Siebentes Capitel.

Die allgemeine Schwere.

Mechanische Erklärung der Planetenbewegung durch Newton. Nachdem Kepler die wahren Gesetze der Planetenbewegung aus den Beobachtungen abgeleitet hatte, war es die nächste Aufgabe der Astronomie, die mechanischen Ursachen derselben aufzusuchen, die Planetenbewegung auf mechanische Gesetze zurückzuführen. Es ist Newton's unsterbliches Verdienst, diese große Aufgabe gelöst zu haben. 85

Schon früher hatte es nicht an Versuchen gefehlt, die Kräfte auszumitteln, welche bei der Planetenbewegung thätig sind; man kam aber nicht zu einem Resultate, weil die Vorbedingungen fehlten, ohne welche ein solcher Schritt nicht gemacht werden konnte. Um eine mechanische Erklärung der Planetenbewegung geben zu können, mußte man nicht allein wissen, welches die wahren Gestalten der Planetenbahnen sind und mit welcher Geschwindigkeit sie durchlaufen werden, sondern es mußten die Grundgesetze der Mechanik selbst erst ermittelt sein. So lange man das Wesen und die Gesetze der krummlinigen Bewegung überhaupt nicht kannte, war auch eine mechanische Erklärung der Planetenbewegung nicht möglich.

Die Begründung der Mechanik ist mit der Entdeckung der wahren Gesetze der Planetenbewegung fast gleichzeitig. Es ist Galiläi, welcher die Gesetze des freien Falles, der Pendelbewegung, der Wurfbewegung erkannte, welcher das Gesetz der Trägheit begründete und dadurch gerade der Schöpfer der Mechanik wurde. Das Gesetz der Trägheit zeigt, wie ein Körper, welcher einmal in Bewegung ist, diese Bewegung unverändert beibehält, wenn nicht äußere Kräfte sie aufheben oder modificiren; wie jede krummlinige Bewegung durch die Combination der dem Körper bereits inwohnenden und durch das Beharrungsvermögen ihm verbleibenden Geschwindigkeit mit den Wirkungen irgend einer continuirlich wirkenden beschleunigenden Kraft entsteht.

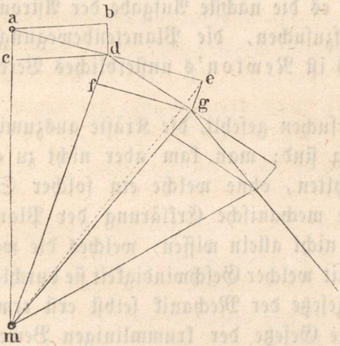
Kepler und Galiläi sind es also, welche den Grund zu dem wissenschaftlichen Gebäude legten, welches durch Newton's Entdeckung der allgemeinen Schwere vollendet wurde.

Wie durch die Combination irgend einer beschleunigenden Kraft mit der Geschwindigkeit, welche ein Körper bereits hat, überhaupt eine krummlinige Bewegung entsteht, wie der Körper beständig um einen festen Anziehungsmittelpunkt kreist, wenn die beschleunigende Kraft stets gegen diesen Anziehungsmittelpunkt hin gerichtet ist, wird hier als bekannt vorausgesetzt (Lehrbuch der Physik, 5. Aufl. 1. Bd. Seite 218). In den folgenden Paragraphen sollen nun die mechanischen Gesetze der Planetenbewegung überhaupt näher betrachtet, zunächst aber aus den Kepler'schen Gesetzen die Natur der beschleunigenden Kräfte abgeleitet werden, welche auf die Planeten wirken.

86 **Die Planeten werden durch Centralkräfte angetrieben.** Nach dem ersten Kepler'schen Gesetze sind die Flächenräume gleich, welche der die Sonne und den Planeten verbindende Leitstrahl in gleichen Zeiten zurücklegt. Aus diesem Gesetze folgt aber, daß die beschleunigende Kraft, welche auf die Planeten wirkt, stets gegen die Sonne hin gerichtet sei.

Wenn ein Körper in a, Fig. 145, mit einer solchen Geschwindigkeit ankommt, daß er in dem nächsten kleinen Zeittheilchen vermöge dieser Geschwindigkeit den Weg ab zurücklegen würde, so wird er, wenn ein gegen den Centralpunkt m gerichteter Stoß auf ihn einwirkt, welcher ihn in demselben Zeittheilchen für sich allein von a nach c führen würde, in diesem Zeittheilchen in der That den Weg ad zurücklegen; der von dem fraglichen Körper nach m gezogene Leitstrahl hat also das Dreieck amd zurückgelegt.

Fig. 145.



Wenn nun auf den in d angekommenen Körper keine beschleunigende Kraft weiter einwirkte, so würde er im nächsten gleichgroßen Zeittheilchen den Weg de zurücklegen, und da $de = da$ sein würde, so ist auch das Dreieck dem gleich dem Dreieck dam. Sobald aber auf den in d angekommenen Körper abermals ein gegen m hin wirkender Stoß wirkt, welcher ihn in der Zeiteinheit für sich allein von d nach f führen würde, so wird nun der Körper in diesem zweiten Zeittheilchen den Weg dg zurücklegen. Da nun aber eg parallel ist mit dm, so hat das Dreieck dgm gleiche Grundlinie dm und gleiche Höhe mit dme, es ist also:

$$\triangle\, dgm = \triangle\, dem,$$

und da das Dreieck dem gleich ist dem Dreieck dam, so haben wir auch:

$$\triangle\, dgm = \triangle\, dam.$$

In gleichen Zeittheilchen legt also der Leitstrahl gleiche Flächenräume zurück, sobald die beschleunigende Kraft nur stets gegen denselben Punkt hin gerichtet ist, nach welchem Gesetze im Uebrigen die beschleunigende Kraft mit der Entfernung von m sich ändern mag.

Die Eigenthümlichkeit, daß der Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, findet nur dann Statt, wenn der Mittelpunkt, von dem aus man die Leitstrahlen nach dem beweglichen Körper gezogen denkt, zugleich der Punkt ist, nach welchem die beschleunigende Kraft stets hinwirkt. Wirkte z. B. auf den in d angekommenen Körper nun eine beschleunigende Kraft, deren Richtung nicht in die Linie dm fällt, so würde der Körper am Ende des nächsten Zeittheilchens in irgend einem Punkte h ankommen, welcher nicht auf der mit dm parallelen Linie eg, sondern diesseits oder jenseits derselben liegt, das Dreieck dmh würde also größer oder kleiner sein als dam.

Da nun in der That der von dem Planeten zur Sonne gezogene Leitstrahl in gleichen Zeiten gleiche Flächenräume beschreibt, so ist klar, daß die Sonne den Centralpunkt bildet, gegen welchen die auf die Planeten einwirkenden beschleunigenden Kräfte stets gerichtet sind.

Abnahme der Centralkraft mit wachsender Entfernung von der Sonne. 87 Aus dem zweiten Kepler'schen Gesetze konnte man nur den Schluß ziehen, daß die Planeten stets gegen die Sonne hingetrieben, wir können also auch sagen, von der Sonne angezogen werden; in welchem Verhältniß aber diese anziehende Kraft der Sonne zu dem Abstande der Planeten von derselben stehe, das läßt das zweite Kepler'sche Gesetz, wie schon bemerkt wurde, völlig unentschieden, denn es findet Statt, welches auch das Gesetz sein mag, welchem dieses Verhältniß unterworfen ist. Dieses Gesetz ergiebt sich aber als nothwendige Folge aus dem dritten Kepler'schen Gesetze.

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetze verhalten sich die Quadrate der Umlaufszeiten zweier Planeten wie die dritten Potenzen ihrer mittleren Abstände von der Sonne (Seite 141). Bezeichnen wir mit T und t die Umlaufszeiten, mit R und r die mittleren Abstände zweier Planeten, so haben wir also:

$$\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}.$$

Die Mechanik lehrt uns aber, daß, wenn ein Körper um einen Anziehungsmittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser r während der Zeit t zurücklegt, alsdann die beschleunigende Kraft v, welche den Körper gegen den Mittelpunkt hintreibt, ist:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2}.$$

Für den Planeten, dessen Umlaufszeit T und dessen mittlerer Abstand von der Sonne R ist, haben wir demnach:

$$V = \frac{4\pi^2 R}{T^2},$$

folglich:

$$\frac{v}{V} = \frac{4\pi^2 r}{t^2} \cdot \frac{T^2}{4\pi^2 R} = \frac{r \cdot T^2}{R t^2}.$$

Nun aber ist $\frac{T^2}{t^2} = \frac{R^3}{r^3}$, folglich haben wir:

$$\frac{v}{V} = \frac{r}{R} \cdot \frac{R^3}{r^3} = \frac{R^2}{r^2},$$

das heißt mit Worten, die beschleunigenden Kräfte, welche die Planeten gegen die Sonne hintreiben, verhalten sich umgekehrt wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Sonne, ein Gesetz, welches sich wohl a priori voraussehen ließ, da es für alle Wirkungen in die Ferne gilt, insofern wir sie von einem Punkte ausgehend betrachten können.

Wird einem Körper, welcher der Wirkung einer Kraft ausgesetzt ist, die ihn stets gegen einen und denselben Punkt hintreibt, und deren Stärke im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Centralpunkte steht, auf irgend eine Weise eine seitliche Geschwindigkeit mitgetheilt, so muß er, wie sich mit Hülfe höherer Rechnung nachweisen läßt, eine Curve beschreiben, welche nothwendig ein Kegelschnitt ist, und zwar hängt es von dem Verhältniß zwischen der Centripetalkraft und Tangentialkraft ab, ob die durchlaufene Curve eine Ellipse, eine Parabel oder eine Hyperbel sein wird. Bei den Planeten kommen nur elliptische Bahnen vor, während bei Kometen möglicherweise auch parabolische Bahnen vorkommen. Die kreisförmige Bewegung ist nur ein specieller Fall der elliptischen, da der Kreis als eine Ellipse betrachtet werden kann, deren Excentricität Null ist, deren beide Brennpunkte also in einem zusammenfallen.

Da die Trabanten bei ihrem Umlauf um die entsprechenden Planeten gleichfalls die Kepler'schen Gesetze befolgen, so ist klar, daß die Kräfte, mit welchen die Planeten ihre Trabanten anziehen, demselben Gesetze unterworfen sind, wie die Anziehungskraft, welche zwischen der Sonne und den Planeten wirksam ist.

88 **Die allgemeine Schwere.** Ueber den Fall der Körper auf der Oberfläche der Erde nachdenkend, kam Newton auf die Idee, ob nicht vielleicht dieselbe Kraft, welche den Stein zur Erde herabfallen macht, also das, was wir die Schwere nennen, weit über die Gränzen der Atmosphäre hinaus, ja bis an den Mond reiche, daß nichts Anderes als die Schwere die Centralkraft sei, welche den Mond in seiner Bahn um die Erde erhält.

Diese Idee läßt sich leicht prüfen. Auf der Erdoberfläche ist die beschleunigende Kraft der Schwere (die Endgeschwindigkeit der ersten Fallsecunde) gleich 9,8088 Meter. Der Mond ist nun 60mal so weit von dem Centrum der Erde entfernt, als ein Punkt auf der Erdoberfläche; wenn also die Schwerkraft bis an den Mond reicht, so muß dort ihre beschleunigende Kraft 60^2, also 3600mal geringer sein als auf der Erdoberfläche, sie wäre also $\frac{9,8088}{3600}$ $= 0,002724$ Meter.

Nun aber können wir die Größe der beschleunigenden Kraft, welche wirklich den Mond nach der Erde hintreibt, aus dem Halbmesser seiner Bahn und seiner Umlaufszeit berechnen. Wir haben:

$$v = \frac{4\pi^2 r}{t^2} = \frac{2\pi r \,.\, 2\pi}{t^2}.$$

Der Umfang der Erde ist 40 Millionen Meter, also ist der Umfang der Mondsbahn, d. h. der Werth von $2\pi r$, welcher in obige Gleichung zu setzen ist, gleich 40 . 60 oder 2400 Millionen Meter. Diesen Weg legt der Mond in 27 Tagen 7 Stunden und 4 Minuten oder in 2360580 Secunden zurück; wir haben also:

$$v = \frac{2400000000 \,.\, 2 \,.\, 3{,}14}{2360580^2} = 0{,}002761 \text{ Meter.}$$

Wenn wir die kleine Differenz zwischen 0,002724 und 0,002761 vernachlässigen, welche übrigens nur daher rührt, daß wir für die Entfernung und die Umlaufszeit des Mondes statt der vollkommen genauen nur Näherungswerthe in Rechnung gebracht haben, so sehen wir, daß sich derselbe Werth für die beschleunigende Kraft ergiebt, welche den Mond zur Erde treibt, mögen wir nun dieselbe aus den astronomischen Beobachtungen oder aus der Hypothese ableiten, daß die Schwerkraft auch noch auf den Mond wirke, daß sie aber im umgekehrten Verhältniß des Quadrats der Entfernung vom Mittelpunkte der Erde abnehme, und diese Uebereinstimmung ist eben ein Beweis für die Richtigkeit dieser Hypothese.

