



Bettina Korb, BSc

Der Satz von Alexandrov im Minkowski-Raum

DIPLOMARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Magistra der Naturwissenschaften

Lehramtsstudium Unterrichtsfach Darstellende Geometrie, Unterrichtsfach Mathematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Johannes Wallner, Univ.-Prof. Mag.rer.nat. Dipl.-Ing. Dr.techn.
Institut für Geometrie

Graz, Juni 2020

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Diplomarbeit identisch.

Datum, Unterschrift

Abstract

The Alexandrov Theorem in Minkowski spacetime

Alexandrov's Theorem characterizes bijective mappings preserving quadratic distance zero as affine Lorentz transformations. The theorem can both be applied in solving geometric problems as well as in the special theory of relativity.

The first part of the thesis describes the required basics of linear algebra, whereas the second part focuses on the proof of Alexandrov's Theorem (for pseudo-euclidean scalar product). It also includes a chapter about Lorentz transformations and the cyclographic model of Laguerre geometry. Lorentz and Laguerre transformations are shown to be consequences of Alexandrov's Theorem.

The third and last part depicts the applications of Alexandrov's theorem and how to solve Apollonius' problem (finding all tangent circles to three given circles) can be solved with cyclographic projection and Laguerre reflection. Finally, the special theory of relativity can be illustrated geometrically in diagrams developed by Minkowski.

Kurzfassung

Der Satz von Alexandrov im Minkowski-Raum

Der Satz von Alexandrov charakterisiert Null-Isometrien als affine Lorentztransformationen und hat Anwendungen sowohl in der Geometrie als auch in der speziellen Relativitätstheorie. Dazu werden im ersten Teil der Diplomarbeit die benötigten Grundlagen aus der linearen Algebra beschrieben.

Im zweiten Teil wird der Satz von Alexandrov für das pseudo-euklidische Skalarprodukt bewiesen. Weiters werden Lorentztransformationen und das zyklographische Modell der Laguerre-Geometrie näher beschrieben. Die Lorentz- und Laguerretransformationen werden auf den Satz von Alexandrov zurückgeführt.

Im dritten Teil wird zuerst das Problem des Apollonios, zu drei gegebenen Kreisen alle berührenden Kreise zu finden, mit Hilfe der zyklographischen Projektion und Laguerrespiegelung gelöst. Anschließend werden Beispiele aus der speziellen Relativitätstheorie mittels Minkowski-Diagrammen dargestellt.

Inhalt

Abstract und Kurzfassung	v
I. Grundlagen	1
1. Quadratische Formen	3
2. Der Minkowski-Raum	7
II. Der Satz von Alexandrov	11
3. Der Satz von Alexandrov - Ein einfacher Beweis	13
4. Lorentztransformationen	21
5. Laguerre-Geometrie	28
5.1. Zyklographisches Modell	31
5.2. Fundamentalsatz der Laguerre-Geometrie	36
III. Anwendungen	39
6. Das Apollonische Kreisproblem	41
6.1. Algebraische Lösung	41
6.2. Lösung mittels Laguerrespiegelung	43
7. Spezielle Relativitätstheorie	48
7.1. Grundlagen	48
7.2. Relativistische Effekte im Minkowski-Diagramm	52
Literatur	57
Abbildungen	58
Tabellen	59

Teil I.

Grundlagen

Im ersten Teil der Diplomarbeit werden Grundlagen aus der linearen Algebra behandelt.

In Kapitel 1 werden Bilinearformen erklärt, die dazu verwendete Literatur findet man in [1, S. 288 – 293]. Im Anschluss werden Quadratische Formen Q und deren Polarform definiert. Wichtige Begriffe stellen in diesem Zusammenhang die Orthogonalität, das orthogonale Komplement, der Kern der quadratischen Form Q und der quadratische Abstand dar. Die zugehörigen Informationen wurden [2] entnommen. Es wird außerdem das pseudo-euklidische Skalarprodukt definiert und das orthogonale Komplement bezüglich diesem im \mathbb{R}^2 anschaulich erklärt.

In Kapitel 2 wird dargelegt, dass für die gesamte Arbeit nun das pseudo-euklidische Skalarprodukt als quadratische Form zugrunde gelegt wird. Es werden der Minkowski-Raum und isotrope Geraden sowie verschiedene Typen von Ebenen definiert. Diese Begriffe ziehen sich (mit unterschiedlichen Bezeichnungen) durch die gesamte Diplomarbeit. Sie wurden [2] entnommen und graphisch für den \mathbb{R}^3 veranschaulicht.

Alle Abbildungen dieser Arbeit wurden selbst erstellt. Dazu wurden GeoGebra 5.0 beziehungsweise Inkscape 0.91 verwendet.

1. Quadratische Formen

Definition 1.1

Eine Abbildung

$$s : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(v, w) \mapsto s(v, w)$$

heißt Bilinearform, wenn $\forall v_1, v_2, w_1, w_2 \in V$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

- (i) $s(v_1 + v_2, w_1) = s(v_1, w_1) + s(v_2, w_1)$
- (ii) $s(v_1, w_1 + w_2) = s(v_1, w_1) + s(v_1, w_2)$
- (iii) $s(\lambda \cdot v_1, w_1) = \lambda \cdot s(v_1, w_1)$
- (iv) $s(v_1, \lambda \cdot w_1) = \lambda \cdot s(v_1, w_1)$

Die Bilinearform s ist also linear und homogen in beiden Argumenten.

Definition 1.2

Eine Bilinearform s , für die $s(v, w) = s(w, v)$ gilt, heißt symmetrisch.

Für eine symmetrische Bilinearform s gilt:

$$s(v + w, v + w) = s(v + w, v) + s(v + w, w)$$

$$= s(v, v) + s(v, w) + s(v, w) + s(w, w)$$

$$\Rightarrow 2 \cdot s(v, w) = s(v + w, v + w) - s(v, v) - s(w, w)$$

Bilinearformen können durch Matrizen beschrieben werden. Ist $E = \{e_1, \dots, e_n\}$ eine Basis von V , dann ist die darstellende Matrix der Bilinearform s bezüglich der Basis E gegeben durch

$$M_E(s) = (s(e_i, e_j))_{ij}$$

M ist eine $n \times n$ -Matrix.

x und y seien die Koordinatendarstellungen von v und w bezüglich der Basis E . Mit M bezeichne

man die darstellende Matrix der Bilinearform s bezüglich der Basis E . Dann gilt:

$$s(v, w) = x^T M y = (x_1, \dots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} s(e_1, e_1) & \cdots & s(e_1, e_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s(e_n, e_1) & \cdots & s(e_n, e_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$$

Umgekehrt gilt: Aus jeder $n \times n$ -Matrix M erhält man eine Bilinearform $s_M(x, y) = x^T M y$.

Definition 1.3

Die Abbildung $Q : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt quadratische Form, falls gilt:

$$Q(ta) = t^2 \cdot Q(a) \quad \forall t \in \mathbb{R}, \forall a \in V$$

Die Abbildung σ ist eine Bilinearform:

$$\begin{aligned} \sigma : V \times V &\rightarrow \mathbb{R} \\ (a, b) &\mapsto \frac{1}{2} \cdot (Q(a+b) - Q(a) - Q(b)) \end{aligned}$$

$a \bullet b := \sigma(a, b)$ heißt Polarform von Q .

Für eine quadratische Form Q und deren Polarform σ gelten folgende Eigenschaften:

- (i) $Q(o) = Q(0 \cdot o) = 0^2 \cdot Q(o) = 0$
- (ii) $a \bullet b = b \bullet a \quad \forall a, b \in V$ weil $Q(a+b) = Q(b+a)$
- (iii) $a \bullet a = \frac{1}{2} \cdot (Q(a+a) - Q(a) - Q(a)) = \frac{1}{2} \cdot Q(2a) - Q(a) = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot Q(a) - Q(a) = Q(a) \quad \forall a \in V$

Definition 1.4

Es seien $a, b \in V, M \subset V$ und $U \subset V$ ein Unterraum.

- (i) Vektoren a und b sind orthogonal zueinander, wenn deren Polarform 0 ergibt: $a \perp b \Leftrightarrow a \bullet b = 0$
- (ii) $M^\perp := \{a \in V \mid a \perp m \quad \forall m \in M\}$ ist das orthogonale Komplement von M .
- (iii) V^\perp sei das Radikal von σ . Ein Radikal einer quadratischen Menge ist die Menge der Punkte dieser Menge, in denen der Tangentialraum aus allen Punkten des Gesamttraums besteht.
- (iv) Die Polarform σ heißt nicht ausgeartet $\Leftrightarrow V^\perp = \{0\}$
- (v) Ein Vektor $a \in V$ heißt isotrop $\Leftrightarrow a \bullet a = 0 \Leftrightarrow a \perp a$

Jedes orthogonale Komplement M^\perp ist ein Unterraum, da es die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems $a \bullet x = 0 \quad \forall a \in M$ ist.

Definition 1.5

Für $a \in V$ gilt bezüglich der Quadratischen Form Q :

- (i) $a \in V$ heißt singular $\Leftrightarrow Q(a) = 0$.
- (ii) Es gilt $\ker(Q) := \{a \in V \mid Q(a) = 0\}$. Der Kern von Q ist im Allgemeinen kein Unterraum.
- (iii) Ein Unterraum $U \subset V$ heißt singular genau dann, wenn $Q|_U = 0$

Es sei nun V ein affiner Raum über dem Körper $K = \mathbb{R}$ und Q eine quadratische Form.

Definition 1.6

$Q(a - b) \in \mathbb{R}$ ist der quadratische Abstand von $a, b \in V$.

Dieser Abstand ist offensichtlich invariant gegenüber Translationen:

$$Q((a + c) - (b + c)) = Q(a - b) \quad \forall a, b, c \in V.$$

Außerdem gilt

$$Q(a - b) = Q(b - a) \quad \forall a, b \in V,$$

denn

$$Q(a - b) = Q((-1) \cdot (b - a)) = (-1)^2 \cdot Q(b - a).$$

Im weiteren Verlauf der Arbeit werden das Standardskalarprodukt $\langle x, y \rangle$ und das pseudo-euklidische Skalarprodukt $x \bullet y$ verwendet:

$$\begin{aligned} \langle x, y \rangle &= \sum_{i=1}^n x_i \cdot y_i \\ x \bullet y &= \sum_{i=1}^{n-1} x_i \cdot y_i - x_n \cdot y_n = x^T M y \quad \text{mit } M = \text{diag}(1, \dots, 1, -1) \end{aligned}$$

Mit dem pseudo-euklidischen Skalarprodukt erhält auch der Orthogonalitätsbegriff eine neue Anschauung. Das orthogonale Komplement a^\perp eines Vektors $0 \neq a = (a_1, a_2)^T \in \mathbb{R}^2$ erhält man mit

$$(a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_1 \cdot x_1 - a_2 \cdot x_2 = 0$$

- 1) Im Fall $a \in \ker(Q)$ muss $a_1^2 - a_2^2 = 0$ gelten. Für $a = (a_1, a_1)^T$ erhält man für a^\perp die erste Mediane $x_2 = x_1$, für $a = (a_1, -a_1)^T$ erhält man für a^\perp die zweite Mediane $x_2 = -x_1$.

- 2) Im Fall $a \notin \ker(Q)$ und $a_2 \neq 0$ erhält man $x_2 = \frac{a_1}{a_2} \cdot x_1$ für das orthogonale Komplement. Dies entspricht der linearen Hülle der euklidischen Spiegelung von a an der ersten bzw. zweiten Mediane.
- 3) Im Fall $a \notin \ker(Q)$ und $a_2 = 0$ ergibt sich für das orthogonale Komplement $x_1 = 0$, also die x_2 -Achse.

In Abbildung 1.1 wird das orthogonale Komplement von a bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarproduktes im \mathbb{R}^2 dargestellt. Hierbei ist b der euklidisch an der x_1 -Achse gespiegelte Vektor a und gleichzeitig euklidischer Normalvektor von a^\perp . Die Skalierung der Achsen erfolgt in der Darstellung äquidistant.

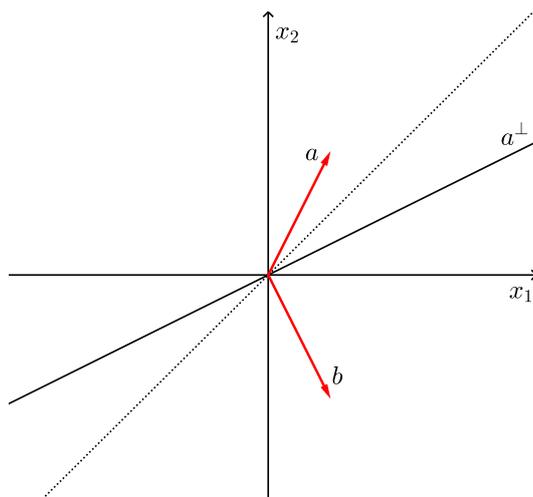
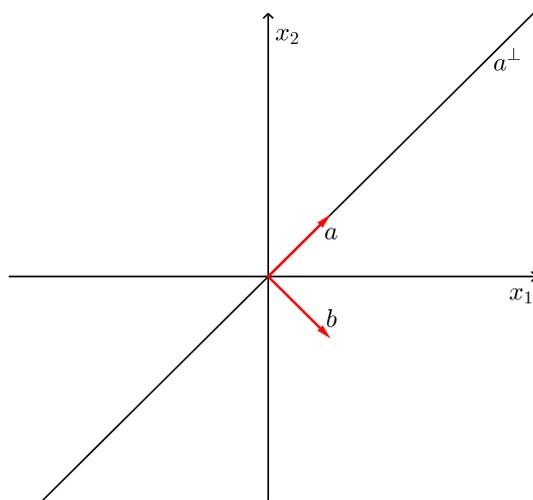


Abb. 1.1.: Orthogonales Komplement von a bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarproduktes im \mathbb{R}^2 . Oben: $a \in \ker(Q)$, unten: $a \notin \ker(Q)$

2. Der Minkowski-Raum

Das pseudo-euklidische Skalarprodukt besitzt die Darstellungsmatrix $M = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$. Für die restliche vorliegende Arbeit wird die quadratische Form

$$Q : V \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n-1}^2 - x_n^2$$

gewählt. Diese quadratische Form kann dargestellt werden durch

$$Q(x) = x^T \cdot M \cdot x$$

Damit existieren vom Nullvektor verschiedene singuläre Vektoren, also $\ker(Q) \neq \{0\}$.

Definition 2.1

Der Minkowski-Raum ist ein vierdimensionaler reeller Vektorraum \mathbb{R}^4 versehen mit dem pseudo-euklidischen Skalarprodukt.

Definition 2.2

Seien $a, b \in V, a \neq b$. Die Gerade $a \vee b$ heißt isotrop genau dann, wenn $Q(a - b) = 0$.

In Abbildung 2.1 sind die isotropen Geraden bezüglich dieser quadratischen Form für den Fall $V = \mathbb{R}^3$ dargestellt. Es handelt sich dabei um jene Geraden, die mit der x_1x_2 -Ebene einen Winkel von 45° einschließen. Sie bilden den Mantel eines Kegels mit der Gleichung

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Definition 2.3

Es sei $\varepsilon \subset V$ eine affine Ebene ($\varepsilon = s + U$) der Dimension 2.

- (i) Die Ebene ε heißt Galilei-Ebene, falls in ε genau 1 Parallelbüschel von isotropen Geraden existiert.
- (ii) Die Ebene ε heißt Minkowski-Ebene, falls in ε genau 2 Parallelbüschel von isotropen Geraden existieren.
- (iii) Die Ebene ε heißt euklidische Ebene, falls in ε keine isotropen Geraden existieren.

Diese Ebenen sind in den Abbildungen 2.2 und 2.3 für den \mathbb{R}^3 dargestellt.

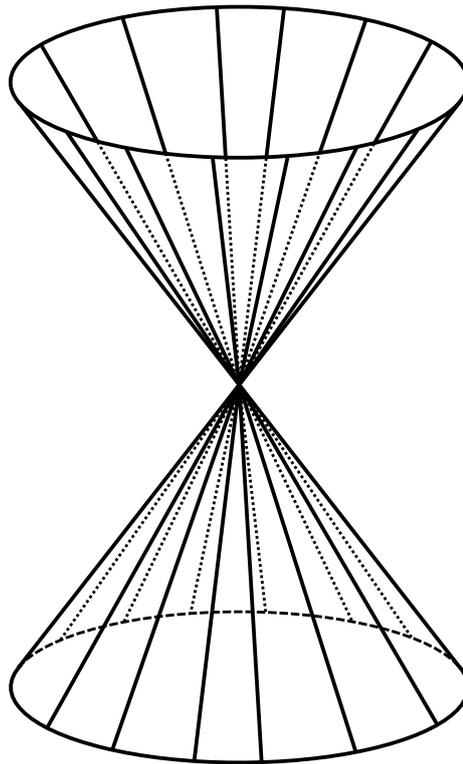


Abb. 2.1.: Isotrope Geraden im \mathbb{R}^3 bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarprodukts

Für $a \in V \setminus \{0\}$ ist das orthogonale Komplement

$$a^\perp = \{x \in V \mid x^T M a = 0\}$$

die Gleichung einer Hyperebene im \mathbb{R}^n . Im Fall des \mathbb{R}^3 ist dies für den Vektor $a = (a_1, a_2, a_3)^T$ die Gleichung der Ebene

$$a_1 \cdot x_1 + a_2 \cdot x_2 - a_3 \cdot x_3 = 0.$$

Diese Ebene hat den euklidischen Normalvektor $(a_1, a_2, -a_3)^T$, den man durch euklidisches Spiegeln des Vektors a an der $x_1 x_2$ -Ebene erhält.

Ist $a \in \ker(Q)$, so ist $a \in a^\perp$, denn $a^\perp = \{x \in V \mid x \bullet a = 0\}$. Das orthogonale Komplement a^\perp entspricht einer Galilei-Ebene. Diese ist tangential an den Kegel.

Vektoren für die $Q(a) > 0$ gilt, werden auch „flache Vektoren“ genannt. Diese Vektoren liegen außerhalb des Kegels. Das orthogonale Komplement von flachen Vektoren ist eine Minkowski-Ebene. Vektoren für die $Q(a) < 0$ gilt, sind sogenannte „steile Vektoren“ innerhalb des Kegels. Ihr orthogonales Komplement sind euklidische Ebenen. Euklidische Ebenen beinhalten ausschließlich flache Vektoren, Galilei-Ebenen enthalten neben flachen auch isotrope Vektoren und Minkowski-Ebenen beinhalten alle drei Arten von Vektoren.

