

Viertes Hauptstück.

Von dem Entwurfe und der Bestimmung trigonometrischer und geometrischer Netze, als Grundlage zur Vermessung großer Flächen und ganzer Gegenden.

Erster Abschnitt.

Vom trigonometrischen Netze.

§. 181.

Wie bey Vermessungen ganzer Länder und Provinzen zu verfahren **Fig.** und die kugelförmige Gestalt der Erde dabey zu berücksichtigen sey, ist §. 8. vorläufig berührt worden. Es wird nämlich durch die daselbst erwähnten zwey trigonometrischen Netze bewirkt, daß jedes Dreyeck des zweyten Netzes unschädlich als eine ebene Fläche betrachtet, und als solche mittelst Meßtischblätter aufgenommen werden könne. Da jedoch die Aufnahme mittelst des Meßtisches durch Zeichnung bewirkt wird, und hierbey Abweichungen unvermeidlich sind (§. 94.); so sucht man dem in der praktischen Meßkunst aufgestellten Grundsatz (§. 13. unter 6) zu Folge, jedes dieser Dreyecke wieder durch fortgesetzte ins Kleinere gezogene geometrische Netze noch weiter in Dreyecke zu theilen, und endlich die einzelnen Gegenstände, das Detail, selbst zu vermessen. Es werden demnach bey solchen Vermessungen zwey trigonometrische Netze, und zwar:

- 1) das große Hauptnetz durch astronomisch und trigonometrisch bestimmte, 6000 bis 50000 Klaftern entfernt liegende Punkte, sonach
- 2) das kleinere oder Secundar-Netz in der Art entworfen, daß von diesem auf jede Quadratmeile wo möglich drey Punkte fallen; hierauf zwey geometrische oder sogenannte graphische Netze, und zwar:
- 3) das graphische Hauptnetz, bey welchem die Dreyeckspunkte 500 bis 800 Klaftern, endlich

Fig.

- 4) das graphische Secundar- oder Sections-Netz*) entworfen, bey welchem die Dreyeckspuncie 200 bis 300 Klaftern von einander entfernt sind.

Dadurch wird jedes folgende oder kleinere Dreyecknetz durch das nächst vorhergehende zusammen, und gleichsam zur Einheit fest gehalten, daß also jede unvermeidliche kleine Messungs-Abweichung bey ihrem Entstehen auch schon ihre Grenze hat, und durch keine weitere Mittheilung schädlich werden, und folglich die Detail-Vermessung, welche wieder als Fortsetzung des unter 4) bezeichneten Sectionsnetzes zu betrachten ist, nun mit voller Sicherheit darauf begründet und vollführt werden kann.

Hier zu unserm Zwecke genügt es zu zeigen, wie größere herrschaftliche Güter von einigen Quadratmeilen, deren Aufnahme auch Forstgeometern übertragen werden, zu vermessen seyen, wobey wir uns als Vor-Triangulirung bloß auf die letztern drey Netze beschränken können**). Ob vor der Detail-Aufnahme einer solchen Fläche bloß ein graphisches Netz genügt, oder ob diesem auch eine trigonometrische Netzbestimmung vorhergehen müsse, hängt von der Größe der zu vermessenden Fläche ab. Es kann nämlich die Detail-Vermessung für den ökonomischen Gebrauch nicht leicht nach einem kleinern Maßstabe als $40'' = 1''$ (oder höchstens $80'' = 1''$); die graphische Vortriangulirung nicht leicht nach einem kleinern als $200''$ (höchstens $400'' = 1''$) geschehen. Hierbey kommt auf ein Tischblatt, worauf ein Quadrat von $20''$ Länge und Breite verzeichnet ist, eine Fläche von $200 \cdot 20 = 4000$ Kl. Länge und Breite, also Eine Quadratmeile. (Bey einem Rechtecke aber von 20 und 25 Zoll, eine Fläche von $20 \cdot 200 = 4000$ Klaftern Breite, und $25 \cdot 200 = 5000$ Klaftern Länge, also $4000 \cdot 5000'' = 20000000'' = 1,25$ Quadratmeilen.)

Ist demnach eine Fläche so groß, daß zur graphischen Vortriang-

*) Wo die Vermessung gemeindeweise zu geschehen pflegt, wie bey dem Cataster, wird dieses Netz auch Gemeindenez genannt. Um Wiederholungen zu vermeiden, wird hier ein für alle Mal erinnert, daß das, was in der Folge vom Sectionsnez gesagt werden wird, auch rücksichtlich vom Gemeindenez zu verstehen sey, weil im Grunde die Gemeinden-Abtheilungen auch Sectionsweise aufgenommen werden.