Newton hatte für den Erdhalbmesser, folglich auch für die Entfernung des Mondes (60 Erdhalbmesser), einen zu kleinen Werth in Rechnung gebracht und fand deshalb, von der Intensität der Schwerkraft auf der Erde ausgehend, die Intensität der Kraft, welche den Mond gegen die Erde treibt, größer, als die aus den astronomischen Beobachtungen abgeleitete. Der Unterschied war von der Art, daß, in umgekehrter Ordnung aus der Mondsbewegung auf den Fall auf der Erdoberfläche schließend, der Fallraum der ersten Secunde nur 13 Fuß hätte betragen müssen, während er in der That 15 Fuß ist.

Diese Differenz war so groß, daß Newton selbst seine Theorie ganz aufgab, d. h. er gab die Idee auf, daß die Centripetalkraft, welche bei der Mondsbewegung thätig ist, mit der Schwere identisch sei.

Zwölf Jahre lang hatte er diesen Gegenstand vollständig liegen gelassen, als er im Juni des Jahres 1682 die Kunde von einer neuen in Frankreich durch Picard ausgeführten Gradmessung erhielt, nach welcher der Durchmesser der Erde größer, und zwar um $^1/_7$ größer war, als man nach früheren, weniger genauen Messungen angenommen hatte. Alsbald nahm er seine alten Rechnungen wieder vor und hatte nun die Freude, seine schon aufgegebene Theorie aufs Vollständigste bestätigt zu sehen.

Die Sonne zieht die Planeten, die Planeten aber ziehen ihre Satelliten an, und die Kraft, welche die Monde gegen ihre Planeten hintreibt, ist identisch mit der Schwerkraft, welche alle Körper niederzieht, die sich auf der Oberfläche der Planeten befinden. Das Gesetz dieser Anziehung, welches unser ganzes Planetensystem beherrscht, läßt sich in folgender Weise aussprechen:

Je zwei materielle Moleküle ziehen sich mit einer Kraft an, welche ihren Massen direct und dem Quadrat ihrer Entfernungen umgekehrt proportional ist.

Bezeichnet man mit m und m' die Massen der beiden Moleküle, mit r ihre Entfernung, so ist also ihre gegenseitige Anziehung gleich:

$$f\,\frac{m\,.\,m'}{r^2},$$

wo f ein constanter Factor ist.

Das Gewicht eines Körpers auf der Oberfläche eines Planeten ist die Resultirende aller Anziehungen, welche sämmtliche Moleküle, aus denen der Planet zusammengesetzt ist, auf den fraglichen Körper ausüben. Diese Resultirende ist stets gegen den Mittelpunkt des Planeten hin gerichtet, insofern man ihn als vollkommen kugelförmig betrachtet und also von seiner Abplattung abstrahirt. Für diesen Fall wirkt auch die Gesammtanziehung eines Planeten in die Ferne sowohl wie auf einen Körper, welcher sich auf seiner Oberfläche befindet, gerade so, als ob die ganze Masse des Planeten sich in seinem Mittelpunkte befände. Bezeichnen wir also mit m die Masse, mit ϱ den Halbmesser eines Planeten, so ist die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse auf der Oberfläche des Planeten gegen den Mittelpunkt hingezogen wird:

$$V = f\,\frac{m}{\varrho^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 1)$$

Die Geschwindigkeit, also auch die Beschleunigung, mit welcher ein Körper auf der Planetenoberfläche fällt, ist von seiner Masse unabhängig, sie ist gleich der Geschwindigkeit und der Beschleunigung, mit welcher die Masseneinheit fällt, sie ist also:

$$g = h\,\frac{m}{\varrho^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 2)$$

wo h einen constanten Factor bezeichnet, dessen nähere Bestimmung für uns jetzt kein Interesse hat.

Betrachtet man die Bewegung eines Planeten, so ist streng genommen der Mittelpunkt der Sonne kein fester Punkt, sondern der Planet sowohl als auch die Sonne selbst beschreiben eine Ellipse um den gemeinschaftlichen Schwerpunkt, welcher aber stets dem Mittelpunkte der Sonne sehr nahe liegt, weil die Masse der Planeten nur ein höchst unbedeutender Bruchtheil der Sonnenmasse ist; bezieht man aber die Bewegung des Planeten auf den Mittelpunkt der Sonne, indem man denselben als fest betrachtet, so ist seine Bahn gleichfalls eine elliptische.

Es sei M die Masse der Sonne, m die Masse eines Planeten und R der Abstand beider von einander, so ist die beschleunigende Kraft, welche den Planeten gegen den gemeinschaftlichen Schwerpunkt treibt:

$$G = h\,\frac{M}{R^2} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \quad 3)$$

während die Sonne gegen denselben Schwerpunkt mit einer Beschleunigung:

$$\Gamma = h \frac{m}{R^2}$$

hingetrieben wird. Letztere Größe kann man aber als verschwindend klein gegen die erstere betrachten, so daß also G das Maß der Beschleunigung ist, mit welchem der Planet um die Sonne gravitirt. Ebenso ist:

$$G' = h \frac{m}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

der Werth der Beschleunigung, mittelst deren ein Satellit um seinen Planeten kreist, wenn r die Entfernung beider bezeichnet und die Masse des Trabanten im Vergleich zur Masse m des Planeten als verschwindend klein betrachtet werden kann.

Masse der Sonne und der Planeten. Die Formeln, welche wir im vorigen Paragraphen kennen lernten, geben uns ein Mittel an die Hand, die Masse der Planeten, welche Satelliten haben, mit der Masse der Sonne zu vergleichen. 89

Für die beschleunigende Kraft, unter deren Einfluß ein Planet um die Sonne kreist, haben wir auch den Werth:

$$G = \frac{4 \pi R}{T^2},$$

wenn R, wie oben, der Halbmesser der Planetenbahn und T seine Umlaufszeit ist.

Wenn wir diesen Werth von G dem Werthe bei 3) gleichsetzen, so kommt:

$$\frac{4 \pi R}{T^2} = h \frac{M}{R^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

In gleicher Weise erhalten wir zwei Ausdrücke für die beschleunigende Kraft, unter deren Einfluß der Satellit um seinen Planeten kreist, und wenn wir beide gleich setzen:

$$\frac{4 \pi r}{t^2} = h \frac{m}{r^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 6)$$

wenn t die Umlaufszeit des Trabanten und r seine Entfernung vom Mittelpunkte des Planeten bezeichnet.

Dividirt man die Gleichung 5) durch Gleichung 6), so kommt:

$$\frac{R t^2}{r T^2} = \frac{M}{m} \cdot \frac{r^2}{R^2}$$

und endlich:

$$\frac{M}{m} = \frac{R^3 t^2}{r^3 T^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 7)$$

Nehmen wir die Entfernung des Mondes von der Erde zur Längeneinheit, so ist $r = 1$ und $R = 400$.

Die Umlaufszeit des Mondes um die Erde beträgt 39343, die der Erde um die Sonne beträgt 525950 Minuten. Setzen wir nun in Gleichung 7) $t = 39343$ und $T = 525950$ und außerdem für R und r die obigen Zahlenwerthe, so kommt:

$$\frac{M}{m} = 358120,$$

d. h. die Masse der Sonne ist 358120mal so groß als die Masse der Erde. Dieser Zahlenwerth ist jedoch nur eine erste Annäherung an das wahre Verhältniß. Wenn man für Umlaufszeiten und Entfernungen die ganz genauen Werthe setzt und die Masse der Erde nicht gegen die der Sonne, die Masse des Mondes nicht gegen die der Erde vernachlässigt, wie es bei obiger Berechnung geschehen ist, so ergiebt sich für die Masse der Sonne:

$$M = 355000,$$

wenn man die Masse der Erde als Einheit nimmt.

Die Umlaufszeit t' des äußersten Jupiterstrabanten ist 24032 Minuten, seine Entfernung vom Mittelpunkte des Jupiter ist 27 Jupitershalbmesser oder, in Mondabständen ausgedrückt, $r' = 5{,}2$. Bezeichnen wir also mit m' die Masse des Jupiter, so haben wir:

$$\frac{m'}{m} = \frac{r'^3\, t^2}{r^3\, t'^2}$$

und wenn wir für r, r', t und t' ihre Zahlenwerthe setzen:

$$\frac{m'}{m} = 376.$$

Auch dieser Werth ist nur eine erste Annäherung, der genaue Werth der Jupitersmasse ist 340, wenn man die Masse der Erde zur Einheit nimmt.

Nach derselben Methode findet man, daß die Masse des Saturn 102mal, die des Uranus 14,5mal so groß ist als die Masse der Erde.

Es ist bereits oben der wahre Durchmesser der Sonne und der Planeten angegeben worden, und daraus läßt sich dann leicht ihr Volumen berechnen. Setzt man das Volumen der Erde gleich 1, so ergiebt sich das Volumen der Sonne, des Jupiter, des Saturn und des Uranus, wie es die zweite Columne der folgenden Tabelle angiebt.

	Volumen.	Masse.	Dichtigkeit.
Erde	1	1	1
Sonne	1409725	355500	0,252
Jupiter	1491	340	0,227
Saturn	772	102	0,131
Uranus	86,5	14,5	0,167

Die dritte Columne dieser Tabelle enthält die eben besprochenen Werthe für die Massen der genannten Himmelskörper. Man sieht nun sogleich, daß die Massen dem körperlichen Inhalte keineswegs proportional bleiben; während z. B. der cubische Inhalt des Jupiter 1491mal größer ist als der der Erde, so ist die Masse des Jupiter doch nur 340mal so groß als die Masse der Erde, es ist also klar, daß Jupiter weniger dicht sein muß als die Erde.

Dividirt man die Zahlen der dritten Columne durch die entsprechenden Zahlen der zweiten, so findet man die Werthe der Dichtigkeit, wie sie in der letzten Verticalreihe aufgeführt sind. Die Sonne ist also nahezu 4mal weniger dicht als die Erdmasse; der Jupiter ist nicht ganz so dicht wie die Sonne, noch weit weniger dicht aber sind Saturn und Uranus.

Dichtigkeit der Erde. Wir haben eben die Dichtigkeit der Sonne 90
und mehrerer Planeten nur mit der mittleren Dichtigkeit der Erde verglichen, wir wollen nun sehen, auf welche Weise man die Masse und die Dichtigkeit der Erdkugel selbst bestimmen kann.

Ein Bleiloth, welches in einer vollkommen ebenen Gegend im Freien aufgehängt wird, ist stets gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet; wenn sich aber auf einer Seite des Bleilothes eine bedeutende, über die Ebene hervorragende Masse, etwa ein Gebirgszug, befindet, so wird diese gleichfalls anziehend auf die Kugel des Lothes wirken und eine Ablenkung desselben aus der Verticalen veranlassen.

In gleicher Weise wird auch die Nähe von Gebirgen eine Abweichung der freien Oberfläche der Gewässer von der wahren Horizontalen bewirken, da ja dieselbe stets rechtwinklig auf der Richtung des Bleilothes steht.

Bouguer war der Erste, welcher die Idee hatte, in der Anziehung der Gebirge einen Beweis für die allgemeine Anziehung der Materie zu suchen. Er stellte seine Versuche an den Abhängen des Chimborasso an und fand eine Ablenkung des Bleilothes von 7″ bis 8″. Daß bei der bedeutenden Ausdehnung des Gebirges keine größere Ablenkung gefunden wurde, rührt wahrscheinlich daher, daß sich große Höhlungen im Inneren jener vulcanischen Berge befinden.

Sehen wir nun zunächst, wie man im Stande ist, eine Ablenkung des Bleilothes von der Verticalen (d. h. von der nach dem Mittelpunkte der Erde gerichteten Geraden) nachzuweisen.

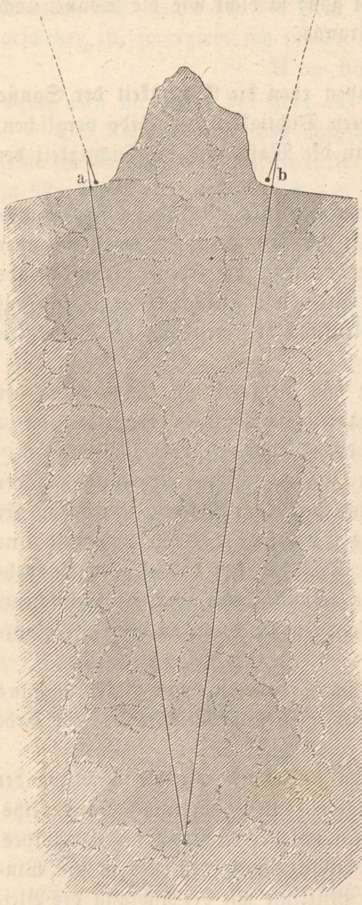
An unseren astronomischen Höhenkreisen bestimmen wir die Richtung der Horizontalen mit Hülfe der Wasserwage, folglich fällt die Richtung des Zeniths, wie sie uns der Höhenkreis angiebt, zusammen mit der Richtung des Bleilothes. Die durch den Höhenkreis gemessene Zenithdistanz eines Gestirnes ist der Winkel, welchen die nach dem Sterne gerichtete Visirlinie mit der Richtung des Bleilothes macht.

