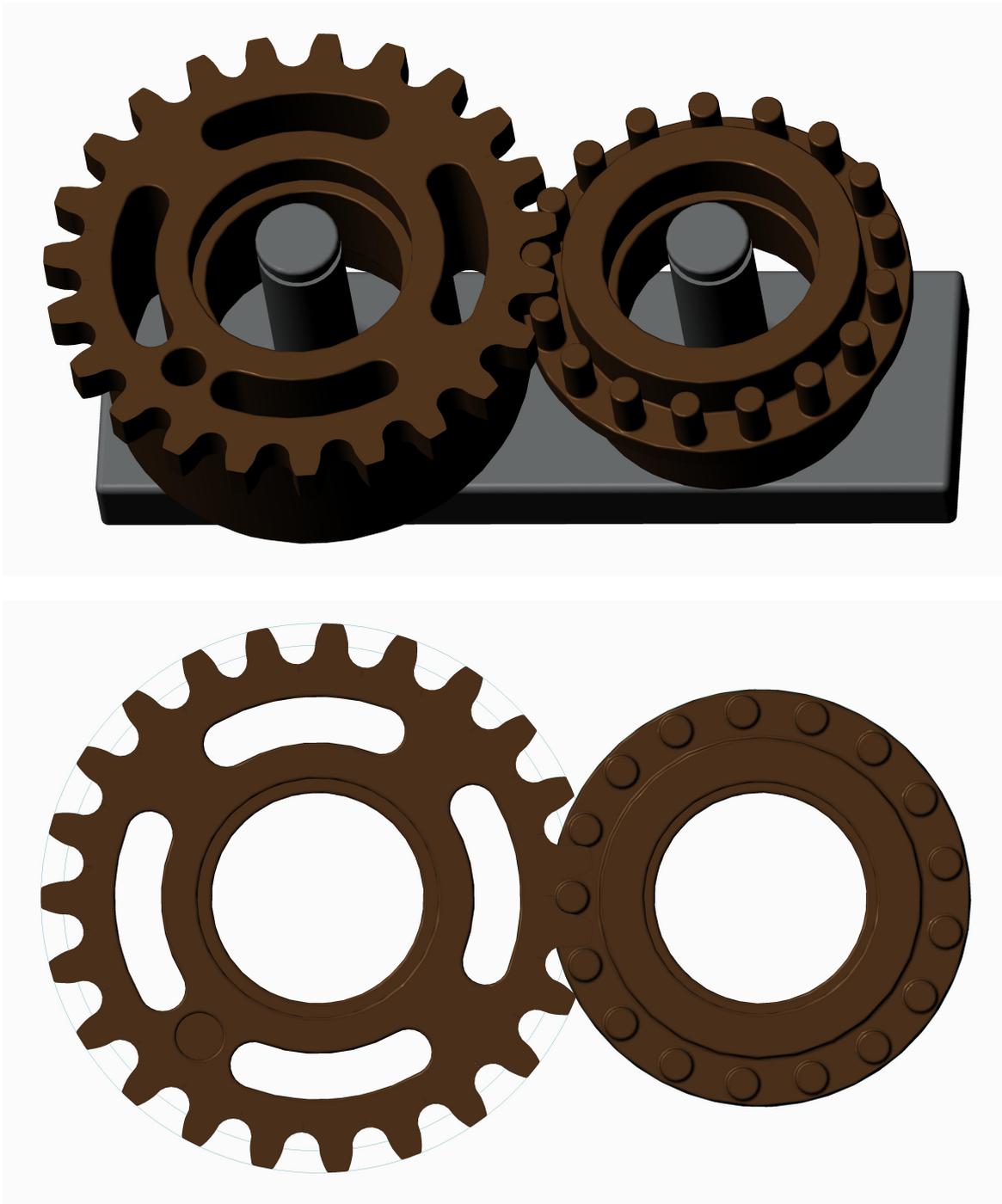


Abbildung 3.16: Eine Triebstockverzahnung

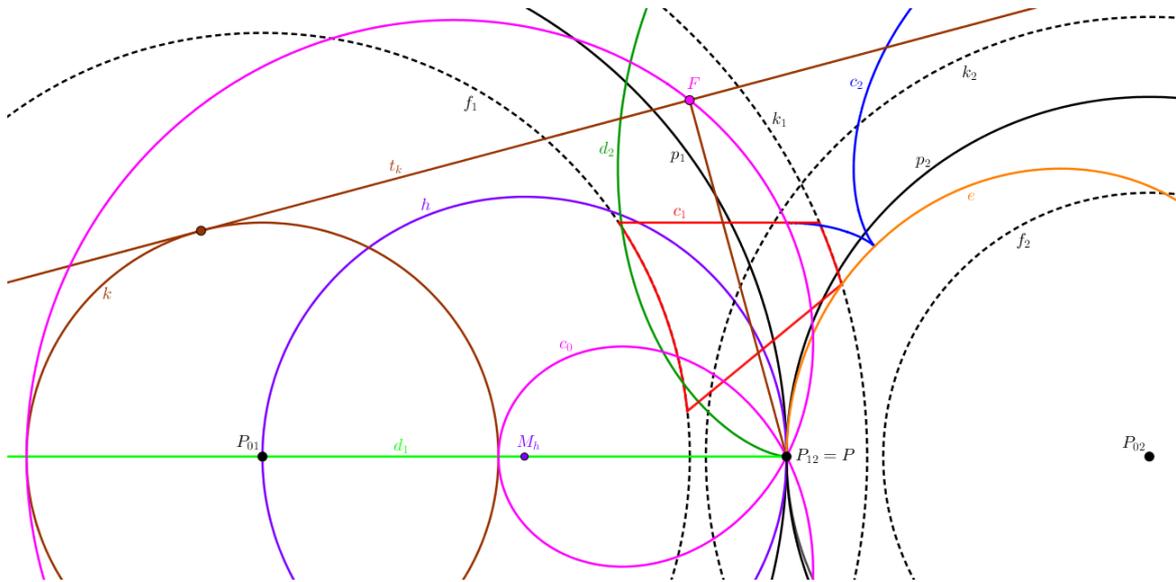


Abbildung 3.17: Das Gegenprofil c_2 einer geraden Zahnflanke c_1 ist Parallelkurve einer Epizykloide. Die Eingriffslinie c_0 ist eine Pascal-Schnecke, die man als Fußpunktkurve des Kreises k erhält.

eine zu einem Durchmesser d_1 von p_1 parallele Gerade als Zahnprofil c_1 vor, so ist das Gegenprofil c_2 eine Parallelkurve jener Epizykloide d_2 , die d_1 als Gegenprofil besitzt. Das Profil c_2 setzt auf der gemeinsamen Evolute e von d_2 und c_2 auf. Der Abstand von c_2 und d_2 ist gleich dem Abstand von d_1 und c_1 . Das gerade Profil c_1 (Fußflanke des ersten Rades) gelangt dann mit der entsprechenden Kopfflanke des Gegenrades (Epizykloiden oder Parallelkurven solcher) in Eingriff [13]. Im Fall einer Innenverzahnung ist das Gegenprofil c_2 eine Hypozykloide oder eine Parallelkurve einer solchen.

Nachteile der Geradflankenverzahnung sind nach [17] geringe Tragfähigkeit und ungünstige Abnutzungsverhältnisse. Jedoch ist diese Verzahnung in ihrer Herstellung aufgrund der geraden Zahnflanken billig.

Die Eingriffslinie c_0 der Geradflankenverzahnung erhält man, indem man aus dem Wälzpunkt P_{12} Senkrechte auf die bei der Drehung um P_1 auftretenden, verschiedenen Lagen von c_1 fällt. Die Gerade c_1 hüllt bei ihrer Drehung um P_1 als Kurve einen Kreis k ein. Errichtet man aus einem festen Punkt P_{12} die Senkrechten auf alle Tangenten t_k einer Kurve - in unserem Fall auf den bei der Drehung von c_1 um P_{01} eingehüllten Kreis k - so erhält man nach [21] im Ort der Fußpunkte $F \in t_k$ die Fußpunktkurve von k . Damit ist die Eingriffslinie c_0 Fußpunktkurve des Kreises k und somit nach [21] eine Pascal-Schnecke mit Doppelpunkt P_{12} .

In Abbildung 3.17 wurden die Kopf- und Fußkreise der zusammenarbeitenden Zahnräder wie in Kapitel 3.3 gewählt. Für eine detaillierte Diskussion zum größtmöglichen Radius des Kopfkreises jenes Rades, dessen Zahnprofile von den Parallelkurven der

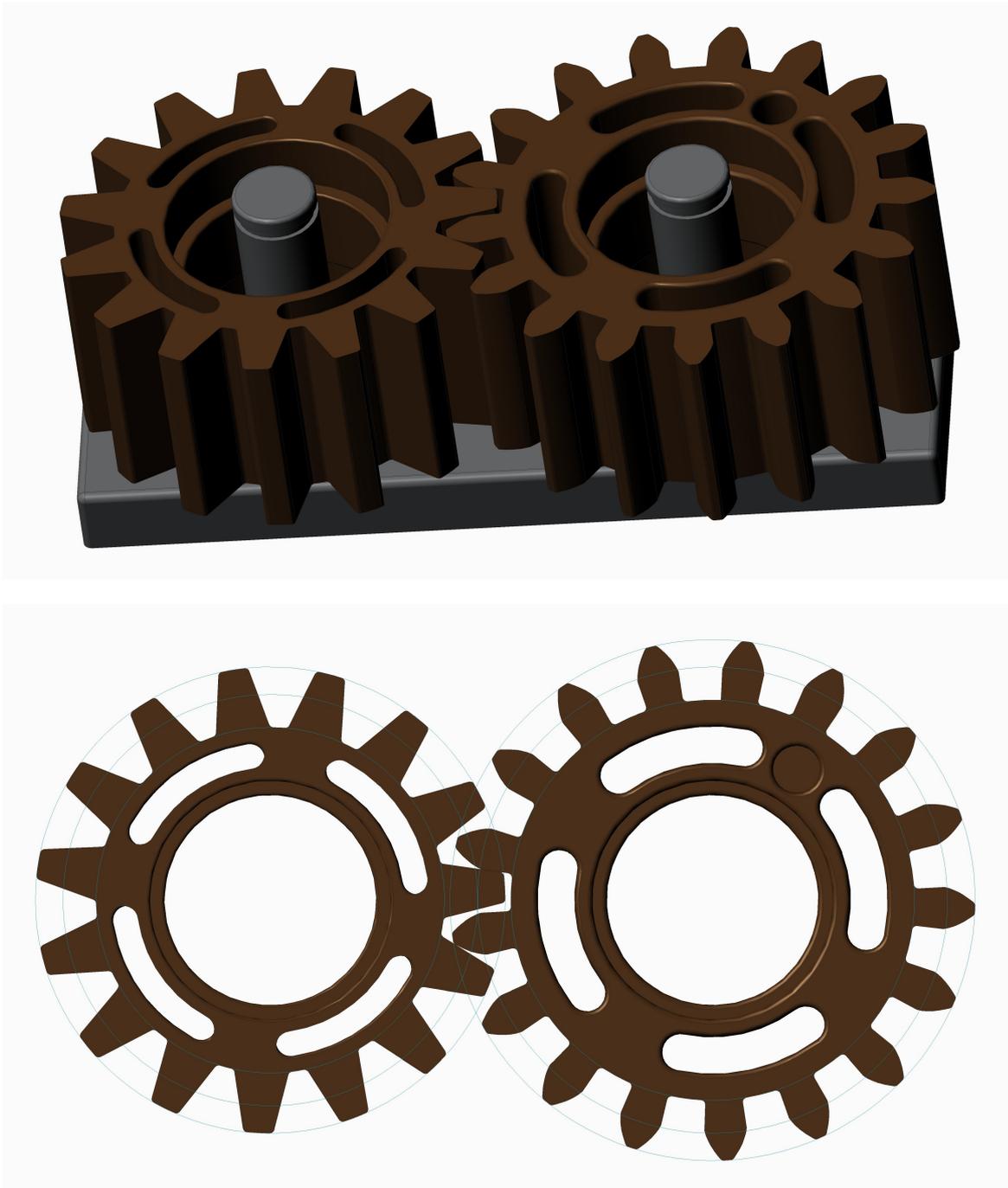


Abbildung 3.18: Eine Geradflankenverzahnung.

Epizykloiden gebildet werden, wird auf [21], S. 208, verwiesen. Jedenfalls ist bei der Wahl des Kopfkreises darauf zu achten, dass sich nicht in Eingriff stehende Zahnflanken nicht gegenseitig stören und dadurch beschädigen.

Für das Erzeugen des Gegenrades zu einem Zahnrad mit Geradflanken in einem CAD-Programm, benötigen wir eine geeignete Parametrisierung des Zahnprofils c_2 . Das Profil c_1 der Geradflanken lässt sich leicht im CAD-Programm als Gerade bzw. Strecke visualisieren. Das Gegenprofil zu c_1 ist, wie oben beschrieben, im Fall einer Außenverzahnung eine Parallelkurve einer Epizykloide, die durch das Rollen eines Hilfskreises h mit Radius $r = \frac{r_1}{2}$ auf p_2 erzeugt wird. Wir verwenden Gleichung 2.25 und können die Epizykloide, deren Parallelkurve das Profil c_2 ist, durch die folgende Parametrisierung angeben:

$$\mathbf{c}_2(t) = (r_2 + r) \cdot \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} - r \cdot \begin{pmatrix} \cos\left(\left(1 + \frac{r_2}{r}\right) \cdot t\right) \\ \sin\left(\left(1 + \frac{r_2}{r}\right) \cdot t\right) \end{pmatrix} \quad (3.17)$$

Auch hier können wir im CAD-Programm mit dem Befehl *offset* die gesuchte Parallelkurve der durch obige Parametrisierung erhaltenen Epizykloide einfügen. Ebenso lässt sich die durch die Parametrisierung 3.17 gegebene Kurve beliebig drehen und verschieben. Abbildung 3.18 zeigt eine Geradflanken-Außenverzahnung. Analog lassen sich auch Geradflanken-Innenverzahnungen realisieren, indem das Zahnprofil c_2 - eine Hypozykloide - durch ihre Parametrisierung im CAD-Programm visualisiert wird.

