folglich:

$$\frac{v}{V} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 R} = \frac{r \cdot T^2}{R t^2}.$$

Nun aber ist $\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}$, folglich haben wir:

$$\frac{v}{V} = \frac{r}{R} \cdot \frac{R^3}{r^3} = \frac{R^2}{r^2},$$

das heißt mit Worten, die beschleunigenden Kräfte, welche die Planeten gegen die Sonne hintreiben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Sonne, ein Gesetz, welches sich wohl a priori voraussehen ließ, da es für alle Wirkungen in die Ferne gilt, insofern wir sie von einem Punkte ausgehend betrachten können.

Wird einem Körper, welcher der Wirkung einer Kraft ausgesetzt ist, die ihn stets gegen einen und denselben Punkt hintreibt, und deren Stärke im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Centralpunkte steht, auf irgend eine Weise eine seitliche Geschwindigkeit mitgetheilt, so muß er, wie sich mit Hülfe höherer Rechnung nachweisen läßt, eine Curve beschreiben, welche nothwendig ein Kegelschnitt ist, und zwar hängt es von dem Verhältniß zwischen der Centripetalkraft und Tangentialkraft ab, ob die durchlaufene Curve eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein wird. Bei den Planeten kommen nur elliptische Bahnen vor, während bei Kometen möglicherweise auch parabolische Bahnen vorkommen. Die kreisförmige Bewegung ist nur ein specieller Fall der elliptischen, da der Kreis als eine Ellipse betrachtet werden kann, deren Excentricität Null ist, deren beide Brennpunkte also in einem zusammenfallen.

Da die Trabanten bei ihrem Umlauf um die entsprechenden Planeten gleichfalls die Kepler'schen Gesetze befolgen, so ist klar, daß die Kräfte, mit welchen die Planeten ihre Trabanten anziehen, demselben Gesetze unterworfen sind, wie die Anziehungskraft, welche zwischen der Sonne und den Planeten wirksam ist.

88 **Die allgemeine Schwere.** Ueber den Fall der Körper auf der Oberfläche der Erde nachdenkend, kam Newton auf die Idee, ob nicht vielleicht dieselbe Kraft, welche den Stein zur Erde herabfallen macht, also das, was wir die Schwere nennen, weit über die Gränzen der Atmosphäre hinaus, ja bis an den Mond reiche, daß nichts Anderes als die Schwere die Centralkraft sei, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält.

Diese Idee läßt sich leicht prüfen. Auf der Erdoberfläche ist die beschleunigende Kraft der Schwere (die Endgeschwindigkeit der ersten Fallsecunde) gleich 9,8088 Meter. Der Mond ist nun 60mal so weit von dem Centrum der Erde entfernt, als ein Punkt auf der Erdoberfläche; wenn also die Schwerkraft bis an den Mond reicht, so muß dort ihre beschleunigende Kraft 60^2, also 3600mal geringer sein als auf der Erdoberfläche, sie wäre also $\frac{9,8088}{3600}$ $= 0,002724$ Meter.

Nun aber können wir die Größe der beschleunigenden Kraft, welche wirklich den Mond nach der Erde hintreibt, aus dem Halbmesser seiner Bahn und seiner Umlaufszeit berechnen. Wir haben:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = \frac{2\pi r \,.\, 2\pi}{t^2}.$$

Der Umfang der Erde ist 40 Millionen Meter, also ist der Umfang der Mondsbahn, d. h. der Werth von $2\pi r$, welcher in obige Gleichung zu setzen ist, gleich 40 . 60 oder 2400 Millionen Meter. Diesen Weg legt der Mond in 27 Tagen 7 Stunden und 4 Minuten oder in 2360580 Secunden zurück; wir haben also:

$$v = \frac{2400000000 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14}{2360580^2} = 0{,}002761 \text{ Meter.}$$

Wenn wir die kleine Differenz zwischen 0,002724 und 0,002761 vernachlässigen, welche übrigens nur daher rührt, daß wir für die Entfernung und die Umlaufszeit des Mondes statt der vollkommen genauen nur Näherungswerthe in Rechnung gebracht haben, so sehen wir, daß sich derselbe Werth für die beschleunigende Kraft ergiebt, welche den Mond zur Erde treibt, mögen wir nun dieselbe aus den astronomischen Beobachtungen oder aus der Hypothese ableiten, daß die Schwerkraft auch noch auf den Mond wirke, daß sie aber im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnehme, und diese Uebereinstimmung ist eben ein Beweis für die Richtigkeit dieser Hypothese.

Newton hatte für den Erdhalbmesser, folglich auch für die Entfernung des Mondes (60 Erdhalbmesser), einen zu kleinen Werth in Rechnung gebracht und fand deshalb, von der Intensität der Schwerkraft auf der Erde ausgehend, die Intensität der Kraft, welche den Mond gegen die Erde treibt, größer, als die aus den astronomischen Beobachtungen abgeleitete. Der Unterschied war von der Art, daß, in umgekehrter Ordnung aus der Mondsbewegung auf den Fall auf der Erdoberfläche schließend, der Fallraum der ersten Secunde nur 13 Fuß hätte betragen müssen, während er in der That 15 Fuß ist.

Diese Differenz war so groß, daß Newton selbst seine Theorie ganz aufgab, d. h. er gab die Idee auf, daß die Centripetalkraft, welche bei der Mondsbewegung thätig ist, mit der Schwere identisch sei.