Wenn man nun an zwei Orten a und b, Fig. 146 (a. f. S.), welche auf demselben Erdmeridian liegen, die Zenithdistanz eines und desselben Fixsternes zur Culminationszeit bestimmt, so ist der Unterschied der beiden Zenithdistanzen der Winkel, welchen die Richtung des Bleilothes in a mit der Richtung des Bleilothes in b macht.

So fanden Maskelyne und Hutton im Jahre 1772, daß die Bleilothe zweier Orte a und b desselben Meridians, von denen die eine auf dem nördlichen, die andere am südlichen Abhange des Berges Schehallien lag, einen Winkel von 53 Bogensecunden mit einander machten.

Durch geodätische Messungen wurde aber ferner ermittelt, daß a 3900 Fuß nördlich von b lag. Da für Schottland die Länge eines Breitengrades ungefähr 342500 Fuß beträgt, so entspricht jene Länge von 3900 Fuß einem Bogen von 41″, d. h. aus der geodätischen Messung folgt, daß a um 41″ nördlich von b liegt, oder mit anderen Worten, daß die Verticale von a mit der Verticalen von b einen Winkel von 41 Secunden macht.

Fig. 146.



Der Winkel, welchen die Bleilothe von a und b mit einander machen, ist also um 12″ größer als der Winkel der Verticalen beider Orte; die Bleilothe von a und b sind also nicht gegen den Mittelpunkt der Erde gerichtet, sie sind durch den Einfluß des Berges von der Verticalen abgelenkt, und zwar beträgt die Summe der Ablenkungen der Bleilothe in a und b 12″.

Durch eine genaue Vermessung des Berges wurde nun das Volumen des Gebirges bestimmt, woraus sich dann auch die Masse desselben mit annähernder Genauigkeit berechnen ließ, da ja das specifische Gewicht des Gesteins bekannt ist, aus welchem es besteht.

Aus der Ablenkung des Bleilothes ergiebt sich aber ferner, in welchem Verhältniß die anziehende Kraft des Berges zur Gesammtanziehung der Erde steht, und da die Masse des Berges bekannt ist, so läßt sich daraus auch auf die Masse und die mittlere Dichtigkeit der ganzen Erdkugel schließen.

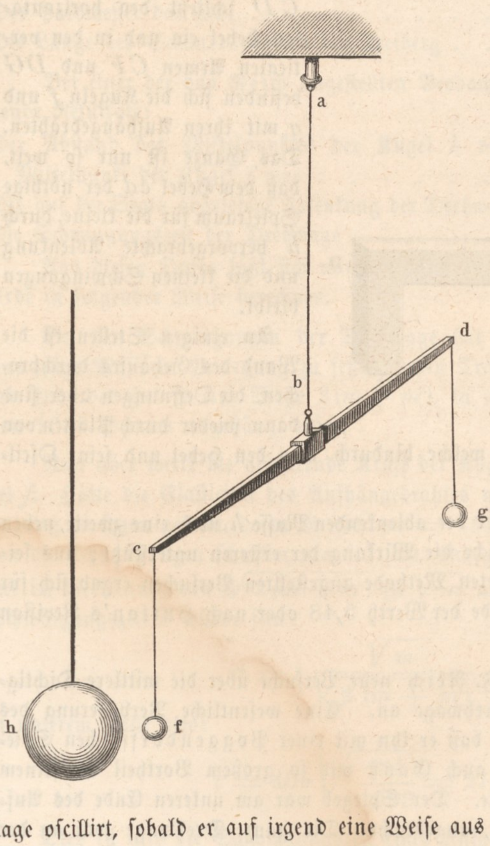
Maskelyne ermittelte auf diesem Wege, daß die mittlere Dichtigkeit der Erde 4,71 sei, ein Resultat, welches der Wahrheit schon sehr nahe kam.

Wir begnügen uns hier, die Methode nur anzudeuten, welche Maskelyne anwandte, um die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen, und zwar um so mehr, da die Berechnung auf diesem Wege eine ziemlich schwierige ist, ohne deshalb so genaue Resultate liefern zu können, wie die Methode, welche im nächsten Paragraphen besprochen werden soll.

Anwendung der Drehwage zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde. Ein englischer Physiker, Michell, construirte eine Drehwage, mit deren Hülfe er die mittlere Dichtigkeit der Erde zu bestimmen gedachte; er starb aber, ehe er zur Anstellung der Versuche kam, welche erst nach seinem Tode von Cavendish ausgeführt wurden. Der Grundgedanke des Apparates ist folgender: 91

An einem dünnen Metalldraht ab, Fig. 147, hängt ein horizontaler, gleicharmiger Hebel cd, welcher an seinen Enden die Kugeln f und g trägt. Dem Einfluß aller störenden Kräfte entzogen, wird die ganze Vorrichtung eine solche Stellung annehmen, daß der Draht ab ohne Torsion ist.

Fig. 147.



Bringt man nun neben der Kugel f eine Kugel h von bedeutender Masse an, so wird h anziehend auf f wirken, und dadurch wird der horizontale Hebel cd um einen Winkel aus seiner früheren Gleichgewichtslage heraus gedreht, welcher der anziehenden Kraft k proportional ist, mit welcher die Kugeln h und f gegenseitig auf einander wirken.

Die Größe dieser Kraft k läßt sich aber berechnen, wenn man die Schwingungszeit kennt, mit welcher der horizontale Hebel cd um seine Gleichgewichtslage oscillirt, sobald er auf irgend eine Weise aus derselben herausgebracht worden ist.

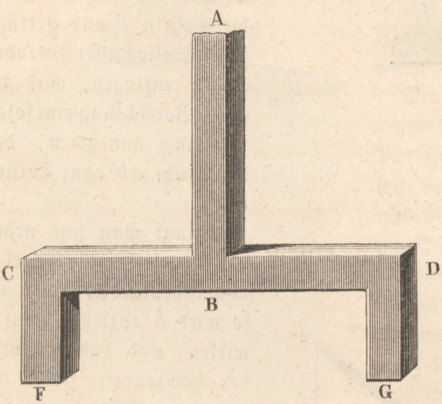
Aus dem Verhältniß der Kraft k zu dem Gewichte m der Kugel f (der

Kraft, mit welcher die ganze Erdkugel die Kugel f anzieht) ergiebt sich dann das Verhältniß zwischen der leicht zu ermittelnden Masse M der Kugel h und der Masse Q der Erdkugel.

Es kommt also vor allen Dingen darauf an, die Ablenkung des horizontalen Hebels durch die Einwirkung der Kugel h, sowie die Schwingungszeit des horizontalen Pendels cd mit möglichster Genauigkeit zu ermitteln; jeder Luftzug wirkt aber störend sowohl auf die Ablenkung als auf die Schwingungszeit, und deshalb muß die ganze Vorrichtung in ein möglichst enges Gehäuse eingeschlossen und an einem Orte aufgestellt sein, an welchem möglichst wenig Temperaturschwankungen stattfinden.

Das hölzerne Gehäuse, welches die Drehwage einschließt, hat ungefähr die Gestalt von Fig. 148. In AB befindet sich der Aufhängedraht, CD schließt den horizontalen Hebel ein und in den verticalen Armen CF und DG befinden sich die Kugeln f und g mit ihren Aufhängedrähten. Das Ganze ist nur so weit, daß dem Hebel cd der nöthige Spielraum für die kleine, durch h hervorgebrachte Ablenkung und die kleinen Schwingungen bleibt.

Fig. 148.



An einigen Stellen ist die Wand des Gehäuses durchbrochen, die Oeffnungen aber sind dann wieder durch Platten von Spiegelglas geschlossen, durch welche hindurch man den Hebel und seine Oscillationen beobachten kann.

Cavendish wandte außer der ablenkenden Masse h noch eine zweite, neben der Kugel g hängende an, welche die Wirkung der ersteren unterstützt; aus seinen, nach der eben angedeuteten Methode angestellten Versuchen ergab sich für die mittlere Dichtigkeit der Erde der Werth 5,48 oder nach Hutton's Revision der Rechnungen 5,32.

Im Jahre 1837 stellte F. Reich neue Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage an. Eine wesentliche Verbesserung des Apparates erzielte er dadurch, daß er ihn mit einer Poggendorff'schen Spiegelvorrichtung versah, welche auch Gauß mit so großem Vortheil bei seinem Magnetometer angewandt hatte. Der Spiegel war am unteren Ende des Aufhängedrahtes bei b, Fig. 147, angebracht. Die ganze Drehwage war an der Decke eines Kellers aufgehängt und die Scala durch eine Lampe mittelst eines Hohlspiegels erleuchtet.

Die Größen, deren Kenntniß zur Berechnung der Masse und Dichtigkeit der Erde nothwendig sind, waren beim Reich'schen Apparat:

Abstand des Aufhängepunktes der Kugeln f und g von der Mitte des Hebels . . . . $r = 100{,}1^{cm}$
Jede der Kugeln f und g wog . . . . $m = 484{,}2^{gr}$
Das auf den Aufhängepunkt der Kugel reducirte Gewicht des halben Hebels sammt dem Gewichte der Aufhängevorrichtung . . . . $m' = 34{,}7^{gr}$
Abstand der Scala vom Spiegel . . . . $\mu = 4523^{mm}$
Gewicht der ablenkenden Kugel h . . . . $M = 45006^{gr}$

Diese Kugel h war aus Blei verfertigt, während die Kugeln f und g aus einer Composition von Blei und Wismuth bestanden.

Ferner ist:
Der Halbmesser der Erde . . . . $R = 636462400^{cm}$
Die Länge des Secundenpendels für Freiberg . . . $l = 99{,}4^{cm}$

Bei einer der von Reich angestellten Beobachtungsreihen ergaben sich folgende Resultate:
Der Abstand des Mittelpunktes der Kugel h vom Mittelpunkt der Kugel f war . . . . $E = 17^{cm}$
Die auf der Scala abgelesene Ablenkung der Drehwage $B = 7{,}156^{mm}$
Die Schwingungszeit der Drehwage . . . . . . $t = 405''$.

Aus diesen Daten läßt sich nun die Masse und die mittlere Dichtigkeit der Erde in folgender Weise berechnen.

Bei den Schwingungen der Drehwage hat die Elasticität des Drahtes eine träge Masse in Bewegung zu setzen, deren Trägheit gerade so wirkt, als ob am Ende des Hebels eine Masse $2(m + m')$, in unserem Falle also eine Masse von 1038 Gramm angehängt wäre.

Nun aber wirkt die ablenkende Kraft der Kugel h nur auf die kleine Kugel f. Hätte die Elasticität des Aufhängedrahtes nur diese eine Kugel f in Bewegung zu setzen gehabt, deren Gewicht $m = 484{,}2$ Gramm beträgt, so würden die Schwingungen schneller gewesen sein, und zwar würde die Schwingungszeit im Verhältniß von $\sqrt{2(m + m')}$ zu $\sqrt{m}$ abgenommen haben, kurz die Schwingungszeit t' würde sein:

$$t' = t \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2(m + m')}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

in unserem Falle also:

$$t' = 405 \sqrt{\frac{484}{1038}} = 276{,}55''.$$

Dies ist also die Schwingungszeit eines einfachen, 100,1 Centimeter langen Pendels, welches unter dem Einfluß der Elasticität des Aufhängedrahtes schwingt.

