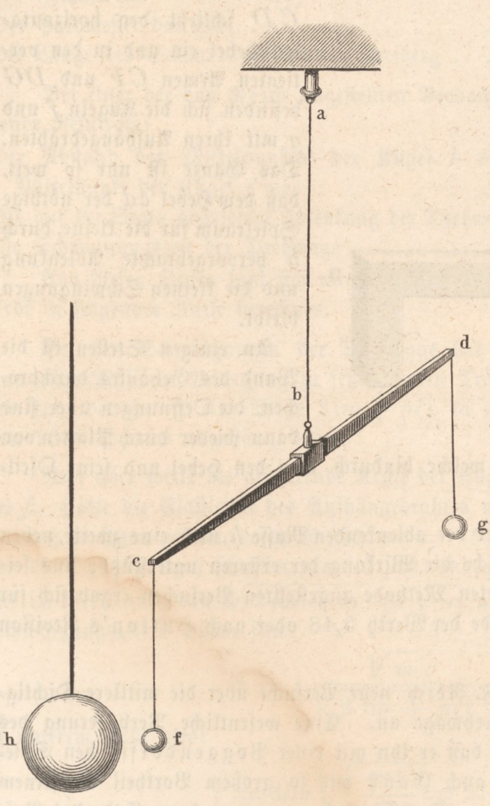
anwandte, um die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, und zwar um so mehr, da die Berechnung auf diesem Wege eine ziemlich schwierige ist, ohne deshalb so genaue Resultate liefern zu können, wie die Methode, welche im nächsten Paragraphen besprochen werden soll.

Anwendung der Drehwage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. Ein englischer Physiker, Michell, construirte eine Drehwage, mit deren Hülfe er die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen gedachte; er starb aber, ehe er zur Anstellung der Versuche kam, welche erst nach seinem Tode von Cavendish ausgeführt wurden. Der Grundgedanke des Apparates ist folgender: 91

An einem dünnen Metalldraht ab, Fig. 147, hängt ein horizontaler, gleicharmiger Hebel cd, welcher an seinen Enden die Kugeln f und g trägt. Dem Einfluß aller störenden Kräfte entzogen, wird die ganze Vorrichtung eine solche Stellung annehmen, daß der Draht ab ohne Torsion ist.

Fig. 147.



Bringt man nun neben der Kugel f eine Kugel h von bedeutender Masse an, so wird h anziehend auf f wirken, und dadurch wird der horizontale Hebel cd um einen Winkel aus seiner früheren Gleichgewichtslage heraus gedreht, welcher der anziehenden Kraft k proportional ist, mit welcher die Kugeln h und f gegenseitig auf einander wirken.

Die Größe dieser Kraft k läßt sich aber berechnen, wenn man die Schwingungszeit kennt, mit welcher der horizontale Hebel cd um seine Gleichgewichtslage oscillirt, sobald er auf irgend eine Weise aus derselben herausgebracht worden ist.

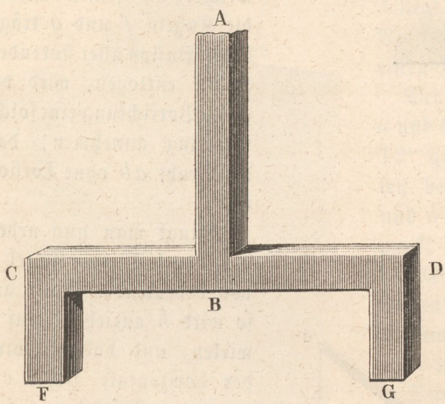
Aus dem Verhältniß der Kraft k zu dem Gewichte m der Kugel f (der

Kraft, mit welcher die ganze Erdkugel die Kugel f anzieht) ergiebt sich dann das Verhältniß zwischen der leicht zu ermittelnden Masse M der Kugel h und der Masse Q der Erdkugel.

Es kommt also vor allen Dingen darauf an, die Ablenkung des horizontalen Hebels durch die Einwirkung der Kugel h, sowie die Schwingungszeit des horizontalen Pendels cd mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln; jeder Luftzug wirkt aber störend sowohl auf die Ablenkung als auf die Schwingungszeit, und deshalb muß die ganze Vorrichtung in ein möglichst enges Gehäuse eingeschlossen und an einem Orte aufgestellt sein, an welchem möglichst wenig Temperaturschwankungen stattfinden.