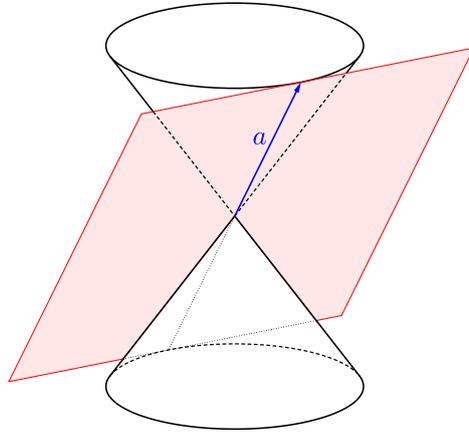


Abb. 2.2.: Galilei-Ebene: Diese ist tangential an den Kegel und gleichzeitig orthogonales Komplement ihrer Berührerzeugenden a

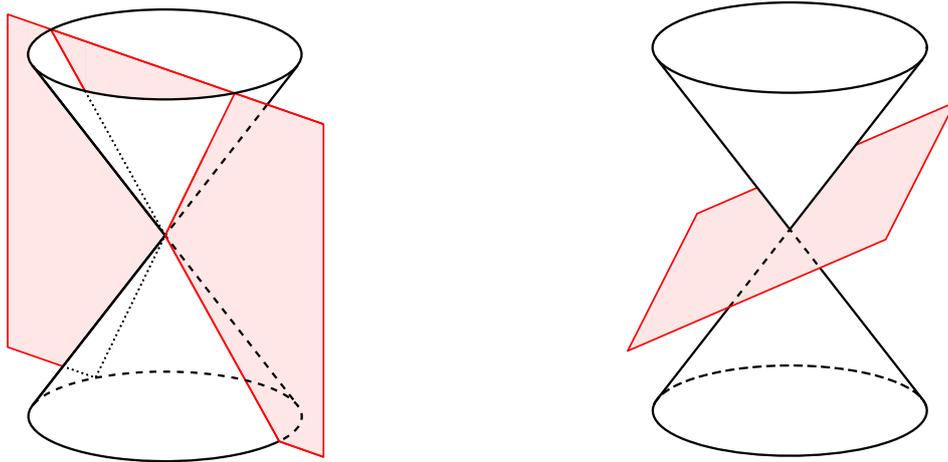


Abb. 2.3.: Minkowski-Ebene (links) und euklidische Ebene (rechts)

Teil II.

Der Satz von Alexandrov

Der zweite Teil stellt den Hauptteil der Diplomarbeit dar. Der für die Arbeit namensgebende Satz von Alexandrov wird bewiesen und Lorentz- sowie Laguerretransformationen auf diesen zurückgeführt:

In Kapitel 3 wird der Satz von Alexandrov unter Verwendung von [2] und [3] für das pseudoeuklidische Skalarprodukt bewiesen. Die ursprüngliche Aussage von Aleksandr Danilovich Alexandrov (1912 – 1999) wurde 1950 in [4] veröffentlicht, worin er schon darauf hinweist, dass in diesem Satz keine Stetigkeitsvoraussetzungen getroffen werden. In [5] unterstreicht er dies abermals.

Kapitel 4 wurde unter Zuhilfenahme von [6, S. 217 – 226] ausgearbeitet. Es werden Lorentztransformationen definiert und es wird gezeigt, dass diese von der Form $f(x) = L \cdot x + a$ sind. Es wird für $L \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und für $L \in \mathbb{R}^{4 \times 4}$ eine geometrische Möglichkeit gezeigt, alle Lorentzmatrizen L dieser Dimensionen zu ermitteln. Am Ende dieses Kapitels wird (auch vorbereitend auf Kapitel 7) definiert, wann ein Punkt y durch einen Punkt x kausal beeinflussbar ist. Bijektive Abbildungen werden damit als Kausalautomorphismus oder als Zeitumkehr beschrieben. Lorentztransformationen werden hinsichtlich dieser Begriffe charakterisiert.

Auch für Kapitel 5 wird [6, S. 157 – 189] verwendet. Hier werden die Seiten von Hyperkugeln und Hyperebenen definiert und damit die wichtigen Begriffe Speer und Zykel eingeführt. Es wird definiert, wann ein Speer und ein Zykel einander berühren und damit — die Anschauung, dass ein Zykel als eine Menge von Speeren aufgefasst werden kann zugrundelegend — Laguerretransformationen definiert.

Die zyklographische Projektion π wird definiert, sowie Zykel- und Speerkoordinaten eingeführt. Es wird gezeigt, wie mit diesen Koordinaten eine Berührung von Speer und Zykel festgestellt werden kann. Es werden weiters 45° -Hyperebenen definiert und das zyklographische Modell der Laguerre-Geometrie angegeben. Anschließend wird definiert, wann zwei Zykel einander berühren und in einem Satz festgehalten, wie mit der sogenannten „Potenz zweier Zykel“ festgestellt werden kann, wie viele Speere zwei gegebene Zykel berühren.

Mit dem Fundamentalsatz der Laguerre-Geometrie werden alle Laguerretransformationen angegeben; dieser wird auf den Satz von Alexandrov zurückgeführt. Am Ende dieses Kapitels wird die Laguerrespiegelung als ein Beispiel für eine Laguerretransformation eingeführt.

3. Der Satz von Alexandrov - Ein einfacher Beweis

Das Ziel dieses Kapitels ist der Beweis des Satzes von Alexandrov (Satz 3.2).

Satz 3.1

Ist $g : V \rightarrow V$ linear und es gilt $\forall a \in V$

$$a \in \ker(Q) \Rightarrow g(a) \in \ker(Q)$$

$$a \notin \ker(Q) \Rightarrow g(a) \notin \ker(Q)$$

so existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $Q(g(a)) = \lambda \cdot Q(a) \quad \forall a \in V$.

Eine lineare Abbildung g , die den Kern des pseudo-euklidischen Skalarprodukts invariant lässt, lässt notwendigerweise auch das pseudo-euklidische Skalarprodukt selbst bis auf einen Faktor λ invariant.

Beweis

$Q(g(a)) = (Ga)^T \cdot M \cdot (Ga) = a^T \cdot G^T \cdot M \cdot G \cdot a$ mit $g : a \mapsto G \cdot a$. Die Matrix $G^T M G =: (g_{ij})$ ist eine symmetrische Matrix: $(G^T M G)^T = G^T M^T (G^T)^T = G^T M G$.

Ziel ist es nun die Koeffizienten g_{ij} zu bestimmen: Es sei $a \in \ker(Q)$, also der Abstand zweier Punkte x, y mit $a = x - y$ gleich Null: $Q(x - y) = 0 \Leftrightarrow (x - y)^T M (x - y) = 0$. Ausgerechnet ergibt dies

$$(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 - (x_n - y_n)^2 = 0.$$

Die im Folgenden definierten Vektoren p_i sind im Kern von Q enthalten. Es sei $i \in \{1, \dots, n-1\}$:

$$p_i^+ = e_i + e_n \quad p_i^- = e_i - e_n,$$

wobei mit e_i die kanonischen Basisvektoren bezeichnet werden.

$$Q(g(p_i^+)) = (p_i^+)^T \cdot G^T M G \cdot p_i^+ = g_{ii} + g_{in} + g_{ni} + g_{nn} = g_{ii} + 2 \cdot g_{in} + g_{nn} = 0$$

$$Q(g(p_i^-)) = (p_i^-)^T \cdot G^T M G \cdot p_i^- = g_{ii} - g_{in} - (g_{ni} - g_{nn}) = g_{ii} - 2 \cdot g_{in} + g_{nn} = 0$$

$$Q(g(p_i^+)) + Q(g(p_i^-)) = 2 \cdot g_{ii} + 2 \cdot g_{nn} = 0 \Rightarrow g_{ii} = -g_{nn} =: \lambda$$

$$Q(g(p_i^+)) - Q(g(p_i^-)) = 4 \cdot g_{in} = 0 \Rightarrow g_{in} = 0$$

$G^T MG$ hat nun die Form

$$\begin{pmatrix} \lambda & g_{12} & \cdots & \cdots & g_{1,n-1} & 0 \\ g_{12} & \lambda & g_{23} & \cdots & g_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & g_{23} & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & g_{n-2,n-1} & \vdots \\ g_{1,n-1} & g_{2,n-1} & \cdots & g_{n-2,n-1} & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

Die übrigen $\frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$ unbekanntenen Koeffizienten der Matrix $G^T MG$ können mit den folgenden $\binom{n-1}{2}$ Vektoren des Kerns von Q bestimmt werden.

$$q_{ij} = e_i + e_j + \sqrt{2} \cdot e_n,$$

wobei $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ und $i < j$.

$$\begin{aligned} Q(g(q_{ij})) &= (e_i + e_j + \sqrt{2}e_n)^T \cdot G^T MG \cdot (e_i + e_j + \sqrt{2}e_n) \quad \text{mit } N := G^T MG \\ &= e_i^T N e_i + e_j^T N e_j + 2e_n^T N e_n + 2e_i^T N e_j + 2\sqrt{2}e_i^T N e_n + 2\sqrt{2}e_j^T N e_n \\ &= \lambda + \lambda - 2 \cdot \lambda + 2 \cdot g_{ij} + 2\sqrt{2} \cdot g_{in} + 2\sqrt{2} \cdot g_{jn} = 0 \\ &\Leftrightarrow g_{ij} + \sqrt{2} \cdot g_{in} + \sqrt{2} \cdot g_{jn} = 0 \Rightarrow g_{ij} = 0 \end{aligned}$$

Die Matrix $G^T MG$ hat nun unter der Voraussetzung, dass nur Vektoren aus dem Kern von Q durch die Abbildung g auf Vektoren aus dem Kern von Q abgebildet werden, die Gestalt $\text{diag}(\lambda, \dots, \lambda, -\lambda) = \lambda \cdot M$.

Es sei nun $a \notin \ker(Q)$, also $Q(a) = a^T M a \neq 0$. Mit der eben konstruierten Matrix $G^T MG$ gilt:

$$Q(g(a)) = a^T \cdot G^T MG \cdot a = a^T \cdot \lambda M \cdot a = \lambda \cdot a^T M \cdot a = \lambda \cdot Q(a) \neq 0,$$

sofern $\lambda \neq 0$.

Definition 3.1

$f : V \rightarrow V$ heißt Null-Isometrie falls $Q(a - b) = 0 \Leftrightarrow Q(f(a) - f(b)) = 0$.

Punkte a und b , deren quadratischer Abstand Null ist, gehen also bei einer Null-Isometrie in Punkte $f(a), f(b)$ über, deren quadratischer Abstand ebenfalls wieder Null ist.

Satz 3.2: Der Satz von Alexandrov (1950)

Ist $3 \leq \dim(V) < \infty$ und $f : V \rightarrow V$ eine bijektive Null-Isometrie. Dann ist $g(a) := f(a) - f(0)$ linear und es existiert ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ mit $Q(g(a)) = \lambda \cdot Q(a) \quad \forall a \in V$.

Der Beweis wird in mehreren Schritten geführt.

- a) Für $a, b \in \ker(Q) \setminus \{0\}$ gilt: $a^\perp = b^\perp \Leftrightarrow [a] = [b]$.

Beweis

$a^\perp = \{x \mid x^T M a = 0\}$ ist eine Hyperebene.

„ \Rightarrow “: Die Hyperebenen a^\perp und b^\perp sind gleich, wenn die Gleichungen der Ebenen Vielfache voneinander sind: $x^T M a = \lambda \cdot x^T M b$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Also ist $a = \lambda \cdot b$, was gleichbedeutend mit $[a] = [b]$ ist.

„ \Leftarrow “: Es gelte $a = \lambda \cdot b$ für ein $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

$$0 = Q(a) = Q(\lambda \cdot b) = \lambda^2 \cdot Q(b) = \lambda^2 \cdot b^T M b$$

Dies führt zu

$$\begin{aligned} a^\perp &= \{x \in V \mid a \bullet x = 0\} = \{x \in V \mid a^T M x = 0\} = \{x \in V \mid \underbrace{\lambda}_{\neq 0} \cdot b^T M x = 0\} \\ &= \{x \in V \mid b^T M x = 0\} = b^\perp \end{aligned}$$

- b) Es gibt bezüglich der gewählten quadratischen Form keinen Unterraum U mit $\dim(U) \geq 2$ und $U \subset \ker(Q)$.

Beweis

Der Kern von Q ist der Kegel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$. Schneidet man diesen Kegel mit der Ebene $x_4 = 1$ erhält man $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$, was der Gleichung einer Kugel entspricht. Diese Kugel ist Basisquadratik des Kegels in dieser Ebene; verbunden mit der Spitze des Kegels ergibt dies den Kegel selbst.

Die Unterräume maximaler Dimension, die in der Kugel liegen, sind Punkte. Verbindet man diese mit der Spitze des Kegels, erhält man Unterräume des Kerns mit Dimension 1.

- c) Isotrope Geraden sind die maximale Menge aus Punkten, von denen der Q-Abstand 0 ist.

Beweis

Gegeben seien drei paarweise verschiedene, nichtkollineare Punkte a, b, c , deren Q-Abstand jeweils Null ist: $Q(a - b) = Q(b - c) = Q(a - c) = 0$. Zwischen diesen drei Punkten kann man drei Verbindungsgeraden g_1, g_2, g_3 erstellen, die dementsprechend isotrope Geraden sind. Dies ist in Abbildung 3.1 veranschaulicht.

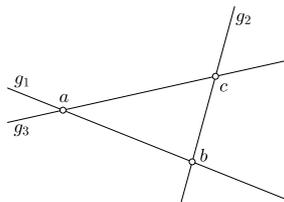


Abb. 3.1.: Veranschaulichung des Beweisschrittes c)

Diese drei Punkte spannen keine Ebene auf, denn in einer Minkowski-Ebene gibt es zwei Parallelbüschel von isotropen Geraden. Damit wäre eine Verbindungsgerade keine isotrope Gerade. Ebenso ist es nicht möglich, dass die Ebene eine Galilei-Ebene (eine Schar von isotropen Geraden) oder eine euklidische Ebene ist (keine isotrope Geraden).

Also sind diese drei Punkte kollinear und liegen auf einer isotropen Gerade.

d) Sind $a, b \in V$ verschieden und ist $Q(a - b) = 0$, so gilt:

$$\begin{aligned} f(a \vee b) &= f(a) \vee f(b) \\ f^{-1}(a \vee b) &= f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b) \end{aligned}$$

Beweis

Aus $Q(a - b) = 0$ folgt mit den Voraussetzungen, dass f eine bijektive Null-Isometrie und $a \neq b$ ist, dass die Geraden $g = a \vee b$ und $f(a) \vee f(b)$ isotrop sind. Weiters kann man nun diese Geraden als die folgenden Punktfolgen betrachten:

$$\begin{aligned} a \vee b &= \{x \mid Q(x - a) = 0 \wedge Q(x - b) = 0\} \\ f(a) \vee f(b) &= \{y \mid Q(y - f(a)) = 0 \wedge Q(y - f(b)) = 0\} \end{aligned}$$

Mit $x \in a \vee b$ beliebig gilt nun aber auch, dass $f(x) - f(a) = 0$ und $f(x) - f(b) = 0$, also $f(x) \in f(a) \vee f(b)$ und somit $f(a \vee b) = f(a) \vee f(b)$.

Seien nun $a = f(x)$ und $b = f(y)$. Mit der Bijektivität von f folgt unmittelbar

$$f^{-1}(a \vee b) = f^{-1}(f(x) \vee f(y)) = f^{-1}(f(x \vee y)) = x \vee y = f^{-1}(a) \vee f^{-1}(b)$$

e) Ist $g = a + \lambda \cdot c$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ eine isotrope Gerade und $x \in V \setminus (a + \lambda \cdot c)$, so gilt:

- 1) $c \bullet (x - a) \neq 0 \Rightarrow \exists^1 y \in a + \lambda \cdot c$ mit $Q(y - x) = 0$
- 2) $c \perp (x - a)$ und $Q(x - a) \neq 0 \Rightarrow \nexists y \in a + \lambda \cdot c$ mit $Q(y - x) = 0$
- 3) $c \perp (x - a)$ und $Q(x - a) = 0 \Rightarrow \forall y \in a + \lambda \cdot c$ ist $Q(y - x) = 0$

Beweis

zu 1) Es ist nun $c \bullet (x - a) = k$ mit $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Angenommen es gibt nun einen gewünschten Punkt $y : y = a + \lambda_y \cdot c$.

$$\begin{aligned}
 0 &= Q(y - x) = Q(a + \lambda_y \cdot c - x) = Q((a - x) + \lambda_y \cdot c) \\
 &= 2 \cdot (a - x) \bullet (\lambda_y \cdot c) + Q(a - x) + Q(\lambda_y \cdot c) \\
 &= 2 \cdot (a - x) \bullet (\lambda_y \cdot c) + Q(a - x) + \lambda_y^2 \cdot \underbrace{Q(c)}_{=0} \\
 &= 2\lambda_y \cdot \underbrace{(a - x) \bullet c}_{=-k} + Q(a - x) \\
 \Rightarrow \lambda_y &= \frac{Q(a - x)}{2k}
 \end{aligned}$$

Es wurde genau ein Wert für λ gefunden, also gibt es genau einen Punkt y mit den gewünschten Eigenschaften.

Anschaulich erklärt bedeutet dies, dass unter der Annahme, dass x und g eine Tangentialebene an den Lichtkegel aufspannen, $a + \lambda \cdot c$ die isotrope Gerade ist; alle anderen isotropen Geraden sind parallel dazu. Ist nun $x - a$ isotrop, gilt auch $x - a \perp x - a$. Gleichzeitig ist $x - a = \lambda \cdot c$ im Fall, dass x in einer Tangentialebene liegt. $\lambda \cdot c \perp x - a$ steht aber im Widerspruch zur Voraussetzung in diesem Fall. Es handelt sich nun also um keine Tangentialebene, sondern um eine Minkowski-Ebene, in der es eine zweite Schar von Nullgeraden gibt. Es existiert nun genau eine isotrope Gerade durch x , die die Gerade g in y schneidet, weil $x \vee y \nparallel g$. Es existiert also genau ein Punkt y mit $Q(x - y) = 0$.

zu 2) Annahme: $\exists y \in a + \mathbb{R} \cdot c : y = a + \lambda \cdot c$.

$$\begin{aligned}
 0 &= Q(y - x) = Q(a + \lambda \cdot c - x) = Q(a - x + \lambda \cdot c) \\
 &= (a - x) \bullet (\lambda c) - Q(a - x) - Q(\lambda c) \\
 &= \lambda \cdot \underbrace{(a - x) \bullet (c)}_{=0} - Q(a - x) - \lambda^2 \cdot \underbrace{Q(c)}_{=0} \\
 &= -Q(a - x)
 \end{aligned}$$

Dies ist ein Widerspruch zur Voraussetzung $Q(a - x) \neq 0$, somit existiert kein y .