Für ein einfaches Pendel von gleicher Länge, welches unter dem Einfluß der Schwere schwingt, würde die Schwingungszeit gewesen sein:

$$t'' = \frac{\sqrt{r}}{\sqrt{l}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

in unserem speciellen Falle:

$$t'' = \frac{\sqrt{100{,}1}}{\sqrt{99{,}4}} = 1{,}0035 \text{ Secunden.}$$

Für zwei gleichlange einfache Pendel verhalten sich aber bei gleichem Ausschlagswinkel die beschleunigenden Kräfte, welche die Kugel in die Gleichgewichtslage zurücktreiben, umgekehrt wie die Quadrate der Schwingungszeiten. Bezeichnen wir die beschleunigende Kraft, mit welcher die Elasticität des Aufhängedrahtes die Drehwage in ihre Gleichgewichtslage zurückzuführen strebt, mit k, mit K aber die Kraft, mit welcher die Kugel eines gewöhnlichen Pendels gegen seine Gleichgewichtslage getrieben wird, so haben wir:

$$k : K = t''^2 : t'^2,$$

also:

$$k = K \frac{t''^2}{t'^2}$$

oder:

$$k = K \cdot \frac{r}{l \cdot t'^2} \cdot \frac{2\,(m + m')}{m} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 3)$$

wenn man für t' und für t'' ihre Werthe bei 1) und 2) setzt. Setzt man für t' und t'' die für unseren speciellen Fall berechneten Zahlenwerthe, so kommt:

$$k = \frac{K}{75945}.$$

Durch den Einfluß der Kugel h wird die Drehwage um B Theilstriche der Scala abgelenkt; wenn wir also mit x den Ablenkungswinkel bezeichnen, so ist:

$$\sin. x = \frac{B}{2\,\mu}.$$

Wenn ein gewöhnliches einfaches Pendel um den Winkel x aus seiner Gleichgewichtslage entfernt wird, so ist die Kraft K, welche die Kugel nach ihrer Gleichgewichtslage zurücktreibt, gleich $m \cdot \sin. x$, wenn m das Gewicht der Kugel ist: setzen wir für $\sin. x$ den eben gefundenen Werth, so haben wir:

$$K = \frac{m \cdot B}{2\,\mu} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

also in unserem speciellen Fall, wenn für m, B und μ die oben angegebenen Zahlenwerthe gesetzt werden:

$$K = 0{,}3832 \text{ Gramm.}$$

Demnach ist auch

$$k = \frac{B \cdot r \cdot (m + m')}{\mu \cdot l \cdot t'^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

oder für unseren speciellen Fall ergiebt sich für k der Zahlenwerth:

$$k = 0{,}0000050467 \text{ Gramm.}$$

Dies ist also die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die Kugel h auf die Seite gezogen wird, während die Kraft, mit welcher die Kugel f durch die gesammte Erde angezogen wird, gleich m ist. Denken wir uns nun die Masse M der Kugel h, sowie die Masse Q der ganzen Erde in den entsprechenden Mittelpunkten vereinigt, so haben wir zur Berechnung der Masse Q die Gleichung:

$$m:k = \frac{Q}{R^2} : \frac{M}{E^2}$$

und daraus:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2}{E^2 k} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 6)$$

oder wenn man für k seinen oben bei 5) angegebenen Werth setzt:

$$Q = \frac{m \,.\, M \,.\, R^2 \mu \, l \, t^2}{E^2 \,.\, B \,.\, r\,(m + m')}$$

Setzen wir aber in Gleichung 6) für k, m, M, R und E die früher angegebenen Zahlenwerthe, so finden wir für die Masse der Erde den Werth:

$$Q = 5\,914\,500\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000 \text{ Gramm}$$

oder:

118000 Trillion Centner.

Die mittlere Dichtigkeit der Erde findet man, wenn man die Masse Q durch das Volum der Erde, also durch $^4/_3 \pi R^3$ dividirt; man findet alsdann:

$$D = \frac{3\,Q}{4 \pi R^3} = \frac{3\,M \,.\, \mu \, l}{4 \pi R \,.\, r} \,.\, \frac{m}{m + m'} \,.\, \frac{t^2}{E^2 B} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 7)$$

und wenn man für die Buchstaben ihre Zahlenwerthe substituirt:

$$D = 5{,}476.$$

Aus einer großen Reihe von Versuchen, welche Reich im Jahre 1837 anstellte, fand er als Mittel, mit Berücksichtigung aller nothwendigen Correctionen den Werth:

$$D = 5{,}44.$$

(F. Reich, Versuche über die mittlere Dichtigkeit der Erde mittelst der Drehwage. Freiberg 1838.)

Im Jahre 1843 publicirte Baily in London die Resultate einer großen Reihe von Versuchen, welche er im Auftrage der Royal Astronomical Society nach der Methode von Cavendish angestellt hatte.

Er fand die mittlere Dichtigkeit der Erde:

$$D = 5{,}66.$$

Nach dem Bekanntwerden dieses Resultates wiederholte auch Reich seine Versuche, nachdem er einige Verbesserungen in seinem Apparate angebracht hatte, und fand:

$$D = 5{,}58.$$

(Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. Erster Band. 1852. S. 385.)

Dichtigkeit der Weltkörper verglichen mit der des Wassers. 92

Nehmen wir aus den im vorigen Paragraphen besprochenen Resultaten das

Mittel, so ergiebt sich, daß die mittlere Dichtigkeit der Erde 5,5mal so groß ist als die des Wassers.

Da nun das specifische Gewicht der Felsmassen, welche die feste Erdrinde bilden, kaum halb so groß ist, so müssen wir schließen, daß das Innere der Erde aus Körpern von größerem specifischen Gewichte bestehe, daß die Erde einen metallischen Kern habe.

Verglichen mit Wasser, ist die Dichtigkeit

der Sonne 1,38

des Jupiter 1,25

des Saturn 0,72

des Uranus . . . . . 0,92.

Die mittlere Dichtigkeit der Sonne ist also ungefähr die des Buxbaumes, die mittlere Dichtigkeit des Jupiter ist der des Ebenholzes gleich, während Saturn und Uranus in ihrer Dichtigkeit dem Nußbaume und Ahornholz nahe stehen.

Der Vollständigkeit wegen folgt hier noch, die Erde zur Einheit genommen, die Masse und Dichtigkeit der drei übrigen Hauptplaneten, welche keine Trabanten haben, deren Masse also auf anderem Wege bestimmt werden muß, als der ist, den wir in §. 89 kennen lernten.

	Volumen.	Masse.	Dichtigkeit.
Mercur. . .	0,059	0,073	1,225
Venus . . .	0,996	0,885	0,908
Mars . . .	0,136	0,132	0,972

Setzen wir die Dichtigkeit des Wassers gleich 1, so ist die Dichtigkeit

des Mercur 6,7

der Venus 5,0

des Mars . . . . . . 5,3.

Unter allen Planeten ist also Mercur der dichteste, nach ihm die Erde. Mars und Venus stehen der Erde in Beziehung auf mittlere Dichtigkeit sehr nahe.

93 **Grösse der Schwerkraft auf der Oberfläche der Sonne und der Planeten.** Nach §. 88 ist $V = f\frac{m}{\varrho^2}$ das Maß für die Schwerkraft auf der Oberfläche eines Weltkörpers, wenn ϱ den Halbmesser und m die Masse desselben bezeichnen.

Setzen wir die Schwerkraft auf der Oberfläche der Erde gleich 1; nehmen wir ferner die Masse der Erde zur Masseneinheit, den Radius derselben zur Längeneinheit, so wird auch $f = 1$, und wir haben alsdann für die Schwerkraft auf der Oberfläche irgend eines anderen Weltkörpers

$$V = \frac{m}{\varrho^2},$$

wenn m und ϱ in den eben bezeichneten Einheiten ausgedrückt werden. So ist der Radius des Jupiter 11,5mal so groß als der Erdhalbmesser, und die Masse des Jupiter ist 340mal so groß als die Masse der Erde; folglich ist für Jupiter

$$V = \frac{340}{11{,}5^2} = 2{,}57.$$

Auf diese Weise ergeben sich für die Sonne, den Mond und die Planeten folgende Werthe für die Schwerkraft auf ihrer Oberfläche:

Namen der Himmelskörper.	Schwere auf der Oberfläche.	Fallraum der ersten Secunde.
Sonne	28,30	424,5 Fuß
Mercur	1,15	17,2 »
Venus	0,91	13,6 »
Erde	1,00	15,0 »
Mars	0,50	7,5 »
Jupiter	2,57	38,5 »
Saturn	1,09	16,3 »
Uranus	1,05	15,7 »
Mond	0,16	2,4 »

Die Masse eines Centners, auf die Oberfläche der Sonne gebracht, wird also dort auf ihre Unterlage einen Druck ausüben, welcher gleich ist dem Druck von 28,3 Centnern auf der Erdoberfläche, während dagegen auf dem Monde die gleichen Massen nahezu 5mal weniger stark auf ihre Unterlage drücken als auf der Erde. Es würde ungefähr gleiche Anstrengung erfordern, um auf der Erde die Masse von 50 Pfunden, auf der Sonne die Masse von 2 Pfunden oder auf dem Monde die Masse von 250 Pfunden zu tragen.

Die Störungen. Nach dem Newton'schen Gravitationsgesetz ist die Sonne, wie dies bereits angedeutet wurde, nicht mehr ein absolut fester Punkt, und wäre außer der Sonne nur noch ein einziger Planet vorhanden, so würde der Planet sowohl wie die Sonne um ihren gemeinschaftlichen Schwerpunkt eine Ellipse beschreiben. Dieser gemeinschaftliche Schwerpunkt wird dem Mittelpunkte der Sonne um so näher liegen, je kleiner die Masse des Planeten im Vergleich zu dem der Sonne ist, so daß also die Ellipse, welche der Mittelpunkt der Sonne zu beschreiben hätte, sehr klein wäre im Vergleich zu der vom Planeten beschriebenen. Mag man aber die Bewegung des Planeten nun auf den gemeinschaftlichen Schwerpunkt oder auf den Mittelpunkt der Sonne beziehen, so würde seine Bahn eine rein elliptische sein, so lange nur ein einziger Planet die Sonne umkreiste. 94

So verhält sich aber die Sache nicht. Die Sonne wird von vielen Planeten umkreist, und jeder dieser Planeten wird nicht allein von der Sonne, sondern zugleich von allen übrigen angezogen. Daraus folgt nun, daß die Bewegung eines jeden Körpers im Planetensysteme weit verwickelter ist, als wir bisher angenommen haben. Weil aber die Masse der Sonne die Masse der Planeten so bedeutend übertrifft, so ist die wahre Bahn jedes Planeten doch nur sehr wenig von der elliptischen abweichend, wie sie sein würde, wenn der störende Einfluß der übrigen Planeten nicht vorhanden wäre.

Die Kepler'schen Gesetze sind demnach nur als Annäherungsgesetze zu betrachten, welche nahezu die wahre Bewegung der Planeten darstellen, aber doch noch Differenzen von derselben zeigen, welche glücklicherweise nicht groß genug waren, um Kepler an der Auffindung seiner einfachen Gesetze zu hindern.

Die Anziehungen, welche ein Planet von Seiten aller übrigen erfährt, werden ihn also nur sehr wenig von der elliptischen Bahn entfernen, welche er ohne dies verfolgen würde; die Modificationen, welche auf diese Weise in der Planetenbewegung hervorgebracht werden, nennt man Störungen (Perturbationen).

Um die Untersuchung dieser verwickelten Bewegung zu erleichtern, nimmt man einen eingebildeten (fictiven) Planeten an, welcher sich in einer elliptischen Bahn bewegt, deren Elemente eine allmälige Aenderung erleiden, während dann der wahre Planet bald auf der einen, bald auf der anderen Seite dieses fictiven Planeten oscillirt, ohne sich zu weit von demselben zu entfernen.

Die allmäligen Veränderungen in den Elementen der elliptischen Bewegung des fictiven Planeten nennt man seculare Störungen, die Oscillationen des wahren Planeten aber auf die eine oder andere Seite des fictiven werden periodische Störungen genannt. Die allmälige Aenderung der Schiefe der Ekliptik, das langsame Fortrücken des Periheliums der Planeten sind solche seculare Störungen, welche die Beobachtung nachgewiesen hat und von welchen die Theorie der allgemeinen Schwere vollständige Rechenschaft giebt.

Eines der merkwürdigsten Resultate, zu denen man geführt wurde, indem man die Störungen der Planetenbahnen zu berechnen suchte, ist das, daß die großen Axen der elliptischen Bahnen, auf welchen sich die fictiven Planeten bewegen, stets dieselben Werthe beibehalten. Die secularen Störungen afficiren alle Elemente der elliptischen Bewegung mit Ausnahme der großen Axe, welche stets dieselbe bleibt. Da die Umlaufszeit eines Planeten durch das dritte Kepler'sche Gesetz mit der Länge der großen Axe verknüpft ist, so hat die Unveränderlichkeit der großen Axe auch die Unveränderlichkeit der Umlaufszeit zur Folge.

Die Excentricität und die Neigung der Planetenbahnen erleiden allmälig fortschreitende Veränderungen. Obgleich nun aber diese Aenderungen Jahrhunderte hindurch in demselben Sinne vor sich gehen, so sind sie dennoch periodisch, wenngleich diese Perioden von sehr langer Dauer sind, so daß weder die Excentricitäten noch die Neigungen der Planetenbahnen über gewisse ziemlich enge Gränzen hinaus ab- oder zunehmen.

In der Gesammtheit der eben angedeuteten Resultate in Betreff der großen Axen, der Excentricitäten und der Neigungen der Planetenbahnen besteht das, was man die Stabilität des Weltsystemes nennt.