3.9 Allgemeine Stirnradverzahnung

In diesem Kapitel wird kein konstantes Übersetzungsverhältnis gefordert, weshalb die Polkurven p_1 und p_2 der Bewegung Σ_2/Σ_1 im Allgemeinen keine Kreise mehr sind. Stattdessen mögen nun p_1 und p_2 andere Kurven sein, die einander in einem Punkt, dem Wälzpunkt P_{12} , berühren. Die gemeinsame Tangente in P_{12} heiße *Wälztangente* t . Die Relativpolkurven p_1 und p_2 werden in diesem Fall *Wälzkurven* genannt. Wie im Fall mit konstantem Übersetzungsverhältnis lassen sich auch beim Vorliegen von beliebigen Wälzkurven passende Zahnprofile c_1 und c_2 mit der Konstruktion nach Reuleaux ermitteln. Nach Vorgabe von c_1 findet man wiederum c_2 als Hüllkurve von c_1 bei der Relativbewegung Σ_2/Σ_1 der beiden Zahnräder. Zunächst konstruiert man den Eingriffspunkt E , indem aus dem Wälzpunkt P_{12} die Normale auf c_1 errichtet und mit c_1 geschnitten wird. Nun betrachtet man einen Punkt Q_1 auf c_1 und errichtet in Q_1 die Normale auf c_1 , welche man mit p_1 schneidet. Die Normale schneidet p_1 im Punkt P'_{12} unter dem Winkel α . Durch Abwicklung des Bogens $\overline{P_{12}P'_{12}}$ von p_1 nach $\overline{P_{12}P''_{12}}$ auf p_2 erhält man den Punkt P''_{12} , der P'_{12} entspricht. Aus P''_{12} wird die Strecke $\overline{P'_{12}Q_1}$ unter dem Winkel α abgetragen, um den Punkt Q_2 zu erhalten, der mit Q_1 im Eingriffspunkt Q zusammenfällt. Letzteren erhält man durch Abtragen der Strecke $\overline{P'_{12}Q_1}$ im Wälzpunkt P_{12} unter dem Winkel α gegen t .

Es ist zu berücksichtigen, dass bei allgemeinen Wälzkurven die Zähne eines Rades nicht mehr untereinander kongruent sind, wodurch mehrere Eingriffslinien auftreten, nämlich zu jedem Zahnflankenpaar eine.

Auch im Falle allgemeiner Stirnradverzahnungen bietet die Konstruktion nach Camus eine Möglichkeit zum Anfertigen passender Zahnprofile. Sei h eine Hilfskurve, welche die Wälzkurven im Wälzpunkt P_{12} berührt und auf p_1 und p_2 rollt. Ein mit h fest befestigter Punkt wird bei dieser Bewegung mitgenommen und beschreibe beim Rollen auf p_1 die Bahnkurve c_1 , beim Rollen auf p_2 die Bahnkurve c_2 . Die Bahnkurven c_1 und c_2 sind dann zusammenpassende Zahnprofile: Sei E der Eingriffspunkt von c_1 und c_2 in Ausgangslage und seien $P'_{12} \in p_1$, $P''_{12} \in p_2$ und $P^h_{12} \in h$ Punkte, deren Bogenlängen $P_{12}P'_{12}$, $P_{12}P''_{12}$, $P_{12}P^h_{12}$ dieselben sind. Rollt h auf p_1 bis zum Punkt P'_{12} , so kommen P'_{12} und P^h_{12} zur Deckung. E geht über in den Punkt E_1 auf c_1 . Ebenso kommt P''_{12} mit P^h_{12} zur Deckung, wenn h auf p_2 bis P''_{12} rollt. E geht dadurch in den Punkt E_2 auf c_2 über. Betrachtet man die Normale n^h von h im Punkt P^h_{12} , so erhält man E_1 , indem man den zwischen der Strecke $P^h_{12}E$ und n^h eingeschlossenen Winkel nach der Normalen n' in P'_{12} auf p_1 überträgt und unter Berücksichtigung dieses Winkels die Strecke $P^h_{12}E$ von P'_{12} aus abträgt. Analog erhält man den Punkt E_2 . Im Punkt P_{12} sind die Normalen auf p_1 , p_2 und h dieselben und fallen mit n (ist orthogonal auf t), zusammen. Damit fallen auch die Strecken $\overline{P'_{12}E_1}$, $\overline{P''_{12}E_2}$ und $\overline{P^h_{12}E}$, die mit n den Winkel α einschließen, hier zusammen und liefern den Eingriffspunkt Q .

Wie bei der Zykloidenverzahnung mit vorgegebenen Wälzkreisen ist es auch im Falle allgemeiner Wälzkurven möglich, die Hilfskurve h als Kreis zu wählen. Man kann ferner fordern, dass der Eingriffswinkel α konstant sein soll. Alle Geraden, die p_1 unter dem festen Winkel α schneiden, hüllen eine Kurve g_1 ein. Diese Kurve ist eine *Evolutoide* von p_1 [18]; wir nennen g_1 *Grundkurve*. Analog existiert eine Grundkurve g_2 als Evolutoide von p_2 .¹⁰ Die gesuchten Zahnprofile c_1 und c_2 sind dann Evolventen der Grundkurven. Aufgrund der Forderung nach einem festen Eingriffswinkel sind die Profile verschiedener Zähne desselben Rades Parallelkurven. Beispielsweise können elliptische Evolventenräder hergestellt werden.¹¹

Zwischen g_1 und g_2 kann man sich ein Band gespannt vorstellen. Bei der Bewegung von Σ_2 gegenüber Σ_1 wird das Band von g_2 abgewickelt und auf g_1 aufgewickelt. Dadurch wird Σ_2 von Σ_1 angetrieben. Eine weitere Beobachtung: Zwei Parallelkurven c_1^* , c_2^* von c_1 , c_2 , die einander berühren, sind ebenfalls passende Zahnprofile. Legt man ein Stahlband längs p_1 und verbindet man mit diesem Band die Strecken $\overline{P_{12}E}$, $\overline{P'_{12}E_1}$ und weitere entsprechende Punkte auf p_1 und c_1 , so kann man dieses Stahlband längs c_2 biegen und erhält so die Strecken $\overline{P_{12}E}$, $\overline{P''_{12}E_2}$ und so weiter. In derselben Weise lässt sich das Stahlband in eine andere Lage p_3 biegen, wobei p_3 auch gerade sein kann.

¹⁰W. Wunderlich verwendete diesen Begriff in Anlehnung an die bei $\alpha = \frac{\pi}{2}$ auftretenden Evoluten.

¹¹W. Wunderlich untersuchte 1955 die bei einer solchen Verzahnung auftretenden Grundkurven, welche die Evolutoiden der Wälzellipsen sind (siehe [19]).

Die Strecken $\overline{P_{12}E}$, $\overline{P'_{12}E_1}$, etc. gehen dabei in die Strecken $\overline{P_{12}E}$, $\overline{P'''_{12}E_3}$, etc. über. Im Fall, dass das Stahlband gerade gebogen wird, erhält man eine Zahnstange.

4 Grundlagen der sphärischen Kinematik

Wurden in Kapitel 2 Grundlagen der ebenen kinematischen Geometrie thematisiert, so sollen hier einige Grundlagen der sphärischen Kinematik erörtert werden. Es wird auch in diesem Kapitel, ähnlich wie in Kapitel 2, größtenteils auf die Beweise verzichtet; für eine umfangreichere Behandlung dieses Themengebiets verweisen wir auf die Literatur, etwa [6].

4.1 Einparametrische sphärische Bewegungsvorgänge

Definition 4.1 (Einparametrischer sphärischer Bewegungsvorgang). *Ein einparametrischer sphärischer Bewegungsvorgang oder sphärischer Zwanglauf ist eine einparametrische Menge von Drehungen um Achsen durch einen festen Punkt O .*

Bei einem sphärischen Zwanglauf haben wir wie im ebenen Fall zwei Systeme: Ein bewegtes System Σ_1 (*Gangsystem*) und ein ruhendes System Σ_0 (*Rastsystem*). Den Bewegungsvorgang, welchen Σ_1 gegenüber Σ_0 vollführt, notieren wir durch Σ_1/Σ_0 .

Bemerkung 4.1. *Bei sphärischen Zwangläufen bewegen sich alle Punkte auf konzentrischen Kugeln um den festen Punkt O .*

Analytische Beschreibung eines einparametrischen sphärischen Bewegungsvorgangs:

Wir beginnen diesen Abschnitt mit der Definition orthogonaler Matrizen.

Definition 4.2. *Eine $n \times n$ -Matrix \mathbf{A} heißt orthogonal genau dann, wenn $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_n$*

Hierbei bezeichnet \mathbf{I}_n die $n \times n$ -Einheitsmatrix.

Satz 4.3. *Für die Determinante einer orthogonalen Matrix \mathbf{A} gilt:*

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1$$

Beweis.

$$\begin{aligned} 1 &= \det(\mathbf{I}_n) = \det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^\top) = (\det(\mathbf{A})) \cdot (\det(\mathbf{A}^\top)) = (\det(\mathbf{A}))^2 \\ &\Rightarrow \det(\mathbf{A}) = \pm 1 \end{aligned}$$

□

Definition 4.4. Eine orthogonale Matrix \mathbf{A} heißt eigentlich orthogonal, wenn gilt $\det(\mathbf{A}) = +1$. Andernfalls heißt \mathbf{A} uneigentlich orthogonal.

Wir wählen nun ein kartesisches Rechtskoordinatensystem $S_0 = \{O, \mathbf{e}_{0x}, \mathbf{e}_{0y}, \mathbf{e}_{0z}\}$ in Σ_0 bzw. $S_1 = \{O, \mathbf{e}_{1x}, \mathbf{e}_{1y}, \mathbf{e}_{1z}\}$ in Σ_1 . Dann lässt sich ein einparametrischer sphärischer Bewegungsvorgang wie folgt analytisch beschreiben (abhängig von dem Parameter t):

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{A}(t) \cdot \mathbf{x}_1 \quad (4.1)$$

bzw.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \mathbf{A}(t) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

Dabei ist \mathbf{A} eine eigentlich orthogonale 3×3 -Matrix.

Wie in Kapitel 2.1 liegt auch hier mit Gleichung 4.1 eine Parametrisierung der Bahnkurve b_X eines Punktes X vor, die X bei jenem sphärischen Zwangslauf, dem er unterworfen wird, beschreibt.

Geschwindigkeiten:

Wir betrachten einen Punkt $X \dots \mathbf{x}_1 \in \Sigma_1$ und ermitteln dessen vektorielle Geschwindigkeit \mathbf{v}_X in Σ_0 , die wir durch Ableiten von Gleichung 4.1 erhalten:

$$\mathbf{v}_X = \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{A}} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (4.3)$$

Mit Gleichung 4.1 und da \mathbf{A} eigentlich orthogonal ist, erhalten wir auch

$$\mathbf{v}_X = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{x}_0 =: \mathbf{W} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (4.4)$$

Hierbei nennt man \mathbf{W} *Winkelgeschwindigkeitsmatrix*.

Da \mathbf{A} eigentlich orthogonal ist, gilt $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \mathbf{I}_3$, weshalb $\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top + \mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^\top = \mathbf{O}$ ist. Wir erkennen, dass \mathbf{W} schiefsymmetrisch ist:

$$\mathbf{W} = \dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}\dot{\mathbf{A}}^\top = -(\dot{\mathbf{A}}\mathbf{A}^\top)^\top = -\mathbf{W}^\top \quad (4.5)$$

\mathbf{W} besitzt als schiefsymmetrische Matrix die folgende Gestalt:

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0 & -w_z & w_y \\ w_z & 0 & -w_x \\ -w_y & w_x & 0 \end{pmatrix}$$

Damit lässt sich \mathbf{v}_X auch mit dem Kreuzprodukt $\mathbf{v}_X = \mathbf{w} \times \mathbf{x}_0$ mit $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w_x \\ w_y \\ w_z \end{pmatrix}$ berechnen.

Dieses Kreuzprodukt und damit die Geschwindigkeit \mathbf{v}_X ist Null, wenn die Vektoren \mathbf{w} und \mathbf{x}_0 parallel zueinander sind. Das sphärische Gegenstück zum Momentanpol der Ebene ist damit eine durch den festen Punkt O gehende Achse a mit Richtungsvektor \mathbf{w} ; wir nennen sie *Momentandrehachse*. In jeder beliebigen Lage kann damit die Bewegung von Σ_1 als momentane Drehung um die Momentandrehachse aufgefasst werden. Die zugehörige Winkelgeschwindigkeit ω erhält man als Betrag des Vektors \mathbf{w} :

$$\omega = \|\mathbf{w}\|$$

Aus $\mathbf{v}_X = \mathbf{w} \times \mathbf{x}_0$ folgt zudem, dass der Geschwindigkeitsvektor \mathbf{v}_X eines Punktes X normal zur Richtung \mathbf{w} ist. Die Geschwindigkeit \mathbf{v}_X ist proportional zum Abstand $\text{dist}(X, a)$.