Anschaulich erklärt bedeutet $c \perp x - a$ automatisch, dass x in einer Tangentialebene liegt. Eine Tangentialebene ist im Minkowski-Raum eine Hyperebene mit der Gleichung $\vec{n} \cdot X = \vec{n} \cdot P$, also $\vec{n} \cdot (X - P) = 0$. Dies ist gleichbedeutend mit $c \bullet (x - a) = 0$. Diese Ebene hat also den euklidischen Normalvektor $(c_1, c_2, c_3, -c_4)^T$. Da $Q(x - a) \neq 0$ spannen x und $a + [c]$ eine Ebene auf. Diese Ebene muss eine Galilei-Ebene sein mit der Nullgerade $a + [c]$. $x \vee y$ kann nicht isotrop sein, sonst wäre es keine Galilei-Ebene, also existiert kein Punkt y mit $Q(y - x) = 0$.

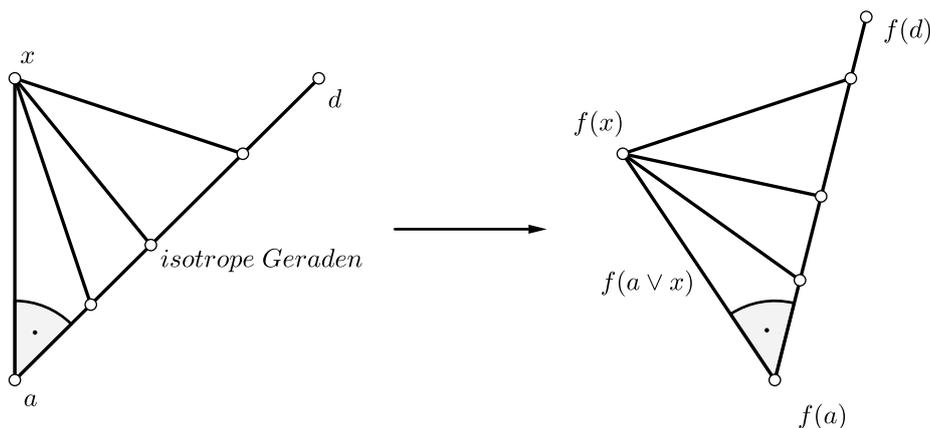


Abb. 3.2.: Veranschaulichung des Beweisschrittes f)

zu 3) Sei $y \in a + [c]$ beliebig.

$$\begin{aligned}
 Q(y - x) &= Q(a + \lambda \cdot c - x) = Q((a - x) + \lambda \cdot c) \\
 &= (a - x) \bullet \lambda \cdot c - Q(a - x) - Q(\lambda \cdot c) \\
 &= \lambda \cdot \underbrace{(a - x) \bullet c}_{=0} - \underbrace{Q(a - x)}_{=0} - \lambda^2 \cdot \underbrace{Q(c)}_{=0} = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Dies gilt also für alle $y \in a + [c]$.

Damit alle Voraussetzungen in diesem Fall erfüllt sind, muss x auf $a + [c]$ liegen.

Damit gilt diese Aussage für alle y .

Insgesamt erhält man also: Durch einen Punkt x außerhalb einer isotropen Geraden gehen im ersten Fall genau eine isotrope Gerade, im zweiten Fall keine und im dritten Fall gibt es unendlich viele, denn x ist schon auf der isotropen Geraden. Die Frage, ob eine Verbindungsgerade von x zu einem Punkt y der isotropen Gerade zu ebendieser normal ist oder nicht ist charakterisiert durch die Anzahl von isotropen Geraden.

f) Für $a, d \in V$ mit $d - a \in \ker(Q) \setminus \{0\}$ und $x \in V \setminus (a \vee d)$ gilt:

$$(x - a \perp d - a) \Leftrightarrow (f(x) - f(a) \perp f(d) - f(a))$$

Beweis

Dies ist in Abbildung 3.2 dargestellt: $d - a \in \ker(Q) \setminus \{0\} \Rightarrow d - a \neq 0 \Rightarrow d \neq a$. Aus (d) folgt, dass jede isotrope Gerade wieder in eine isotrope Gerade übergeht; also ist $f(a \vee d) = f(a) \vee f(d)$ isotrop. Nun wendet man (d) und (e) an auf alle isotropen Geraden durch x , die $a \vee d$ schneiden. Da diese Eigenschaften unter der Abbildung f invariant sind, bleibt auch die Orthogonalität bzw. Nichtorthogonalität zwischen einer isotropen Gerade und einer anderen Gerade erhalten.

g) Für $a, d \in V$ gilt: Ist $a \vee d$ isotrope Gerade, so ist

$$f(a + (d - a)^\perp) = f(a) + (f(d) - f(a))^\perp$$

Beweis

Die Gerade $g = a \vee d$ sei isotrop, dann ist $a + (d - a)^\perp$ die „Tangentialebene“ (Galilei-Ebene) an die Kegelerzeugende g . Einerseits ist schon bekannt, dass $f(a \vee d) = f(a) \vee f(d)$, also

$$[f(a - d)] = [f(a) - f(d)] \stackrel{a)}{\Leftrightarrow} (f(a - d))^\perp = (f(a) - f(d))^\perp$$

Andererseits sei nun $x \in a + (d - a)^\perp$, also $x - a \in (d - a)^\perp$. Dies ist äquivalent zu $x - a \perp d - a \stackrel{f)}{\Leftrightarrow} f(x) - f(a) \perp f(a) - f(d)$. Dies wiederum bedeutet, dass $f(x) - f(a) \in (f(a) - f(d))^\perp$, also $f(x) \in f(a) + (f(a) - f(d))^\perp$.

h) Die Abbildung f bildet parallele isotrope Geraden auf parallele isotrope Geraden ab.

Beweis

Die Geraden $a_1 \vee d_1$ und $a_2 \vee d_2$ seien parallel. Dann sind auch ihre Normalebenen

$$a_1 + (d_1 - a_1)^\perp \text{ bzw. } a_2 + (d_2 - a_2)^\perp$$

parallel, also gleich oder disjunkt. Mit Beweisschritt g) folgt nun, dass auch

$$f(a_1) + (f(d_1) - f(a_1))^\perp \text{ und } f(a_2) + (f(d_2) - f(a_2))^\perp$$

parallel sind. Somit ist auch $(f(d_1) - f(a_1))^\perp = (f(d_2) - f(a_2))^\perp$, woraus

$$[f(d_1) - f(a_1)] = [f(d_2) - f(a_2)]$$

mit a) folgt. Also werden parallele isotrope Geraden auf ebensolche abgebildet.

i) Die Abbildung f bildet Minkowski-Ebenen je auf ebensolche Ebenen ab.

Beweis

Eine Minkowski-Ebene enthält zwei Parallelbüschel von isotropen Geraden, kann also aufgefasst werden als Vereinigung von parallelen isotropen Geraden, welche durch die Punkte einer dazu nicht parallelen isotropen Gerade gehen. Bereits gezeigt wurde, dass isotrope Geraden auf isotrope Geraden abgebildet werden. Außerdem bleibt die Parallelität erhalten. Deshalb ist das Bild einer Minkowski-Ebene wieder eine Minkowski-Ebene.

j) Ist $a + \lambda \cdot c$ Gerade mit $c \notin \ker(Q)$, dann folgt $f(a + \lambda \cdot c)$ ist Gerade.

Beweis

Nach Voraussetzung ist die Gerade keine isotrope Gerade und der Richtungsvektor auch nicht der Nullvektor. So eine Gerade ist Schnitt zweier Minkowski-Ebenen. Wegen i) liegt nun $f(a + \lambda \cdot c)$ einerseits im Bild der einen Minkowski-Ebene und andererseits auch im Bild der anderen Minkowski-Ebene. Somit liegt das Bild der Gerade im Durchschnitt der beiden Bild-Ebenen und ist somit eine Gerade.

k) Die Abbildung f bildet Galilei-Ebenen auf Galilei-Ebenen ab.

Beweis

Auch jede Galilei-Ebene enthält Geraden wie unter j) beschrieben. Galilei-Ebenen beinhalten auch eine Schar von zueinander parallelen isotropen Geraden, die mit h) auf ebensolche abgebildet werden: das Bild einer Galilei-Ebene kann keine euklidische Ebene sein.

l) Die Abbildung f bildet Geraden auf Geraden ab.

Beweis

Für nicht isotrope Geraden wurde dies in j) gezeigt, für isotrope Geraden schon in c).

m) Die Abbildung $g := f - f(0)$ ist linear und erfüllt die Voraussetzungen des Satzes 3.1.

Beweis

$g(a) := f(a) - f(0) \Rightarrow g(0) = f(0) - f(0) = 0$ und da Geraden auf Geraden abgebildet werden folgt mit dem Hauptsatz der affinen Geometrie, dass f eine Affinität ist. Somit ist g linear. Damit kann Satz 3.1 angewendet werden, woraus die Behauptung des Satzes von Alexandrov folgt.

Definition 3.2

Es sei $g : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung mit $g(x) = A \cdot x$.

- (i) Die Abbildung $f(x) = A \cdot x + a$ heißt Affinität.
- (ii) Die Affinität heißt Q -Ähnlichkeit, wenn $Q(g(x)) = \lambda \cdot Q(x)$.

4. Lorentztransformationen

Es sei V der \mathbb{R}^n , $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $x, y \in \mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \dots, x_n)^T$, $y = (y_1, \dots, y_n)^T$.

Definition 4.1

(i) Der quadratische Abstand $Q(x - y) = (x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_{n-1} - y_{n-1})^2 - (x_n - y_n)^2$ heißt auch Lorentz-Minkowski-Abstand von x und y .

(ii) Die Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt Lorentztransformation genau dann, wenn

$$Q(x - y) = Q(f(x) - f(y))$$

Jede Lorentztransformation hat die Gestalt

$$f(x) = L \cdot x + a \tag{4.1}$$

wobei für $a \in \mathbb{R}^n$ und die „Lorentzmatrix“ $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_{11} & \cdots & l_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix},$$

mit $M = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$ gelten soll:

$$L^T \cdot M \cdot L = M \tag{4.2}$$

Es ist dann nämlich mit den Gleichungen (4.1) und (4.2):

$$\begin{aligned} Q(f(x) - f(y)) &= Q(Lx + a - Ly - a) = (Lx - Ly)^T \cdot M \cdot (Lx - Ly) \\ &= (L(x - y))^T \cdot M \cdot (L(x - y)) \\ &= (x - y)^T \cdot L^T \cdot M \cdot L \cdot (x - y) \\ &= (x - y)^T \cdot M \cdot (x - y) \\ &= Q(x - y) \end{aligned}$$

Eine Lorentztransformation ist eine Affinität, sogar eine Q -Ähnlichkeit mit $\lambda = 1$.

Die Lorentzmatrix L ist invertierbar:

Aus $L^T M L = M$ folgt $\det(L^T M L) = \det(M) = -1$. Die linke Seite der letzten Gleichung lässt sich weiter zerlegen: $\det(L^T) \cdot \det(M) \cdot \det(L) = (\det(L))^2 \cdot (-1) = -1$. Also folgt daraus, dass $(\det(L))^2 = 1$ und damit die Determinante der Lorentzmatrix ± 1 und somit ungleich Null ist.

Daraus folgt nun weiters, dass auch

- (1) L^T eine Lorentzmatrix ist,
- (2) L^{-1} eine Lorentzmatrix ist,
- (3) das Produkt $L_1 \cdot L_2$ zweier Lorentzmatrizen L_1, L_2 eine Lorentzmatrix ist.

Dies sieht man so:

- (1) Da L invertierbar ist, folgt aus Gleichung (4.2) durch Umformung

$$L^T = M L^{-1} M^{-1} = M L^{-1} M$$

Betrachtet man nun das Produkt $(L^T)^T M L^T$, so erkennt man:

$$(L^T)^T \cdot M \cdot L^T = L \cdot M \cdot L^T = L \cdot M \cdot (M \cdot L^{-1} \cdot M) = L L^{-1} M = M$$

- (2) $(L^{-1})^T M L^{-1} = (L^{-1})^T M \cdot M L^T M = (L^{-1})^T L^T M = (L \cdot L^{-1})^T M = M$

- (3) Für L_1 und L_2 gilt: $L_1^T \cdot M \cdot L_1 = M$ und $L_2^T \cdot M \cdot L_2 = M$. Betrachte nun

$$(L_1 \cdot L_2)^T \cdot M \cdot (L_1 \cdot L_2) = L_2^T \cdot \underbrace{L_1^T M L_1}_M \cdot L_2 = L_2^T \cdot M \cdot L_2 = M$$

Ist L Lorentzmatrix, so gilt für L^{-1} :

$$\begin{aligned} L^{-1} = M L^T M &= \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{11} & l_{21} & \cdots & l_{n1} \\ l_{12} & l_{22} & \cdots & l_{n2} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ l_{1n} & l_{2n} & \cdots & l_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ 0 & & & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} l_{11} & l_{12} & \cdots & l_{n-1,1} & -l_{n1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ l_{1,n-1} & l_{2,n-1} & \cdots & l_{n-1,n-1} & -l_{n,n-1} \\ -l_{1,n} & -l_{2,n} & \cdots & -l_{n-1,n} & l_{n,n} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Für die Lorentzmatrix L folgt aus $L^T M L = M$ sofort $l_{1n}^2 + \cdots + l_{n-1,n}^2 - l_{nn}^2 = -1$, also

$$l_{nn}^2 = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} l_{i,n}^2 \geq 1$$

Man kann also behaupten:

$$|l_{nn}| \geq 1$$

Die zur Lorentz-Minkowski-Metrik gehörenden Orthogonalitätsrelationen erhält man durch Berechnung von $L^T M L = M$:

$$\sum_{k=1}^{n-1} l_{k,i} \cdot l_{k,j} - l_{n,i} \cdot l_{n,j} = \begin{cases} 1 & i = j \leq n-1 \\ -1 & i = j = n \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

Definition 4.2

Die Gruppe von Abbildungen der Form $f(x) = Lx + a$ mit $L^T M L = M$ ist die Gruppe der Lorentztransformationen.

Dass es sich bei diesen Abbildungen um eine Gruppe handelt, wurde schon gezeigt: Ist L eine Lorentzmatrix, so auch L^{-1} . Das inverse Element ist also gefunden, da die Einheitsmatrix das neutrale Element ist. Außerdem ist die Matrixmultiplikation assoziativ und das Produkt von Lorentzmatrizen ergibt wieder eine Lorentzmatrix.

Die interessante Frage ist nun, wie man alle $n \times n$ -Lorentzmatrizen L finden kann. Dazu wird nun eine geometrische Lösung für den Fall $n = 3$ und den in der speziellen Relativitätstheorie wichtigen Fall $n = 4$ genauer erläutert. Die algebraische Lösung würde darauf beruhen, das Gleichungssystem $L^T M L = M$ zu lösen, was zu n^2 Gleichungen führt.

Im Fall $n = 3$ betrachtet man den \mathbb{R}^2 und insbesondere den Einheitskreis k mit $x^2 + y^2 = 1$. Im projektiven Abschluss des \mathbb{R}^2 , dem \mathbb{R}^3 , hat dieser die Gleichung $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$, da dem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ der Punkt $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ entspricht, wenn $\frac{x_1}{x_3} = x$ und $\frac{x_2}{x_3} = y$ gilt. Für $x_3 = 0$ spricht man von einem Fernpunkt.

Man wählt nun einen Punkt A außerhalb von k und einen Punkt B , ebenfalls außerhalb von k auf der Polaren $\pi(A)$. Der Schnittpunkt der beiden Polaren $\pi(A)$ und $\pi(B)$ sei nun der Punkt C , der innerhalb von k liegt (siehe auch Abbildung 4.1).

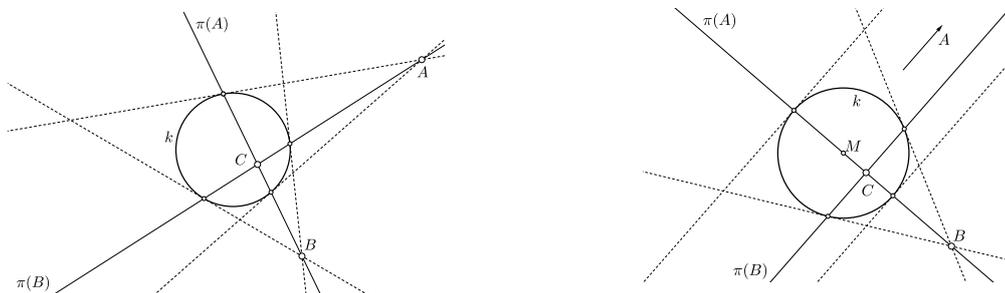


Abb. 4.1.: Veranschaulichung der Punkte A, B und C um Lorentzmatrizen zu bestimmen. Rechts: A ist ein Fernpunkt.

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
 A = (a_1, a_2, a_3) &\Rightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 = a_3x_3 & \pi(A) \\ a_1^2 + a_2^2 > a_3^2 & A \text{ au\u00df}erhalb\ k \end{cases} \\
 B = (b_1, b_2, b_3) &\Rightarrow \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 = a_3b_3 & B \in \pi(A) \\ b_1x_1 + b_2x_2 = b_3x_3 & \pi(B) \\ b_1^2 + b_2^2 > b_3^2 & B \text{ au\u00df}erhalb\ k \end{cases} \\
 C = (c_1, c_2, c_3) &\Rightarrow \begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 = a_3c_3 & C \in \pi(A) \\ b_1c_1 + b_2c_2 = b_3c_3 & C \in \pi(B) \\ c_1^2 + c_2^2 < c_3^2 & C \text{ innerhalb}\ k \end{cases}
 \end{aligned}$$

Da im projektiven Raum die Koordinaten bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda > 0$ bestimmt sind, kann man o.B.d.A. annehmen, dass f\u00fcr die Punkte A, B au\u00df\u00e4rhalb und C innerhalb von k gilt:

$$\begin{aligned}
 a_1^2 + a_2^2 &= a_3^2 + 1 \\
 b_1^2 + b_2^2 &= b_3^2 + 1 \\
 c_1^2 + c_2^2 &= c_3^2 - 1
 \end{aligned}$$

Sei nun

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}.$$

Berechnet man

$$\begin{aligned}
 P^T M P &= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} a_1^2 + a_2^2 - a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 & a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3 \\ a_1b_1 + a_2b_2 - a_3b_3 & b_1^2 + b_2^2 - b_3^2 & b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3 \\ a_1c_1 + a_2c_2 - a_3c_3 & b_1c_1 + b_2c_2 - b_3c_3 & c_1^2 + c_2^2 - c_3^2 \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

so erkennt man anhand der obigen Gleichungen, dass

$$P^T M P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = M,$$

P also eine Lorentzmatrix ist.