Die Störungen, welche ein Planet auf die übrigen und namentlich auf diejenigen ausübt, deren Bahnen der seinigen zunächst liegen, sind natürlich von ihrer Masse abhängig, und so kommt es, daß man aus den durch einen Planeten erzeugten Störungen auf eine Masse schließen kann. Dies ist nun auch der einzige Weg, auf welchem sich die Masse derjenigen Planeten ermitteln läßt, welche nicht von Trabanten umkreist sind. Es ist begreiflich, daß die aus den Störungen abgeleiteten Werthe der Massen der Planeten nicht den Grad der Genauigkeit haben wie diejenigen, welche man aus Vergleichung ihrer Trabanten berechnet.

Entdeckung des Neptun. Bouvard fand 1821, daß die von 95
Herschel gemachten Beobachtungen des Uranus sich nicht mit denjenigen Bahnelementen in Uebereinstimmung bringen ließen, welche sich aus den Beobachtungen von 1781 bis 1820 ergeben; aber auch später wich Uranus wieder merklich von der Bahn ab, welche er nach den von Bouvard berechneten Tafeln hätte durchlaufen sollen. Aus den Beobachtungen von 1833 bis 1834 hat Airy nachgewiesen, daß der Radius Vector für diese Jahre von den Tafeln um eine Größe abweiche, welche die Entfernung des Mondes von der Erde übertrifft.

Daraus ergiebt sich nun, daß die Bahnelemente des Uranus verschieden ausfallen, je nachdem man sie aus verschiedenen Beobachtungsperioden ableitet.

Schon Bouvard zeigte, daß sich diese Abweichungen nicht auf die von Jupiter und Saturn herrührenden Störungen zurückführen ließen, und daß man zu ihrer Erklärung einen noch jenseits des Uranus um die Sonne kreisenden Planeten annehmen müsse.

Mädler sagte in dieser Beziehung schon in der ersten Auflage seiner »populären Astronomie«, welche im Jahre 1841 erschien:

»Wenn man beim Saturnslaufe die Störungen des Uranus nicht berück»sichtigte, so würde man ganz ähnliche Abweichungen finden, und wenn man »sehr genaue Saturnsbeobachtungen aus einer langen Reihe von Jahren be»sessen hätte, so würde es möglich gewesen sein, durch analytische Combinatio»nen den Uranus theoretisch zu entdecken, bevor ihn Herschel aufgefunden »hätte, vorausgesetzt, daß alle anderen störenden Massen hinreichend genau be»kannt und gehörig in Rechnung gebracht worden wären.

»Es liegt nun nahe, diesen Schluß vom Saturn auf Uranus um ein »Glied weiter zu übertragen und auf einen jenseits des Uranus laufen»den und diesen störenden Planeten zu schließen: ja man darf die Hoff»nung aussprechen, daß die Analysis einst diesen höchsten ihrer Triumphe feiern »und durch ihr geistiges Auge Entdeckungen in den Regionen machen werde, in »welche das körperliche Auge bis dahin einzudringen nicht vermochte.«

Diese Hoffnung ist bald auf das Glänzendste in Erfüllung gegangen.

Nachdem sich Leverrier von Neuem überzeugt hatte, daß man durch die bekannten Planeten die Störungen des Uranus nicht erklären könne, unternahm er es, den Ort und die Masse des noch unbekannten Planeten zu berechnen, welcher die fraglichen Abweichungen veranlasse.

Adams in Cambridge bearbeitete gleichzeitig denselben Gegenstand, ohne daß Einer von den Bestrebungen des Anderen Kenntniß hatte. Beide Gelehrte gelangten ganz unabhängig von einander zu demselben Ziele, indem sie den Ort am Fixsternhimmel bestimmten, wo der neue Planet zu suchen sei. Ihre Resultate stimmen fast ganz genau überein.

Leverrier publicirte indeß seine Arbeit früher als Adams. Am 23. September 1846 erhielt Galle in Berlin die Nachricht von dem Resultat der Leverrier'schen Rechnungen, und es gelang ihm in der That, indem er das Fernrohr nach der bezeichneten Stelle des Himmels richtete, den gesuchten Planeten aufzufinden, welcher alsbald den Namen Neptun erhielt.

96 **Störungen der Kometen.** Die Kometen erleiden, wenn sie in die Nähe von Planeten kommen, so große Störungen, daß ihre Umlaufszeit dadurch bedeutend vergrößert oder verkleinert, ja daß ihre Bahn so verändert wird, daß sie mit ihrer vorherigen Gestalt gar keine Aehnlichkeit mehr hat.

Ein merkwürdiges Beispiel der Art liefert uns der Komet von 1770. Er hatte sich der Erde bis auf 360000 Meilen genähert, und die beobachteten Orte wichen so sehr von einer parabolischen Bahn ab, daß man für ihn eine elliptische Bahn zu berechnen suchte. In der That genügte den Beobachtungen eine Ellipse, deren große Axe 3,14 Erdweiten betrug, bei einer Umlaufszeit von 5 Jahren 209 Tagen.

Aber weder vorher noch nachher ist dieser Komet wieder beobachtet worden. Wenn man für die erwähnte elliptische Bahn rückwärts rechnet, so ergiebt sich, daß der Komet im Mai 1767 dem Jupiter so nahe war, daß die Wirkung dieses Planeten momentan stärker als die der Sonne sein mußte; erst durch diese Einwirkung wurde der Komet in die Bahn gebracht, in welcher man ihn 1770 beobachtete, während er bis dahin eine ganz andere Bahn verfolgt hatte. In seiner neuen Bahn kam der Komet im Jahre 1776 abermals ins Perihelium, konnte aber nicht beobachtet werden, weil zu dieser Zeit die Sonne gerade zwischen den Kometen und die Erde zu stehen kam.

In der aus den Beobachtungen von 1770 berechneten Ellipse fortlaufend, mußte aber dieser Komet im August 1779 dem Jupiter abermals sehr nahe, und zwar so nahe kommen, daß er zwischen dem Planeten und dem vierten Satelliten hindurchging. In dieser Nähe mußte er vom Jupiter eine 24mal stärkere Wirkung erfahren als von der Sonne, und dadurch wurde er wieder vollständig aus der Bahn gebracht, die er seit 1767 verfolgt hatte, weshalb er denn auch im Jahre 1781 nicht wieder beobachtet wurde, wo man eine sichtbare Wiederkehr desselben hätte erwarten können, wenn er nicht durch jene Störungen aus der Bahn von 1770 wäre abgelenkt worden.

Nach den früher bestimmten Bahnelementen sollte die Rückkehr des Halley'schen Kometen gegen Anfang des Jahres 1758 stattfinden. Nach Clairaut's Rechnungen hatte er aber seit seinem letzten Erscheinen bedeutende Störungen erlitten, und nach denselben war seine Rückkehr durch den Jupiter ungefähr um 518, durch Saturn um 100 Tage verzögert worden, so daß sie erst in der Mitte des April 1759 zu erwarten war. In der That ging der Halley'sche Komet am 12. März 1759 durch das Perihelium.

Während also einerseits die Kometen sehr bedeutende Störungen durch die Planeten erfahren, hat man bis jetzt noch keine Störungen nachweisen können, welche die Planeten durch Kometen erlitten hätten, woraus sich ergiebt, daß die Masse der Kometen sehr klein im Vergleich zu der Masse der Planeten sein muß.

Wäre z. B. der Komet von 1770 an Masse der Erde gleich, so müßte er in seiner Erdnähe solche Störungen hervorgebracht haben, daß das Erdjahr dadurch um fast 3 Stunden verlängert worden wäre. Es ist aber nicht die mindeste Verlängerung der Jahresdauer bemerkt worden, während eine Verlängerung von 2 Secunden der Beobachtung nicht hätte entgehen können, woraus denn folgt, daß die Masse des Kometen von 1770 gewiß noch nicht $1/_{5000}$ der Erdmasse sein kann.

Störungen der Mondsbahn. Die raschen Aenderungen, welchen die 97
Elemente der Mondsbahn unterworfen sind (§. 68, S. 162), sind die Folge bedeutender störender Kräfte. Für den Mond ist die Erde der Centralkörper, und wenn sie nebst dem Monde allein im Raume sich befände, so würde der Mond eine Ellipse beschreiben, deren einen Brennpunkt die Erde einnimmt und deren Gestalt eben so unveränderlich sein würde wie ihre Lage im Raume. Nun aber wirkt die Sonne auf den Mond als störender Körper, und in Folge ihrer so bedeutenden Masse sind auch die Störungen, welche sie im Mondslauf hervorbringt, sehr bedeutend.

Die Erde wird ebenso wie der Mond beständig von der Sonne angezogen, und indem sie ihre Bahnen durchlaufen, fallen sie gewissermaßen stets gegen diesen Centralkörper hin. Wenn nun die Anziehungen der Sonne auf die Masseneinheit des Mondes und auf die Masseneinheit der Erde immer gleich wären, so würde der Fall beider Weltkörper gegen die Sonne hin ganz derselbe sein; ihre gegenseitige Stellung würde also dadurch nicht alterirt werden, der Mond würde ganz so um die Erde kreisen, als ob die Sonne gar nicht vorhanden wäre.

So verhält es sich aber nicht. Die Anziehung, welche die Sonne auf die Einheit der Mondmasse ausübt, ist bald größer, bald kleiner, als die Kraft, mit welcher die Einheit der Erdmasse von der Sonne angezogen wird, und daraus gehen dann Störungen hervor, deren vorzüglichste Wirkungen wir schon früher kennen lernten.

Zur Zeit des Neumondes ist der Mond der Sonne näher als die Erde, also wird zu dieser Zeit die Einheit der Mondmasse stärker von der Sonne angezogen als die Einheit der Erdmasse, der Mond gravitirt schneller gegen die Sonne hin als die Erde, der störende Einfluß der Sonne wirkt also jetzt dahin, den Abstand des Mondes und der Erde zu vergrößern.

Zur Zeit des Vollmondes ist die Erde der Sonne näher, die Erde gravitirt also zu dieser Zeit stärker gegen die Sonne hin als der Mond, also auch jetzt wirkt die störende Kraft der Sonne dahin, die Entfernung der beiden Körper zu vergrößern.

Diese störende Wirkung der Sonne ist aber offenbar größer, wenn sich die Erde in der Sonnennähe, kleiner, wenn sie sich in der Sonnenferne befindet, die Mondsbahn muß sich deshalb etwas zusammenziehen, während die Erde sich vom Perihelium zum Aphelium bewegt, um sich dann wieder etwas auszudehnen, während die Erde den Bogen vom Aphelium bis zum Perihelium durchläuft.

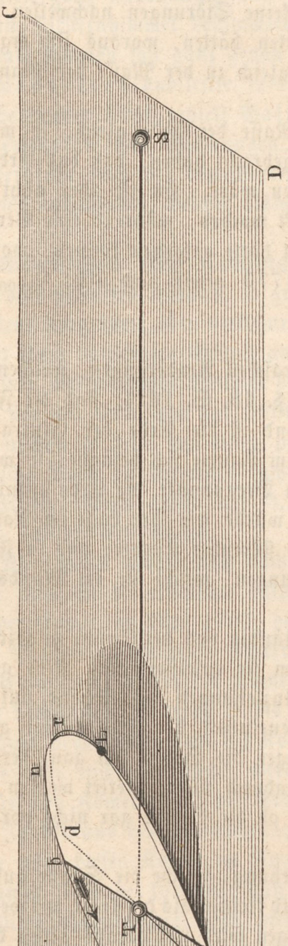


Fig. 149.

Nach dem dritten Kepler'schen Gesetz muß aber diese Erweiterung und Zusammenziehung der Mondsbahn auch ein periodisches Ab- und Zunehmen der Umlaufszeit des Mondes zur Folge haben; die Umlaufszeit des Mondes muß also ungefähr zur Zeit des Wintersolstitiums etwas größer sein, als zur Zeit des Sommersolstitiums.

Diese periodische Aenderung in der Umlaufszeit des Mondes, welche den Namen der jährlichen Gleichung führt, war bereits schon von Tycho de Brahe beobachtet worden. In der That ist die siderische Umlaufszeit des Mondes zu Anfang des Jahres ungefähr um $^1/_4$ Stunde größer als in der Mitte des Jahres.

Wir wollen nun noch versuchen, so weit es auf elementarem Wege möglich ist, verständlich zu machen, wie durch den störenden Einfluß der Sonne der Rückgang der Knoten der Mondsbahn bewirkt wird.

Es stelle $ABCD$, Fig. 147, ein Stück der Ebene der Erdbahn dar; S sei die Sonne, T die Erde, $aLbp$ die Mondsbahn, welche die Ekliptik in der Knotenlinie ab schneidet. Ohne die Einwirkung der Sonne würde der Mond stets in derselben Ebene sich fortbewegen, die Knotenlinie würde also unverändert bleiben. Die Einwirkung der Sonne äußert aber ein Bestreben, die Ebene seiner Bahn fortwährend zu ändern, namentlich wenn der Mond sich in denjenigen

Punkten seiner Bahn befindet, welche der Sonne am nächsten und am entferntesten liegen.