In Σ_0 bzw. Σ_1 besitzt die Momentandrehachse die folgende Parametrisierung:

$$\mathbf{a}_0 = s \cdot \mathbf{w}, s \in \mathbb{R} \quad (4.6)$$

$$\mathbf{a}_1 = s \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{w}, s \in \mathbb{R} \quad (4.7)$$

Polkegel:

Die Momentandrehachsen erfüllen für laufendes t nach [6] je einen Kegel Π_0 bzw. Π_1 mit Scheitel O in Σ_0 bzw. Σ_1 . Dieser heißt *Rastpolkegel* bzw. *Gangpolkegel*. Mit den Gleichungen 4.6 und 4.7 liegen Parametrisierungen von Π_0 und Π_1 vor:

$$\mathbf{p}_0(s, t) = s \cdot \mathbf{w}(t) \quad (4.8)$$

$$\mathbf{p}_1(s, t) = \mathbf{A}^\top(t) \cdot \mathbf{p}_0(s, t) = s \cdot \mathbf{A}^\top \cdot \mathbf{w}(t) \quad (4.9)$$

Es lässt sich zeigen, dass die Momentandrehachse in der sphärischen Kinematik die Rolle des Momentanpols in der Ebene übernimmt [6, 5]:

Satz 4.5. *Jeder sphärische Zwangslauf Σ_1/Σ_0 lässt sich durch das Abrollen des Gangpolkegels Π_1 auf dem Rastpolkegel Π_0 erzeugen. Ferner berühren sich Π_1 und Π_0 zu jedem Zeitpunkt längs der Momentandrehachse.*

Kugelschnitt:

Nachdem sich nach Bemerkung 4.1 bei einer sphärischen Bewegung alle Punkte auf konzentrischen Kugeln mit Mittelpunkt O bewegen, kann man eine sphärische Bewegung auch auf der Einheitskugel K mit Mittelpunkt O näher untersuchen, wobei diese Kugel dann als Rastkugel Σ_0 bzw. Gangkugel Σ_1 aufzufassen ist. Schneidet man die Momentandrehachse mit K so erhält man zwei diametral gegenüberliegende Punkte. Man wählt einen dieser beiden Punkte und bezeichnet ihn als *sphärischen Rastpol* A_0 bzw. als *sphärischen Gangpol* A_1 . Bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 beschreibt A_0 in Σ_0 die *Rastpolkurve*, während A_1 in Σ_1 die *Gangpolkurve* bildet. Verbindet man alle Punkte der Rastpol- bzw. der Gangpolkurve durch Geraden mit O , so erhält man den Rastpol- bzw. Gangpolkegel. Umgekehrt erhält man die Gangpol- bzw. Rastpolkurve durch das Schneiden des durch Gleichung 4.8 bzw. 4.9 gegebenen Rastpol- bzw. Gangpolkegels mit der Einheitskugel K .

4.2 Zusammensetzung von sphärischen Bewegungsvorgängen

Wir verwenden nun ähnlich wie in Kapitel 2.8 drei Systeme Σ_0 , Σ_1 und Σ_2 . Die Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_1 und Σ_2/Σ_0 lassen sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{aligned}\Sigma_1/\Sigma_0 \dots \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}_{01} \cdot \mathbf{x}_1 \\ \Sigma_2/\Sigma_1 \dots \mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}_{12} \cdot \mathbf{x}_2 \\ \Sigma_2/\Sigma_0 \dots \mathbf{x}_0 &= \mathbf{A}_{02} \cdot \mathbf{x}_2\end{aligned}$$

wobei $\mathbf{A}_{01} = \mathbf{A}_{01}(t)$, $\mathbf{A}_{12} = \mathbf{A}_{12}(t)$ und $\mathbf{A}_{02} = \mathbf{A}_{02}(t)$ eigentlich orthogonale 3×3 -Matrizen sind, die von dem Parameter t abhängen. Außerdem gilt $\mathbf{A}_{02} = \mathbf{A}_{01} \cdot \mathbf{A}_{12}$.

Geschwindigkeiten:

Wir betrachten einen Punkt $X \dots \mathbf{x}_1 \in \Sigma_1$ und ermitteln dessen vektorielle Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{X,01}$ bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 bzgl. Σ_0 :

$$\mathbf{v}_{X,01} = \dot{\mathbf{x}}_0 = \dot{\mathbf{A}}_{01} \cdot \mathbf{x}_1 = \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{01}^\top \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{W}_{01} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{w}_{01} \times \mathbf{x}_0 \quad (4.10)$$

Hierbei ist \mathbf{w}_{01} der zur Winkelgeschwindigkeitsmatrix \mathbf{W}_{01} gehörende Winkelgeschwindigkeitsvektor.

Nun betrachten wir einen Punkt $X \dots \mathbf{x}_2 \in \Sigma_2$ und ermitteln dessen vektorielle Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{X,12}^*$ bei der Bewegung Σ_2/Σ_1 bzgl. Σ_1 . Wir verwenden bei der Bezeichnung des Geschwindigkeitsvektors $\mathbf{v}_{X,12}^*$ den Zusatz $*$, um anzugeben, dass diese vektorielle Geschwindigkeit auf das System Σ_1 bezogen ist, während die vektorielle Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{X,01}$ zum System Σ_0 gehört.

$$\mathbf{v}_{X,12}^* = \dot{\mathbf{x}}_1 = \dot{\mathbf{A}}_{12} \cdot \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{W}_{12}^* \cdot \mathbf{x}_1 = \mathbf{w}_{12}^* \times \mathbf{x}_1 \quad (4.11)$$

Der Vektor \mathbf{w}_{12}^* bezeichnet hier analog zu Gleichung 4.10 den zur Matrix \mathbf{W}_{12}^* gehörenden Winkelgeschwindigkeitsvektor, allerdings nun auf das System Σ_1 bezogen.

Nun können wir die zu Σ_1 gehörende vektorielle Geschwindigkeit \mathbf{v}_{12}^* nach Σ_0 zurückrechnen:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1 &= \mathbf{A}_{01}^\top \cdot \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{v}_{X,12}^* &= \mathbf{A}_{01}^\top \cdot \mathbf{v}_{X,12} \\ \mathbf{A}_{01}^\top \cdot \mathbf{v}_{X,12} &= \dot{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top \cdot \mathbf{x}_0\end{aligned}$$

Der Vektor $\mathbf{v}_{X,12}$ bezeichnet dabei die Geschwindigkeit von X bzgl. Σ_0 . Insgesamt erhalten wir mit $\mathbf{W}_{12} := \mathbf{A}_{01} \dot{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top$:

$$\mathbf{v}_{X,12} = \mathbf{W}_{12} \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{w}_{12} \times \mathbf{x}_0 \quad (4.12)$$

Der Vektor \mathbf{w}_{12} bezeichnet wieder den zur Matrix \mathbf{W}_{12} gehörenden Winkelgeschwindigkeitsvektor.

Wir können nun noch die Geschwindigkeit $\mathbf{v}_{X,02}$ eines Punktes $X \dots \mathbf{x} \in \Sigma_2$ bei der Bewegung Σ_2/Σ_0 bzgl. Σ_0 ermitteln:

$$\mathbf{v}_{X,02} = \dot{\mathbf{A}}_{02} \cdot \mathbf{x}_2 = \dot{\mathbf{A}}_{02} \mathbf{A}_{02}^\top \cdot \mathbf{x}_0$$

Mittels $\mathbf{A}_{02} = \mathbf{A}_{01} \mathbf{A}_{12}$ berechnen wir $\dot{\mathbf{A}}_{02} \mathbf{A}_{02}^\top$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_{02} \mathbf{A}_{02}^\top &= (\dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{12} + \mathbf{A}_{01} \dot{\mathbf{A}}_{12}) \cdot \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top = \\ &= \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top + \mathbf{A}_{01} \dot{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top = \\ &= \dot{\mathbf{A}}_{01} \mathbf{A}_{01}^\top + \mathbf{A}_{01} \dot{\mathbf{A}}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top \mathbf{A}_{01}^\top = \mathbf{W}_{01} + \mathbf{W}_{12} \end{aligned}$$

Hier wird verwendet, dass die Matrix \mathbf{A}_{12} orthogonal ist, weshalb $\mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{12}^\top = \mathbf{I}_3$ ist.

Wir setzen $\mathbf{W}_{02} := \mathbf{W}_{01} + \mathbf{W}_{12}$ und erhalten für $\mathbf{v}_{X,02}$ insgesamt:

$$\mathbf{v}_{X,02} = \mathbf{W}_{02} \cdot \mathbf{x}_0 \quad (4.13)$$

Man erhält somit \mathbf{W}_{02} als Summe von \mathbf{W}_{01} und \mathbf{W}_{12} :

$$\mathbf{W}_{02} = \mathbf{W}_{01} + \mathbf{W}_{12} \quad (4.14)$$

$$(4.15)$$

bzw.

$$\mathbf{w}_{02} = \mathbf{w}_{01} + \mathbf{w}_{12} \quad (4.16)$$

Wir können die Winkelgeschwindigkeitsvektoren \mathbf{w}_{01} , \mathbf{w}_{12} und \mathbf{w}_{02} wie folgt angeben:

$$\mathbf{w}_{01} = \omega_{01} \cdot \mathbf{e}_{01}$$

$$\mathbf{w}_{01} = \omega_{12} \cdot \mathbf{e}_{12}$$

$$\mathbf{w}_{01} = \omega_{02} \cdot \mathbf{e}_{02}$$

Dabei sind \mathbf{e}_{01} , \mathbf{e}_{12} und \mathbf{e}_{02} Einheitsvektoren mit denselben Richtungen wie die entsprechenden Winkelgeschwindigkeitsvektoren und ω_{01} , ω_{12} und ω_{02} die zugehörigen momentanen Winkelgeschwindigkeiten. Unter Verwendung des Sinussatzes für die Winkel $\angle(\mathbf{w}_{01}, \mathbf{w}_{12})$ und $\angle(\mathbf{w}_{02}, \mathbf{w}_{12})$ und unter Berücksichtigung von Gleichung 4.16 erhalten wir:

$$\frac{\omega_{01}}{\sin(\angle(\mathbf{w}_{02}, \mathbf{w}_{12}))} = \frac{\omega_{02}}{\sin(\angle(\mathbf{w}_{01}, \mathbf{w}_{12}))}$$

Wir fassen dieses Ergebnis im sphärischen Analogon zum Dreipolsatz von Kennedy-Aronhold (Satz 2.7) zusammen (siehe Abbildung 4.1 bzw. [6], S. 374):

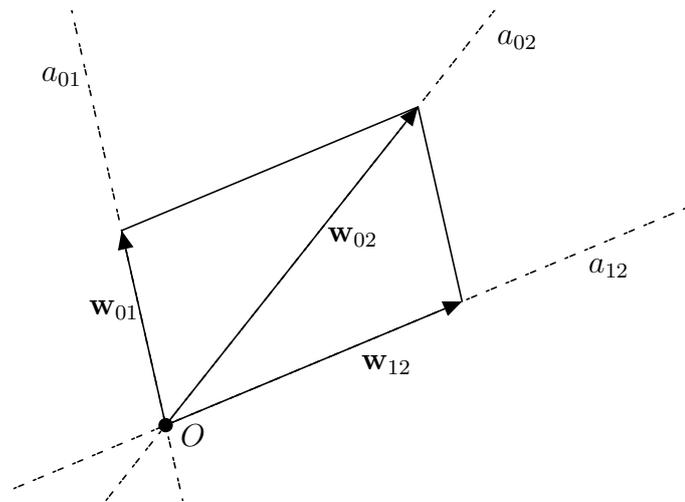


Abbildung 4.1: Das sphärische Analogon zum Satz von Kennedy-Aronhold

Satz 4.6 (Satz von Kennedy Aronhold sphärisch). *Es seien Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_1 und Σ_2/Σ_0 drei sphärische Bewegungsvorgänge, a_{01} , a_{12} und a_{02} die zugehörigen Momentandrehachsen und \mathbf{w}_{01} bzw. \mathbf{w}_{12} bzw. \mathbf{w}_{02} die entsprechenden Winkelgeschwindigkeitsvektoren. Weiters seien ω_{01} , ω_{12} und ω_{02} die momentanen Winkelgeschwindigkeiten der Bewegungen Σ_1/Σ_0 bzw. Σ_2/Σ_1 bzw. Σ_2/Σ_0 . Dann liegen a_{01} , a_{12} und a_{02} zu jedem Zeitpunkt in einer Ebene durch O , dem festen Punkt der sphärischen Bewegung. Zudem gilt:*

$$\frac{\sin(\angle(\mathbf{w}_{01}, \mathbf{w}_{12}))}{\sin(\angle(\mathbf{w}_{02}, \mathbf{w}_{12}))} = \frac{\omega_{02}}{\omega_{01}}$$

5 Verzahnung von Kegelrädern

Gegenstand dieses Kapitels ist die Verzahnung von Kegelrädern. Anders als bei den Stirnrädern schneiden sich die Achsen von Kegelrädern in einem Punkt O unter dem sogenannten *Achsenwinkel* δ . Der Winkel δ wird üblicherweise mit $\delta = \frac{\pi}{2}$ gewählt; grundsätzlich sind für δ aber Werte aus $(0, \pi)$ möglich [1, 4, 7, 13, 17].