Analog kann man nun f\u00fcr $n = 4$ vorgehen: Man w\u00e4hlt einen Punkt A in homogenen Koordinaten, der au\u00df\u00e4rhalb der Einheitskugel $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = x_4^2$ liegt, einen Punkt B auf der Polare $\pi(A)$, der ebenso au\u00df\u00e4rhalb der Einheitskugel liegt. Der Punkt C wird so gew\u00e4hlt, dass er auf dem Schnitt der Polaren von A und B liegt, aber auch au\u00df\u00e4rhalb der Kugel.

Die Polaren $\pi(A), \pi(B)$ und $\pi(C)$ schneiden einander nun genau in einem Punkt D : das homogene

Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

hat unendlich viele (einparametrig) Lösungen, die Vielfache voneinander sind. Da mit homogenen Koordinaten gearbeitet wird, ergibt das also genau einen Punkt D , der innerhalb der Kugel liegt.

$$\begin{aligned} A = (a_1, a_2, a_3, a_4) &\Rightarrow \begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = a_4x_4 & \pi(A) \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = a_4^2 + 1 & A \text{ außerhalb } k \end{cases} \\ B = (b_1, b_2, b_3, b_4) &\Rightarrow \begin{cases} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = a_4b_4 & B \in \pi(A) \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = b_4x_4 & \pi(B) \\ b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = b_4^2 + 1 & B \text{ außerhalb } k \end{cases} \\ C = (c_1, c_2, c_3, c_4) &\Rightarrow \begin{cases} a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = a_4c_4 & C \in \pi(A) \\ b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = b_4c_4 & C \in \pi(B) \\ c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = c_4x_4 & \pi(C) \\ c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = c_4^2 + 1 & C \text{ außerhalb } k \end{cases} \\ D = (d_1, d_2, d_3, d_4) &\Rightarrow \begin{cases} a_1d_1 + a_2d_2 + a_3d_3 = a_4d_4 & D \in \pi(A) \\ b_1d_1 + b_2d_2 + b_3d_3 = b_4d_4 & D \in \pi(B) \\ c_1d_1 + c_2d_2 + c_3d_3 = c_4d_4 & D \in \pi(C) \\ d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = d_4^2 - 1 & D \text{ innerhalb } k \end{cases} \end{aligned}$$

Mit diesen Gleichungen kann man nun analog dem Fall $n = 3$ nachrechnen, dass

$$P = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}.$$

eine Lorentzmatrix ist.

Im Folgenden gelte für den \mathbb{R}^n : $n > 2$.

Definition 4.3

Für $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: „ x ist kleiner oder gleich y “ bzw. „ y ist kausal durch x beeinflussbar“, also $x \leq y$ genau dann wenn $Q(x - y) \leq 0$ und $x_n \leq y_n$.

Satz 4.1

Für alle $a, b \in \mathbb{R}^n, n \geq 2$ gilt: $(\mathbb{R}^n, +, \leq)$ ist eine geordnete abelsche Gruppe.

Beweis

Es wird gezeigt, dass

- (i) Reflexivität: $a \leq a$,
- (ii) Identitätsgesetz: $a \leq b$ und $b \leq a \Rightarrow a = b$,
- (iii) Transitivität: $a \leq b$ und $b \leq c \Rightarrow a \leq c$ und
- (iv) Monotonie der Addition: $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$ gelten.

zu (i) $\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - a_i)^2 - (a_n - a_n)^2 = 0 \leq 0$ und $a_n \leq a_n$

zu (ii) $\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)^2 - (a_n - b_n)^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - a_i)^2 - (a_n - b_n)^2 \leq 0$ weil $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ab + a^2 = (b-a)^2$, außerdem $a_n \leq b_n$ und $b_n \leq a_n$.

zu (iii) Es gelte

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)^2 - (a_n - b_n)^2 &\leq 0 \quad \wedge \quad a_n \leq b_n \\ \sum_{i=1}^{n-1} (b_i - c_i)^2 - (b_n - c_n)^2 &\leq 0 \quad \wedge \quad b_n \leq c_n \end{aligned}$$

Daraus folgt sofort $a_n \leq c_n$. Aus diesen beiden Gleichungen folgt auch weiters

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)^2} &\leq |a_n - b_n| = b_n - a_n \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (b_i - c_i)^2} &\leq |b_n - c_n| = c_n - b_n \end{aligned}$$

Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung folgt nun im \mathbb{R}^{n-1} (man entferne einfach die n -te Koordinate)

$$\begin{aligned} \langle a - c, a - c \rangle &= \langle (a - b) + (b - c), (a - b) + (b - c) \rangle \leq (\|a - b\| + \|b - c\|)^2 \\ \sqrt{\langle a - c, a - c \rangle} &\leq \|a - b\| + \|b - c\| \\ \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - c_i)^2} &\leq b_n - a_n + c_n - b_n = c_n - a_n \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - c_i)^2 &\leq (c_n - a_n)^2 = (a_n - c_n)^2 \\ \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - c_i)^2 - (a_n - c_n)^2 &\leq 0 \end{aligned}$$

zu (iv) Einerseits ist $a_n \leq b_n \Leftrightarrow a_n + c_n \leq b_n + c_n$. Außerdem ist

$$\sum_{i=1}^{n-1} ((a_i + c_i) - (b_i + c_i))^2 - ((a_n + c_n) - (b_n + c_n))^2 = \sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)^2 - (a_n - b_n)^2 \leq 0.$$

Für $a, b \in \mathbb{R}^n, k \in \mathbb{R}$ gilt: $a \leq b \Rightarrow \begin{cases} ka \leq kb & k \geq 0 \\ kb \leq ka & k \leq 0 \end{cases}$, wie man leicht erkennt:

$$\begin{aligned} Q(ka - kb) &= \sum_{i=1}^{n-1} (ka_i - kb_i)^2 - (ka_n - kb_n)^2 = \\ &= k^2 \cdot \left(\sum_{i=1}^{n-1} (a_i - b_i)^2 - (a_n - b_n)^2 \right) = \underbrace{k^2}_{\geq 0} \cdot \underbrace{Q(a - b)}_{\leq 0} \leq 0 \\ a_n \leq b_n &\Rightarrow \begin{cases} ka_n \leq kb_n & k \geq 0 \\ kb_n \leq ka_n & k \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Definition 4.4

Eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt

- (i) Kausalautomorphismus, wenn $a \leq b \Leftrightarrow f(a) \leq f(b)$
- (ii) Zeitumkehr, wenn $a \leq b \Leftrightarrow f(b) \leq f(a)$.

Eine Lorentztransformation, die zugleich Kausalautomorphismus ist, wird auch „orthochrone Lorentztransformation“ oder „Lorentztransformation ohne Zeitumkehr“ genannt.

Ohne Beweis folgt nun:

Satz 4.2

Es sei (l_{ij}) eine Lorentzmatrix. Lorentztransformationen können folgendermaßen charakterisiert werden:

- (1) Eine Lorentztransformation ist entweder orthochron oder eine Zeitumkehr.
- (2) Eine Lorentztransformation ist Kausalautomorphismus genau dann, wenn $l_{nn} \geq 1$
- (3) Eine Lorentztransformation ist eine Zeitumkehr genau dann, wenn $l_{nn} \leq -1$

Zusammenfassung

In der Physik werden vielfach lineare Abbildungen verwendet, um zwischen Bezugssystemen zu wechseln: Galileitransformationen in der klassischen Physik, Lorentztransformationen in der speziellen Relativitätstheorie.

Mit dem Satz von Alexandrov (Satz 3.2) zeigt sich aber, dass es ausreicht vorauszusetzen, dass bei einer Abbildung f Punkte mit Lorentz-Minkowski-Abstand Null wieder in ebensolche übergehen und man damit eine Lorentztransformation (bis auf einen Streckfaktor) erhält. Man muss also keine Linearität voraussetzen.

5. Laguerre-Geometrie

In diesem Abschnitt geht es um den \mathbb{R}^n , $n > 2$ versehen mit dem euklidischen Skalarprodukt und dem euklidischen Abstand $d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$ für $x, y \in \mathbb{R}^n$. Die n -dimensionale Laguerre-Geometrie Λ^n arbeitet mit den Begriffen Speer und Zykel, die im Folgenden definiert werden.

Definition 5.1

Es seien $m \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbb{R} \ni r > 0$.

- (i) $K(m, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, m) = r\}$ heißt Hyperkugel mit Mittelpunkt m und Radius r .
- (ii) $K^-(m, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, m) < r\}$ ist die innere Seite der Hyperkugel $K(m, r)$.
- (iii) $K^+(m, r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid d(x, m) > r\}$ ist die äußere Seite der Hyperkugel $K(m, r)$.

Es seien $a \in \mathbb{R}^n$ und $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (iv) $H(a, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle = \alpha\}$ ist eine Hyperebene.
- (v) $H^+(a, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle > \alpha\}$ ist die eine Seite der Hyperebene,
- (vi) $H^-(a, \alpha) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x \rangle < \alpha\}$ ist die andere Seite der Hyperebene.

Die Definition der Hyperkugel (veranschaulicht in Abbildung 5.1) entspricht der Kreis- bzw. Kugelgleichung aus der Schule, die der Hyperebene (veranschaulicht in Abbildung 5.2) entspricht der wohlbekannten „Normalvektorform“ $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{p}$ aus der Schul-Vektorrechnung, dementsprechend ist a ein Normalvektor der Hyperebene: Seien $x, y \in H(a, \alpha)$, d.h. $\langle a, x \rangle = \alpha$ und $\langle a, y \rangle = \alpha$: $\langle a, x - y \rangle = \langle a, x \rangle - \langle a, y \rangle = 0$, also $a \perp x - y$.

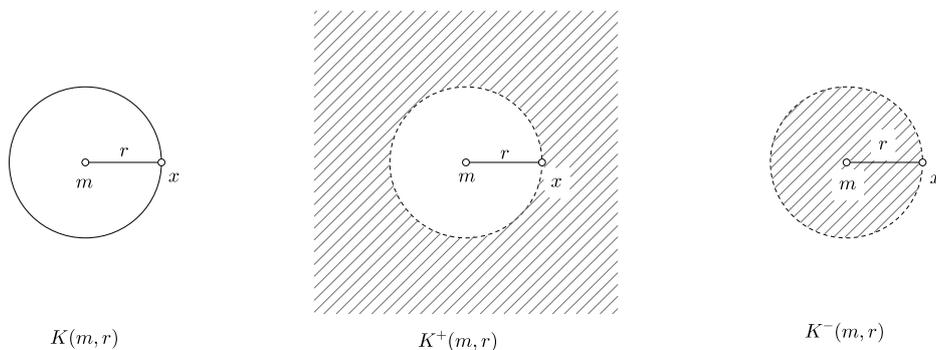


Abb. 5.1.: Eine Hyperkugel im \mathbb{R}^2 und die äußere bzw. innere Seite davon

Desweiteren gibt es für jeden Punkt p einen Projektionspunkt $q \in H(a, \alpha)$ von p längs a .

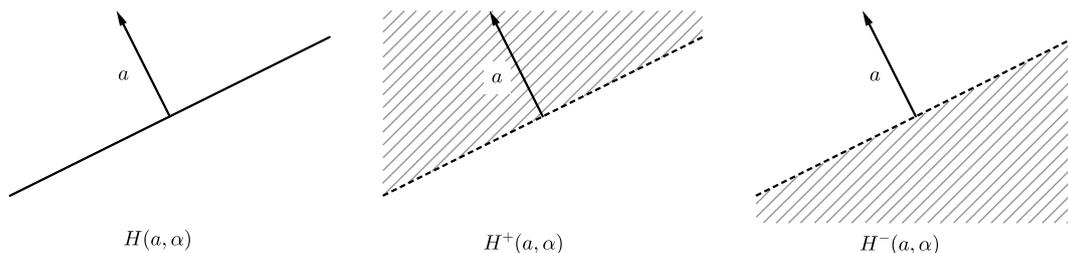


Abb. 5.2.: Eine Hyperebene im \mathbb{R}^2 und die eine bzw. andere Seite davon

Es gilt also: $p = q + \lambda \cdot a$. Seien nun a und α beliebig, aber fest gewählt.

$$p = q + \lambda(p) \cdot a \Rightarrow \langle p, a \rangle = \langle q, a \rangle + \lambda(p) \cdot \langle a, a \rangle \Leftrightarrow \lambda(p) = \frac{\langle p, a \rangle - \alpha}{\langle a, a \rangle}$$

Nun ist erkennbar, dass $H^+(a, \alpha)$ die Menge aller Punkte p ist, für die $\lambda(p) > 0$ ist, $H^-(a, \alpha)$ ist die Menge aller Punkte p , für die $\lambda(p) < 0$ ist.

Für den euklidischen Abstand von p zu q gilt:

$$\begin{aligned} d(p, q)^2 &= \langle p - q, p - q \rangle = \langle q + \lambda(p) \cdot a - q, q + \lambda(p) \cdot a - q \rangle \\ &= \langle \lambda(p) \cdot a, \lambda(p) \cdot a \rangle = \lambda(p)^2 \cdot \langle a, a \rangle \end{aligned}$$

also $d(p, q) = |\lambda(p)| \cdot \sqrt{\langle a, a \rangle}$.

Ist a ein Einheitsvektor, so ist $d(p, q) = |\lambda(p)| = \langle p, a \rangle - \alpha$. Setzt man nun

$$\delta_a(p, q) = \begin{cases} +d(p, q) & p \in H^+(a, \alpha) \\ -d(p, q) & p \in H^-(a, \alpha) \end{cases}, \text{ so ist in diesem Fall } \delta_a(p, q) = \langle p, a \rangle - \alpha.$$

Definition 5.2

- (i) Das geordnete Paar $S = (H, T)$ heißt Speer, wenn H eine Hyperebene des \mathbb{R}^n und T eine Seite dieser Hyperebene ist.
- (ii) Das geordnete Paar $z = (K, T)$ ist ein (Laguerre-) Zykel von Λ^n , wenn K eine Hyperkugel und T eine Seite der Hyperkugel ist.

Definition 5.3

Ein Speer S berührt einen Zykel z genau dann, wenn

- (i) der Punkt $z \in \mathbb{R}^n$ auf der Trägerhyperebene H von S liegt.
- (ii) für den Zykel $z = (K, T_K)$ und den Speer $S = (H, T_H)$ gilt, dass H die Tangentialhyperebene von K ist und $T_K \subset T_H$ oder $T_H \subset T_K$.

In Abbildung 5.3 sind zwei Fälle dargestellt, in denen ein Speer und ein Zykel einander berühren.

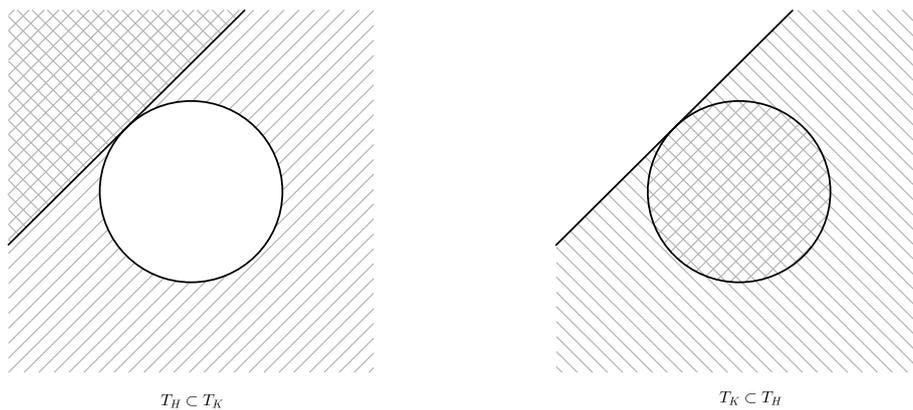


Abb. 5.3.: Berührung von Speer und Zykel

Man kann einen Zykel als eine Menge von Speeren auffassen (siehe Abbildung 5.4), und auch umgekehrt einen Speer als eine Menge von Zykeln:

$$z = \{S \mid S \text{ berührt } z\} \quad \text{bzw.} \quad S = \{z \mid z \text{ berührt } S\}$$

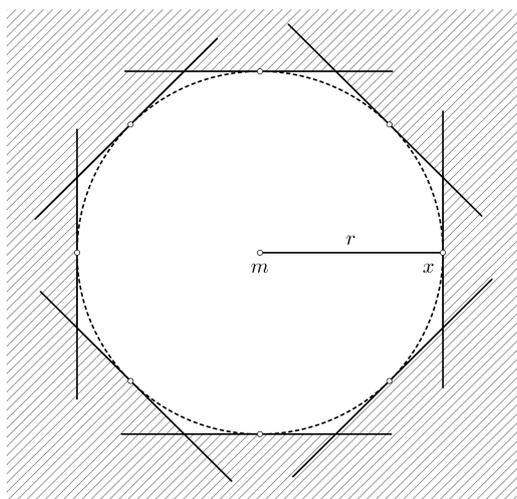


Abb. 5.4.: Zykel z als Menge von Speeren dargestellt

Definition 5.4

Es sei Z^n die Menge der Zykel von Λ^n . Eine Laguerretransformation l ist eine Bijektion

$$l : Z^n \rightarrow Z^n,$$

die Speere auf Speere abbildet.

Nachdem Zykel als Menge von Speeren aufgefasst werden können bedeutet dies, dass Berührung von Speer S und Zykel z unter der Abbildung l invariant ist.

5.1. Zyklographisches Modell

Definition 5.5

Die zyklographische Projektion π von Λ^n ist eine Bijektion:

$$\pi : Z^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1},$$

$$z \mapsto \begin{cases} (z_1, \dots, z_n, 0)^T & \text{für } z = (z_1, \dots, z_n)^T \in \mathbb{R}^n \\ (m_1, \dots, m_n, +r)^T & \text{für } z = (K(m, r), K^+(m, r)) \\ (m_1, \dots, m_n, -r)^T & \text{für } z = (K(m, r), K^-(m, r)) \end{cases}$$

Betrachtet man die zyklographische Projektion $\pi : Z^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ und verbindet die dem Zykel z zugrunde liegende Hyperkugel mit dem Punkt $\pi(z)$, so erhält man einen Kegel, dessen Erzeugenden einen Winkel von 45° mit der x_1x_2 -Ebene einschließen, wie in Abbildung 5.5 ersichtlich ist.

Definition 5.6

- (i) Man nennt $\pi(z) = (z_1, \dots, z_{n+1})^T$ bzw. $(z_0, z_1, \dots, z_{n+1})^T$ mit $z_0 = 1$ Zykelkoordinaten von z .
- (ii) Die Speerkoordinaten für den Speer $S = (H(a, \alpha), H^+(a, \alpha))$ werden angegeben mit $(-\alpha, a_1, \dots, a_n, \|a\|)^T$.
- (iii) Die Speerkoordinaten für den Speer $S = (H(a, \alpha), H^-(a, \alpha))$ werden angegeben mit $(-\alpha, a_1, \dots, a_n, -\|a\|)^T$.