In dem Punkte L seiner Bahn angekommen, welcher der Sonne am nächsten liegt, strebt die Einwirkung der Sonne offenbar dahin, den Mond aus der durch T und das Bogenstück, welches er zuletzt durchlief, gelegten Ebene herauszubringen.

Statt daß der Mond unter dem alleinigen Einfluß der Erde nun den Bogen Lnb zurückgelegt haben würde, beschreibt er unter dem störenden Einflusse der Sonne den Bogen Lrd, kurz es verhält sich Alles so, als ob unter dem Einflusse der Sonne die Ebene der Mondsbahn um die Linie LT gedreht würde, wodurch dann die Knotenlinie ab in die Lage cd gebracht wird; die Knotenlinie der Mondsbahn muß sich also in der Ebene der Ekliptik in einer Richtung drehen, welche der Richtung entgegengesetzt ist, in welcher der Mond selbst sich bewegt.

Ganz in der gleichen Richtung strebt die Sonne die Ebene der Mondsbahn zu drehen, wenn sich derselbe in dem von der Sonne entferntesten Theile seiner Bahn befindet.

So giebt denn das Gesetz der allgemeinen Schwere von allen den verschiedenen Ungleichheiten Rechenschaft, welchen die Bewegung des Mondes unterworfen ist; ohne Zweifel gehört aber dieser Gegenstand zu den schwierigsten und verwickeltsten Aufgaben der mathematischen Analysis.

Ebbe und Fluth. Die Oberfläche des Meeres zeigt regelmäßige und 98
periodische Oscillationen, welche unter dem Namen der Ebbe und Fluth bekannt sind. Ungefähr 6 Stunden lang steigt das Meer, das ist die Fluth; dann fällt es wieder in den nächsten 6 Stunden, und dieses Sinken wird die Ebbe genannt. An jedem Tage findet zweimal Ebbe und zweimal Fluth Statt.

Der Zeitraum, innerhalb dessen diese doppelte Oscillation vor sich geht, ist jedoch nicht genau 24 Stunden, sondern im Mittel 24 Stunden 50 Minuten 28 Secunden, gerade die Zeit, welche zwischen zwei auf einander folgenden Culminationen des Mondes verstreicht. Zwischen einem Maximum der Fluth bis zum anderen liegt demnach immer eine Zeit von $12^h\ 25'\ 14''$. Wenn also an einem Tage die Fluth Mittags um 12 Uhr ihre größte Höhe erreicht, so wird dasselbe am nächsten Tage um $12^h\ 50'$, am zweiten um $1^h\ 41'$, am dritten um $2^h\ 31'$ u. s. w. stattfinden, und zwischen zwei Nachmittags- oder Abendfluthen wird dann immer eine Morgenfluth in der Mitte liegen.

Die Höhe der Fluth, d. h. der Unterschied zwischen dem Niveau des Meeres zur Zeit seines höchsten und seines darauf folgenden tiefsten Standes ist selbst für einen und denselben Ort nicht unveränderlich, sondern erleidet theils periodische, theils zufällige Schwankungen. Die letzteren werden vorzugsweise durch Winde und Stürme bedingt, welche je nach Umständen das Steigen der Fluth bald begünstigen, bald hemmen. Die periodischen Schwankungen, welchen die Höhe der Fluth unterworfen ist, sind aber von den Phasen des Mondes abhängig. Die Höhe der Fluthen wird am größten zur Zeit des Neumondes und des Vollmondes (Springfluth), sie ist am kleinsten zur Zeit der Quadraturen.

Aus alledem ersieht man, daß Ebbe und Fluth eine vorzugsweise vom Mond abhängige Erscheinung ist, und in der That tritt auch das Maximum der Fluth stets um eine bestimmte Zeit nach dem Durchgange des Mondes durch den Meridian ein; diese Zeit, welche den Namen **Hafenzeit** (Hafenetablissement) führt, ist von einem Orte zum anderen in Folge localer Ursachen verschieden.

So beträgt die Hafenzeit in

Cadix	1^h	15′	St. Malo	6^h	30′
Lissabon	4	0	Cherbourg	7	45
Bayonne	3	30	Calais	11	45
Brest	3	45	Vlissingen	1	0
Plymouth	6	5	Hamburg	5	0

Ebenso ist die Fluthhöhe sehr von localen Verhältnissen abhängig; im mittelländischen Meere ist die Ebbe und Fluth kaum merklich, dagegen ist sie an den Küsten von Frankreich und England sehr bedeutend. So ist z. B. zur Zeit der Syzygien die mittlere Fluthhöhe in

Bayonne	9	Fuß,
Brest	20	»
St. Malo	36	»
London	18	»

An der Mündung des Avon (westlich von der Insel Wight) erreicht die Springfluth die Höhe von 42 Fuß. Die höchsten Fluthen auf der ganzen Erde hat wohl die Fundybai, an der südöstlichen Küste des britischen Nordamerika, aufzuweisen. Im Hintergrunde dieser Bai steigen die Springfluthen bis zu einer Höhe von 60 bis 70 Fuß.

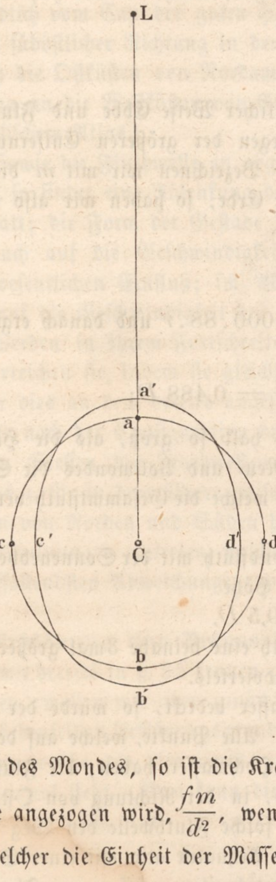
An kleinen mitten im Ocean liegenden Inseln ist die Fluth nicht bedeutend; so beträgt die Fluthhöhe auf St. Helena nur 3, auf den Inseln der Südsee nur 2 Fuß.

Unter sonst gleichen Umständen nimmt die Fluthhöhe von dem Aequator nach den Polen hin ab; an der nördlichen Küste von Norwegen ist sie sehr unbedeutend.

99 **Mechanische Erklärung der Ebbe und Fluth.** Da alle Wirkungen im Planetensystem gegenseitig sind, so gravitirt nicht allein der Mond gegen die Erde, sondern auch die Erde gegen den Mond. Da aber nicht alle Punkte der Erdkugel in gleichem Abstande von dem Monde stehen, so sind sie auch ungleichen Anziehungskräften unterworfen, und daraus eben entspringt die Ebbe und Fluth.

Es sei C der Mittelpunkt der Erde (Fig. 150), L der Mond, so wird der Punkt a der Erdoberfläche stärker vom Monde angezogen werden als C, und wenn a nicht fest mit C verbunden ist, so wird a mit größerer Beschleunigung gegen L gravitiren als C, es wird sich ein Streben zeigen, a von C zu entfernen. Wenn sich also auf der dem Monde zugewandten Seite der Erde gerade ein großer Ocean befindet, so wird hier das Niveau des Meeres steigen.

Fig. 150.



Ganz das Gleiche findet an der von dem Monde entferntesten Stelle b der Erdoberfläche Statt. Hier in b wirkt die anziehende Kraft des Mondes geringer als in C, der Mittelpunkt der Erde gravitirt stärker gegen den Mond als b, und wenn es also die Beweglichkeit der Theilchen nicht hindert, so wird sich auch bei den in der Nähe von b gelegenen Massen das Streben geltend machen, sich von dem Erdmittelpunkte zu entfernen.

Wäre die Erde ganz mit Wasser bedeckt, so würde die sonst kugelförmige Oberfläche derselben die Gestalt $a' c' b' d'$ annehmen; denn indem das Wasser bei a und b steigt, muß es nothwendig bei c und d sinken. Es würde also Fluth sein an den Orten, für welche der Mond im Meridian steht, sei es nun in oberer oder unterer Culmination, Ebbe aber an den Orten, für welche der Mond gerade auf- oder untergeht.

Bezeichnen wir mit d den Abstand des Erdmittelpunktes von dem Mittelpunkte des Mondes, so ist die Kraft, mit welcher die Masseneinheit in C vom Monde angezogen wird, $\frac{fm}{d^2}$, wenn m die Masse des Mondes ist. Die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse in b vom Monde angezogen wird, ist aber $\frac{fm}{(d-r)^2}$, wenn r den Halbmesser der Erde bezeichnet; folglich ist die Differenz der Kräfte, welche in C und b wirken:

$$D = \frac{fm}{(d-r)^2} - \frac{fm}{d^2}.$$

Entwickelt man den ersten Theil dieses Werthes, indem man die Division von fm durch $(d-r)^2$ (also durch $d^2 - 2\,dr + r^2$) ausführt, so kommt:

$$\frac{fm}{(d-r)^2} = \frac{fm}{d^2} + \frac{2\,fmr}{d^3} + \frac{3\,fmr^2}{d^4} + \text{ꝛc.},$$

und wenn man davon $\frac{fm}{d^2}$ abzieht, so bleibt:

$$D = \frac{2fmr}{d^3} + \frac{3fmr^2}{d^4} + \text{2c.}$$

Da der Werth von d sehr groß ist im Vergleich gegen r, so kann man ohne Weiteres alle Glieder dieser Reihe vernachlässigen, welche d^4 und höhere Potenzen von d im Divisor haben; es bleibt also:

$$D = \frac{2fmr}{d^3}.$$

Nun aber bewirkt die Sonne in ganz ähnlicher Weise Ebbe und Fluth, wie der Mond, nur sind die Sonnenfluthen wegen der größeren Entfernung der Sonne weniger hoch als die Mondfluthen. Bezeichnen wir mit m' die Masse der Sonne, mit d' ihre Entfernung von der Erde, so haben wir also für die Kraft, welche die Sonnenfluth veranlaßt:

$$D' = \frac{2fm'r}{d'^3}.$$

Nun aber ist $d' = 400\,d$ und $m' = 355000.88.r$ und danach ergiebt sich dann:

$$D' = \frac{2fr.m.355000.88}{d^3\,400^3} = 0{,}488\,D;$$

die Höhe der Sonnenfluthen ist also nahe halb so groß, als die Höhe der Mondfluthen. Da sich nun zur Zeit des Neu- und Vollmondes die Sonnen- und Mondfluthen summiren, so ist die Kraft, welche die Gesammtfluth veranlaßt:

$$1{,}5\,D.$$

Zur Zeit der Quadraturen aber fällt die Mondfluth mit der Sonnenebbe zusammen, die Gesammtfluth erreicht alsdann die Höhe

$$D - 0{,}5\,D = 0{,}5\,D,$$

zur Zeit der Syzygien erreicht also die Fluth eine beinahe 3mal größere Höhe, als zur Zeit des ersten und des letzten Mondviertels.

Wäre die ganze Erdoberfläche mit Wasser bedeckt, so würde der Verlauf der Ebbe und Fluth ein sehr einfacher sein. Alle Punkte, welche auf demselben Meridian liegen, müßten zu gleicher Zeit Hochwasser haben; die Fluthwellen würden, von Nord nach Süd sich erstreckend, in der Richtung von Osten nach Westen fortschreiten, und zwar würde eine solche Fluthwelle den Weg um die ganze Erde in 24 Stunden zurücklegen, am Aequator also mit einer Geschwindigkeit von 225 Meilen in der Stunde fortschreiten müssen. — Ihre größte Höhe müßte eine Fluthwelle an derjenigen Stelle eines Meridians erreichen, an welcher der Mond durch das Zenith geht.

Durch die ungleiche Vertheilung von Wasser und Land wird nun diese ideale Form der Fluthwellen, welche Whewell Isorachien nennt, durchaus verändert. Whewell hat, soweit es nach dem vorhandenen Beobachtungsmaterial möglich war, den Verlauf der Isorachien zu ermitteln gesucht, und hat sie dann in Karten eingetragen. In diesen Karten ist z. B. eine Curve durch alle Orte des Oceans gezogen, welche an einem bestimmten Tage um 1 Uhr Hochwasser haben, eine zweite, dritte, vierte u. s. w. zeigt die Stellen an, bis zu welchen das Hochwasser um 2, 3, 4 Uhr u. s. w. vorgedrungen ist.

Tab. XIV. stellt Whewell's Isorachien von 2 zu 2 Stunden dar; der unsichere Theil der Curven ist punktirt.

Man sieht hier deutlich, wie die Fluthwellen, aus dem indischen Ocean nach Westen vordringend, durch den afrikanischen Continent aufgehalten werden. Die südlich vom Cap der guten Hoffnung vorbeischreitenden Fluthwellen treten nun in südöstlicher Richtung in den atlantischen Ocean ein, in welcher Richtung sie auch die Ostküsten von Nordamerika erreichen, während sie in südwestlicher Richtung an die Westküsten von Europa anschlagen. (Näheres in Berghaus' physikalischem Atlas.)