Zwölf Jahre lang hatte er diesen Gegenstand vollständig liegen gelassen, als er im Juni des Jahres 1682 die Kunde von einer neuen in Frankreich durch Picard ausgeführten Gradmessung erhielt, nach welcher der Durchmesser der Erde größer, und zwar um $^1/_7$ größer war, als man nach früheren, weniger genauen Messungen angenommen hatte. Alsbald nahm er seine alten Rechnungen wieder vor und hatte nun die Freude, seine schon aufgegebene Theorie aufs Vollständigste bestätigt zu sehen.

Die Sonne zieht die Planeten, die Planeten aber ziehen ihre Satelliten an, und die Kraft, welche die Monde gegen ihre Planeten hintreibt, ist identisch mit der Schwerkraft, welche alle Körper niederzieht, die sich auf der Oberfläche der Planeten befinden. Das Gesetz dieser Anziehung, welches unser ganzes Planetensystem beherrscht, läßt sich in folgender Weise aussprechen:

Je zwei materielle Moleküle ziehen sich mit einer Kraft an, welche ihren Massen direct und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man mit m und m' die Massen der beiden Moleküle, mit r ihre Entfernung, so ist also ihre gegenseitige Anziehung gleich:

$$f \frac{m \cdot m'}{r^2},$$

wo f ein constanter Factor ist.

Das Gewicht eines Körpers auf der Oberfläche eines Planeten ist die Resultirende aller Anziehungen, welche sämmtliche Moleküle, aus denen der Planet zusammengesetzt ist, auf den fraglichen Körper ausüben. Diese Resultirende ist stets gegen den Mittelpunkt des Planeten hin gerichtet, insofern man ihn als vollkommen kugelförmig betrachtet und also von seiner Abplattung abstrahirt. Für diesen Fall wirkt auch die Gesammtanziehung eines Planeten in die Ferne sowohl wie auf einen Körper, welcher sich auf seiner Oberfläche befindet, gerade so, als ob die ganze Masse des Planeten sich in seinem Mittelpunkte befände. Bezeichnen wir also mit m die Masse, mit ϱ den Halbmesser eines Planeten, so ist die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse auf der Oberfläche des Planeten gegen den Mittelpunkt hingezogen wird:

$$V = f \frac{m}{\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

Die Geschwindigkeit, also auch die Beschleunigung, mit welcher ein Körper auf der Planetenoberfläche fällt, ist von seiner Masse unabhängig, sie ist gleich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, mit welcher die Masseneinheit fällt, sie ist also:

$$g = h \frac{m}{\varrho^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

wo h einen constanten Factor bezeichnet, dessen nähere Bestimmung für uns jetzt kein Interesse hat.

Betrachtet man die Bewegung eines Planeten, so ist streng genommen der Mittelpunkt der Sonne kein fester Punkt, sondern der Planet sowohl als auch die Sonne selbst beschreiben eine Ellipse um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, welcher aber stets dem Mittelpunkte der Sonne sehr nahe liegt, weil die Masse der Planeten nur ein höchst unbedeutender Bruchtheil der Sonnenmasse ist; bezieht man aber die Bewegung des Planeten auf den Mittelpunkt der Sonne, indem man denselben als fest betrachtet, so ist seine Bahn gleichfalls eine elliptische.

Es sei M die Masse der Sonne, m die Masse eines Planeten und R der Abstand beider von einander, so ist die beschleunigende Kraft, welche den Planeten gegen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt treibt:

$$G = h \frac{M}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

während die Sonne gegen denselben Schwerpunkt mit einer Beschleunigung:

$$\Gamma = h\frac{m}{R^2}$$

hingetrieben wird. Letztere Größe kann man aber als verschwindend klein gegen die erstere betrachten, so daß also G das Maß der Beschleunigung ist, mit welchem der Planet um die Sonne gravitirt. Ebenso ist:

$$G' = h\frac{m}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 4)$$

der Werth der Beschleunigung, mittelst deren ein Satellit um seinen Planeten kreist, wenn r die Entfernung beider bezeichnet und die Masse des Trabanten im Vergleich zur Masse m des Planeten als verschwindend klein betrachtet werden kann.

Masse der Sonne und der Planeten. Die Formeln, welche wir im vorigen Paragraphen kennen lernten, geben uns ein Mittel an die Hand, die Masse der Planeten, welche Satelliten haben, mit der Masse der Sonne zu vergleichen. 89

Für die beschleunigende Kraft, unter deren Einfluß ein Planet um die Sonne kreist, haben wir auch den Werth:

$$G = \frac{4\pi R}{T^2},$$

wenn R, wie oben, der Halbmesser der Planetenbahn und T seine Umlaufszeit ist.

Wenn wir diesen Werth von G dem Werthe bei 3) gleichsetzen, so kommt:

$$\frac{4\pi R}{T^2} = h\frac{M}{R^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 5)$$

In gleicher Weise erhalten wir zwei Ausdrücke für die beschleunigende Kraft, unter deren Einfluß der Satellit um seinen Planeten kreist, und wenn wir beide gleich setzen:

$$\frac{4\pi r}{t^2} = h\frac{m}{r^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 6)$$

wenn t die Umlaufszeit des Trabanten und r seine Entfernung vom Mittelpunkte des Planeten bezeichnet.

Dividirt man die Gleichung 5) durch Gleichung 6), so kommt:

$$\frac{R t^2}{r T^2} = \frac{M}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

und endlich:

$$\frac{M}{m} = \frac{R^3 t^2}{r^3 T^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 7)$$

Nehmen wir die Entfernung des Mondes von der Erde zur Längeneinheit, so ist $r = 1$ und $R = 400$.

Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt 39343, die der Erde