Die Speerkoordinaten sind homogene Koordinaten.

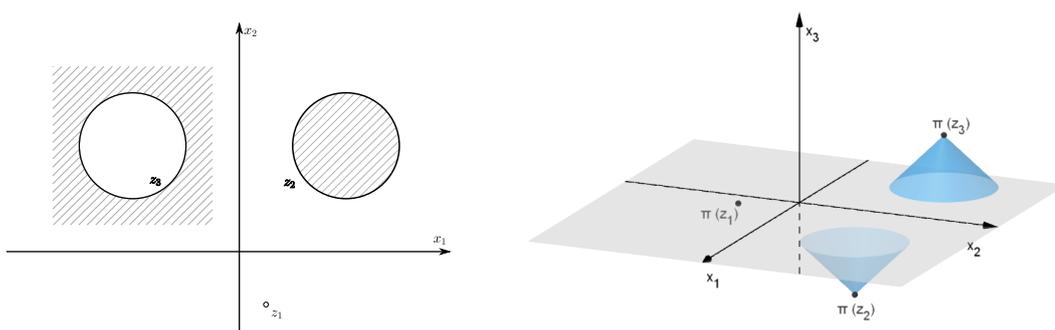


Abb. 5.5.: Zyklographische Projektion dreier Zykel z_1, z_2, z_3

Satz 5.1

Es seien S ein Speer und z ein Zykel. Diese berühren einander genau dann, wenn das euklidische Skalarprodukt der Zykel- und Speerkoordinaten 0 ergibt:

$$S \text{ berührt } z \Leftrightarrow \langle s, z \rangle = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$$

Beweis

Der Speer wird durch die homogenen Speerkoordinaten $(s_0, s_1, \dots, s_{n+1}) = (-\alpha, a_1, \dots, a_n, \pm\|a\|)$ repräsentiert, wenn $\langle a, x \rangle = \alpha$ die zugrundeliegende Hyperebene ist. Der Zykel wird durch die Zykelkoordinaten $(1, z_1, \dots, z_{n+1})$ dargestellt, wobei $m = (z_1, \dots, z_n)$ der Mittelpunkt und $z_{n+1} = \pm r$ ist.

Fall 1: Der Zykel z ist ein Punkt, also $z_{n+1} = 0$.

$$S \text{ berührt } z \Leftrightarrow z \in S \Leftrightarrow s_0 + s_1 z_1 + \dots + s_n z_n = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$$

Fall 2: Es sei $z_{n+1} > 0$, also $z = (K(m, r), K^+(m, r))$.

O.B.d.A. ist $s_{n+1} = 1 \Rightarrow \|a\| = 1 \Rightarrow S = (H(a, -s_0), H^+(a, -s_0))$.

„ \Rightarrow “ Berühren nun Speer und Zykel einander, so muss der Mittelpunkt des Zyklus in $H^-(a, -s_0)$ liegen. Somit gilt nun weiters für den Berührungspunkt n zwischen Speer und Zykel:

$$\delta_a(m, n) = -r = -d(m, n) = -|\langle a, m \rangle - \alpha| = -|\langle a, m \rangle + s_0| = \langle a, m \rangle + s_0$$

und somit ist $\sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$.

„ \Leftarrow “ Aus $\sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$ folgt nun:

$$s_0 + \langle a, m \rangle + r = \underbrace{-r}_{=\delta_a(m, n)} + r = 0 \Rightarrow m \in H^-(a, -s_0) \Rightarrow T_H \subset T_K \Rightarrow S \text{ berührt } z$$

Fall 3: Es sei $z_{n+1} < 0$, also $z = (K(m, r), K^-(m, r))$. O.B.d.A. sei $s_{n+1} = 1$.

„ \Rightarrow “ Wenn Speer und Zykel einander berühren, liegt in diesem Fall m in $H^+(a, -s_0)$. Also ist $\delta(m, n) = r$, was in diesem Fall $-z_{n+1}$ entspricht. Somit ist $\sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$.

„ \Leftarrow “ Aus $\sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$ folgt $r = \langle a, m \rangle + s_0 = \delta_a(m, n)$. Dies wiederum bedeutet, dass S und z einander berühren.

Definition 5.7

Gegeben seien zwei Hyperebenen $H(a, \alpha)$ und $H(b, \beta)$ des \mathbb{R}^{n+1} .

- (i) Der Winkel zwischen diesen beiden Hyperebenen ist der kleinste nichtnegative Winkel φ , für den gilt:

$$\cos(\varphi) = \frac{|\langle a, b \rangle|}{\|a\| \cdot \|b\|}$$

- (ii) Eine 45° -Hyperebene $H(a, \alpha)$ schließt mit der Ebene $z_{n+1} = 0$ einen Winkel von 45° ein.

Satz 5.2

Die Hyperebene

$$a_0 + \sum_{i=1}^{n+1} a_i \cdot x_i = 0$$

ist die Gleichung einer 45° -Hyperebene, genau dann wenn

$$a_{n+1}^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$$

Beweis

Für die Ebene $z_{n+1} = 0$ ist der Normalvektor der Hyperebene gegeben durch $(0, \dots, 0, 1)^T$.

$$\begin{aligned} \cos(45^\circ) &= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{|\langle a, (0, \dots, 0, 1)^T \rangle|}{\|a\|} = \frac{|a_{n+1}|}{\|a\|} \\ &\Leftrightarrow \|a\|^2 = 2 \cdot a_{n+1}^2 \\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n a_i^2 = a_{n+1}^2 \end{aligned}$$

Anders ausgedrückt: Ist a der Normalvektor der Hyperebene H , so ist diese Hyperebene genau dann eine 45° -Hyperebene, wenn $Q(a) = 0$. Aus Satz 5.1 und Satz 5.2 kann nun gefolgert werden, dass die Menge der Zyklen $z = (1, z_1, \dots, z_{n+1})^T$ die einen gegebenen Speer S berühren durch die Hyperebene $s_0 + \sum_{i=1}^{n+1} s_i \cdot z_i = 0$ gegeben ist, was wegen $s_{n+1} = \|a\|$ einer 45° -Hyperebene entspricht. Insbesondere bedeutet dies, dass wenn der Speer S den Zykel z berührt, z in der 45° -Hyperebene liegt.

Zusammengefasst kann das „zyklographische Modell“ der Laguerre-Geometrie Λ^n beschrieben werden durch:

- Die Punkte des \mathbb{R}^{n+1} sind die Zyklen von Λ^n .
- Die 45° -Hyperebenen des \mathbb{R}^{n+1} sind die Speere von Λ^n .

Definition 5.8

- (i) Für zwei Zykel x, y von Λ^n mit $x = (1, x_1, \dots, x_{n+1})^T$, $y = (1, y_1, \dots, y_{n+1})^T$ heißt $Q(x - y)$ auch Potenz der Zykel.
- (ii) Zwei Zykel von Λ^n berühren einander genau dann, wenn sie identisch sind ($x = y$) oder wenn es genau einen Speer S gibt, der x und y berührt.

Die Berührung zweier Zykel ist in Abbildung 5.6 dargestellt.

Satz 5.3

Für die Potenz zweier gegebener Zykel x, y von Λ^n gilt:

- (1) Die Potenz der beiden Zykel ist nicht negativ genau dann, wenn es einen Speer gibt, der beide Zykel berührt.
- (2) Die Potenz der beiden Zykel ist Null genau dann, wenn es genau einen Speer gibt, der beide Zykel berührt.
- (3) Die Potenz der beiden Zykel ist negativ genau dann, wenn es keinen Speer gibt, der beide Zykel berührt.

Beweis

- (1) „ \Rightarrow “ Es sei $Q(x - y) \geq 0$. Unter der Annahme, dass $x_i = y_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ folgt daraus: $Q(x - y) = -(x_{n+1} - y_{n+1})^2 \geq 0$, also $(x_{n+1} - y_{n+1})^2 \leq 0$ und dementsprechend $x_{n+1} = y_{n+1}$. Es ist unter dieser Annahme also $x = y$.

Sei nun $a := (x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)^T \neq (0, \dots, 0)^T$. Sei $b \in \mathbb{R}^n$ so gewählt, dass $\|b\| = 1$ und $\langle a, b \rangle = 0$ gilt. Weiters definiert man eine Linearkombination $s = (s_1, \dots, s_n)^T$ von a und b und ein s_0 :

$$s := \frac{1}{\langle a, a \rangle} \cdot \left(\|a\| \cdot \sqrt{Q(x - y)} \cdot b - (x_{n+1} - y_{n+1}) \cdot a \right) \quad (5.1)$$

$$s_0 := - \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i - x_{n+1} \quad (5.2)$$

Es gilt nun mit $r := x_{n+1} - y_{n+1}$:

$$\begin{aligned} \langle s, s \rangle &= \frac{1}{\langle a, a \rangle^2} \cdot \left\langle \|a\| \cdot \sqrt{Q(x - y)} \cdot b - r \cdot a, \|a\| \cdot \sqrt{Q(x - y)} \cdot b - r \cdot a \right\rangle \\ &= \frac{1}{\langle a, a \rangle^2} \cdot \left(\|a\|^2 \cdot Q(x - y) \cdot \underbrace{\langle b, b \rangle}_{=1} - 2 \cdot \|a\| \cdot \sqrt{Q(x - y)} \cdot r \cdot \underbrace{\langle a, b \rangle}_{=0} + r^2 \cdot \langle a, a \rangle \right) \\ &= \frac{Q(x - y) + (x_{n+1} - y_{n+1})^2}{\langle a, a \rangle} = \frac{1}{\langle a, a \rangle} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = \frac{1}{\|a\|^2} \cdot \|a\|^2 = 1 \end{aligned}$$

Weiters kann man unter Beachtung von $\langle a, b \rangle = 0$ berechnen:

$$\langle s, a \rangle = - \frac{1}{\langle a, a \rangle} \cdot (x_{n+1} - y_{n+1}) \cdot \langle a, a \rangle = -(x_{n+1} - y_{n+1}).$$

Somit berührt der Speer $S = (s_0, s_1, \dots, s_n, 1)$ sowohl den Zykel x als auch y :

$$\begin{aligned} S \text{ berührt } x &\Leftrightarrow \sum_{i=0}^{n+1} s_i \cdot x_i = s_0 + \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i + s_{n+1} x_{n+1} \\ &\stackrel{(5.2)}{=} - \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i - x_{n+1} + \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i + 1 \cdot x_{n+1} = 0 \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Nach Voraussetzung existiert ein Speer S mit $(s_0, s_1, \dots, s_n, 1)^T$, der sowohl den Zykel x als auch y berührt:

$$S \text{ berührt } x \Leftrightarrow s_0 + \sum_{i=1}^n s_i \cdot x_i + x_{n+1} = 0 \quad (5.3)$$

$$S \text{ berührt } y \Leftrightarrow s_0 + \sum_{i=1}^n s_i \cdot y_i + y_{n+1} = 0 \quad (5.4)$$

$$\sum_{i=1}^n s_i^2 = 1$$

Subtraktion der ersten beiden Zeilen und anschließendes Quadrieren ergibt mit Cauchy-Schwarz:

$$(x_{n+1} - y_{n+1})^2 = \left(\sum_{i=1}^n s_i \cdot (x_i - y_i) \right)^2 \leq \underbrace{\sum_{i=1}^n s_i^2}_{=1} \cdot \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \quad (5.5)$$

Somit erhält man

$$Q(x - y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 - (x_{n+1} - y_{n+1})^2 \geq \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 - \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = 0$$

(2) „ \Rightarrow “ Aus $Q(x - y) = 0$ folgt mit dem 1. Fall, dass ein Speer $S = (s_0, s_1, \dots, s_n, 1)$ existiert, der x und y berührt. Daraus folgt nun $\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 = (x_{n+1} - y_{n+1})^2$. Dies bedeutet, dass in (5.5) Gleichheit herrscht, also $s := (s_1, \dots, s_n)^T$ und $(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)^T$ linear abhängig sind: $(x_1 - y_1, \dots, x_n - y_n)^T = \lambda \cdot s \Leftrightarrow x_i = y_i + \lambda \cdot s_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$. Einsetzen in Gleichung (5.3) ergibt:

$$\begin{aligned} s_0 + \sum_{i=1}^n s_i \cdot (\lambda s_i + y_i) + x_{n+1} &= 0 \\ s_0 + \lambda \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^n s_i^2}_{=1} + \sum_{i=1}^n s_i \cdot y_i + x_{n+1} &= 0 \stackrel{(5.4)}{\Leftrightarrow} \\ s_0 + \lambda + (-y_{n+1} - s_0) + x_{n+1} &= 0 \Leftrightarrow \lambda = y_{n+1} - x_{n+1} \end{aligned}$$

Damit ist der Speer S eindeutig bestimmt.

„ \Leftarrow “ Für $x = y$ ist $Q(x - y) = 0$ offensichtlich. Sei nun $x \neq y$: Es existiert genau ein Speer, der sowohl x als auch y berührt. Ersetzt man nun in (5.1) b durch $-b$, so muss es sich

also noch immer um denselben Speer handeln. Gleichung (5.1) umgeformt ergibt nun

$$\langle a, a \rangle \cdot s + a \cdot (x_{n+2} - y_{n+1}) = b \cdot \|a\| \cdot \sqrt{Q(x-y)} \quad \text{und}$$

$$\langle a, a \rangle \cdot s + a \cdot (x_{n+2} - y_{n+1}) = -b \cdot \|a\| \cdot \sqrt{Q(x-y)}$$

Also muss $Q(x-y) = 0$ gelten.

(3) Dieser Fall begründet sich leicht mit Fall 1: $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$.

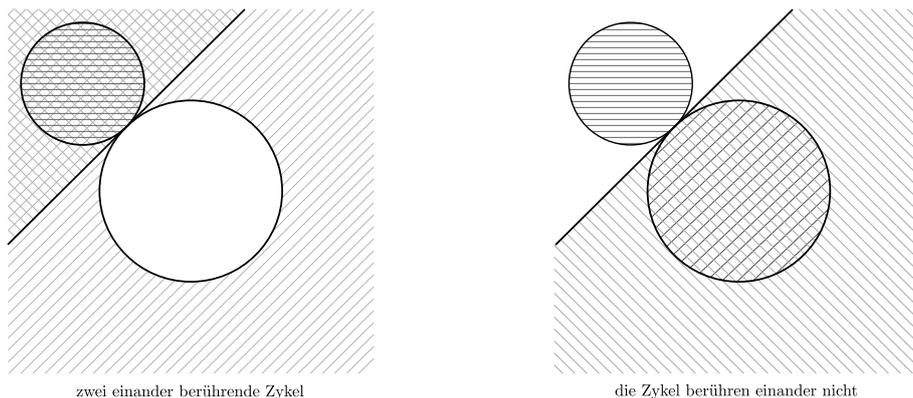


Abb. 5.6.: Links: einander berührende Zyklen mit genau einem gemeinsamen, berührenden Speer. Rechts: Die zugrunde liegenden Kreise berühren einander, die Zyklen aber nicht.

Berühren zwei Zyklen x und y einander, so ist dies äquivalent dazu, dass auch ihre Bilder unter einer Laguerretransformation f einander berühren. Denn nach Definition 5.8 gibt es dann genau einen Speer S der beide Zyklen berührt und wegen Definition 5.4 bleibt die Berührrelation unter einer Laguerretransformation erhalten.

5.2. Fundamentalsatz der Laguerre-Geometrie

Der Fundamentalsatz der Laguerre-Geometrie, der alle Laguerretransformationen von Λ^n angibt, kann auf den Satz von Alexandrov zurückgeführt werden.

Satz 5.4: Der Fundamentalsatz der Laguerre-Geometrie

Es seien $a \in \mathbb{R}^{n+1}$, $L \in \mathbb{R}^{(n+1) \times (n+1)}$, $k \in \mathbb{R}$, o.B.d.A gelte $k > 0$, und die Abbildung f habe die Form

$$f(x) = k \cdot L \cdot x + a$$

Die Abbildung f ist eine Laguerretransformation von Λ^n in den Zyklenkoordinaten $x = (1, x_1, \dots, x_{n+1})^T$ genau dann, wenn $L^T M L = M$ mit $M = \text{diag}(1, \dots, 1, -1)$.

Beweis

Für den \mathbb{R}^n bzw. Λ^{n-1} mit $n \geq 3$ gilt:

Unter einer Laguerretransformation f bleibt die Berührung zweier Zyklen erhalten. Dies ist mit Satz 5.3 gleichwertig damit, dass die Potenz der Zyklen und die Potenz der Bildzyklen jeweils Null ist. Somit ist f mit Definition 3.1 eine Null-Isometrie.

Es sind die Voraussetzungen für den Satz von Alexandrov erfüllt und es gilt: $g(x) = f(x) - f(0)$ ist linear und $\exists \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} : Q(g(x)) = \lambda \cdot Q(x)$.

Die Abbildung f ist eine Affinität und nun auch eine Q -Ähnlichkeit. Es ist nun mit $g(x) = A \cdot x$ und mit $A = k \cdot L$:

$$\lambda \cdot x^T M x = \lambda \cdot Q(x) = Q(g(x)) = (Ax)^T \cdot M \cdot (Ax) = x^T \cdot A^T M A \cdot x$$

Es muss also $\lambda = k^2$ und $M = L^T M L$ gelten.

Es sei nun $k > 0$ und $L^T M L = M$. Berühren zwei Zyklen x und y einander, so gilt $Q(x - y) = 0$. Berechnung von $Q(f(x) - f(y))$ liefert:

$$\begin{aligned} Q(kLx - kLy) &= (kLx - kLy)^T M (kLx - kLy) \\ &= k^2 \cdot (x - y)^T L^T M L (x - y) \\ &= k^2 \cdot (x - y)^T M (x - y) = 0 \end{aligned}$$

Somit berühren einander auch die Zyklen $f(x)$ und $f(y)$ und f ist Laguerretransformation.

Satz 5.5

Für die Laguerretransformation f und alle Zyklen x, y gilt:

$$Q(x - y) = k^2 \cdot Q(f(x) - f(y))$$

Beweis

Nach dem was bisher gezeigt wurde gilt, dass nur einander berührende Zyklen auf einander berührende Zyklen abgebildet werden. Somit ist Satz 3.1 anwendbar und daraus folgt unmittelbar die Behauptung mit $\lambda = k^2$.