Sowie die Fluthwelle in abgelenkter Richtung in den atlantischen Ocean eintritt, so findet eine Ablenkung der Fluthwellen auch bei Seearmen und Buchten Statt; die Form der Gestade hat dann nicht allein auf die Richtung, sondern auch auf die Geschwindigkeit, mit welcher die Fluthwellen fortschreiten, einen wesentlichen Einfluß; im Allgemeinen wirkt die Nähe der Küsten verzögernd auf die Geschwindigkeit des Fortschreitens.

Werden in ihrem Fortschreiten die Fluthwellen in Buchten eingezwängt, dann erreichen sie, indem sie gleichsam concentrirt werden, eine ungeheure Höhe, wie wir dies an dem bereits angeführten Beispiel der Fundybai sehen.

Je nach der Configuration der Küsten wird es öfters vorkommen, daß an gewissen Stellen die Fluthwellen von verschiedenen Seiten zusammentreffen, wie dies z. B. in dem Meere zwischen England und Irland der Fall ist, wo die Fluthen von Norden und Süden her eindringen. Hier müssen natürlich Interferenzerscheinungen eintreten, welche das Phänomen noch verwickelter machen und die auffallendsten Abweichungen vom normalen Gang bedingen.

Erklärung der Präcession. Die Erscheinung der Präcession selbst 100
haben wir bereits in §. 35 kennen gelernt; um zu ihrer mechanischen Erklärung zu gelangen, wollen wir aber zunächst eine andere Erscheinung betrachten, welche sich auf denselben Erklärungsgrund zurückführen läßt, nämlich die langsame Bewegung, welche die Axe eines rotirenden Kreisels annimmt, wenn sie nicht ganz vertical steht. Man kann die Erscheinung an jedem Kreisel, am bequemsten vielleicht an dem allgemein bekannten Brummkreisel (Brummtoppich) beobachten.

Fig. 151.

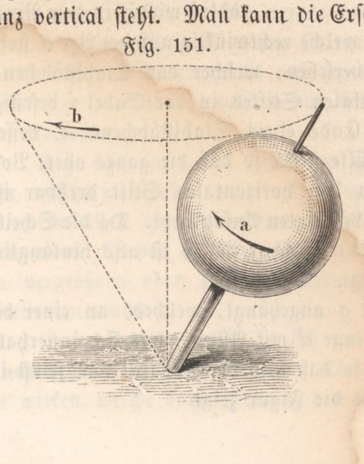
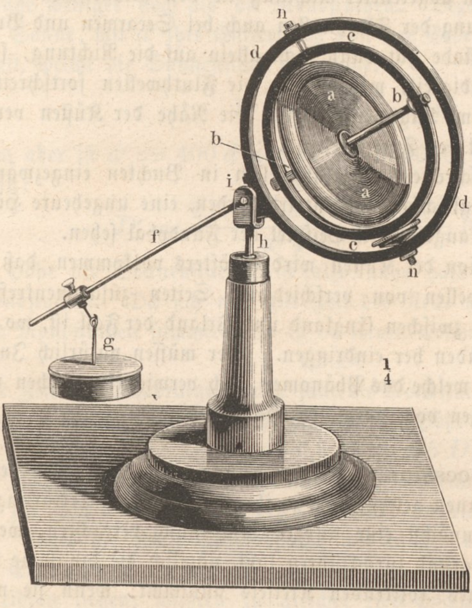


Fig. 151 stellt einen solchen Kreisel dar. Wenn die Rotationsaxe desselben, gleich nachdem er angelassen worden ist, nicht vertical steht, sondern mit der Richtung des Bleilothes einen Winkel macht, wie es die Figur zeigt, so fällt er nicht etwa um, wie man auf den ersten Anblick wohl vermuthen könnte, weil der Schwerpunkt nicht unterstützt ist, sondern die Axe des Kreisels beschreibt in langsamer Bewegung die Oberfläche eines

Kegels, wie dies in unserer Figur durch punktirte Linien angedeutet ist, ohne daß der Kreisel sich mehr gegen die horizontale Ebene neigt, ja der Kreisel richtet sich allmälig mehr und mehr auf, bis endlich seine Axe senkrecht steht, welches letztere jedoch nur eine Folge der Reibung ist, welche die Spitze des Kreisels am Boden zu überwinden hat; dieses Aufrichten des Kreisels würde nicht stattfinden, wenn keine Reibung stattfände.

Wenn der Kreisel in der Richtung rotirt, welche der Pfeil *a* andeutet, so dreht sich die Rotationsaxe in der Richtung des Pfeiles *b*.

Fig. 152.



Der Kreisel fällt erst um, wenn seine Rotationsgeschwindigkeit bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat.

Noch viel schöner und sicherer läßt sich diese langsame Drehung einer Rotationsaxe am Fessel'schen Rotationsapparate zeigen, welcher in Fig. 152 dargestellt ist: *a* ist eine runde messingene Scheibe, deren äußere Begränzung durch einen dicken messingenen Wulst gebildet wird. Durch die Mitte dieser Scheibe geht eine stählerne Axe *b*, welche, von einem messingenen Ringe *c* getragen, möglichst leicht in Spitzen läuft. Der Ring *c* ist endlich wieder in dem Ringe *d* befestigt und um eine Axe *n n* drehbar, welche rechtwinklig auf der Axe *b* steht.

Der Ring *d* ist mit einem Ansatz versehen, welcher das Stahlstäbchen *f* trägt, und welcher mittelst eines horizontalen Stiftes in der Gabel *i* befestigt ist. Die Gabel *i* aber sitzt am oberen Ende eines Stahlstäbchens *h*, dessen untere Hälfte in einer verticalstehenden Hülse steckt, so daß die ganze obere Vorrichtung um die verticale Axe *h* und um den horizontalen Stift drehbar ist, welcher durch *i* und den an dem Ringe *d* befestigten Ansatz geht. Da die Scheibe *a* nun außerdem noch um die Axen *b* und *n* drehbar ist, so ist also hinlänglich für ihre allseitige freie Beweglichkeit gesorgt.

An dem Stäbchen *f* ist ein Gewicht *g* angehängt, welches, an einer bestimmten Stelle festgestellt, gerade dem Ringe *d* mit Allem, was sich innerhalb desselben befindet, das Gleichgewicht hält, so daß also der Apparat von selbst in einer solchen Stellung stehen bleibt, wie es die Figur zeigt.

Rückt man nun das Gewicht *g* an dem Stäbchen *f* hinauf oder nimmt man es ganz weg, so bekommt der Ring *d* mit der Scheibe *a* das Uebergewicht und senkt sich, bis er auf den Rand der Säule anstößt, in welcher *h* steckt; rückt man dagegen das Gewicht *g* von der Gleichgewichtsstellung aus an dem Stäbchen *f* mehr herab, so fällt natürlich das Uebergewicht auf die Seite von *g*; die ganze Vorrichtung wird um die horizontale in *i* steckende Axe gedreht, bis *g* auf dem Boden oder an dem Fuße des Stäbchens anstößt.

Die eben besprochenen Gleichgewichtsverhältnisse beziehen sich aber nur auf den Ruhestand des Apparates; die Sache ändert sich sogleich, wenn man der Scheibe *a* eine hinlänglich rasche Rotation um die Axe *b* ertheilt.

Die Rotation der Scheibe *a* wird dadurch hervorgebracht, daß man eine auf die stählerne Axe *b* aufgewickelte Schnur rasch abzieht, während man den Ring *c* in einer Stellung festhält, bei welcher die Axe *b* in die Verlängerung von *f* fällt.

Wird nun, nachdem das Gewicht *g* ganz entfernt oder doch so weit hinaufgerückt ist, daß das Uebergewicht auf Seite des Ringes *d* und seines Inhaltes ist, die Scheibe *a* in rasche Rotation versetzt, während der ganze Apparat ungefähr die Stellung hat, wie es die Figur zeigt, so scheint die Scheibe mit ihrem Ringe der Schwere nicht mehr zu gehorchen; denn die Neigung des Stiftes *f* und der Axe *b* gegen die Verticale bleibt unverändert, während sich die ganze Vorrichtung um die verticale Axe *h* dreht, und zwar in einer Richtung, welche derjenigen gerade entgegengesetzt ist, nach welcher sich gerade der oberste Punkt der rotirenden Scheibe bewegt.

Erst wenn die Rotationsgeschwindigkeit der Scheibe *a* bis zu einem gewissen Grade abgenommen hat, beginnt der Ring *d* mit der Scheibe *a* ganz allmälig herabzusinken.

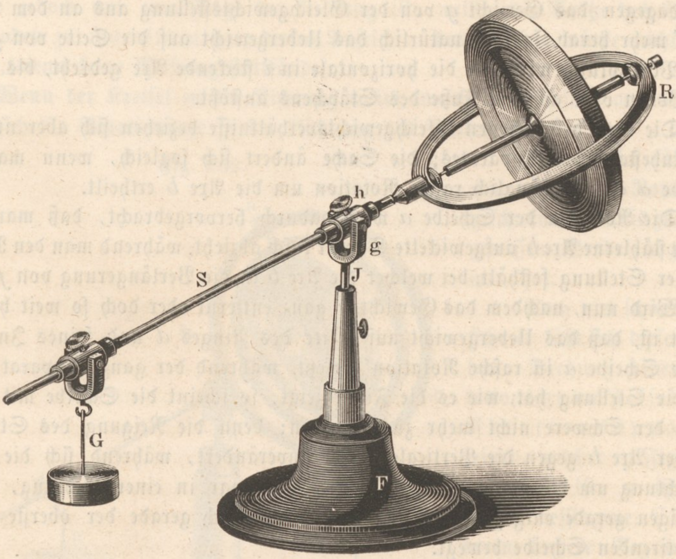
Wenn man das Gegengewicht *g* an dem Stäbchen *f* mehr und mehr herunterschiebt, so daß das Uebergewicht, welches den Winkel des Stäbchens *f* und der Axe *b* mit der Verticalen zu vergrößern sucht, kleiner und kleiner wird, so wird unter übrigens gleichen Umständen die Drehung um die Axe *h* immer langsamer werden, bis sie endlich ganz aufhört, wenn *g* so befestigt ist, daß es dem Ringe *d* mit seinem Inhalte gerade das Gleichgewicht hält, und in eine Drehung von entgegengesetzter Richtung übergehen, wenn *g* so weit heruntergeschoben wird, daß das Uebergewicht auf seiner Seite ist und ein Bestreben zeigt, den Winkel zu verkleinern, welchen das Stäbchen *f* und die Axe *b* mit der Verticalen machen.

Fig. 153 (a. f. S.) stellt den Fessel'schen Apparat in einfachster Form dar, welche wohl ohne weitere Erklärung verständlich sein wird.

In allen eben betrachteten Fällen haben wir es mit einem um eine Axe rotirenden Körper zu thun, auf welchen Kräfte wirken, welche den Winkel zu vergrößern oder zu verkleinern streben, den die Rotationsaxe mit der Verticalen macht.

Ganz ähnlich verhält es sich mit der Erde; sie rotirt um eine Axe, welche einen bestimmten Winkel mit der Ebene der Ekliptik macht, während Kräfte auf sie wirken, welche dahin streben, den Winkel zu verkleinern, welchen die Erdaxe mit derjenigen Linie macht, welche durch ihren Mittelpunkt gehend auf der Ebene der Ekliptik rechtwinklig steht.

Fig. 153.



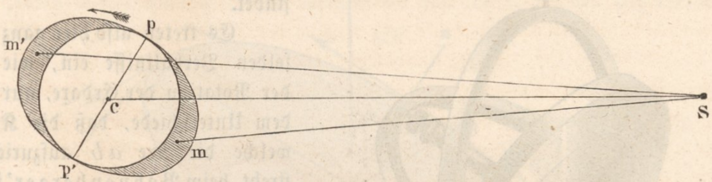
Die Kraft, welche die Erdaxe rechtwinklig auf die Ebene der Ekliptik zu stellen strebt, rührt von der Anziehung her, welche die Sonne auf die Erde ausübt. Wenn die Erde eine vollkommene Kugel und ihre Masse gleichförmig um ihren Mittelpunkt vertheilt wäre, so würde die Resultirende aller Wirkungen, welche die Sonne auf die einzelnen Theile der Erde ausübt, durch ihren Mittelpunkt gehen. Diese Resultirende könnte also keinerlei Einfluß auf die Rotationsaxe der Erde ausüben, dieselbe würde stets sich selbst parallel im Raume fortschreiten, wie ja auch an dem Apparat, Fig. 152, die Drehung um die Axe h aufhört, sobald das Gewicht g so gestellt ist, daß in Beziehung auf die durch i gehende horizontale Axe Gleichgewicht stattfindet.

Nun aber ist die Erde abgeplattet, und deshalb kann man sie als eine Kugel betrachten, deren Radius dem halben Polardurchmesser gleich, und welche noch mit einem Wulst bedeckt ist, welcher, am Aequator am dicksten, nach den Polen zu abnimmt, wie dies Fig. 154 in übertriebener Weise angedeutet ist, welche die Stellung der Erde gegen die Sonne zur Zeit des Sommersolstitiums darstellt.