Für eine Kegelradverzahnung benötigt man zwei bewegte Systeme Σ_1 und Σ_2 , die sich um die Achsen a_{01} und a_{02} drehen, welche ihrerseits wiederum im festen System Σ_0 angebracht sind. Die Achsen schneiden sich im Fixpunkt O . Wir setzen wie bei den Stirnrädern auch hier ein konstantes Übersetzungsverhältnis $u = \frac{\omega_{01}}{\omega_{02}}$ voraus und können die Ergebnisse aus Kapitel 4 verwenden, woraus wir schließen, dass die Polkegel der Relativbewegungen Σ_2/Σ_1 , wie in Abbildung 5.1 dargestellt, zwei Drehkegel Π_1 und Π_2 mit den Achsen a_{01} bzw. a_{02} sind. Die Spitzen dieser beiden Drehkegel, die in Anlehnung an die bei den Stirnrädern auftretenden Teilkreise auch *Wälzkegel* oder *Teilkegel* genannt werden, liegen im gemeinsamen Punkt O . Die Momentandrehachse a_{12} der Bewegung Σ_2/Σ_1 liegt nach Satz 4.6 koplanar mit a_{01} , a_{02} und O . Nach Satz 4.5 rollen die Wälzkegel Π_1 und Π_2 aufeinander ab und berühren sich bei dieser Abrollbewegung längs der Momentandrehachse a_{12} . Die halben Öffnungswinkel der beiden Wälzkegel werden mit γ_1 bzw. γ_2 bezeichnet. Je nach Wahl von ω_{01} und ω_{02} gilt:

$$|\gamma_1 \pm \gamma_2| = \delta \tag{5.1}$$

5.1 Das sphärische Verzahnungsgesetz

Wie im Fall von Stirnrädern, werden auch bei Kegelrädern verschiedene materiell ausgebildete Zahnflanken verwendet, um Kräfte von einem Rad auf das andere übertragen zu können. Man gibt eine Zahnprofilfläche auf dem ersten Kegelrad vor, welches dann beim Abwälzen von Π_1 auf Π_2 das zugehörige Gegenprofil einhüllt. Um eine konstante Übertragung der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} , mit der Σ_1 rotiert, nach Σ_2 zu erreichen, muss analog zum ebenen Verzahnungsgesetz auch im Fall von Kegelrädern, also in der sphärischen Situation, eine Bedingung - nämlich das *sphärische Verzahnungsgesetz* - erfüllt sein.

In Kapitel 4.1 wurde der Begriff *Kugelschnitt* erläutert, wobei es sich um das sphärische Pendant zum Stirnschnitt bei Stirnrädern handelt. Wir können das Abwälzen der Wälzkegel Π_1 und Π_2 in einzelnen, voneinander unabhängigen Sphären betrachten, genau wie wir das Abwälzen der Zylinder eines Stirnradgetriebes in verschiedenen

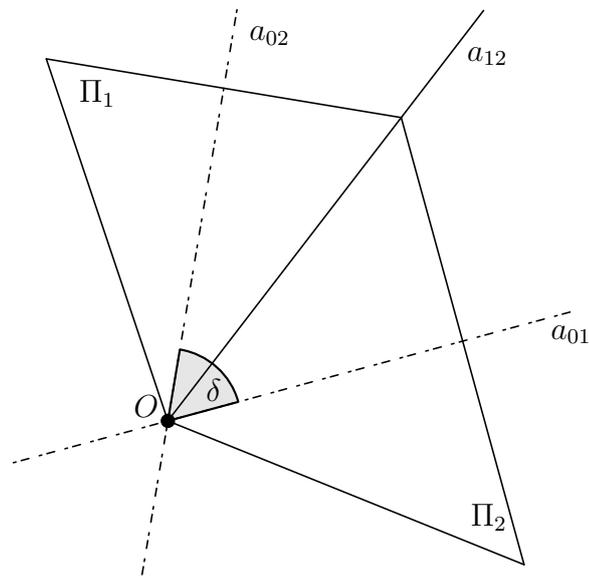


Abbildung 5.1: Die bei einer Kegelaradverzahnung auftretenden Wälzkegel

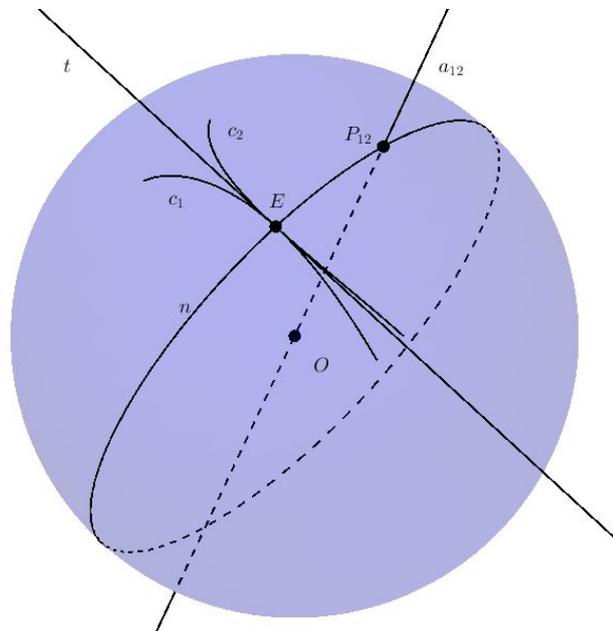


Abbildung 5.2: Das sphärische Verzahnungsgesetz

Stirnschnitten untersuchen können. Die Momentandrehachse wird als *Wälzachse* a_{12} bezeichnet. Jener Punkt der Wälzachse, in dem sich die beiden sich abwälzenden Kreise eines Kugelschnittes berühren, wird *Wälzpunkt* P_{12} genannt.

Gibt man nun in einem Kugelschnitt ein Zahnprofil c_1 vor, so hüllt dieses beim Abwälzen von Π_1 auf Π_2 das Gegenprofil c_2 ein. Um eine konstante Übersetzung zu gewährleisten, muss im Fall von Kegolverzahnungen in jedem Kugelschnitt das folgende, in Abbildung 5.2 illustrierte, *sphärische Verzahnungsgesetz* gelten:

Satz 5.1 (Sphärisches Verzahnungsgesetz). *Es sei κ eine Kugel mit Mitte in O , welche einen Kugelschnitt festlegt. In diesem Kugelschnitt seien $c_1 \in \Sigma_1$ und $c_2 \in \Sigma_2$ zwei Zahnprofile einer Kegelerzahnung, wobei c_1 bei der Bewegung von Σ_1/Σ_2 das Profil c_2 einhüllt. Weiters sei E der Berührungspunkt von c_1 und c_2 zu einem bestimmten Zeitpunkt und τ_E sei die Tangentialebene an die Kugel κ im Punkt E ; g sei die darin liegende gemeinsame Tangente an c_1 und c_2 . Dann enthält die Normalebene auf g durch E die Wälzachse a_{12} .*

Die Gesamtheit jener Kurven im festen System Σ_0 , in denen zwei zueinander passende Zahnprofilflächen zum Eingriff kommen, nennt man *Eingriffsfläche*.

Im Folgenden werden wir die Bewegungen Σ_1/Σ_0 , Σ_2/Σ_0 und Σ_2/Σ_1 analytisch beschreiben: Wir betrachten die Drehung Σ_1/Σ_0 um die Achse a_{01} sowie die Drehung Σ_2/Σ_0 um die Achse a_{02} . Die Winkelgeschwindigkeiten der Rotationen Σ_1/Σ_0 bzw. Σ_2/Σ_0 seien ω_{01} bzw. ω_{02} . Wir wählen als Drehwinkel die zu den Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} und ω_{02} gehörigen Winkel $\varphi_{01} = \omega_{01}t$ bzw. $\varphi_{02} = \omega_{02}t$. Die Momentandrehachse a_{01} sei o. B. d. A. die z -Achse von Σ_0 . Wir können damit die Drehung Σ_1/Σ_0 wie folgt beschreiben:

$$\Sigma_1/\Sigma_0 \dots \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} \cos \varphi_{01} & -\sin \varphi_{01} & 0 \\ \sin \varphi_{01} & \cos \varphi_{01} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}_1 \quad (5.2)$$

Die hier auftretende Drehmatrix bezeichnen wir mit $\mathbf{R}_z(\varphi_{01})$. Der zugehörige Winkelgeschwindigkeitsvektor \mathbf{w}_{01} lässt sich mit der zur Bewegung Σ_1/Σ_0 gehörenden Winkelgeschwindigkeit ω_{01} wie folgt angeben:

$$\mathbf{w}_{01} = \omega_{01} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Nun betrachten wir die Rotation Σ_2/Σ_0 um die Achse a_{02} . Die Achse a_{02} liege o. B. d. A. in der yz -Ebene von Σ_0 ; sie besitzt damit den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}$. Der

Geschwindigkeitsvektor \mathbf{w}_{02} lautet demnach:

$$\mathbf{w}_{02} = \omega_{02} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix}$$

Die Rotation Σ_2/Σ_0 lässt sich folgendermaßen angeben:

$$\Sigma_2/\Sigma_0 \dots \mathbf{x}_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \delta & -\sin \delta \\ 0 & \sin \delta & \cos \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \varphi_{02} & -\sin \varphi_{02} & 0 \\ \sin \varphi_{02} & \cos \varphi_{02} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{x}_2 \quad (5.3)$$

Die in dieser Gleichung auftretenden Drehmatrizen bezeichnen wir mit $\mathbf{R}_x(\delta)$ bzw. $\mathbf{R}_z(\varphi_{02})$.

Mit Hilfe der Gleichungen 5.2 und 5.3 lässt sich die Relativbewegung Σ_2/Σ_1 beschreiben:

$$\Sigma_2/\Sigma_1 \dots \mathbf{x}_1 = \mathbf{R}_z^\top(\varphi_{01}) \cdot \mathbf{R}_x(\delta) \cdot \mathbf{R}_z(\varphi_{02}) \cdot \mathbf{x}_2 \quad (5.4)$$

Den Winkelgeschwindigkeitsvektor \mathbf{w}_{12} der Bewegung Σ_2/Σ_1 bzgl. Σ_0 erhält man durch:

$$\mathbf{w}_{12} = \mathbf{w}_{02} - \mathbf{w}_{01} = \omega_{02} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin \delta \\ \cos \delta \end{pmatrix} - \omega_{01} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\omega_{02} \cdot \sin \delta \\ \omega_{02} \cdot \cos \delta - \omega_{01} \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

Man gibt nun etwa o. B. d. A. ω_{01} größer Null vor und muss dann unterscheiden, ob ω_{02} größer oder kleiner Null ist. So treten wie in Kapitel 3 verschiedene Fälle auf, deren detaillierte Diskussion hier nicht durchgeführt wird. Es stellt sich heraus, dass auch bei Kegelrädern Außen- und Innenverzahnungen möglich sind, je nachdem wie ω_{01} und ω_{02} gewählt werden. In der weiteren Arbeit werden wir uns auf Außenverzahnungen beschränken, wodurch der Winkel δ , unter dem sich die Achsen der Wälzkegel schneiden, die Summe der beiden halben Öffnungswinkel der Wälzkegel ist. Wir können deshalb in Gleichung 5.1 die Betragsstriche vernachlässigen:

$$\gamma_1 + \gamma_2 = \delta$$

5.2 Kenngrößen bei der Kegelradverzahnung

Auch bei Kegelrädern werden verschiedene Kenngrößen benötigt. Während bei den Stirnrädern sämtliche Überlegungen zu den relevanten Kenngrößen in einem Stirnschnitt stattfanden, so betrachten wir nun analog dazu einen Kugelschnitt, um für die Kegelräder notwendige verzahnungstechnische Größen ausarbeiten zu können.

Es sei der Achsenwinkel δ , sowie die Anzahl z_1 und z_2 der Zähne auf den beiden zusammenarbeitenden Zahnrädern vorgeben. Dann lassen sich daraus die zugehörigen halben Öffnungswinkel γ_1 und γ_2 der Wälzkegel Π_1 und Π_2 berechnen. Die Einheitskugel κ legt einen Kugelschnitt fest; die Kugel κ schneidet Π_1 nach einem Kreis k_1 mit Radius $\sin \gamma_1$ und Π_2 nach dem Kreis k_2 mit Radius $\sin \gamma_2$. Im Kugelschnitt gilt für

die Radien $\sin \gamma_1$ und $\sin \gamma_2$ und für die Anzahl z_1 und z_2 der Zähne wie im Fall von Stirnrädern die folgende Bedingung:

$$\begin{aligned} \sin \gamma_1 \cdot z_2 &= \sin \gamma_2 \cdot z_1 \\ \Leftrightarrow \sin \gamma_1 \cdot z_2 &= \sin(\delta - \gamma_1) \cdot z_1 \\ \Leftrightarrow \sin \gamma_1 \cdot z_2 &= (\sin \delta \cos \gamma_1 - \cos \delta \sin \gamma_1) \cdot z_1 \\ \Leftrightarrow \frac{\sin \gamma_1}{\cos \gamma_1} &= \frac{z_1 \cdot \sin \delta}{z_2 + z_1 \cdot \cos \delta} \end{aligned}$$

Dies liefert den gesuchten halben Öffnungswinkel γ_1 von Π_1 :

$$\gamma_1 = \arctan \left(\frac{z_1 \cdot \sin \delta}{z_2 + z_1 \cdot \cos \delta} \right) \quad (5.6)$$

Damit kennen wir auch den halben Öffnungswinkel γ_2 von Π_2 :

$$\gamma_2 = \delta - \gamma_1 \quad (5.7)$$

Eine Kugel κ_R mit Mittelpunkt O und Radius R legt einen weiteren Kugelschnitt fest. Der Wälzkegel Π_1 bzw. Π_2 schneidet κ_R nach einem Kreis p_1 bzw. p_2 mit Radius r_1 bzw. r_2 . Wir nennen p_1 und p_2 *Wälzkreise*. Für r_1 bzw. r_2 gilt:

$$\begin{aligned} r_1 &= R \cdot \sin \gamma_1 \\ r_2 &= R \cdot \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

Für die Öffnungswinkel γ_1 und γ_2 der Wälzkegel und für die Winkelgeschwindigkeiten ω_{01} und ω_{02} gilt damit [4, 17]:

$$\begin{aligned} |\omega_{01}| \cdot r_1 &= |\omega_{02}| \cdot r_2 \\ \Leftrightarrow |\omega_{01}| \cdot \sin \gamma_1 &= |\omega_{02}| \cdot \sin \gamma_2 \end{aligned}$$