Definition 5.9

Eine Laguerrespiegelung l an der Hyperebene H mit $H := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid u \bullet x = u_0\}$, wobei $u_0 \in \mathbb{R}$ beliebig aber fest und $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $Q(u) \neq 0$ sind, ist im zyklographischen Modell definiert durch

$$l(x) = x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u$$

Die Spiegelung l ist eine Involution:

$$\begin{aligned}
 l \circ l = id &\Leftrightarrow l(x) = y \quad \wedge \quad l(y) = x : \\
 l(x) &= x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u = y \\
 l(y) &= y + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet y}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet (x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u)}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x - 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u \bullet u}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x - 2 \cdot u_0 + 2 \cdot u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= x + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u + 2 \cdot \frac{-u_0 + u \bullet x}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= x
 \end{aligned}$$

Der quadratische Abstand zwischen zwei Punkten p und q und den Bildpunkten $l(p)$ und $l(q)$ bleibt bei einer Laguerrespiegelung erhalten: $Q(p - q) = Q(l(p) - l(q))$:

$$\begin{aligned}
 l(p) - l(q) &= p + 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet p}{u \bullet u} \cdot u - q - 2 \cdot \frac{u_0 - u \bullet q}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= p - q + 2 \cdot \frac{-u \bullet p + u \bullet q}{u \bullet u} \cdot u \\
 &= p - q - 2 \cdot \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \cdot u \\
 Q(l(p) - l(q)) &= \left(p - q - 2 \cdot \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \cdot u \right) \bullet \left(p - q - 2 \cdot \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \cdot u \right) \\
 &= (p - q) \bullet (p - q) - 4 \cdot \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \cdot (p - q) \bullet u + 4 \cdot \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \frac{u \bullet (p - q)}{u \bullet u} \cdot u \bullet u \\
 &= (p - q) \bullet (p - q) \\
 &= Q(p - q)
 \end{aligned}$$

Die Laguerrespiegelung ist also eine Laguerretransformation der Form $f(x) = L \cdot x + a$.

Teil III.

Anwendungen

Im dritten und letzten Teil der Diplomarbeit geht es nun darum darzulegen, wo man die bisher gewonnenen Erkenntnisse anwenden kann.

Kapitel 6 widmet sich einer geometrischen Anwendung: der Lösung des Apollonischen Kreisproblems (vgl. [7, S. 154] oder [8, S. 48]). In der Diplomarbeit werden allerdings zwei gänzlich andere Methoden als in dieser Literatur angegeben vorgestellt. Zuerst wird eine algebraische Lösung erklärt, die man sehr einfach mit Schulwissen herleiten und auch nachvollziehen kann. Die zweite Methode (nach [9, S. 204]) verwendet die in Kapitel 5 vorgestellte Laguerre-Geometrie, genauer gesagt die zyklographische Projektion und die Laguerrespiegelung. Die Vorgehensweise wird von vielen Abbildungen begleitet.

Zwei der Dateien, die im Rahmen der Ausarbeitung des Kapitels zur Lösung des Apollonischen Kreisproblems erstellt wurden, wurden unter www.geogebra.org als Aktivität angelegt und sind unter den folgenden Links zu finden:

Die unter <https://www.geogebra.org/m/upkgf79d> zu findende Datei wurde mit der algebraischen Lösung erstellt.

In der unter <https://www.geogebra.org/m/qnqzwnpv> zu findenden Datei wurde das Problem laguerregeometrisch gelöst.

Kapitel 7 beschäftigt sich mit der speziellen Relativitätstheorie, genauer gesagt mit der Veranschaulichung ebendieser in Minkowski-Diagrammen. Eine Einführung in die spezielle Relativitätstheorie erhält man in [10]. Die Theorie selbst wird nur kurz gestreift. Der Fokus liegt auf der Darstellung von Weltlinien und dem relativistischen Effekt „Zeitdilatation“ im Minkowski-Diagramm. Dazu wurden einerseits für das Unterkapitel 7.1 wieder [6, S. 222 – 231], aber auch die Originalarbeiten von Einstein (in [11]) und Minkowski (in [12]) verwendet, andererseits wurden für Unterkapitel 7.2 [13, S. 523 – 539], [14, S. 5 – 35, 103 – 113] und [15, S. 867 – 875] verwendet.

6. Das Apollonische Kreisproblem

Eine Aufgabenstellung von Apollonius von Perga (ungefähr 200 v.Chr.) lautet: Finde einen Kreis, der drei gegebene Kreise berührt.

Für dieses Problem gibt es unmögliche Situationen (z.B. die Kreise sind konzentrisch mit paarweise verschiedenen Radien), aber auch spezielle Situationen (die Mittelpunkte der gegebenen Kreise sind kollinear und alle drei Radien sind gleich groß). Im Allgemeinen gibt es jedoch 8 Lösungen, die in Abbildung 6.1 dargestellt sind:

- der Lösungskreis berührt die gegebenen Kreise von außen
- der Lösungskreis berührt die gegebenen Kreise von innen
- der Lösungskreis berührt zwei der gegebenen Kreise von außen und den dritten von innen (drei Möglichkeiten)
- der Lösungskreis berührt zwei der gegebenen Kreise von außen und den dritten von innen (drei Möglichkeiten)

In der erwähnten Abbildung sind die gegebenen Kreise durchgezogen samt ihrer Mittelpunkte dargestellt. Die Lösungskreise, die strichpunktiert dargestellt sind, sind jene Lösungskreise, die die gegebenen Kreise nur von außen bzw. nur von innen berühren. Punktiert dargestellt sind jene drei Möglichkeiten von Lösungskreisen, die zwei der gegebenen Kreise von außen und einen von innen berühren. Strichliert dargestellt sind jene drei Möglichkeiten, die zwei der gegebenen Kreise von innen und einen von außen berühren.

Klassisch formuliert ist das Apollonische Kreisproblem mit Lineal und Zirkel zu lösen, in der Literatur findet man unzählige Lösungsmöglichkeiten, etwa durch Inversion. In dieser Arbeit werden ein algebraisches Lösungsverfahren und eine laguerregeometrische Methode vorgestellt.

6.1. Algebraische Lösung

Aus der Schulmathematik ist die Gleichung eines Kreises mit dem Mittelpunkt $M(m_1, m_2)$ und dem Radius r bekannt:

$$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 = r^2.$$

Hier sind mit (x_1, x_2) alle Punkte gemeint, die von M den Abstand r haben, die also auf der Kreislinie liegen. Nun überlegt man sich Bedingungen die für den Mittelpunkt $M_L(x, y)$ eines Lösungskreises gelten müssen — abhängig davon, ob zwei Kreise einander von außen oder von innen berühren. In Abbildung 6.2 sind die beiden Fälle dargestellt:

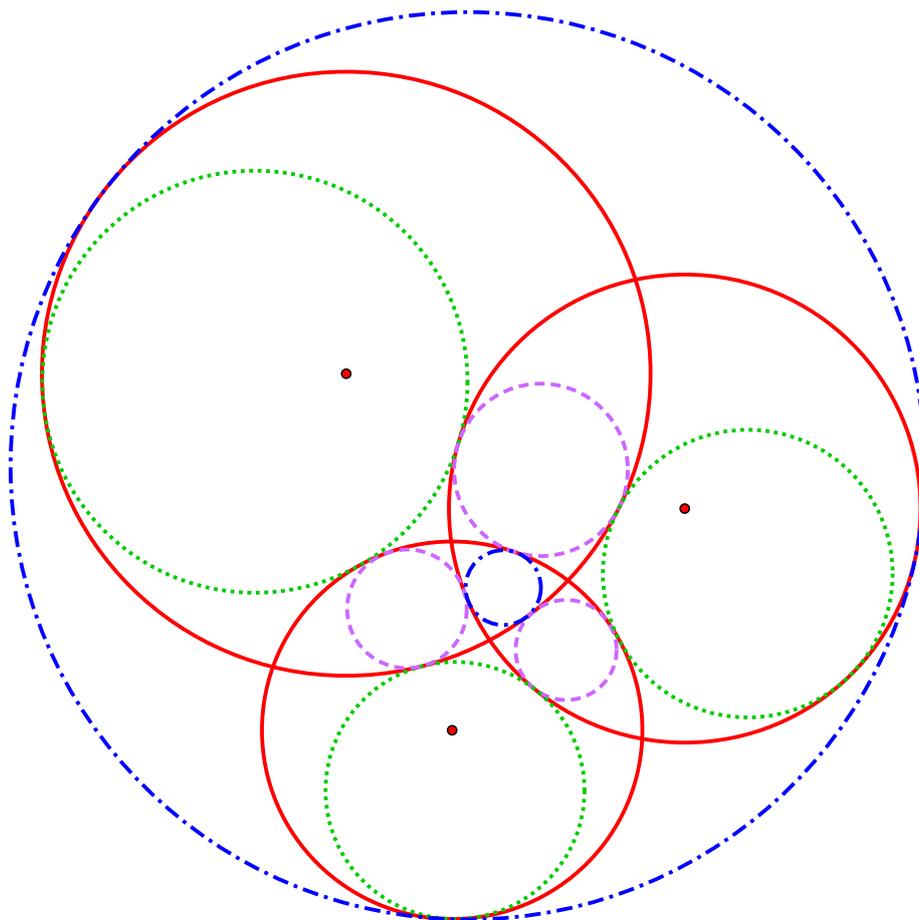


Abb. 6.1.: Das Apollonische Kreisproblem mit 8 Lösungen.

- Berühren einander ein gegebener Kreis und der Lösungskreis von außen, so ist der Abstand des Mittelpunktes M_i des gegebenen Kreises k_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, vom Mittelpunkt des Lösungskreises M_L genau die Summe der Radien des gegebenen Kreises und des Lösungskreises. Es ergibt sich also der Satz des Pythagoras zu

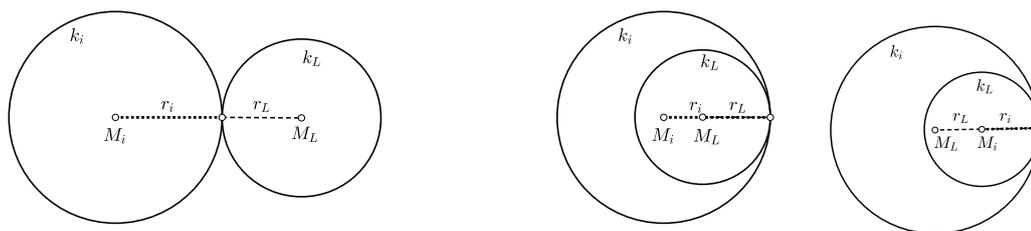
$$(x - m_{i,1})^2 + (y - m_{i,2})^2 = (r_L + r_i)^2$$

- Berühren einander nun ein gegebener Kreis und der Lösungskreis von innen, so entspricht die Differenz der Radien dem Abstand der Mittelpunkte. Hierbei ist es egal ob der Lösungskreis oder der gegebene Kreis der innere Kreis ist, denn im Satz des Pythagoras

$$(x - m_{i,1})^2 + (y - m_{i,2})^2 = (r_L - r_i)^2$$

wird das Quadrat der Abstände und somit auch das Quadrat der Differenz der Radien verwendet.

Je nach Berührungsfall erhält man nun das folgende Gleichungssystem in den Unbekannten x, y, r_L ,



$$(x - m_{i,1})^2 + (y - m_{i,2})^2 = (r_L + r_i)^2$$

$$(x - m_{i,1})^2 + (y - m_{i,2})^2 = (r_L - r_i)^2$$

Abb. 6.2.: Zwei einander von außen (links) bzw. zwei einander von innen (rechts) berührende Kreise

wobei für $i \in \{1, 2, 3\}$ gilt:

$$(x - m_{1,1})^2 + (y - m_{1,2})^2 = (r_L + \delta_1 \cdot r_1)^2$$

$$(x - m_{2,1})^2 + (y - m_{2,2})^2 = (r_L + \delta_2 \cdot r_2)^2$$

$$(x - m_{3,1})^2 + (y - m_{3,2})^2 = (r_L + \delta_3 \cdot r_3)^2$$

mit $\delta_i = \begin{cases} +1 & \text{Berührung von außen} \\ -1 & \text{Berührung von innen} \end{cases}$

6.2. Lösung mittels Laguerrespiegelung

Das Apollonische Kreisproblem ist für Kreise definiert und kann bis zu 8 Lösungskreise besitzen. Weist man den drei gegebenen Kreisen nun eine Orientierung zu, kann es bis zu 16 orientierte Lösungskreise geben, da jeder unorientierte Kreis auf zwei Arten orientiert werden kann. Eine Übersicht über die Orientierungsmöglichkeiten liefert Tabelle 6.1.

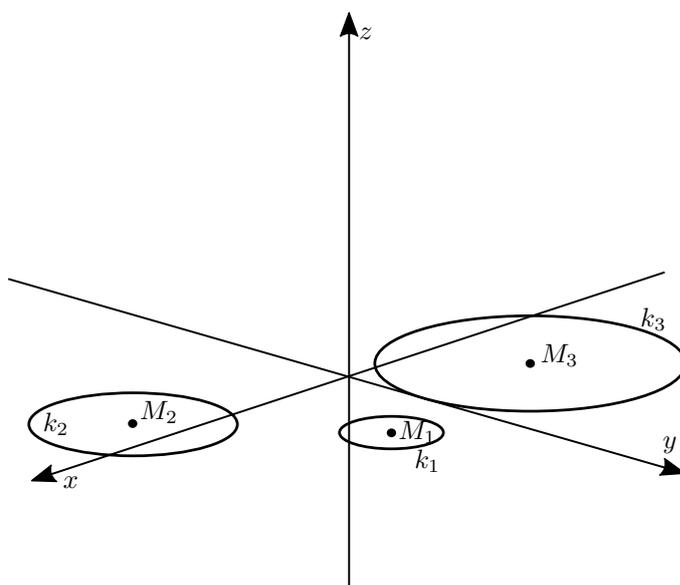


Abb. 6.3.: Drei in der xy -Ebene gegebene, unorientierte Kreise

	Orientierung							
k_1	+	+	-	+	-	-	+	-
k_2	+	+	+	-	-	+	-	-
k_3	+	-	+	+	+	-	-	-

Tab. 6.1.: Orientierungsmöglichkeiten der gegebenen Kreise

Gegeben seien nun also drei Kreise im \mathbb{R}^2 (Abbildung 6.3), denen eine Orientierung zugewiesen wird und die durch die zyklographische Projektion π in Punkte des \mathbb{R}^3 abgebildet werden:

$$k_1(M_1(m_{1,1}, m_{1,2}), r_1) \mapsto P_1(m_{1,1}, m_{1,2}, \pm r_1)$$

$$k_2(M_2(m_{2,1}, m_{2,2}), r_2) \mapsto P_2(m_{2,1}, m_{2,2}, \pm r_2)$$

$$k_3(M_3(m_{3,1}, m_{3,2}), r_3) \mapsto P_3(m_{3,1}, m_{3,2}, \pm r_3)$$

Dabei ist das Vorzeichen der z -Koordinate von $P_i, i \in \{1, 2, 3\}$, abhängig von der zuvor zugewiesenen Orientierung. Diese drei Punkte spannen im Allgemeinen eine Ebene e auf mit euklidischem Normalvektor n bzw. pseudo-euklidischem Normalvektor $u_1 = M \cdot n$. Dargestellt ist dies in Abbildung 6.4, wobei die Ansicht so gedreht wurde, dass die Ebene e projizierend erscheint. Diese Ebene kann flach, isotrop oder steil sein. Der im Folgenden beschriebene Lösungsweg kann nur im Fall einer flachen Ebene e durchgeführt werden.

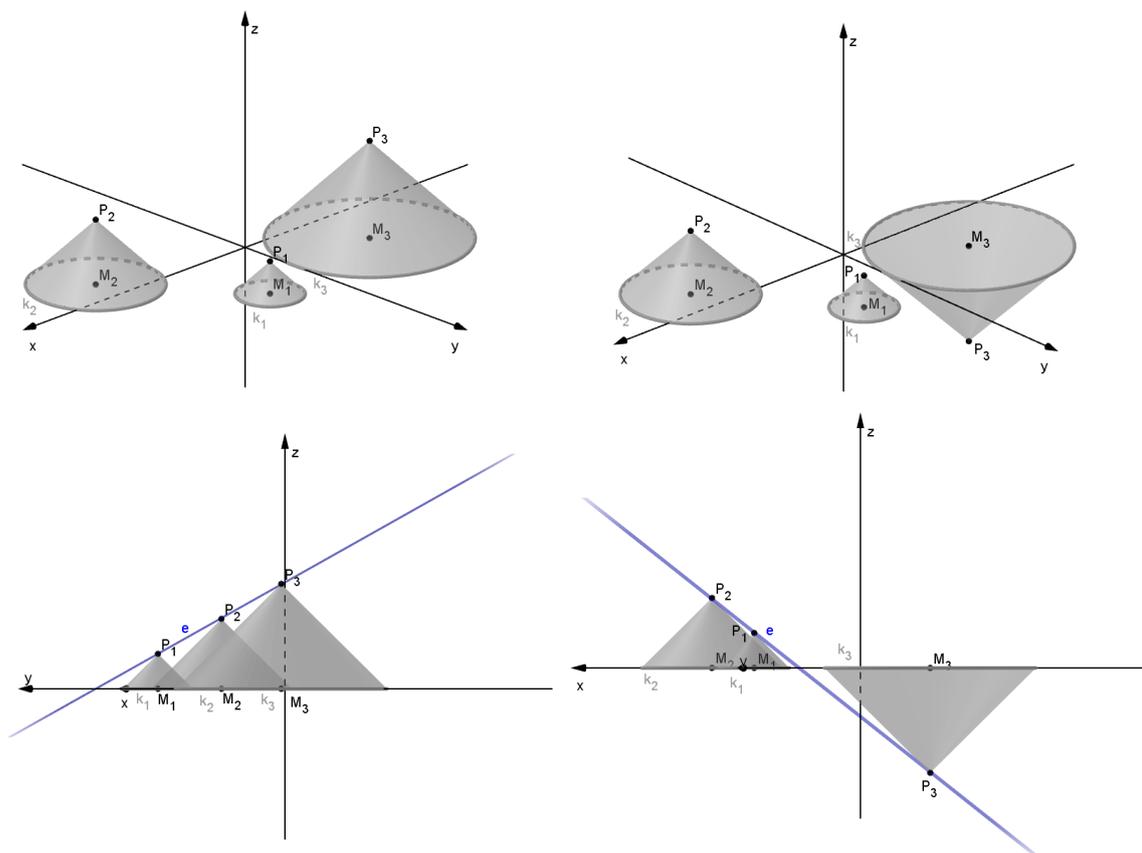


Abb. 6.4.: oben: Zyklgraphische Projektion π mit 2 verschiedenen Orientierungen von Kreis k_3 ; unten: Ebene e , die von den Punkten P_1, P_2 und P_3 aufgespannt wird.