Betrachten wir nun die Wirkung der Sonne S auf den Aequatorialwulst für sich, so ist klar, daß die Kraft, mit welcher die Einheit der Masse bei m von der Sonne angezogen wird, größer ist als die Anziehung, welche die Sonne auf eine gleich große Masse bei m' ausübt; die Wirkung der Sonne auf den fraglichen Wulst strebt also dahin, die Erde in der Richtung des Pfeiles um eine

Axe zu drehen, welche in der Ebene der Ekliptik liegt und senkrecht auf SC steht. Wir haben also hier in der That ein ganz ähnliches Verhältniß, wie wir es beim Kreisel und der Fessel'schen Rotationsmaschine kennen lernten.

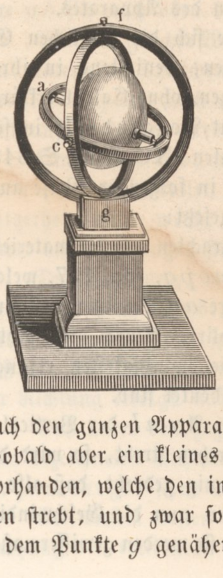
Fig. 154.



Zur Zeit des Wintersolstitiums, wenn die Erde auf der entgegengesetzten Seite der Sonne steht, ist der Südpol p' der Sonne zugekehrt ist; es wird alsdann m' stärker von der Sonne angezogen als m, so daß also auch zu dieser Zeit die Sonne ein Streben äußert, die Erde in der Richtung des Pfeiles zu drehen, also die Erdaxe aufzurichten. Zur Zeit der Aequinoctien, wo die Erdaxe rechtwinklig auf SC steht, ist die Kraft, welche die Erdaxe zu drehen strebt, gleich Null, wir sehen also, daß die Kraft, welche die Schiefe der Ekliptik zu verkleinern strebt, zur Zeit der Solstitien ein Maximum wird und von da bis zu den Aequinoctien abnimmt.

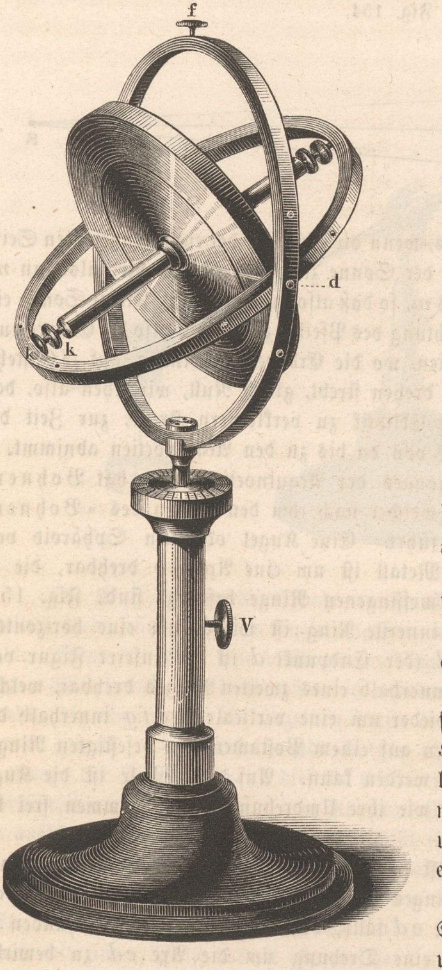
Zur Erläuterung des Rückganges der Aequinoctialpunkte hat Bohnenberger einen Apparat construirt, welcher nach ihm den Namen des »Bohnenberger'schen Maschinchens« führt. Eine Kugel oder ein Sphäroid von Elfenbein oder noch besser von Metall ist um eine Axe ab drehbar, die in Spitzen läuft, welche in einem messingenen Ringe befestigt sind, Fig. 155. Dieser innerste Ring ist wieder um eine horizontale Axe cd (der Endpunkt d ist in unserer Figur verdeckt) innerhalb eines zweiten Ringes drehbar, welcher selbst wieder um eine verticale Axe fg innerhalb des äußersten auf einem Postamentchen befestigten Ringes gedreht werden kann. Auf diese Weise ist die Kugel sowohl wie ihre Umdrehungsaxe vollkommen frei beweglich.

Fig. 155.



Ist das Gleichgewicht der Kugel und des innersten Ringes so hergestellt, daß ihr Schwerpunkt auf die Axe cd fällt, daß also keine Kraft vorhanden ist, welche eine Drehung um die Axe cd zu bewirken strebt, so wird die Axe ab ihre Stellung im Raume unverändert beibehalten, wenn man die Kugel in rasche Rotation um diese Axe versetzt hat, wie man auch den ganzen Apparat, am Fußgestell haltend, herumtragen und drehen mag. Sobald aber ein kleines Uebergewicht bei b angebracht wird, ist jetzt eine Kraft vorhanden, welche den innersten Ring sammt der Kugel um die Axe cd zu drehen strebt, und zwar so, daß die Axe ab aufgerichtet und a dem Punkte f, b dem Punkte g genähert werden würde, wenn die Kugel nicht rotirte. Ist aber die Rotation der Kugel hinlänglich rasch, so bleibt trotz des Uebergewichtes bei b die Neigung der Axe ab gegen fg unverändert, während dagegen eine Drehung der Kugel sammt ihrer Rotationsaxe um die Axe fg stattfindet.

Fig. 156.



Es treten also hier ganz dieselben Verhältnisse ein, wie bei der Rotation der Erdaxe, nur mit dem Unterschiede, daß die Kraft, welche die Axe ab aufzurichten strebt, beim Bohnenberger'schen Apparate stets gleich stark wirkt.

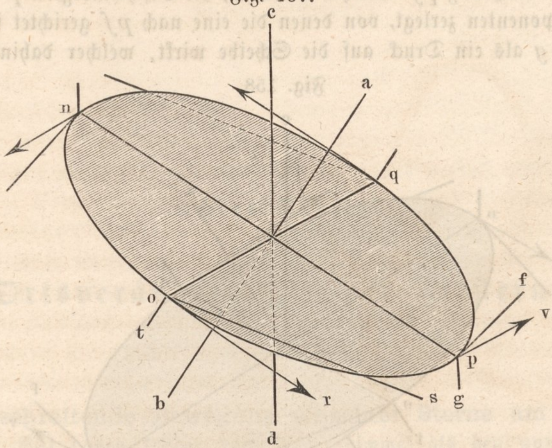
Man kann den Fessel'schen Apparat, Fig. 152, leicht in einen Bohnenberger'schen verwandeln, wenn man von dem Ringe d das Stäbchen f entfernt und statt dessen einen Stahlstift befestigt, welcher dem Stahlstift h gleich ist und dann diesen Stift in die Hülse des Statifs steckt, wie Fig. 156 zeigt. Daß hier die Kugel des ursprünglichen Bohnenberger'schen Maschinchens durch eine Metallscheibe ersetzt ist, ändert nichts am Wesen des Apparates.

Wie sich die fraglichen Erscheinungen, wenigstens in ihren Hauptzügen, ohne Calcül erklären lassen, hat Poggendorff in seinen Annalen (XC. Band, S. 348) ungefähr in folgender Weise auseinandergesetzt:

Betrachten wir die materielle Scheibe $nopq$, Fig. 157, welche um die Axe ab, die einen bestimmten Winkel mit der Verticalen cd macht, sehr rasch rotirt. Durch diese Rotation haben alle Theilchen der Scheibe tangentiale Geschwindigkeiten erlangt, welche für die Punkte o, p, q und n durch Pfeile angedeutet sind.

Wirkt nun auf die Scheibe eine Kraft, welche die Axe ab der Verticalen cd zu nähern, also die Scheibe um die Axe oq zu drehen strebt, so wird der nächste Effect sein daß die Scheibe in der That ein wenig gedreht, daß also p etwas gehoben, n etwas gesenkt wird. Dadurch werden nun die Geschwindigkeiten, mit welchen p und n behaftet sind, nicht alterirt, sie werden gewissermaßen parallel mit sich selbst verschoben. Anders verhält es sich mit den materiellen Theilchen in o und q; sie werden genöthigt, aus der Richtung der Tangential-

Fig. 157.



geschwindigkeiten, mit welchen sie eben behaftet sind, herauszutreten; das Theilchen o z. B. wird genöthigt, die Richtung os einzuschlagen. Dadurch wird aber offenbar die ursprüngliche Geschwindigkeit or in zwei Seitenkräfte zerlegt, von welchen die eine os die Richtung bezeichnet, welche die in o an die Peripherie gelegte Tangente annehmen muß, während die andere Seitenkraft ot rechtwinklig zur Ebene der Scheibe als ein Druck wirkt, welcher eine Drehung um die Axe np zu bewirken strebt, und zwar in der Art, daß die obere Hälfte der Axe ab sich nach vorn bewegt.

Wird in gleicher Weise die Geschwindigkeit zerlegt, mit welcher ursprünglich ein materielles Theilchen in q behaftet war, so ergiebt sich eine Seitenkraft, welche von q aus nach oben gerichtet ist, welche also die Scheibe in der gleichen Richtung zu drehen strebt, wie ot.

Eine Kraft also, welche die Axe ab der Verticalen zu nähern strebt, hat, wenn die Scheibe rotirt, zunächst die Folge, daß der Rotationsaxe eine Drehung mitgetheilt wird, welche rechtwinklig zu derjenigen ist, welche die störende Kraft direct hervorzubringen strebt.

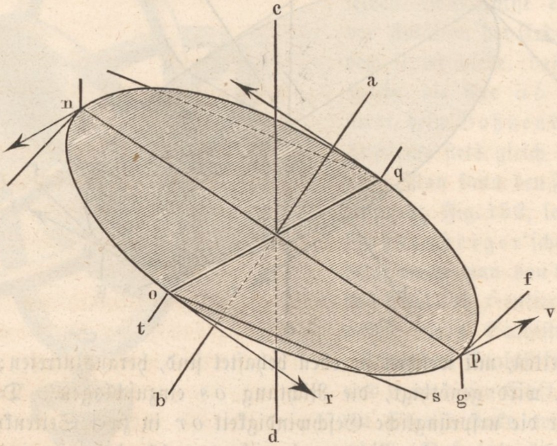
Die Bewegung, welche dadurch der Axe ab mitgetheilt wird, ist zunächst wenigstens ganz dieselbe, als ob eine Umdrehung um die Verticale cd erfolge, und zwar in unserem speciellen Falle so, daß dabei a vor- und b zurücktritt, daß also die Drehung der Rotationsaxe um die Verticale von oben gesehen in der Richtung erfolgt, nach welcher sich der Zeiger einer Uhr bewegt.

Daß unter den gegebenen Umständen die Drehung der Rotationsaxe in der eben bezeichneten Richtung wirklich stattfindet, davon kann man sich sowohl am Bohnenberger'schen wie am Fessel'schen Apparate überzeugen.

Bei diesem ersten Effecte bleibt aber der Vorgang nicht. Sobald eine Drehung der rotirenden Scheibe um die Axe np erfolgt, wird nun auch die

Richtung der Tangentialgeschwindigkeiten in n und p alterirt. Das Theilchen p, welches die Tangentialgeschwindigkeit pv hatte, wird eine Tangentialgeschwindigkeit in der Richtung pf annehmen müssen, die Geschwindigkeit pv wird also in zwei Componenten zerlegt, von denen die eine nach pf gerichtet ist, während die andere pg als ein Druck auf die Scheibe wirkt, welcher dahin strebt, die

Fig. 158.



Axe ab von der Verticalen zu entfernen; eine gleiche Wirkung geht aus der Zerlegung der ursprünglichen Tangentialgeschwindigkeit von n hervor.

In Folge der Drehung der Rotationsaxe treten also Kräfte auf, welche die Rotationsaxe von der Verticalen zu entfernen streben, also der ursprünglich störenden Kraft gerade entgegen wirken, welche dahin streben, die Rotationsaxe der Verticalen zu nähern; so kommt es denn, daß, wenn die Rotationsgeschwindigkeit groß genug ist, der Winkel zwischen der Rotationsaxe und der Verticalen constant erhalten wird.

Eine vollständige Erklärung der hierher gehörigen Erscheinungen nicht allein der Art, sondern auch der Größe nach, ist ohne höhere Rechnung nicht wohl möglich. Eine vollständige Theorie des Kreisels sowohl wie der Präcession hat schon Euler gegeben, und man findet dieselbe im dritten Bande seiner Mechanik, welche vor Kurzem erst wieder in deutscher Uebersetzung mit Anmerkungen und Erläuterungen von Wolfers herausgegeben wurde. Eine interessante und instructive Specialabhandlung über diesen Gegenstand hat Heinen publicirt. (Ueber einige Rotationsapparate, insbesondere den Fessel'schen; Braunschweig 1857.)