***) Eine ausführliche Belehrung, wie bey Ländervermessungen das große trigonometrische Hauptnez entworfen und berechnet wird, findet man in dem Seite 110 angeführten Werke, bearbeitet von dem k. k. Ingenieur-Major Kluger von Teschenberg.

gulirung mehr als vier Tischblätter erforderlich sind; so ist es, bey einem zu Geborthe stehenden richtigen Winkelmesser, rätzlich, eine trigonometrische Netzbestimmung vorausgehen, nachher das graphische Hauptnetz, im obigen Maße, hierauf das Sectionsnetz im gleichen Maße wie die Detailvermessung, und endlich diese selbst folgen zu lassen.

Eine trigonometrische Vortriangulirung zerfällt im Wesentlichen:

A. in die Feldarbeiten, und diese begreifen in sich:

- a) das vorläufige Besichtigen (Recognosciren) der aufzunehmenden Gegend, und die Wahl der Grundlinie und der Dreyeckspuncte,
- b) die Messung der Grundlinie,
- c) das Beobachten der Winkel, und

B. in die Zimmerarbeiten, diese aber begreifen in sich:

- d) das Centriren der Winkel,
 - e) das Verbessern der Höhen- und Tiefenwinkel,
 - f) das Reduciren der Winkel auf den Horizont,
 - g) das Berechnen der Dreyecke,
 - h) das Reduciren der Dreyeckspuncte auf die Mittagslinie, endlich
 - i) das Auftragen der Dreyeckspuncte auf das Papier.
- } wenn das Fernrohr des Winkelmessers keine verticale Bewegung zulassen sollte.

A. Die Feldarbeiten.

a) Wahl der Grundlinie und der Dreyeckspuncte zur Bildung des Netzes bey dem vorläufigen Durchgehen der zu vermessenden Gegend*).

§. 182.

Beym Wahl der Grundlinie ist darauf zu sehen, daß selbe nebst den § 81. bedingten Eigenschaften auch eine Länge von 1000 oder wenigstens 600 Klaftern erhalten könne. Wäre man aber durch Hin-er-

*) Die auf das vorläufige Durchgehen und Besehen der zu vermessenden Fläche verwendete Zeit, sollen es nach Erforderniß auch mehre Tage seyn, darf nicht als verloren angesehen werden, sie wird vielmehr in der Folge reichlich wieder eingebracht.

Fig. 121. nisse auf eine kürzere Grundlinie beschränkt, so messe man eine von 300 bis 400 Klaftern AB (Fig. 121), beobachte an ihren Endpunkten die Winkel nach zwey schieklich gelegenen Puncten H und C auf das genaueste, die sich jedoch von 60° nicht viel entfernen sollen (§. 109), berechne daraus die Linie HC und betrachte diese als die Grundlinie der vorhabenden Triangulirung nach der folgenden Anleitung. Sind demnach die Endpuncte A und B derselben vorläufig bestimmt und bezeichnet (§. 40. Zusatz); so wählt man um selbe herum solche Puncte, welche mit der Grundlinie gute Dreyecke bilden (§. 109.). Hierbey soll die Regel aufgestellt und wo möglich befolgt werden, daß die beobachteten Dreyeckswinkel nicht über 75 und nicht unter 45 Grade enthalten.

Zu dieser vorläufigen Beurtheilung genügt schon der einfache Winkelspiegel (§. 53.), um die Dreyeckspuncte, welche entweder schon bezeichnet sind, als Thürme, Capellen, Kreuze, Schornsteine, ausgezeichnete einzeln stehende Bäume zc. oder erst durch Signale bezeichnet werden müssen, in der gehörigen Lage zu bestimmen. Dabey ist der Bedacht dahin zu nehmen, daß, wo möglich, der Winkelmesser entweder genau über oder unter dem anzuweisenden Dreyeckspunct, oder unweit neben demselben bequem und fest gestellt werden könne. Müssen Standpuncte erst durch Signale bezeichnet werden, so geschieht dieses am zweckdienlichsten durch vier in die Erde gesenkte, und in Form einer Pyramide oben in einer Spitze vereinigte und mit Nägeln befestigte Stangen, oder auch nur durch Eine 8 bis 12 Fuß hohe, mit Kalk überstrichene Stange, die auf 2 bis 3 Fuß zwischen Verschalungen in die Erde gesenkt, und durch Keile fest und vertical erhalten wird. Auch bringt man am obern Ende zwey Breter unterm rechten Winkel, mit dem zugehörigen, von allen Seiten sichtbaren Nr. oder Buchstaben an. Manche Fixpuncte, als: Capellen, einzeln stehende Bäume zc. muß man öfters durch Aufblüde (darauf befestigte Stangen mit Strohbüscheln u. dgl.) kennbar machen, um das Wisiren nach denselben zu erleichtern.