Das hölzerne Gehäuse, welches die Drehwage einschließt, hat ungefähr die Gestalt von Fig. 148. In AB befindet sich der Aufhängedraht, CD schließt den horizontalen Hebel ein und in den verticalen Armen CF und DG befinden sich die Kugeln f und g mit ihren Aufhängedrähten. Das Ganze ist nur so weit, daß dem Hebel cd der nöthige Spielraum für die kleine, durch h hervorgebrachte Ablenkung und die kleinen Schwingungen bleibt.

Fig. 148.



An einigen Stellen ist die Wand des Gehäuses durchbrochen, die Oeffnungen aber sind dann wieder durch Platten von Spiegelglas geschlossen, durch welche hindurch man den Hebel und seine Oscillationen beobachten kann.

Cavendish wandte außer der ablenkenden Masse h noch eine zweite, neben der Kugel g hängende an, welche die Wirkung der ersteren unterstützt; aus seinen, nach der eben angedeuteten Methode angestellten Versuchen ergab sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde der Werth 5,48 oder nach Hutton's Revision der Rechnungen 5,32.

Im Jahre 1837 stellte F. Reich neue Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage an. Eine wesentliche Verbesserung des Apparates erzielte er dadurch, daß er ihn mit einer Poggendorff'schen Spiegelvorrichtung versah, welche auch Gauß mit so großem Vortheil bei seinem Magnetometer angewandt hatte. Der Spiegel war am unteren Ende des Aufhängedrahtes bei b, Fig. 147, angebracht. Die ganze Drehwage war an der Decke eines Kellers aufgehängt und die Scala durch eine Lampe mittelst eines Hohlspiegels erleuchtet.

Die Größen, deren Kenntniß zur Berechnung der Masse und Dichtigkeit der Erde nothwendig sind, waren beim Reich'schen Apparat:

Abstand des Aufhängepunktes der Kugeln f und g von der Mitte des Hebels . . . . $r = 100{,}1^{cm}$
Jede der Kugeln f und g wog . . . . $m = 484{,}2^{gr}$
Das auf den Aufhängepunkt der Kugel reducirte Gewicht des halben Hebels sammt dem Gewichte der Aufhängevorrichtung . . . . $m' = 34{,}7^{gr}$
Abstand der Scala vom Spiegel . . . . $\mu = 4523^{mm}$
Gewicht der ablenkenden Kugel h . . . . $M = 45006^{gr}$

Diese Kugel h war aus Blei verfertigt, während die Kugeln f und g aus einer Composition von Blei und Wismuth bestanden.

Ferner ist:
Der Halbmesser der Erde . . . . $R = 636462400^{cm}$
Die Länge des Secundenpendels für Freiberg . . . $l = 99{,}4^{cm}$

Bei einer der von Reich angestellten Beobachtungsreihen ergaben sich folgende Resultate:
Der Abstand des Mittelpunktes der Kugel h vom Mittelpunkt der Kugel f war . . . . $E = 17^{cm}$
Die auf der Scala abgelesene Ablenkung der Drehwage $B = 7{,}156^{mm}$
Die Schwingungszeit der Drehwage . . . . . . $t = 405''$.

Aus diesen Daten läßt sich nun die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde in folgender Weise berechnen.

Bei den Schwingungen der Drehwage hat die Elasticität des Drahtes eine träge Masse in Bewegung zu setzen, deren Trägheit gerade so wirkt, als ob am Ende des Hebels eine Masse $2(m + m')$, in unserem Falle also eine Masse von 1038 Gramm angehängt wäre.

Nun aber wirkt die ablenkende Kraft der Kugel h nur auf die kleine Kugel f. Hätte die Elasticität des Aufhängedrahtes nur diese eine Kugel f in Bewegung zu setzen gehabt, deren Gewicht $m = 484{,}2$ Gramm beträgt, so würden die Schwingungen schneller gewesen sein, und zwar würde die Schwingungszeit im Verhältniß von $\sqrt{2(m + m')}$ zu $\sqrt{m}$ abgenommen haben, kurz die Schwingungszeit t' würde sein:

$$t' = t \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(m + m')}} \quad \ldots \ldots \quad 1)$$

in unserem Falle also:

$$t' = 405 \sqrt{\frac{484}{1038}} = 276{,}55''.$$

Dies ist also die Schwingungszeit eines einfachen, 100,1 Centimeter langen Pendels, welches unter dem Einfluß der Elasticität des Aufhängedrahtes schwingt.