Auf den Wälzkreisen p_1 und p_2 lässt sich die Teilung t als Kreisbogen wie im Fall von Stirnrädern angeben:

$$t = \frac{2r_1\pi}{z_1} = \frac{2r_2\pi}{z_2} \quad (5.8)$$

Der im Zentrum O gemessene, zur Teilung t gehörige Zentriwinkel τ_1 am ersten Rad bzw. τ_2 am Gegenrad lässt sich wie folgt berechnen:

$$\tau_1 = \frac{t}{r_1}, \quad \tau_2 = \frac{t}{r_2}$$

Wir wählen als Flankenpiel $S_f = \frac{t}{50}$ und können mit Hilfe der Teilung t die Zahnstärke s bzw. die Lückenweite w angeben, wobei beide Werte als Kreisbögen auf den Wälzkreisen p_1 bzw. p_2 gemessen werden:

$$s = \frac{49t}{100}, \quad w = \frac{51t}{100}$$

Der in O gemessene, zur Zahnstärke s gehörige Zentriwinkel σ_1 des ersten Rades lässt sich ebenso berechnen:

$$\sigma_1 = \frac{180s}{r_1\pi} = \frac{180 \cdot 49t}{100 \cdot r_1\pi} = \frac{180 \cdot 49 \cdot 2r_1\pi}{100 \cdot r_1\pi \cdot z_1} = \frac{180 \cdot 49}{50 \cdot z_1}$$

Analog dazu erhalten wir den in O gemessenen, zur Zahnstärke s gehörigen Zentriwinkel σ_2 des Gegenrades:

$$\sigma_2 = \frac{180 \cdot 49}{50 \cdot z_2}$$

Wir geben auch den Modulwinkel μ an, den wir wie folgt berechnen:

$$\mu = \frac{\sin \gamma_1}{z_1} + \frac{\sin \gamma_2}{z_2} = \frac{z_2 \sin \gamma_1 + z_1 \sin \gamma_2}{z_1 z_2}$$

Mit Hilfe des Modulwinkels können wir die halben Öffnungswinkel γ_{K_1} bzw. γ_{K_2} der Kopfkegel sowie die halben Öffnungswinkel γ_{F_1} bzw. γ_{F_2} der Fußkegel angeben:

$$\begin{aligned} \gamma_{K_1} &= \gamma_1 + \mu \\ \gamma_{F_1} &= \gamma_1 - \frac{11}{10} \cdot \mu \\ \gamma_{K_2} &= \gamma_2 + \mu \\ \gamma_{F_2} &= \gamma_2 - \frac{11}{10} \cdot \mu \end{aligned}$$

Kopf- und Fußkegel beider Räder schneiden κ_R nach den Kopfkreisen k_1 und k_2 bzw. nach den Fußkreisen f_1 und f_2 . Die durch das Zahnprofil c_1 gegebene Zahnflanke des ersten Rades verläuft vom Grund- bis zum Kopfkegel. Zwischen Grund- und Fußkegel wird das Zahnprofil etwa durch ein Stück eines Großkreises von κ_R ergänzt. Anschließend wird die Flanke an einer Ebene durch die Radachse unter Berücksichtigung der Zahnstärke gespiegelt. Die Zahnflanke des Gegenrades wird analog dazu realisiert. Die Abbildung 5.6 zeigt ein Kegelrad.

5.3 Evolventenverzahnung von Kegelrädern

Wir erinnern uns an das Entstehen von Evolventenzahnradern im Fall von Stirnrädern. Diese erhält man, indem eine Ebene ε als Eingriffsfläche vorgegeben wird, die man auf dem jeweiligen Grundzylinder rollen lässt. Eine Kurve k in ε , die ebenfalls dieser Bewegung unterworfen wird, überstreicht dann die auftretende Zahnflanke. Betrachtet man nur einen Punkt der Kurve k , so beschreibt dieser als Bahnkurve eine Kreisevolvente. Wir wollen nun diese Überlegung verwenden, um konische Evolventenzahnradern anzufertigen und betrachten deshalb jene Situation, in der eine Ebene ε auf

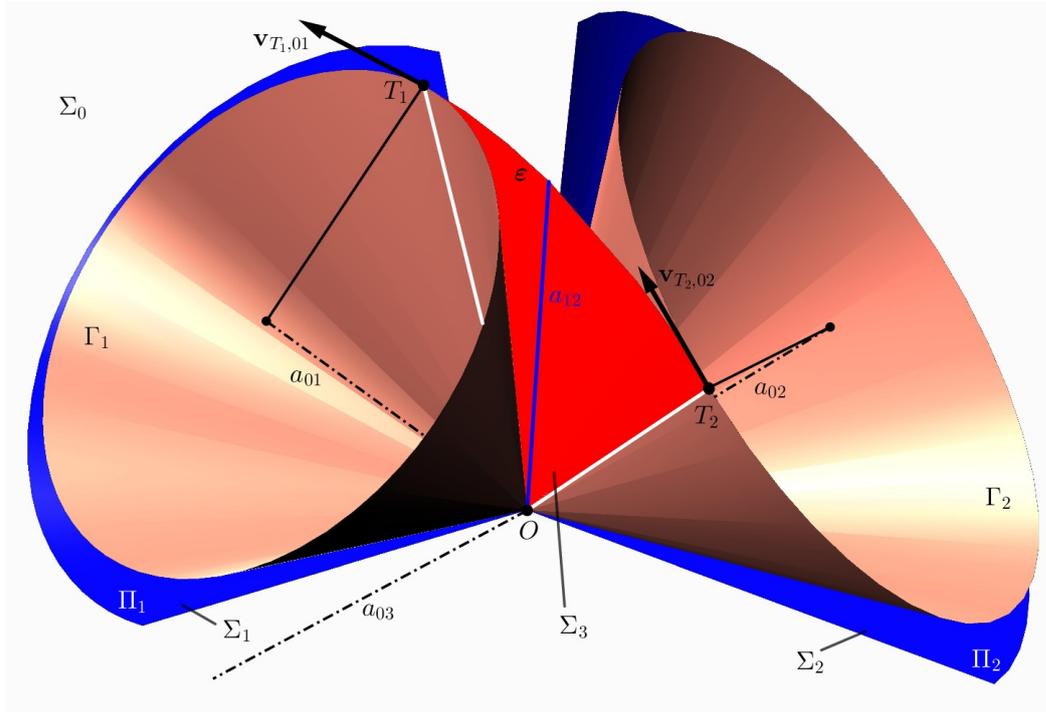


Abbildung 5.3: Die Eingriffsebene ε rollt auf den Grundkegeln Γ_1 und Γ_2 , da die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ zur selben Drehung gehören.

einem Drehkegel Π rollt. Die Ebene ist hierbei das bewegte System Σ_1 und berührt Π längs einer Erzeugenden a , während der Drehkegel Π das Rastsystem Σ_0 repräsentiert. Ein Punkt $P \in \varepsilon$, der dieser Bewegung unterworfen wird, besitzt als Bahn eine Kurve b_P , die auf einer Kugel liegt, deren Mittelpunkt die Spitze des Drehkegels Π ist, da der Abstand von P zur Kegelspitze konstant bleibt. Die Kurve b_P ist eine *sphärische Kreisevolvente* - wir werden dies später ausführlicher thematisieren; allein aufgrund der Analogie zwischen der Erzeugung der ebenen Kreisevolvente und der Erzeugung der hier auftretenden Kurve scheint aber der Name gerechtfertigt. Eine Kurve $k \in \varepsilon$ überstreicht bei dieser Bewegung eine *Mongesche Fläche* Φ_k mit einer Gratlinie g auf Π , die entsteht, indem die Kurve k auf Π aufgewickelt wird. Lässt man die Ebene ε samt einer darin liegenden Kurve k auf Π rollen und betrachtet man die so entstehende Fläche Φ zu einem Zeitpunkt t , so gilt: der Normalvektor jeden Punktes von Φ zum Zeitpunkt t liegt in ε .

Wir nutzen die von P beschriebene Bahnkurve b_P bzw. die von k erzeugte Fläche zur Fertigung von konischen Evolventenzahnrädern: Es seien Σ_1 und Σ_2 , wie in Abbildung 5.3 dargestellt, zwei bewegte Systeme, repräsentiert durch die Wälzkegel Π_1 und Π_2 , die sich um die Achsen a_{01} und a_{02} drehen. Die Achsen a_{01} und a_{02} schneiden sich im Fixpunkt O . Σ_0 sei ein ruhendes System, nämlich das Gestell, in dem die Achsen

a_{01} und a_{02} von Π_1 und Π_2 angebracht sind. Zusätzlich sei Σ_3 ein weiteres bewegtes System, nämlich jenes, das durch die *Eingriffsebene* ε , welche die Momentandrehachse a_{12} beinhaltet, repräsentiert wird. Ferner sei τ die gemeinsame Tangentialebene in a_{12} an Π_1 und Π_2 . Der feste Winkel, den ε mit τ einschließt, heißt auch hier *Eingriffswinkel* α . Zudem betrachten wir die zu Π_1 bzw. Π_2 coaxialen Drehkegel Γ_1 bzw. Γ_2 , die ε als gemeinsame Tangentialebene besitzen. Γ_1 und Γ_2 heißen *Grundkegel*. Der Grundkegel Γ_1 wird von jenen Ebenen eingehüllt, die durch die Drehung der Tangentialebenen von Π_1 um die jeweilige Erzeugende von Π_1 um den festen Eingriffswinkel α entstehen. Analoges gilt für den Grundkegel Γ_2 . Es sei γ_1 der halbe Öffnungswinkel des Wälzkegels Π_1 . Wir suchen nun nach Vorgabe des Eingriffswinkels α den in Abbildung 5.5¹ eingezeichneten halben Öffnungswinkel γ_1^* des zugehörigen Grundkegels Γ_1 . O. B. d. A. wählen wir unser Koordinatensystem derart, dass die Drehachse a_{01} mit der z -Achse zusammenfalle. Der Koordinatenursprung befinde sich in O . Es sei e eine Erzeugende von Π_1 , deren Tangentialebene τ_{Π_1} zweitprojizierend ist. Eine Tangentialebene τ_{Γ_1} des Grundkegels Γ_1 erhalten wir, indem wir τ_{Π_1} um die Achse e um den Winkel α drehen. Diese Drehung lässt sich wie folgt beschreiben:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_1 & \sin \gamma_1 \\ 0 & -\sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma_1 & -\sin \gamma_1 \\ 0 & \sin \gamma_1 & \cos \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Ausmultiplizieren liefert:

$$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \\ z^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\cos \gamma_1 \sin \alpha & \sin \gamma_1 \sin \alpha \\ \cos \gamma_1 \sin \alpha & \cos^2 \gamma_1 \cos \alpha + \sin^2 \gamma_1 & \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \cdot (1 - \cos \alpha) \\ -\sin \gamma_1 \sin \alpha & \sin \gamma_1 \cos \gamma_1 \cdot (1 - \cos \alpha) & \sin^2 \gamma_1 \cos \alpha + \cos^2 \gamma_1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Die Erzeugende e besitzt den Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 0 \\ \sin \gamma_1 \\ \cos \gamma_1 \end{pmatrix}$. Der Normalvektor \mathbf{n} auf die Tangentialebene τ_{Π_1} ist deshalb $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \gamma_1 \\ \sin \gamma_1 \end{pmatrix}$.

Wir unterwerfen \mathbf{n} obiger Drehung, um den Normalvektor \mathbf{n}^* der Ebene τ_{Γ_1} zu erhalten. Dies liefert für \mathbf{n}^* :

$$\mathbf{n}^* = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ -\cos \gamma_1 \cos \alpha \\ \sin \gamma_1 \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

¹In Abbildung 5.5 wurde auf die Indizes verzichtet, da sich die Rechnung für beide Grundkegel analog durchführen lässt.

Den gesuchten halben Öffnungswinkel γ_1^* des Grundkegels Γ_1 erhält man wie folgt:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma_1^*\right) = \left\langle \mathbf{n}^*, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \sin \gamma_1 \cos \alpha$$

Damit erhalten wir für den Winkel γ_1^* :

$$\sin(\gamma_1^*) = \cos \alpha \sin \gamma_1 \quad (5.10)$$

Analog lässt sich die Rechnung für den halben Öffnungswinkel γ_2^* des Grundkegels Γ_2 durchführen; es gilt also:

$$\sin(\gamma_2^*) = \cos \alpha \sin \gamma_2 \quad (5.11)$$

Dabei ist γ_2 der halbe Öffnungswinkel des Wälzkegels Π_2 .