Daß die beyläufige Lage dieser Negpuncte in einer Handstizze entworfen werden müsse, in welcher zugleich die Grenze der aufzunehmenden Gegend, die Richtung der Hauptflüsse und Thäler beyläufig mit angedeutet werden können, bedarf kaum einer Erinnerung (§. 150. 2) bis 4).

b) Messung der Grundlinie.

§. 183.

Hierbey ist das §. 81. beschriebene Verfahren im Wesentlichen zu befolgen; und es kann noch erinnert werden, daß es für die Berechnung der Dreyecke vortheilhaft ist, wenn die Grundlinie eine runde Zahl von Klaftern, z. B. 600, 800 oder noch besser 1000 Kl. zur Länge enthält.

c) Beobachtung der Winkel.

§. 184.

1) Der Geometer begibt sich, nachdem er den Winkelmesser, nach §. 55. berichtigt, und alles dazu Gehörige vorbereitet hat, mit demselben, dem vorläufigen Negentwurfe (§. 182.), und einem Beobachtungsprotokoll, etwa von der Einrichtung wie das nachfolgende, mit seinen nöthigen Gehülffen an den Beobachtungsort, z. B. nach A. Hier 121. stellt er den Mittelpunct der Stativscheibe genau über A, und darauf das Instrument*), und beobachtet die Winkel aller aus diesem Stande sichtbaren Dreyeckspuncte, nach der §. 91. gegebenen Anleitung.

2) Da die Zeit, welche zur Beobachtung eines Winkels erforderlich ist, gegen jene, die man zur Fortbringung des Instrumentes von einem Standpuncte zum andern, und zur Aufstellung und Richtung desselben benöthigt, beynahe für nichts zu achten ist; so ist es vortheilhaft, und eine richtige Messung erfordert es, die Winkel mehr Mahl, (6, 8 bis 10 Mahl) zu messen, zu repetiren (§. 91.), das heißt: so oft zu wiederholen, bis derselbe seine wahre Größe gleichsam selbst zu erkennen gibt. Hat man z. B. bey der Beobachtung des Winkels *BAC* mit dem §. 54. beschriebenen Multiplications-Theodoliten nach der Reihe der Wiederholungen auf dem Limbus abgelesen:

$$1. A = \frac{47^{\circ} 46' 12''}{1} = 47^{\circ} 46' 12''$$

*) Das Instrument muß stets auf einen festen nicht wandelbaren Ort gestellt werden; ist der Boden weich, so läßt man drey starke Pföcke in die Erde treiben, in deren Köpfe die Spizen der Stativfüße fest eingedrückt werden. Muß das Instrument auf Thürmen oder sonstigen Gebäuden über eine Mauer oder andere Unterlage gestellt werden; so muß dasselbe einen freyen festen Stand erhalten, den der Beobachter während der Operation nicht betreten darf.

Fig.
121.

$$2. A = \frac{95^{\circ} 32' 27''}{2} = 47^{\circ} 46' 13,5''$$

$$3. A = \frac{143^{\circ} 8' 44''}{3} = 47^{\circ} 46' 14,6''$$

$$4. A = \frac{190^{\circ} 4' 56''}{4} = 47^{\circ} 46' 14''$$

$$5. A = \frac{238^{\circ} 51' 2''}{5} = 47^{\circ} 46' 12,4''$$

$$6. A = \frac{286^{\circ} 37' 28''}{6} = 47^{\circ} 46' 14,7''$$

$$7. A = \frac{334^{\circ} 23' 36''}{7} = 47^{\circ} 46' 13,7''$$

$$8. A = \frac{382^{\circ} 9' 40''}{8} = 47^{\circ} 46' 12,5'';$$

so folgt daraus die arithm. Mittelzahl = $47^{\circ} 46' 13,4''$.

Dieses Resultat wird in das Beobachtungsprotokoll in die gehörige Rubrik eingetragen.

3) Obgleich es nicht nothwendig wäre, alle drey Winkel eines Dreyeckes zu beobachten, indem aus zwey beobachteten der dritte gefolgert werden kann (Gmtr. 53.), so ist es zur mehrern Sicherheit und zur Entdeckung eines Fehlers jedes Mal rätlich, in jedem Hauptdreyeck alle drey Winkel zu beobachten. Da aber ihre Summe selten der theoretischen Summe von 180° vollkommen gleich seyn wird, so kann man eine kleine Abweichung auf alle drey Winkel des Dreyeckes, nachdem sie vorher auf das Centrum (wenn es nöthig ist) reducirt worden sind, gleich vertheilen, und das Resultat in die siebente Spalte der folgenden Tabelle eintragen. Wäre aber die Differenz der beobachteten Winkel eines Dreyeckes von 180° beträchtlich, so müßten die Winkel alle drey von neuem gemessen werden, welches aber selten nothwendig seyn wird, wenn man das oben unter 2) Gesagte, und die §. 103. angeführten Vorsichten beobachtet.