Der gesuchte Lösungszykel berührt jeden der gegebenen Zyklen, was wiederum bedeutet, dass es zwischen dem Lösungszykel und jedem einzelnen gegebenen Zyklen genau einen gemeinsamen Speer

gibt. Dieser entspricht einer 45° -Hyperebene, in der jeweils der Punkt P_i enthalten ist. Da Zykel als Speermenge aufgefasst werden können, hüllen diese drei Hyperebenen den gesuchten Lösungszykel ein.

Mit einer Laguerrespiegelung l an der Winkelsymmetralebene w zwischen der Ebene e und der xy -Ebene werden die Punkte P_i auf Punkte Q_i in die xy -Ebene abgebildet, $i \in \{1, 2, 3\}$. Die Ebene w erhält man durch

$$u^T \cdot M \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = u^T \cdot M \cdot A$$

wobei A ein Schnittpunkt der Schnittgerade von e mit der xy -Ebene ist und u die Summe des pseudo-euklidischen Normalvektors u_1 der Ebene e und des Normalvektors u_2 der xy -Ebene ist. Dabei ist zu beachten, dass u_2 dieselbe quadratische Länge aufweisen muss wie u_1 , beispielsweise

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \sqrt{|(u_1^T \cdot M \cdot u_1)|}$$

Da l eine Laguerretransformation ist, bleibt die Berührung der Zykel erhalten. Man kann nun also in der xy -Ebene das Problem lösen: Die Punkte Q_i liegen auf einem Kreis k_q im \mathbb{R}^2 , dem gesuchten Lösungszykel. $\pi(k_q)$ hat zwei Lösungen, da der Kreis k_q zwei Orientierungen aufweisen kann.

Das Zurückspiegeln von $\pi(k_q)$, $l(\pi(k_q))$ ergibt zwei Punkte im \mathbb{R}^3 , die die Spitzen von Kegeln sind, deren Basiskreise $\pi^{-1}(l(\pi(k_q)))$ in der xy -Ebene liegen. Die Basiskreise sind zwei der gesuchten Lösungskreise. Die übrigen Lösungskreise erhält man durch Variation der Orientierung der drei gegebenen Kreise. Somit können sich 16 orientierte Lösungen, also 8 verschiedene, nicht orientierte Lösungskreise ergeben. Das Vorgehen ist in den Abbildungen 6.5 und 6.6 dargestellt.

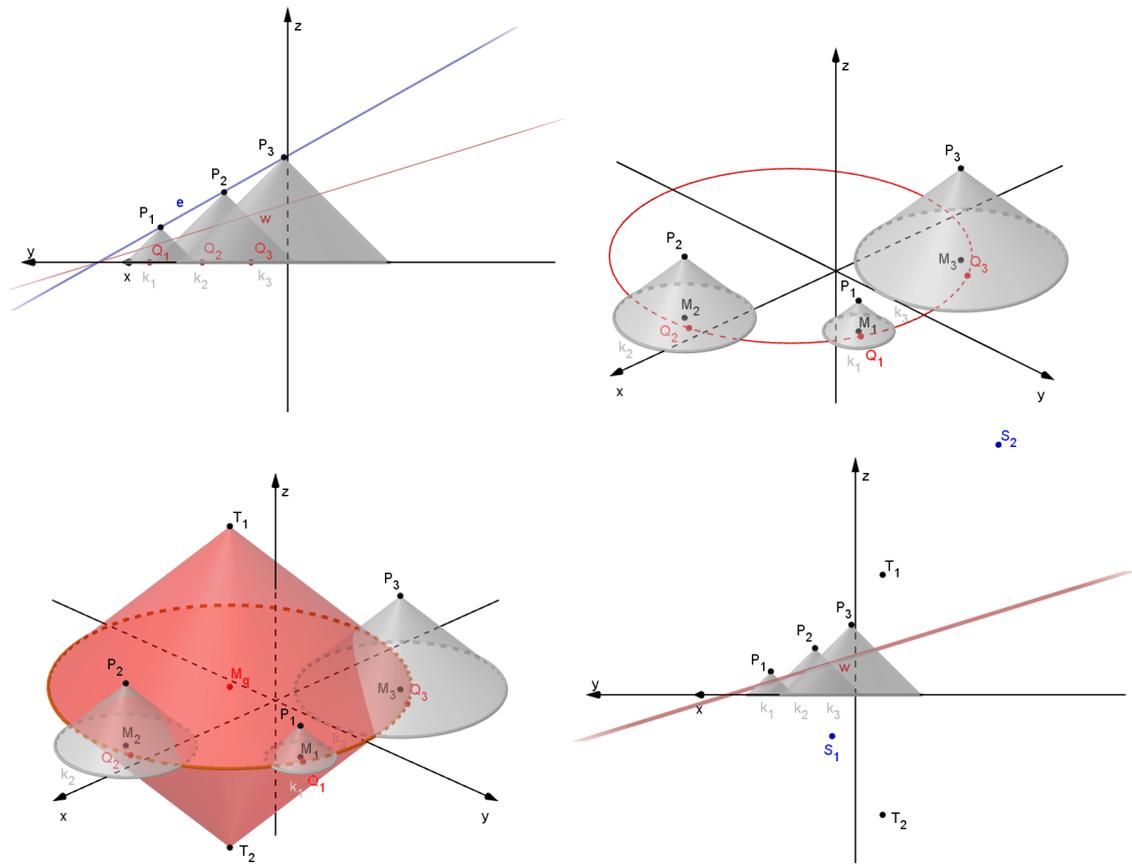


Abb. 6.5.: oben links: Spiegelung der Punkte P_i an der Ebene w , oben rechts: Kreis k_q durch die Punkte Q_i , unten links: $\pi(k_q) = T_i$, unten rechts: $l(\pi(k_q)) = S_i$

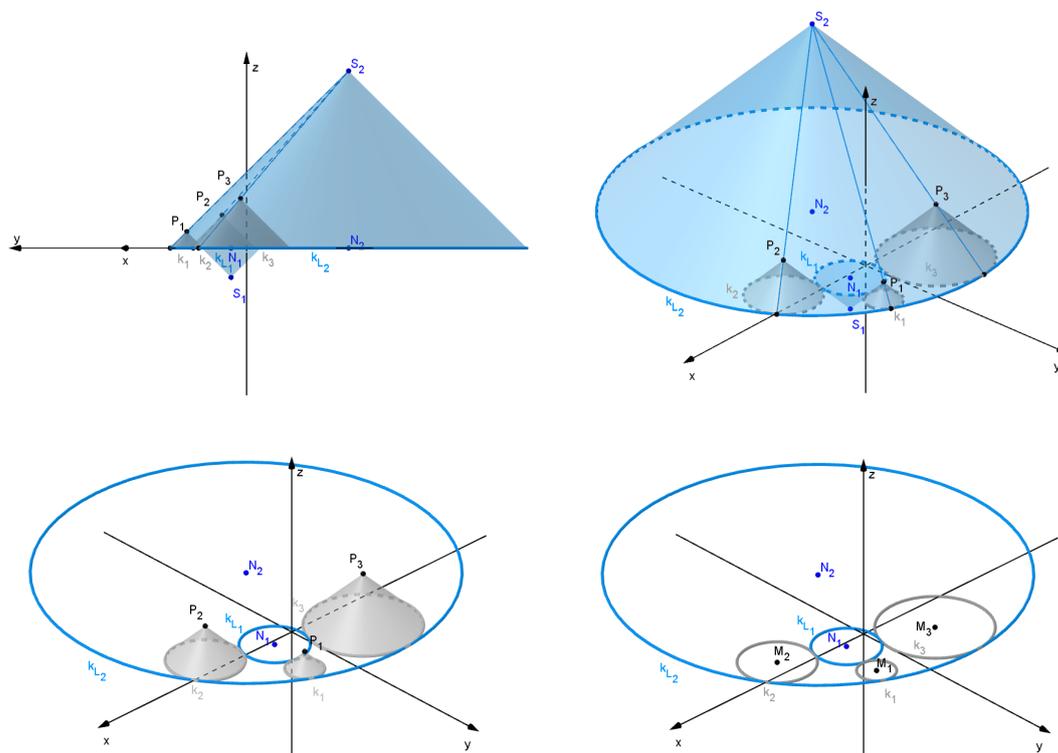


Abb. 6.6.: oben links: $\pi^{-1}(l(\pi(k_q))) = N_i$, oben rechts: P_i liegen auf dem Mantel der Lösungskegel, unten: Lösungskreise

7. Spezielle Relativitätstheorie

7.1. Grundlagen

Im Jahr 1905 veröffentlichte Albert Einstein „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“ (vgl. [11]), worin er die Relativitätstheorie (später dann spezielle Relativitätstheorie genannt) vorstellt und eine neue Vorstellung von „Zeit“ einführt. Einem ruhenden Punkt kann man kartesische Koordinaten zuweisen, Bewegungen eines Punktes werden dargestellt durch zeitabhängige Koordinatenfunktionen. Doch hierbei müsse man sich, laut Einstein, erst einmal fragen, was denn mit „Zeit“ überhaupt gemeint sei. Eigentlich meint man damit immer „gleichzeitige Ereignisse“. „Ein Zug kommt um 7 Uhr an“ bedeutet „Der kleine Zeiger der Uhr zeigt auf 7 und die Ankunft des Zuges sind gleichzeitige Ereignisse“, so Einstein.

„Zeit“ wird nach Einstein nun so definiert: Im Punkt A des Raumes gibt es eine Uhr, mit der ein sich in A befindender Beobachter die Ereignisse in der unmittelbaren Umgebung von A zeitlich werten kann, ebenso gibt es dies für den im Raum befindlichen Punkt B für einen Beobachter dort; man kann also eine A -Zeit und eine B -Zeit ermitteln. Die „Zeit“, die das Licht benötigt um von A nach B zu gelangen entspricht der „Zeit“, die das Licht benötigt um von B nach A zu gelangen.

Dem Begriff der Gleichzeitigkeit darf man jedoch keine absolute Bedeutung beimessen: Zwei Ereignisse, die von einem Koordinatensystem aus gesehen gleichzeitig stattfinden, finden von einem relativ dazu bewegten Koordinatensystem aus gesehen nicht mehr gleichzeitig statt .

Für seine weiteren relativistischen Überlegungen formuliert Einstein nun zwei Postulate:

- In allen Inertialsystemen gelten dieselben physikalischen Gesetze.
- Jeder Lichtstrahl bewegt sich im „ruhenden“ Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit c unabhängig davon, ob der Lichtstrahl von einem ruhenden oder einem bewegten Körper emittiert wird.

Im Jahr 1908 hielt Hermann Minkowski einen Vortrag über „Raum und Zeit“ (vgl. [12]). Einen Raumpunkt (x, y, z) zu einem Zeitpunkt t nennt Minkowski einen „Weltpunkt“ (x, y, z, t) . Die „Weltlinie“ ist der zeitliche Verlauf dieses Raumpunktes. Es gilt nun:

- Die Weltlinie eines gleichförmig bewegten Punktes ist eine (zur Zeitachse) geneigte Gerade. Nach Wahl eines Koordinatensystems gibt es einen zufällig ausgewählten ruhenden Punkt, dessen Weltlinie eine zur Zeitachse parallele Gerade ist.
- Die Weltlinie eines ungleichförmig bewegten Punktes ist eine gekrümmte Weltlinie.

Minkowski macht einen beliebigen Weltpunkt O zum Raum-Zeit-Nullpunkt und sieht ihn als Spitze des Kegels $x^2 + y^2 + z^2 - (ct)^2 = 0$ an. Dieser Kegel besteht aus zwei Teilen:

- Der Vorkegel von O , mit den Werten $t < 0$, besteht aus allen Weltpunkten, die „Licht nach O senden“.
- Der Nachkegel von O , mit den Werten $t > 0$, besteht aus allen Weltpunkten, die „Licht von O empfangen“.

Minkowski unterscheidet verschiedene Arten von Vektoren (vgl. Seite 8):

- Zeitartige Vektoren sind die steilen Vektoren: $Q(a) < 0$.
- Raumartige Vektoren sind die flachen Vektoren: $Q(a) > 0$.
- Lichtartige Vektoren sind die isotropen Vektoren: $Q(a) = 0$.

Diese Begriffe sind in Abbildung 7.1 veranschaulicht.

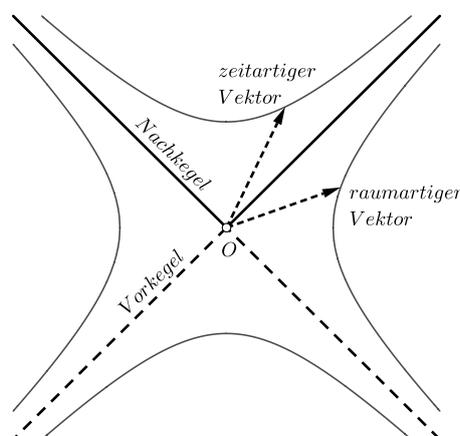


Abb. 7.1.: Neu eingeführte Begriffe von Minkowski

Die Zeitachse (bzw. Weltlinie) kann zu jedem zeitartigen Vektor parallel verlaufen.

Minkowski definiert für zeitartige Vektoren die Eigenzeit τ , die entlang einer Weltlinie $C(t)$ gemessen wird:

$$\tau = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{-\dot{C}(t) \bullet \dot{C}(t)} dt$$

Im Fall einer geradlinigen Weltlinie zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 wird dies zu

$$\tau = \sqrt{-Q(P_2 - P_1)}$$

Somit erkennt man nun einerseits, dass nur steile Geraden (vgl. Seite 8) als Weltlinien in Frage kommen. Andererseits sieht man auch, dass es Ereignisse gibt, zwischen denen keine Eigenzeit vergeht: für zwei Ereignisse P_1 und P_2 mit $Q(P_2 - P_1) = 0$ interpretiert man die geradlinige Lebenslinie zwischen diesen Ereignissen als jene von Photonen.

Zusammengefasst kann nun, mit der Terminologie von Kapitel 4 für den Minkowski-Raum gesagt werden:

Definition 7.1

Es sei $a \in \mathbb{R}^4$.

- (i) $K(a) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid Q(x - a) = 0\}$ ist der Lichtkegel mit Spitze a .
- (ii) $Z(a) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid a \leq x\}$ ist die Zukunft von a .
- (iii) $V(a) := \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x \leq a\}$ ist die Vergangenheit von a .

Abbildung 7.2 veranschaulicht diese Definition.

Definition 7.2

- (i) Eine Gerade g wird Lichtgerade genannt, wenn sie vollständig auf einem Lichtkegel liegt.
- (ii) Eine Gerade g heißt zeitartig, wenn sie Punkte a, b enthält mit $a \leq b$ und $a \neq b$.
- (iii) Eine Gerade g heißt raumartig, wenn sie nicht Lichtgerade oder zeitartig ist.
- (iv) Eine Hyperebene wird Lichthyperebene genannt, wenn sie eine Tangentialhyperebene an einen Lichtkegel ist.

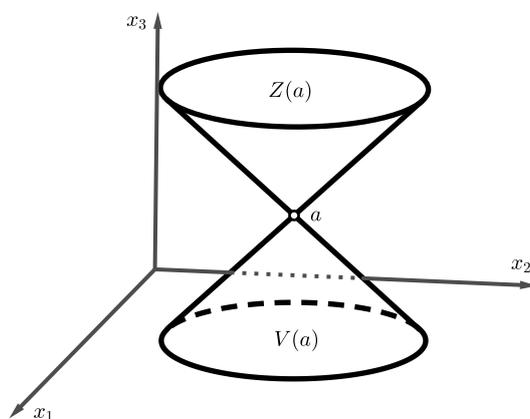


Abb. 7.2.: Zukunft und Vergangenheit von a

Satz 7.1

Die Gerade $X = p + \lambda \cdot g$ mit einem vom Nullvektor verschiedenen Richtungsvektor g ist genau dann Lichtgerade des Lichtkegels $K(a)$, wenn $Q(g) = 0$ und $\exists \mu \in \mathbb{R} : p - a = \mu \cdot g$.

Beweis

„ \Rightarrow “ Es gelte $X \subset K(a)$ und $x \in X$.

$$\begin{aligned} 0 &= Q(x - a) = Q(p + \lambda \cdot g - a) = Q(\lambda \cdot g + (p - a)) \\ &= (\lambda \cdot g + (p - a))^T \cdot M \cdot (\lambda \cdot g + (p - a)) \\ &= \lambda^2 \cdot g^T M g + 2\lambda \cdot g^T M (p - a) + (p - a)^T M (p - a) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Also gilt dies auch für $\lambda \in \{0, 1, 2\}$:

$$\begin{aligned} \lambda = 0: \quad 0 &= (p - a)^T M (p - a) \\ \lambda = 1: \quad 0 &= g^T M g + 2 \cdot g^T M (p - a) \Leftrightarrow g^T M g = -2 \cdot g^T M (p - a) \\ \lambda = 2: \quad 0 &= 4 \cdot g^T M g + 4 \cdot g^T M (p - a) \Leftrightarrow g^T M g = - \cdot g^T M (p - a) \\ &\Rightarrow g^T M g = g^T M (p - a) = 0 \end{aligned}$$

Mit $g_4 \neq 0$ folgt nun weiters:

$$\begin{aligned} 0 &= Q\left(p + \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g - a\right) \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(p_i - a_i + \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g_i\right)^2 - \left(p_4 + \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g_4 - a_4\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^3 \left(p_i - a_i + \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g_i\right)^2 \\ &\Rightarrow p_i - a_i + \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g_i = 0 \quad \text{für } i \in \{1, 2, 3\} \\ &\Rightarrow a_i - p_i = \frac{a_4 - p_4}{g_4} \cdot g_i \\ &\Rightarrow a - p = \mu \cdot g \quad \text{mit } \mu = \frac{a_4 - p_4}{g_4} \end{aligned}$$

„ \Leftarrow “ Es ist $X = a + \lambda \cdot g$ mit $Q(g) = 0$ für $x \in X$:

$$0 = Q(x - a) = Q(\lambda \cdot g) = \lambda^2 \cdot Q(g) = \lambda^2 \cdot 0 = 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$$

Also liegen alle Punkte von X auf dem Lichtkegel $K(a)$.

Wie eingangs in diesem Kapitel erwähnt geht es in der speziellen Relativitätstheorie um relativ zueinander bewegte Inertialsysteme, also im Wesentlichen Koordinatensysteme. Somit ist ein Koordinatensystem immer mit einem Beobachter verknüpft; ein rechtwinkeliges Koordinatensystem wird vom ruhenden Beobachter mit der Weltlinie $C(t) = (0, 0, 0, t)^T$ definiert. Der Wechsel von einem Beobachter zu einem anderen, also der Wechsel von einem Koordinatensystem in ein anderes entspricht daher einer Koordinatentransformation. Bei dieser Transformation soll die Eigenzeit eines Teilchens längs seiner Weltlinie erhalten bleiben. Außerdem muss die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit, die Einstein voraussetzt, ebenfalls erhalten bleiben.