Im vorigen Kapitel wurden die Wälzkreise p_1 bzw. p_2 definiert, die als Schnitt einer Kugel κ_R (Mittelpunkt O , Radius R) mit dem Wälzkegel Π_1 bzw. Π_2 entstehen. Analog liefert der Schnitt von κ_R mit dem Grundkegel Γ_1 bzw. Γ_2 einen Kreis g_1 bzw. g_2 mit dem Radius r_1^* bzw. r_2^* . Wir nennen g_1 und g_2 *Grundkreise*. Für die Radien r_1^* und r_2^* gilt:

$$\begin{aligned} r_1^* &= R \cdot \sin \gamma_1^* \\ r_2^* &= R \cdot \sin \gamma_2^* \end{aligned}$$

Das erste Rad drehe sich gegenüber Σ_0 mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{01} um die Achse a_{01} , während das zweite Rad mit der Winkelgeschwindigkeit ω_{02} um die Achse a_{02} rotiere. Die Eingriffsebene ε berührt die beiden Grundkegel jeweils nach einer Erzeugenden. In einem beliebigen Kugelschnitt (Kugel κ , Radius R) erhält man somit einen Berührungspunkt T_1 auf Γ_1 bzw. einen Berührungspunkt T_2 auf Γ_2 . Wie in Kapitel 3.4 ist nun zu zeigen, dass die Ebene ε derart bewegt werden kann, dass die Relativbewegung Σ_3/Σ_1 bzw. Σ_3/Σ_2 das Rollen von ε auf Γ_1 bzw. auf Γ_2 ist. Wir betrachten zu diesem Zweck wieder den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_1,01}$ des Berührungspunktes T_1 auf Γ_1 bei der Bewegung Σ_1/Σ_0 und den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_2,02}$ des Berührungspunktes T_2 auf Γ_2 bei der Bewegung Σ_2/Σ_0 und müssen zeigen, dass $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ zur selben Drehung um eine Achse a_{03} gehören: O. B. d. A. wählen wir auch für diese Rechnung das Koordinatensystem derart, dass der Ursprung im Fixpunkt O liege, die Achse a_{01} mit der z -Achse zusammenfalle und der Berührungspunkt T_1 in der yz -Ebene liege. Dann erhält man für den Geschwindigkeitsvektor $\mathbf{v}_{T_1,01}$:

$$\mathbf{v}_{T_1,01} = \mathbf{w}_{01} \times \overrightarrow{OT_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega_{01} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ R \cdot \sin \gamma_1^* \\ R \cdot \cos \gamma_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_{01} \cdot R \cdot \sin \gamma_1^* \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

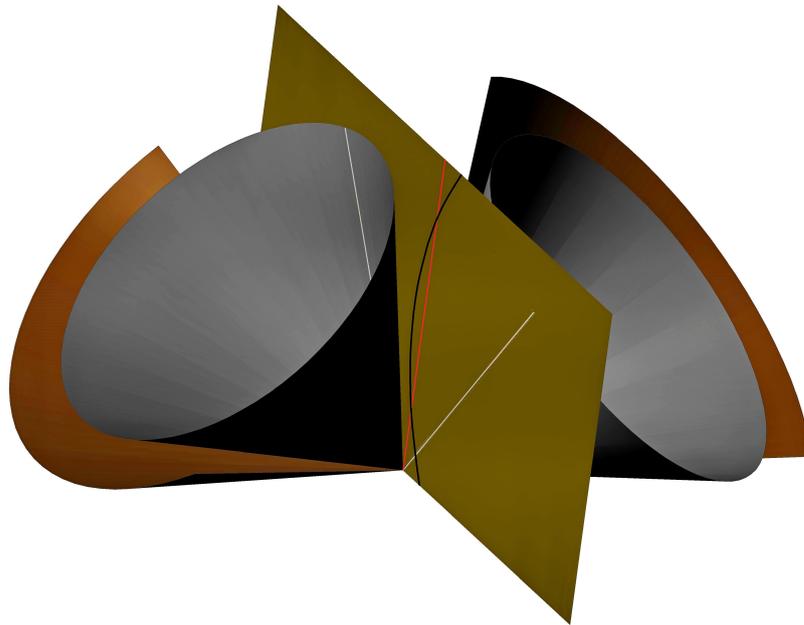


Abbildung 5.4: Entstehung konischer Evolventenzahnräder; die Momentandrehachse (rot) die Eingriffsfläche und die Kurve k (schwarz) sind abgebildet. Zudem sind auch jene Erzeugenden dargestellt, in denen die Eingriffsfläche die Grundkegel berührt.

Dass die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ zur selben Drehung gehören, sieht man wie folgt: Die beiden Geschwindigkeitsvektoren liegen in der Eingriffsebene ε , wobei $\mathbf{v}_{T_1,01}$ orthogonal auf $\overrightarrow{OT_1}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ orthogonal auf $\overrightarrow{OT_2}$ stehen (vgl. Abbildung 5.3). Damit ist der Abstand von O für beide Geschwindigkeitsvektoren derselbe. Für die Längen der Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ gilt:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_{T_1,01}\| &= |\omega_{01}| \cdot R \cdot |\sin \gamma_1^*| = |\omega_{01}| \cdot R \cdot |\cos \alpha| \cdot |\sin \gamma_1| = \\ &= |\omega_{02}| \cdot R \cdot |\cos \alpha| \cdot |\sin \gamma_2| = |\omega_{02}| \cdot R \cdot |\sin \gamma_2^*| = \|\mathbf{v}_{T_2,02}\| \end{aligned}$$

Damit gehören die Geschwindigkeitsvektoren $\mathbf{v}_{T_1,01}$ und $\mathbf{v}_{T_2,02}$ zur selben Drehung um die Achse $a_{03} \ni O$, die auf ε orthogonal steht. Die Relativbewegung Σ_3/Σ_1 bzw. Σ_3/Σ_0 ist somit das Rollen von ε auf dem Grundkegel Γ_1 bzw. Γ_2 . Lässt man ε , wie in Abbildung 5.4 dargestellt, samt einer darin liegenden Kurve k einmal auf Γ_1 und einmal auf Γ_2 rollen, so sind die von k beschriebenen Flächen passende Zahnflanken [18]. Die Kurve k wird dabei üblicherweise nicht beliebig, sondern als Gerade gewählt. Auch diese Arbeit beschränkt sich auf diesen Fall, wie in den folgenden Kapiteln noch ausführlicher thematisiert wird. Nachdem wir von einer konischen Evolventenverzahnung sprechen, bleibt zu zeigen, dass die oben beschriebene Bahnkurve b_P tatsächlich eine sphärische Kreisevolvente im Sinne der folgenden Definition ist:

Definition 5.2. *Eine sphärische Kreisevolvente c ist Orthogonaltrajektorie der Tangentialebenen eines Drehkegels Γ .*

Dies sieht man wie folgt: Alle Normalebenebenen der zu ε gehörenden Zahnprofile c_1 bzw. c_2 schneiden die Wälzkegel Π_1 bzw. Π_2 längs Erzeugenden und schließen mit den dortigen Tangentialebenen stets den festen Winkel α ein, da die Erzeugenden mittels Drehung aus der gemeinsamen Erzeugenden a_{12} von Π_1 und Π_2 hervorgehen. Die Normalebenebenen von c_1 bzw. c_2 hüllen die zwei zu Π_1 bzw. Π_2 coaxialen Grundkegel Γ_1 bzw. Γ_2 ein, die ihrerseits ε als gemeinsame Tangentialebene besitzen. Die Kurve c_1 ist also Orthogonaltrajektorie der Tangentialebenen von Γ_1 . Man erhält, wie bereits oben erläutert, alle Kurven dieser Art, indem man eine fest gewählte Tangentialebene von Γ_1 - etwa ε - auf Γ_1 abrollen lässt und einen Punkt $C_1 \in \varepsilon$ dabei mitnimmt. Die Bahnkurve c_1 von C_1 bei diesem Abwälzvorgang ist dann Orthogonaltrajektorie der Tangentialebenen von Γ_1 (siehe auch [9]). Da der Abstand zwischen C_1 und dem Scheitel O von Γ_1 konstant bleibt, liegt c_1 auf einer Kugel mit Mittelpunkt O und Radius $r = \text{dist}(O, C_1)$.

Anmerkung 5.3. *Es sei c eine sphärische Kreisevolvente mit der Trägerkugel κ und dem Ausgangskegel Γ . Dann gilt: Die Kurve c schneidet alle Großkreise, die sich als Schnitt der Tangentialebenen von Γ mit κ ergeben, orthogonal. Somit ist c die Orthogonaltrajektorie aller Großkreise, die einen gegebenen Kugelkreis c^* berühren.*

Des Weiteren benötigen wir eine Parametrisierung des Zahnprofils einer konischen Evolventenverzahnung, also einer sphärischen Kreisevolvente. Eine Parametrisierung

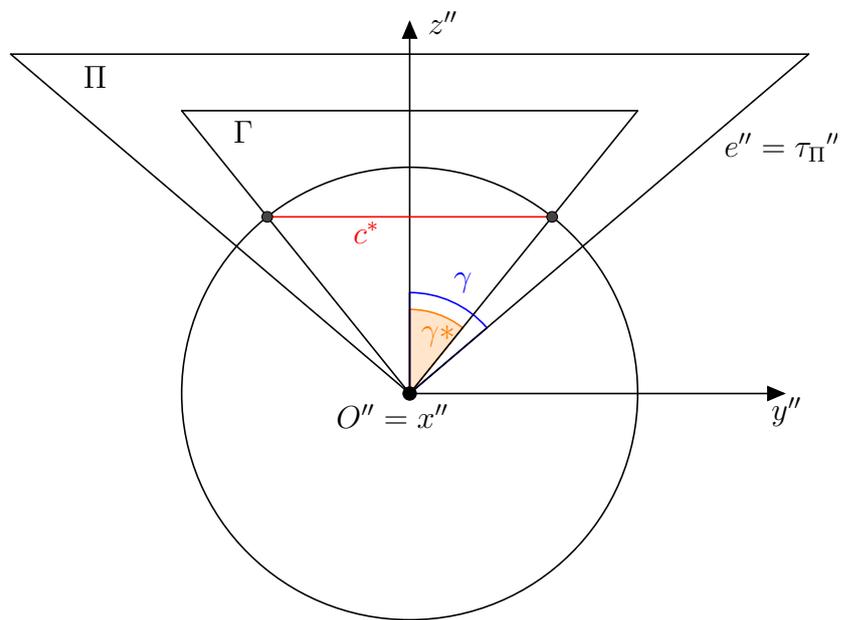


Abbildung 5.5: Zusammenhang zwischen Wälzkegel und Grundkegel.

einer sphärischen Kreisevolvente auf der Einheitskugel wird in der folgenden Rechnung hergeleitet.

Es sei κ die Einheitskugel mit Mitte in O und c^* sei jener Kugelkreis, der als Schnitt von Γ_1 mit κ entsteht (siehe auch Abbildung 5.5; dort ist c^* projizierend). Wir suchen jene Kurve c , die nach Definition 5.2 Orthogonaltrajektorie aller Großkreise von κ ist, die c^* berühren. Nach [9] erhält man sphärische Kreisevolventen durch das Abwälzen einer Ebene auf dem Grundkegel Γ_1 . Die Normalebenen der gesuchten Kurve c hüllen den Grundkegel Γ_1 ein. Der durch Γ_1 festgelegte Kugelkreis c^* lässt sich folgendermaßen als parametrische Kurve angeben:

$$\mathbf{c}^*(s) = \begin{pmatrix} \sin \gamma_1^* \cos s \\ \sin \gamma_1^* \sin s \\ \cos \gamma_1^* \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

Wir berechnen auch $\mathbf{c}^{*'}(s) = \frac{d\mathbf{c}^*(s)}{ds}$:

$$\mathbf{c}^{*'}(s) = \sin \gamma_1^* \cdot \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

und $\mathbf{c}^{*''}(s) = \frac{d\mathbf{c}^{*'}(s)}{ds}$

$$\mathbf{c}^{*''}(s) = \sin \gamma_1^* \cdot \begin{pmatrix} -\cos s \\ -\sin s \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

Wir setzen $\mathbf{e}(s) := \begin{pmatrix} -\sin s \\ \cos s \\ 0 \end{pmatrix}$. Die folgenden Eigenschaften lassen sich sofort nachrechnen:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{c}^*(s), \mathbf{e}(s) \rangle &= 0 \\ \|\mathbf{c}^*(s)\| &= 1 \\ \|\mathbf{c}^{*'}(s)\| &= \sin \gamma_1^* \\ \langle \mathbf{c}^*(s), \mathbf{c}^{*''}(s) \rangle &= -\sin^2 \gamma_1^* \\ \langle \mathbf{c}^{*'}(s), \mathbf{c}^{*''}(s) \rangle &= 0 \\ \|\mathbf{c}^{*''}(s)\| &= \sin \gamma_1^* \\ \langle \mathbf{e}(s), \mathbf{e}(s) \rangle &= 1 \end{aligned}$$

Ein Großkreis l , der c^* berührt, besitzt die folgende Parametrisierung:

$$\mathbf{l}(u) = \cos u \cdot \mathbf{c}^*(s) + \frac{\sin u}{\sin \gamma_1^*} \cdot \mathbf{c}^{*'}(s) \quad (5.16)$$

Damit erhalten wir als Ansatz für die Parametrisierung der sphärischen Kreisevolvente c :

$$\mathbf{c}(s) = \cos(u(s)) \cdot \mathbf{c}^*(s) + \frac{\sin(u(s))}{\sin \gamma_1^*} \cdot \mathbf{c}^{*'}(s) \quad (5.17)$$

Dabei muss $u = u(s)$ derart bestimmt werden, dass $\mathbf{c}'(s) = \frac{d\mathbf{c}(s)}{ds}$ stets orthogonal auf den Tangentenvektor $\frac{d\mathbf{l}(u)}{du} = -\sin u \cdot \mathbf{c}^* + d \cdot \frac{\cos u}{\sin \gamma_1^*} \cdot \mathbf{c}^{*'}$ von $\mathbf{l}(u)$ steht. Es muss also gelten:

$$\left\langle \frac{d\mathbf{c}(s)}{ds}, \frac{d\mathbf{l}(u)}{du} \right\rangle = 0 \quad (5.18)$$

Wir berechnen $\mathbf{c}'(s)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{c}'(s) &= -u' \cdot \mathbf{c}^* \sin u + \mathbf{c}^{*' } \cos u \\ &+ \frac{1}{\sin \gamma_1^*} \cdot (u' \cdot \mathbf{c}^{*' } \cos u + \mathbf{c}^{*''} \sin u) \end{aligned}$$

Wir setzen in Gleichung 5.18 ein und erhalten die folgende Bedingung:

$$\left\langle -u' \cdot \mathbf{c}^* \sin u + \frac{\mathbf{c}^{*' } \cos u}{\sin \gamma_1^*} \cdot (\sin \gamma_1^* + u') + \frac{\sin u}{\sin \gamma_1^*} \cdot \mathbf{c}^{*''}, -\mathbf{c}^* \sin u + \frac{\cos u}{\sin \gamma_1^*} \cdot \mathbf{c}^{*' } \right\rangle = 0$$

Unter Verwendung der oben notierten Eigenschaften für \mathbf{c}^* , $\mathbf{c}^{*'}$ und $\mathbf{c}^{*''}$ erhält man folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} u' \sin^2 u + \cos^2 u \cdot (\sin \gamma_1^* + u') + \sin \gamma_1^* \cdot \sin^2 u &= 0 \\ \Leftrightarrow u' + \sin \gamma_1^* &= 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u = c_0 - s \cdot \sin \gamma_1^* \quad (5.19)$$

Dabei ist c_0 eine Integrationskonstante.