Für ein einfaches Pendel von gleicher Länge, welches unter dem Einfluß der Schwere schwingt, würde die Schwingungszeit gewesen sein:

$$t'' = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

in unserem speciellen Falle:

$$t'' = \frac{\sqrt{100,1}}{\sqrt{\ \ 99,4}} = 1,0035 \text{ Secunden.}$$

Für zwei gleichlange einfache Pendel verhalten sich aber bei gleichem Ausschlagswinkel die beschleunigenden Kräfte, welche die Kugel in die Gleichgewichtslage zurücktreiben, umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Bezeichnen wir die beschleunigende Kraft, mit welcher die Elasticität des Aufhängedrahtes die Drehwage in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, mit k, mit K aber die Kraft, mit welcher die Kugel eines gewöhnlichen Pendels gegen seine Gleichgewichtslage getrieben wird, so haben wir:

$$k : K = t''^2 : t'^2,$$

also:

$$k = K \frac{t''^2}{t'^2}$$

oder:

$$k = K \cdot \frac{r}{l \cdot t'^2} \cdot \frac{2\,(m + m')}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wenn man für t' und für t'' ihre Werthe bei 1) und 2) setzt. Setzt man für t' und t'' die für unseren speciellen Fall berechneten Zahlenwerthe, so kommt:

$$k = \frac{K}{75945}.$$

Durch den Einfluß der Kugel h wird die Drehwage um B Theilstriche der Scala abgelenkt; wenn wir also mit x den Ablenkungswinkel bezeichnen, so ist:

$$sin.\, x = \frac{B}{2\,\mu}.$$

Wenn ein gewöhnliches einfaches Pendel um den Winkel x aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, so ist die Kraft K, welche die Kugel nach ihrer Gleichgewichtslage zurücktreibt, gleich $m \,.\, sin.\, x$, wenn m das Gewicht der Kugel ist: setzen wir für $sin.\, x$ den eben gefundenen Werth, so haben wir:

$$K = \frac{m \,.\, B}{2\,\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

also in unserem speciellen Fall, wenn für m, B und μ die oben angegebenen Zahlenwerthe gesetzt werden:

$$K = 0,3832 \text{ Gramm.}$$

Demnach ist auch

$$k = \frac{B \,.\, r \,.\, (m + m')}{\mu \,.\, l \,.\, t'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

oder für unseren speciellen Fall ergiebt sich für k der Zahlenwerth:

$$k = 0,0000050467 \text{ Gramm.}$$

Dies ist also die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die Kugel h auf die Seite gezogen wird, während die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die gesammte Erde angezogen wird, gleich m ist. Denken wir uns nun die Masse M der Kugel h, sowie die Masse Q der ganzen Erde in den entsprechenden Mittelpunkten vereinigt, so haben wir zur Berechnung der Masse Q die Gleichung:

$$m:k = \frac{Q}{R^2} : \frac{M}{E^2}$$

und daraus:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2}{E^2 k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

oder wenn man für k seinen oben bei 5) angegebenen Werth setzt:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2 \mu \, l \, t^2}{E^2 \,.\, B \,.\, r \, (m + m')}$$

Setzen wir aber in Gleichung 6) für k, m, M, R und E die früher angegebenen Zahlenwerthe, so finden wir für die Masse der Erde den Werth:

$$Q = 5\,914\,500\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ Gramm}$$

oder:

118000 Trillion Centner.

Die mittlere Dichtigkeit der Erde findet man, wenn man die Masse Q durch das Volum der Erde, also durch $^4/_3 \, \pi R^3$ dividirt; man findet alsdann:

$$D = \frac{3\,Q}{4 \pi R^3} = \frac{3\,M \,.\, \mu \, l}{4 \, \pi \, R \,.\, r} \,.\, \frac{m}{m + m'} \,.\, \frac{t^2}{E^2 B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

und wenn man für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt:

$$D = 5{,}476.$$

Aus einer großen Reihe von Versuchen, welche Reich im Jahre 1837 anstellte, fand er als Mittel, mit Berücksichtigung aller nothwendigen Correctionen den Werth:

$$D = 5{,}44.$$

(F. Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage. Freiberg 1838.)

Im Jahre 1843 publicirte Baily in London die Resultate einer großen Reihe von Versuchen, welche er im Auftrage der Royal Astronomical Society nach der Methode von Cavendish angestellt hatte.

Er fand die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}66.$$

Nach dem Bekanntwerden dieses Resultates wiederholte auch Reich seine Versuche, nachdem er einige Verbesserungen in seinem Apparate angebracht hatte, und fand:

$$D = 5{,}58.$$

(Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Band. 1852. S. 385.)

Dichtigkeit der Weltkörper verglichen mit der des Wassers. 92

Nehmen wir aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Resultaten das