Zusammenfassung

Aus dem Satz von Alexandrov (Satz 3.2) folgt nun, dass die gesuchten Koordinatentransformationen genau die Lorentztransformationen sind: Ereignisse, die durch die Lebenslinie eines Photons verbunden sind, müssen dies auch nach der Transformation sein. Die gesuchte Transformation muss also eine Null-Isometrie sein. Somit kann der Satz von Alexandrov angewendet werden, aus dem direkt folgt, dass es sich nur um die Lorentztransformationen handeln kann.

Die Gruppe der Lorentztransformationen erhält den Lorentz-Minkowski-Abstand (bzw. quadratischen Abstand) zweier Punkte und somit auch die Eigenzeit. Die orthochronen Lorentztransformationen erhalten zusätzlich die Kausalität (vgl. Definition 4.3 und Definition 4.4).

7.2. Relativistische Effekte im Minkowski-Diagramm

Die relativistische Zeitdilatation kann mit Hilfe eines Minkowski-Diagramms dargestellt und erklärt werden (Abbildung 7.3). Hierbei bezeichnet t die Zeitachse eines ausgewiesenen Ruhebeobachters P , t' und t'' seien die Lebenslinien zweier relativ dazu gleichförmig bewegter Teilchen P' und P'' . Die Zeitachsen werden durch Hyperbeln der Form $x^2 - (ct)^2 = -k^2$ mit $k \in \mathbb{N}$ skaliert (unter Beachtung von $c = 1$). Teilchen P' sendet nun, aus seiner Sicht mit einer Eigenzeit von $\Delta t' = 1$, zwei Lichtsignale zu P'' . Der zeitliche Unterschied der beiden Ereignisse gemessen in der Eigenzeit von P'' , ist, wie im Diagramm ersichtlich (roter Vektor auf t'' -Achse), größer als 1. Auch umgekehrt gilt nun: Sendet P'' zwei Lichtsignale mit $\Delta t'' = 1$ zu P' , so ist die dort gemessene Eigenzeit der Empfangsereignisse größer als 1 (roter Vektor auf t' -Achse).

Der Lichtsignalempfänger misst eine größere Eigenzeit zwischen den Empfangsereignissen als der Lichtsignalsender gemessen hat, unabhängig davon, ob P' oder P'' Sender bzw. Empfänger ist. Die vergrößerte Eigenzeit ist in beiden Fällen (verglichen von P' zu P'' und von P'' zu P') gleich: Der Wechsel von einem Koordinatensystem in ein zweites, dazu relativ bewegtes Koordinatensystem ist eine Lorentztransformation, deren Invarianz der Eigenzeit klar ist wegen der Invarianz des pseudo-euklidischen Skalarprodukts bei einer solchen Transformation. Dass es sich tatsächlich um eine Lorentztransformation handelt, sieht man so: Es gibt eine Laguerre-Spiegelung (vgl. Definition 5.9), die die beiden Lebenslinien vertauscht. Wegen Satz 5.5 und dem letzten Satz auf Seite 38 ist die Spiegelung eine Lorentztransformation. Mit Definition 4.1(ii) folgt auch, dass lichtartige Geraden in ebensolche übergeführt werden.

In [16] wird auf Seite 140 folgende Aufgabe gestellt:

Der nächste Fixstern ist Alpha-Centauri am südlichen Sternenhimmel. Seine Entfernung beträgt 4,5 Lichtjahre.

- a) Wie lange bräuchte ein Raumschiff, um zum Stern und wieder zur Erde zu gelangen, wenn seine Geschwindigkeit $v = 0,5 \cdot c$ beträgt?
- b) Wie lange würde der Flug für die Astronauten an Bord des Raumschiffs dauern?

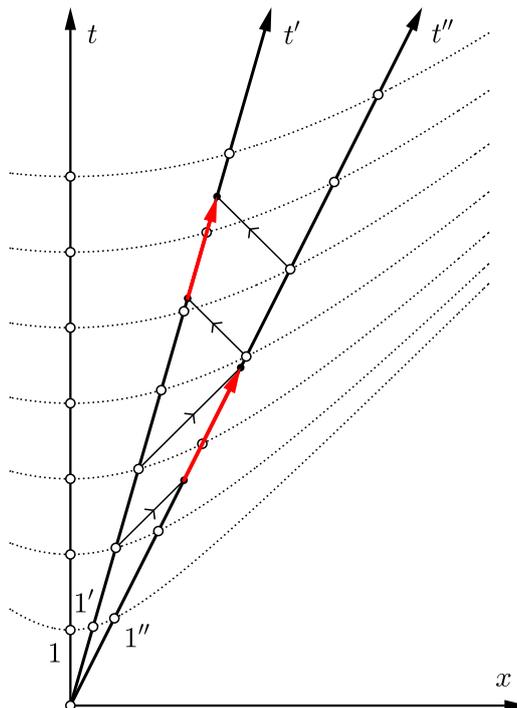


Abb. 7.3.: Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm

Das Beispiel wird nun mit Hilfe eines Minkowski-Diagramms gelöst, das so skaliert ist, dass $c = 1$ gilt. In einem ersten Schritt wird der relativistische Faktor γ aus einem Minkowski-Diagramm abgeleitet; der Vorgang wird in Abbildung 7.4 illustriert:

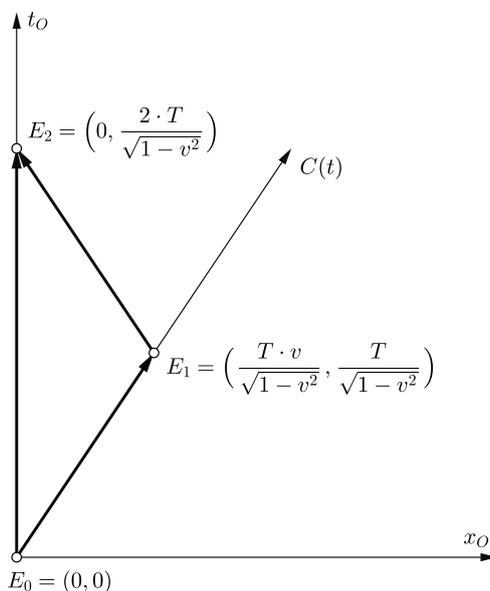


Abb. 7.4.: Ermittlung des γ -Faktors

O sei ein Teilchen in Ruhe, P sei ein Teilchen, das sich entlang der Lebenslinie $C(s) = (v \cdot s, 0, 0, s)^T$ bewegt. Hierbei ist, wie sich später herausstellen wird, v die Geschwindigkeit des Teilchens gegenüber dem Ruheteilchen O . Da diese Bewegung nur in der xt -Ebene stattfindet, können zur Veran-

schaulichung die beiden Ortsrichtungen y und z vernachlässigt werden. Es gilt also $C(s) = (v \cdot s, s)^T$. Der Richtungsvektor dieser geradlinigen Bewegung wird nun so normiert, dass die Gerade C in Abhängigkeit von der Zeit t betrachtet werden kann und $C(1)$ einer Eigenzeit von 1 entspricht:

$$\begin{aligned} C(s) = s \cdot (v, 1)^T &\Rightarrow C(t) = t \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot (v, 1)^T \\ \tau &= \sqrt{-Q(C(1) - C(0))} \\ &= \sqrt{-\left(v^2 \cdot \frac{1}{1-v^2} - \frac{1}{1-v^2}\right)} = 1 \end{aligned}$$

Das Ereignis E_1 hat vom Ereignis $E_0 = (0, 0)$ den Lorentz-Minkowski-Abstand T . Das Teilchen P bewegt sich nun von E_0 nach E_1 , dreht um und bewegt sich wieder zum Teilchen O zurück. Die Ankunft dort entspricht dem Ereignis E_2 . Es gilt für die Koordinaten der Ereignisse:

$$\begin{aligned} E_1 &= \left(T \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \\ E_2 &= \left(0, 2 \cdot T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \right) \end{aligned}$$

Die Eigenzeit, die für Teilchen P zwischen den Ereignissen E_0 und E_1 vergangen ist, beträgt nun $\tau_P = 2T$. Die für das Ruheteilchen O vergangene Eigenzeit ist

$$\tau_O = \sqrt{-Q(E_2 - E_0)} = \sqrt{-\left(0 - \left(\frac{2T}{\sqrt{1-v^2}}\right)^2\right)} = \frac{2T}{\sqrt{1-v^2}} \quad (7.1)$$

Für $0 < v < 1$ ist $\sqrt{1-v^2} < 1$ und demnach $\frac{2T}{\sqrt{1-v^2}} > 2T$. Der Faktor, mit dem die Zeit für den bewegten Beobachter P langsamer vergeht, ist also $\sqrt{1-v^2}$.

Die Geschwindigkeit v eines Teilchens wird durch die Grenzggeschwindigkeit c eingeschränkt und es gilt daher $0 < v < c$, was äquivalent ist zu $0 < \frac{v}{c} < 1$. Unter der Annahme, dass v in der obigen Betrachtung die Geschwindigkeit des Teilchens ist wenn die Lichtgeschwindigkeit auf 1 gesetzt wird, kann man v durch $\frac{v}{c}$ ersetzen und man erhält den Faktor der relativistischen Zeitdilatation:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2} \quad \text{bzw.} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Nun kann die eigentliche Fragestellung (Abbildung 7.5) gelöst werden.

Die Erde kann in dieser Aufgabenstellung als Ruhebeobachter mit der Weltlinie $C_0(t) = (0, t)^T$ angesetzt werden. Das Raumschiff bewegt sich entlang der Lebenslinie $C_1(t)$ mit der Geschwindigkeit $v = 0,5$ (die Skalierung ist also so gewählt, dass $c = 1$). Dass es sich beim Faktor v tatsächlich um die Geschwindigkeit handelt ist weiterhin noch nicht erwiesen und wird weiter unten begründet. Das Ereignis $E_1 = \left(T \cdot v \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}\right)$ stellt die Ankunft des Raumschiffs auf Alpha Centauri dar. Ein Beobachter auf diesem Stern hat die Weltlinie $C_2(t) = (a, t)^T$. Das Ereignis E_1 ist auch ein Punkt auf $C_2(t)$, also kann man schreiben:

$$T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot \begin{pmatrix} v \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot v = a \\ T \cdot \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \cdot 1 = t \end{cases} \Rightarrow T = \frac{a}{v} \cdot \sqrt{1-v^2}$$

Da $\lim_{v \rightarrow 0} \sqrt{1-v^2} = 1$, ist die Eigenzeit T für sehr kleine Geschwindigkeiten eines Raumschiffes $T = \frac{a}{v}$. In diesem Fall kann man die Entfernung von Alpha Centauri zur Erde als a annehmen. Nun kann für das Raumschiff mit $v = 0,5$ berechnet werden:

$$T = \frac{a}{v} \cdot \sqrt{1-v^2} = \frac{a}{0,5} \cdot \sqrt{1-0,5^2} = \frac{a}{0,5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \sqrt{3}$$

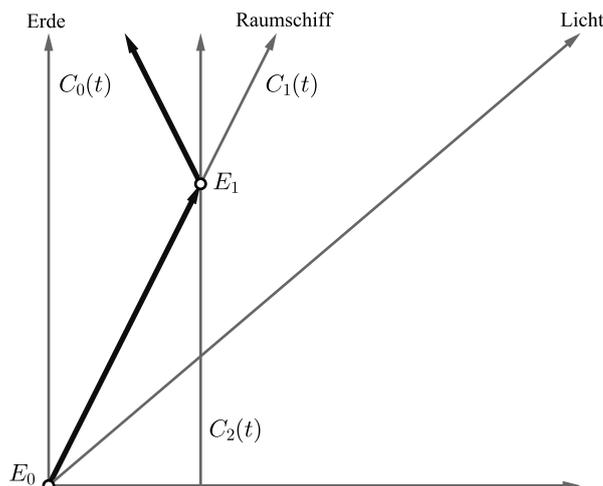


Abb. 7.5.: Minkowski-Diagramm zur Aufgabenstellung auf Seite 52

Das Raumschiff misst bis zur Rückkehr eine Eigenzeit von $2T = 2a \cdot \sqrt{3}$. Die Erde misst bis zur Rückkehr des Raumschiffs (vgl. Gleichung (7.1)) eine Eigenzeit von

$$\frac{2T}{\sqrt{1-0,5^2}} = \frac{4T}{\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot a \cdot \sqrt{3} = 4a$$

Die auf der Erde gemessene Eigenzeit entspricht genau dem Resultat, das man in der klassischen Physik erwartet. Aus $s = v \cdot t$ folgt $t = \frac{s}{v} = \frac{2a}{0,5} = 4a$. Mit $a = 4,5$ erhält man: Von der Erde aus gesehen benötigt das Raumschiff 18 Jahre bis zur Rückkehr. Für einen Astronauten dauert es rund 15,6 Jahre.

Rückwirkend betrachtet kann man die Annahme, dass v der Geschwindigkeit des Teilchens entspricht, bestätigen: Die für einen Beobachter auf der Erde bis zur Rückkehr des Raumschiffs vergangene Zeit ist indirekt proportional zu v , also entspricht v einer Geschwindigkeit.

- Für das Raumschiff strebt die vergangene Eigenzeit im Grenzwert $v \rightarrow 1$ gegen 0. Damit ist die Einheit, mit der v gemessen wird, bestimmt: Einheiten sind so gewählt, dass die Lichtgeschwindigkeit c den Wert 1 besitzt.
- Für das Raumschiff strebt die vergangene Eigenzeit bis zur Ankunft auf Alpha Centauri im Grenzwert $v \rightarrow 0$ gegen $\frac{a}{v}$. Damit stellt sich im Nachhinein a als sinnvolles Maß für die Entfernung zwischen der Erde und Alpha Centauri heraus.

Literatur

- [1] Gerd Fischer. *Lineare Algebra: Eine Einführung für Studienanfänger*. Vieweg, 2003.
- [2] H. Havlicek. *Vorlesungsunterlagen aus dem Sommersemester 1995*.
- [3] Eberhard M. Schröder. »Ein einfacher Beweis des Satzes von Alexandroff-Lester«. In: *Journal of Geometry* 37 (1990), S. 153–158.
- [4] A.D. Alexandrov. »Meetings of the Mathematical Seminar«. In: *Uspekhi Mat. Nauk* 5 (1950). 3(37), S. 187–193.
- [5] A. D. Alexandrov. »Mappings of Spaces with Families of Cones and Space-Time Transformations«. In: *Annali di Matematica* 103 (1975), S. 229–257.
- [6] Walter Benz. *Geometrische Transformationen*. B.I. Wissenschaftsverlag, 1992.
- [7] Heinrich Dörrie. *100 Great Problems of Elementary Mathematics*. Dover Publications Inc., 1965.
- [8] C. Stanley Ogilvy. *Excursions in Geometry*. Dover Publications Inc., 1991.
- [9] Heinrich Brauner. *Abbildungsmethoden der Konstruktiven Geometrie*. Ausgearbeitet von Gunter Weiß, Vorlesung im Studienjahr 1976/77. URL: https://www.geometrie.tuwien.ac.at/former/pdf/brauner_abbildungsmethoden_der_konstruktiven_geometrie_1976-1977.pdf.
- [10] Rudolf V. B. Rucker. *Geometry, Relativity and the Fourth Dimension*. Dover Publications Inc., 1977.
- [11] Albert Einstein. »Zur Elektrodynamik bewegter Körper«. In: *Annalen der Physik* 322 (1905), S. 891–921.
- [12] Hermann Minkowski. »Raum und Zeit«. In: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 18 (1909), S. 75–88.
- [13] Hoche et al. *Physik Gesamtband*. Bd. 25. Duden Schulbuch, 2004.
- [14] Wolfgang Nolting. *Grundkurs Theoretische Physik 4 : Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.
- [15] Hering et al. *Physik für Ingenieure*. Springer-Verlag GmbH, 2007.
- [16] Sexl et al. *Physik 8, Schulbuch*. öbv, 2013.

Abbildungen

1.1.	Orthogonales Komplement von a bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarproduktes im \mathbb{R}^2 . Oben: $a \in \ker(Q)$, unten: $a \notin \ker(Q)$	6
2.1.	Isotrope Geraden im \mathbb{R}^3 bezüglich des pseudo-euklidischen Skalarprodukts . . .	8
2.2.	Galilei-Ebene: Diese ist tangential an den Kegel und gleichzeitig orthogonales Komplement ihrer Berührerzeugenden a	9
2.3.	Minkowski-Ebene (links) und euklidische Ebene (rechts)	9
3.1.	Veranschaulichung des Beweisschrittes c)	16
3.2.	Veranschaulichung des Beweisschrittes f)	18
4.1.	Veranschaulichung der Punkte A, B und C um Lorentzmatrizen zu bestimmen. Rechts: A ist ein Fernpunkt.	23
5.1.	Eine Hyperkugel im \mathbb{R}^2 und die äußere bzw. innere Seite davon	28
5.2.	Eine Hyperebene im \mathbb{R}^2 und die eine bzw. andere Seite davon	29
5.3.	Berührung von Speer und Zykel	30
5.4.	Zykel z als Menge von Speeren dargestellt	30
5.5.	Zyklographische Projektion dreier Zykel z_1, z_2, z_3	31
5.6.	Links: einander berührende Zykel mit genau einem gemeinsamen, berührenden Speer. Rechts: Die zugrunde liegenden Kreise berühren einander, die Zykel aber nicht.	36
6.1.	Das Apollonische Kreisproblem mit 8 Lösungen.	42
6.2.	Zwei einander von außen (links) bzw. zwei einander von innen (rechts) berührende Kreise	43
6.3.	Drei in der xy -Ebene gegebene, unorientierte Kreise	43
6.4.	oben: Zyklographische Projektion π mit 2 verschiedenen Orientierungen von Kreis k_3 ; unten: Ebene e , die von den Punkten P_1, P_2 und P_3 aufgespannt wird.	44
6.5.	oben links: Spiegelung der Punkte P_i an der Ebene w , oben rechts: Kreis k_q durch die Punkte Q_i , unten links: $\pi(k_q) = T_i$, unten rechts: $l(\pi(k_q)) = S_i$	46
6.6.	oben links: $\pi^{-1}(l(\pi(k_q))) = N_i$, oben rechts: P_i liegen auf dem Mantel der Lösungskegel, unten: Lösungskreise	47
7.1.	Neu eingeführte Begriffe von Minkowski	49
7.2.	Zukunft und Vergangenheit von a	50
7.3.	Zeitdilatation im Minkowski-Diagramm	53
7.4.	Ermittlung des γ -Faktors	53
7.5.	Minkowski-Diagramm zur Aufgabenstellung auf Seite 52	55

Tabellen

6.1.	Orientierungsmöglichkeiten der gegebenen Kreise	44
------	-----------------------------------------------------------	----