Die Parameterdarstellung einer sphärischen Kreisevolvente c auf der Einheitskugel lautet also für $c_0 = 0$:

$$\mathbf{c}(s) = \cos(s \cdot \sin \gamma_1^*) \cdot \mathbf{c}^*(s) - \sin(s \cdot \sin \gamma_1^*) \cdot \mathbf{e}(s) \quad (5.20)$$



Abbildung 5.6: Ein evolventenverzahntes Kegelrad mit Geradflanken.

5.4 Evolventenverzahnte Kegelräder mit Geradflanken

In Kapitel 5.3 wurde beschrieben, wie sich die konische Evolventenverzahnung realisieren lässt: Eine als Eingriffsfläche vorgegebene Ebene ε rollt samt einer darin liegenden Kurve k auf den Grundkegeln Γ_1 und Γ_2 , wobei die Kurve k zusammenpassende Zahnflanken Φ_1 und Φ_2 überstreicht. Wird die Kurve k nicht beliebig, sondern als Gerade gewählt, welche die gemeinsame Wälzkegelspitze O enthält, so sind die entstehenden Zahnflanken Φ_1 und Φ_2 Kegelflächen. Man spricht in diesem Fall von einer *Geradverzahnung* bzw. von einem *evolventenverzahnten Kegelrad mit Geradflanken*. Die Gratlinie g_1 bzw. g_2 der Zahnflanke Φ_1 bzw. Φ_2 ist eine Erzeugende des Grundkegels Γ_1 bzw. Γ_2 . Um ein evolventenverzahntes Kegelrad mit Geradflanken in einem CAD-Programm herzustellen, fügen wir eine Kugel κ_R mit Mittelpunkt O und Radius R ein. Diese Kugel legt einen Kugelschnitt fest, in dem wir einen Großteil unserer Konstruktionen realisieren werden. Wir können eine durch den Winkel γ_1^* und den Radius R gegebene sphärische Kreisevolvente c_1 nach 5.20 wie folgt als parametrische Kurve eingeben:

$$c_1 \dots \mathbf{c}_1(s) = R \cdot (\cos(s \cdot \sin \gamma_1^*) \cdot \mathbf{c}^*(s) - \sin(s \cdot \sin \gamma_1^*) \cdot \mathbf{e}(s))$$

Diese sphärische Kreisevolvente c_1 liegt auf κ_R . Wir verwenden sie als Zahnprofil des ersten Kegelrades; die Zahnflanke ist dann eine Kegelfläche mit der Profilkurve c_1 und dem Zentrum O . Der Wälzkegel Π_1 schneidet κ_R nach dem Wälzkreis p_1 , während der Grundkegel Γ_1 die Kugel κ_R nach dem Grundkreis g_1 schneidet. Unter Verwendung der Kenngrößen aus Kapitel 5.2 lässt sich die Zahnflanke eines evolventenverzahnten Kegelrades mit Geradflanken modellieren: Die durch das Zahnprofil c_1 gegebene Zahnflanke des ersten Rades verläuft vom Grund- bis zum Kopfkegel. Zwischen Grund- und Fußkegel wird das Zahnprofil durch ein Stück eines Großkreises von κ_R ergänzt. Die

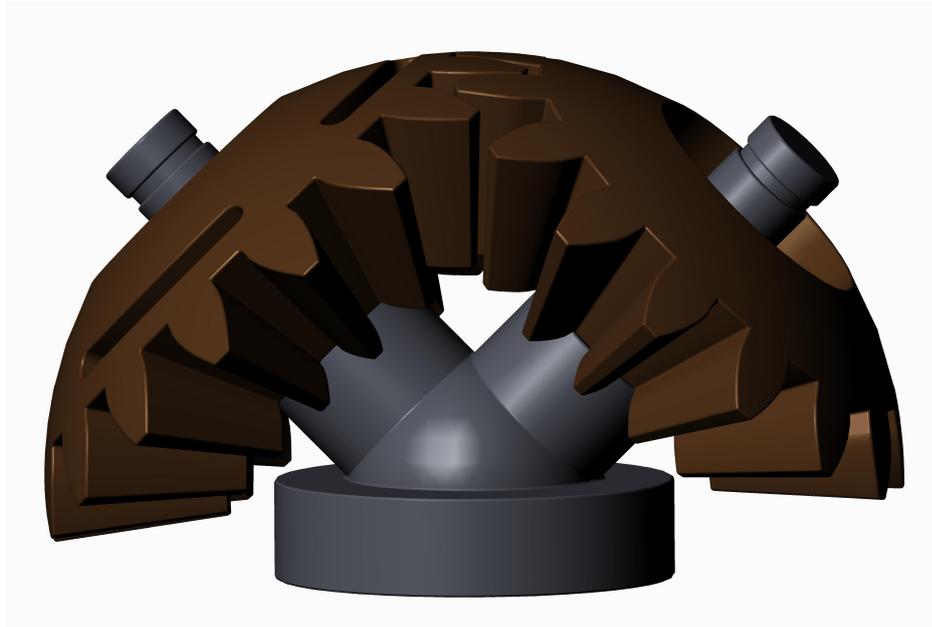


Abbildung 5.7: Ein evolventenverzahntes Kegelradgetriebe mit Geradflanken; die Zahnflanken beider Räder sind Kegelflächen mit sphärischen Kreisevolventen als Profilkurven.

Zahnflanke wird dann als Kegelfläche mit dem Zentrum O , deren Profilkurve aus c_1 und dem erwähnten Großkreisbogen besteht, realisiert. Anschließend wird die Flanke an einer Ebene durch die Radachse unter Berücksichtigung der Zahnstärke gespiegelt. Durch das Trimmen an Kopf- und Fußkegel bzw. an Kugeln mit entsprechendem Radius und Mitte in O erhält man eine aus verschiedenen Stücken zusammengesetzte, geschlossene Fläche, die sich im CAD-Programm als Volumenobjekt auffassen lässt. So erhält man einen *Zahn* des Kegelrades. Regelmäßiges Anordnen dieses Zahnes entlang des Fußkegels unter Berücksichtigung der Zähnezahl liefert schließlich ein evolventenverzahntes Kegelrad mit Geradflanken. Die Zahnflanken bzw. Zähne des Gegenrades erhält man analog. Abbildung 5.6 zeigt ein evolventenverzahntes Kegelrad mit Geradflanken, das in PTC-Creo, wie oben beschrieben, angefertigt wurde. In Abbildung 5.7 wird das Kegelrad aus Abbildung 5.6 mit seinem Gegenrad verzahnt.

5.5 Evolventenverzahnte Kegelräder mit Schrägflanken

Auch in diesem Kapitel verwenden wir die in Kapitel 5.3 beschriebene Methode, um nun *evolventenverzahnte Kegelräder mit Schrägflanken* zu erzeugen. Wir beschränken uns nun auf jenen Fall, bei dem die in der Eingriffsebene ε liegende Eingriffskurve

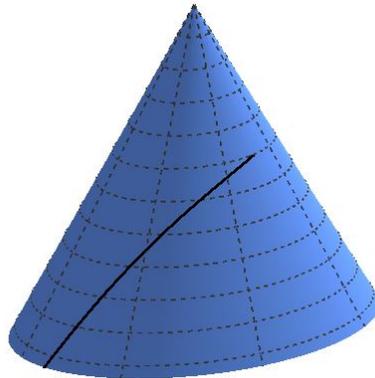


Abbildung 5.8: Eine geodätische Linie auf einem Drehkegel

k , welche beim Rollen auf den Grundkegeln Γ_1 und Γ_2 passende Zahnprofile Φ_1 und Φ_2 überstreicht, eine nicht durch O gehende Gerade ist. Die Gratlinie g_1 bzw. g_2 der Zahnflanke Φ_1 bzw. Φ_2 ist eine Geodätische des Grundkegels Γ_1 bzw. Γ_2 , da man durch das Aufwickeln einer Geraden auf einem Drehkegel gerade eine Drehkegelgeodätische erhält [18]. In Abbildung 5.8 ist eine derartige Drehkegelgeodätische, die den Verlauf der Zahnflanke am Grundkegel bestimmt, dargestellt. Umgekehrt erhält man die Zahnflanke als Tangentenfläche der Drehkegelgeodätischen am Grundkegel. Um die Drehkegelgeodätische als parametrische Kurve anzugeben, parametrisieren wir zunächst den Grundkegel Γ mit dem halben Öffnungswinkel γ^* wie folgt (vgl. Abbildung 5.9):

$$\Gamma \dots \mathbf{s}(u, v) = v \cdot \begin{pmatrix} \sin \gamma^* \cdot \cos u \\ \sin \gamma^* \cdot \sin u \\ \cos \gamma^* \end{pmatrix} =: v \cdot \mathbf{c}^*(u)$$

mit $r = v \cdot \sin \gamma^*$.

Dann wickeln wir den Mantel des Drehkegels ab und erhalten für die Verebnung:²

$$r \cdot u = v \cdot \delta \quad \Rightarrow \quad \delta = \frac{r \cdot u}{v} = u \cdot \sin \gamma^*$$

Die Verebnung des Drehkegelmantels lässt sich deshalb folgendermaßen parametrisieren:

$$\mathbf{s}^v(u, v) = v \cdot \begin{pmatrix} \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \\ \sin(u \cdot \sin \gamma^*) \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

²Als *Verebnung* wird eine längentreue Abbildung der Ausgangsfläche in eine Ebene bezeichnet.

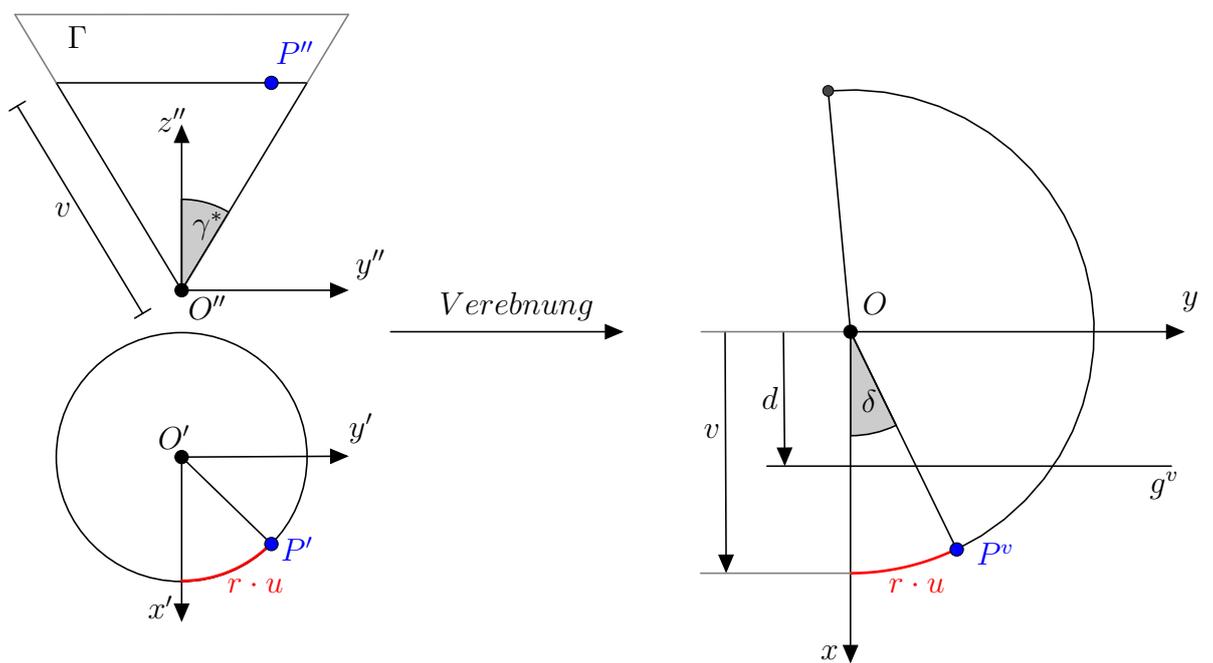


Abbildung 5.9: Parametrisierung eines Drehkegels und einer Drehkegelgeodätischen

Eine längentreue Abbildung der Drehkegelfläche Γ in die Ebene ε ist also durch die folgende Abbildung λ festgelegt:

$$\lambda : \Gamma \rightarrow \varepsilon, \quad v \cdot \mathbf{c}^*(u) \mapsto v \cdot \begin{pmatrix} \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \\ \sin(u \cdot \sin \gamma^*) \end{pmatrix}$$

Nun wählen wir eine Gerade g in der Verebnung der Drehkegelfläche. O. B. d. A. wählen wir g in der Verebnung so, dass sie im konstanten Abstand d parallel zur y -Achse liegt:

$$g \dots x = d \tag{5.22}$$

Wir setzen Gleichung 5.22 in die Verebnung 5.21 ein und erhalten:

$$d = v \cdot \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \tag{5.23}$$

$$\Leftrightarrow v = \frac{d}{\cos(u \cdot \sin \gamma^*)} \tag{5.24}$$

Damit erhalten wir eine Parametrisierung einer Drehkegelgeodätischen g :

$$g \dots \mathbf{g}(u) = \frac{d}{\cos(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot \mathbf{c}^*(u) \tag{5.25}$$

bzw.

Wir ermitteln nun die Tangentenfläche $\Phi \dots \mathbf{x}(u, v)$ der in Gleichung 5.25 parametrisierten Drehkegelgeodätischen:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \frac{d}{\cos(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot \mathbf{c}^*(u) \\ &+ v \cdot \left(\frac{d \cdot \sin \gamma^* \cdot \sin(u \cdot \sin \gamma^*)}{\cos^2(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot \mathbf{c}^*(u) + \frac{d \cdot \sin \gamma^*}{\cos(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot \mathbf{e}(u) \right) \end{aligned}$$

mit

$$\mathbf{e}(u) = \begin{pmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\mathbf{c}^*(u)$ und $\mathbf{e}(u)$ sind also wie in Kapitel 5.3 gewählt; es gelten mithin für $\mathbf{c}^*(u)$ und $\mathbf{e}(u)$ die dort notierten Eigenschaften.

Nachfolgend wollen wir zeigen, dass die Schnittkurve der Tangentenfläche Φ von g mit einer Kugel mit Mitte in O eine sphärische Kreisevolvente ist. Dazu parametrisieren wir zunächst die Tangentenfläche Φ wie folgt um:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(u, v) &= \frac{d}{\cos(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot ((1 + v \cdot \sin \gamma^* \tan(u \cdot \sin \gamma^*)) \cdot \mathbf{c}^*(u) \\ &+ v \cdot \sin \gamma^* \cdot \mathbf{e}(u)) \end{aligned} \tag{5.26}$$

Wir betrachten eine Kugel κ mit Mittelpunkt O und Radius r , gegeben durch die Gleichung $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - r^2 = 0$, und ermitteln den Schnitt von Φ mit κ :

$$\frac{d^2}{\cos^2(u \cdot \sin \gamma^*)} \cdot ((1 + v \cdot \sin \gamma^* \cdot \tan(u \cdot \sin \gamma^*))^2 + v^2 \cdot \sin^2 \gamma^*) - r^2 = 0$$

Für v erhalten wir:

$$v_{1,2} = \frac{-d^2 \cdot \sin \gamma^* \cdot \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \sin(u \cdot \sin \gamma^*) \pm d \cdot \sin \gamma^* \cdot \cos^2(u \cdot \sin \gamma^*) \cdot \sqrt{r^2 - d^2}}{d^2 \cdot \sin^2 \gamma^*}$$

Die Lösungen sind nur dann reell, wenn $|r| > |d|$.

Einsetzen von v in Gleichung 5.26 liefert die gesuchte Schnittkurve von Φ und κ :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(u) &= (d \cdot \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \pm \sin(u \cdot \sin \gamma^*) \sqrt{r^2 - d^2}) \cdot \mathbf{c}^*(u) \\ &+ (-d \cdot \sin(u \cdot \sin \gamma^*) \pm \cos(u \cdot \sin \gamma^*) \cdot \sqrt{r^2 - d^2}) \cdot \mathbf{e}(u) \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} b &:= \sin \gamma^*, & a &:= \cos \gamma^* \\ \frac{d}{r} &:= \cos \sigma, & \frac{\sqrt{r^2 - d^2}}{r} &:= -\sin \sigma \end{aligned}$$

und wir erhalten für die Parametrisierung $\mathbf{y}(u)$ der Schnittkurve von Φ und κ :

$$\mathbf{y}(u) = r \cdot (\cos(bu \pm \sigma) \cdot \mathbf{c}^*(u) - \sin(bu \pm \sigma) \cdot \mathbf{e}(u))$$

Wir setzen $b \cdot s := bu \pm \sigma \Leftrightarrow u = s \mp \frac{\sigma}{b}$ und parametrisieren nach s um:

$$\mathbf{y}(s) = r \cdot \left(\cos(bs) \cdot \begin{pmatrix} b \cdot \cos\left(s \mp \frac{\sigma}{b}\right) \\ b \cdot \sin\left(s \mp \frac{\sigma}{b}\right) \\ a \end{pmatrix} - \sin(bs) \cdot \begin{pmatrix} -\sin\left(s \mp \frac{\sigma}{b}\right) \\ \cos\left(s \mp \frac{\sigma}{b}\right) \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad (5.27)$$

Mit den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus erhalten wir:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(s) &= r \left(\cos(bs) \begin{pmatrix} b \left(\cos \frac{\sigma}{b} \cos s \pm \sin \frac{\sigma}{b} \sin s \right) \\ b \left(\mp \sin \frac{\sigma}{b} \cos s + \cos \frac{\sigma}{b} \sin s \right) \\ b \end{pmatrix} - \sin(bs) \begin{pmatrix} \cos \frac{\sigma}{b} \sin s \pm \sin \frac{\sigma}{b} \cos s \\ \mp \sin \frac{\sigma}{b} \sin s + \cos \frac{\sigma}{b} \sin s \\ 0 \end{pmatrix} \right) \\ \Leftrightarrow \mathbf{y}(s) &= r \cdot \begin{pmatrix} \cos \frac{\sigma}{b} & \pm \sin \frac{\sigma}{b} & 0 \\ \mp \sin \frac{\sigma}{b} & \cos \frac{\sigma}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\cos(bs) \cdot \mathbf{c}^*(s) - \sin(bs) \cdot \mathbf{e}(s)) \quad (5.28) \end{aligned}$$

Mit $t := \mp \frac{\sigma}{b}$ ist $r = \frac{d}{\cos \sigma} = \frac{d}{\cos(bt)}$; wir können die Schnittkurve von Φ und κ folgendermaßen parametrisieren:

$$\mathbf{y}(s) = \frac{d}{\cos(bt)} \cdot \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (\cos(bs) \cdot \mathbf{c}^*(s) - \sin(bs) \cdot \mathbf{e}(s)) \quad (5.29)$$

Damit ist die Schnittkurve von Φ und κ eine sphärische Kreisevolvente, die durch Drehstreckung aus der sphärischen Kreisevolvente aus 5.20 hervorgeht. Die Drehstreckung ist festgelegt durch den Drehwinkel t und den Streckfaktor $\frac{d}{\cos(bt)}$. Die so erhaltene sphärische Kreisevolvente gehört zum Schnittkreis des Grundkegels Γ mit der Kugel κ . Wir nutzen dies, um schrägverzahnte konische Evolventenzahnräder mit einem CAD-Programm - etwa mit PTC-Creo - herzustellen. Dazu benötigen wir die Parametrisierung der Drehkegelgeodätischen, die den Verlauf der Zahnflanke am jeweiligen Grundkegel angibt, und die Parametrisierung der zur Zahnflanke gehörigen, in einem Kugelschnitt auftretenden sphärischen Kreisevolvente. Grundsätzlich wäre die richtige Zahnflanke die Tangentenfläche der Drehkegelgeodätischen (welche in Richtung des Fußkreises noch fortgesetzt werden müsste), jedoch scheint in PTC-Creo zum jetzigen Zeitpunkt nur eine näherungsweise Fertigung von Schrägflanken umsetzbar, da das Verwenden der exakten Tangentenfläche der Drehkegelgeodätischen bisher nicht möglich zu sein scheint. Jedoch erlaubt PTC-Creo eine näherungsweise Fertigung evolventenverzahnter Kegelräder mit Schrägflanken: Mit Hilfe der Parametrisierung 5.29 lassen sich verschiedene, zur Tangentenfläche gehörige sphärische Kreisevolventen einfügen, die allesamt durch Drehstreckung (Drehwinkel t , Streckfaktor $\frac{d}{\cos(bt)}$) auseinander hervorgehen. Nachdem die Zahnflanke nicht am Grundkegel endet, werden die zur Tangentenfläche gehörigen sphärischen Kreisevolventen bis zum Fußkegel durch Großkreisbögen fortgesetzt.³ Durch diese sphärischen Kreisevolventen und den fortsetzenden Großkreisbögen kann man schließlich näherungsweise eine Fläche legen, welche die gewünschte Zahnflanke approximiert. Da ein Zahn eine linke und eine rechte Flanke besitzt, werden die sphärischen Kreisevolventen und die zugehörigen Großkreisbögen anschließend noch an einer Ebene durch die Radachse gespiegelt, wobei die Zahnstärke zu berücksichtigen ist. Durch das Trimmen an Kopf- und Fußkegel bzw. an Kugeln mit entsprechendem Radius und Mitte in O erhält man eine aus verschiedenen Stücken zusammengesetzte, geschlossene Approximationsfläche, die sich im CAD-Programm als Volumenobjekt auffassen lässt. So erhält man (näherungsweise) einen *Zahn* des Kegelrades. Regelmäßiges Anordnen dieses Zahnes entlang des Fußkegels unter Berücksichtigung der Zähnezahl liefert schließlich ein evolventenverzahntes Kegelrad mit Schrägflanken. Die Zahnflanken bzw. Zähne des Gegenrades erhält man analog. Das beste Ergebnis wurde erzielt, indem eine Approximationsfläche durch fünf sphärische Kreisevolventen und deren fortsetzende Großkreisbögen gelegt wurde. Das

³Hierbei müssen die sphärischen Kreisevolventen und die Großkreisbögen, mit denen sie fortgesetzt werden, auf der selben Kugel liegen.



Abbildung 5.10: Ein Kegelrad mit Schrägflanken.

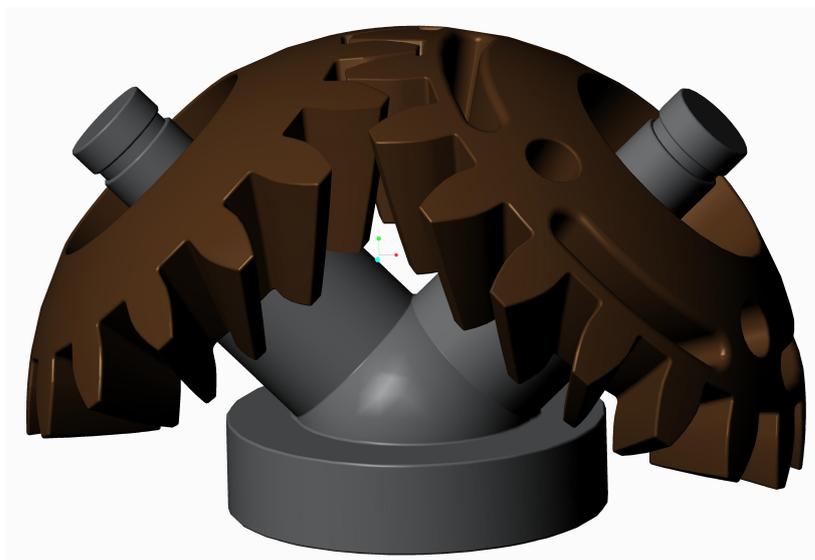


Abbildung 5.11: Ein schrägverzahntes konisches Evolventengetriebe.

so entstandene evolventenverzahnte Kegelradgetriebe mit Schrägflanken ist in Abbildung 5.11 zu sehen. Das größere der beiden Kegelräder ist separat auch in Abbildung 5.10 dargestellt.

Literaturverzeichnis

- [1] F. Dort. *Explizite Berechnung kugelkonjugierter Kegelradpaare durch das sphärische Verzahnungsgesetz*. PhD thesis, Justus-Liebig-Universität Gießen, 2012.
- [2] L. P. Eisenhart. *A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Ginn and Company, Boston, New York, Chicago, London, 1909.
- [3] A. Gferrer. *Kinematik und Robotik*. Vorlesungsskriptum, 2004. TU Graz.
- [4] K.-H. Grote and J. Feldhusen. *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.
- [5] F. Hohenberg. *Konstruktive Geometrie in der Technik*. Springer-Verlag, Wien, 1966.
- [6] M. Husty, A. Karger, H. Sachs, and W. Steinhilper. *Kinematik und Robotik*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [7] Jr. J. J. Dicker, G. R. Pennock, and J. E. Shigley. *Theory of Machines and Mechanisms*. Oxford University Press, New York, Oxford, 2003.
- [8] J. Klingelnberg. *Kegelräder: Grundlagen, Anwendungen*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2008.
- [9] F. Klocke and C. Brecher. *Zahnrad- und Getriebetechnik: Auslegung – Herstellung – Untersuchung – Simulation*. Carl Hanser-Verlag, München, 2016.
- [10] E. Müller and E. Kruppa. *Lehrbuch der Darstellenden Geometrie*. Springer-Verlag, Wien, 1961.
- [11] J. Phillips. *General Spatial Involute Gearing*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2003.
- [12] H. Polster. *Kinematik (Sammlung Göschen)*. G. J. Göschen'sche Verlagshandlung G. m. b. H., München u.a., 1912.
- [13] B. Schlecht. *Maschinenelemente 2*. Pearson Studium, München u.a., 2010.
- [14] W. Steinhilper and B. Sauer. *Konstruktionselemente des Maschinenbaus 2: Grundlagen von Maschinenelementen für Antriebsaufgaben*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2012.

- [15] H.C. von Seherr-Thoss and S. Fronius. *Die Entwicklung der Zahnrad-Technik: Zahnformen und Tragfähigkeitsberechnung*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2013.
- [16] J. Wallner. Differentialgeometrie. Vorlesungsskriptum, 2014. TU Graz.
- [17] H. Wittel, D. Muhs, D. Jannasch, and J. Voßiek. *Roloff/Matek Maschinenelemente: Normung, Berechnung, Gestaltung*. Vieweg+Teubner, Wiesbaden, 2009.
- [18] W. Wunderlich. Über abwickelbare Zahnflanken und eine neue Kegelradverzahnung. *Betrieb und Fertigung*, 1948.
- [19] W. Wunderlich. Über die Evolutoiden der Ellipse. *Elemente der Mathematik*, 1955.
- [20] W. Wunderlich. *Darstellende Geometrie I*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1966.
- [21] W. Wunderlich. *Ebene Kinematik*. Bibliographisches Institut AG, Mannheim, 1970.