4) Nur bey Nebendreyecken, wie *EWy'*, und bey Grenzpunkten wie *U* und *Q* ic., deren Benützung vortheilhaft ist, über welche man aber das Meßinstrument nicht stellen kann oder darf, muß man sich begnügen, nur zwey Winkel zu beobachten, aus welchen sodann auf den dritten geschlossen wird, wobey, wie es sich von selbst versteht, die Verbesserung auf 180° hinweg fällt. Solche Punkte muß man durch vorzüglich gute Dreyecke (§. 109.), wie z. B. den Punct *Q* durch das

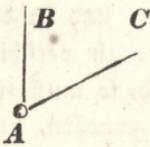
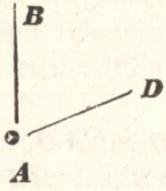
Dreyeck MPQ , so wie überhaupt solche Punkte, die in zu spitzigen Dreyecken liegen, wie $T, P \dots$ von mehreren Seiten zu schneiden, und dann aus dem vortheilhaftesten Dreyecke zu bestimmen trachten. Fig. 121.

5) Hat man in einem Standorte das Instrument nicht über den wahren Scheitelpunct C , sondern in D stellen können, so muß auch die Entfernung vom Mittelpuncte des Instruments bis zum wahren Scheitelpuncte des Dreyeckes, nämlich DC , oder die Entfernung vom Centrum, wie auch der Richtwinkel ADC oder BDC (welchen nämlich die Entfernung DC des Instrumentes vom wahren Scheitelpuncte C und die Entfernung AD oder DB eines anvisirten Objectes A oder B des Dreyeckes einschließen) gemessen, und in die Tabelle, und zwar, wenn aus einem Standpuncte mehre zu verschiedenen Dreyecken gehörige Winkel beobachtet worden sind, so muß für jeden solchen Dreyeckswinkel der Richtwinkel besonders gemessen, und mit der Entfernung vom Centrum, die bey einem und demselben Standpuncte für alle Dreyeckswinkel dieselbe verbleibt, gehörig eingetragen werden. Auch muß in der Tabelle in der beyläufigen Zeichnung des beobachteten Winkels angezeigt werden, ob das Instrument in- oder außerhalb oder seitwärts des zu messenden Winkels gestanden ist, wie es die erste Spalte der folgenden Tabelle weist. 122.

6) Wären in manchen Fällen die Senkrechten dD auf AD , und $d'D$ auf BD , oder die Winkel $dDA, AdD, d'DB$ und $Bd'D$ leichter, als die Entfernung vom Centrum der Richtwinkel, zu bestimmen, so müßten diese Abmessungen in der Tabelle in eigenen Rubriken angemerkt werden. Zum Behuf der Beobachtungen eines der erstgenannten vier Winkel ist weiter nichts nöthig, als in der Seite AC und CB , oder in ihrer Verlängerung nach §. 73. und 74. die Punkte d und d' zu bestimmen. Haben die Fernröhre des Instrumentes keine verticale Bewegung, so hat man in jedem Standpuncte auch die Höhen- und Tiefenwinkel der anvisirten Objecte zu beobachten (§. 91.), und in eine hierzu bestimmte Spalte der Tabelle einzutragen, um selbe sodann auf den Horizont reduciren zu können.

7) Zum Behufe einer zweckdienlichen Orientirung ist es vortheilhaft, die Richtung der Mittagslinie NS zugleich mit in das trigonometrische Neß zu verbinden. Hierzu ist weiter nichts erforderlich, als die Richtung derselben für einen Dreyeckspunct, z. B. für A nach §. 179. zu bestimmen, und den Winkel NAB , welchen dieselbe mit einer anliegenden Dreyeckseite, z. B. mit AB bildet, zu messen, und diesen zum weitern Gebrauch im Protokoll aufzuzeichnen. 121.

Fig.

Standpunct des Instrumentes.	Anvisirte P u n c t e. (Fig. 121.)	Beobachtete Winkel.	Entfernung vom Centrum.
		Gr. u.	Klaftern.
Der Endpunct <i>A</i> der Grundlinie 	Der Endpunct <i>B</i> der Grundlinie, und die Thurmspitze des Dorfes <i>C</i> .	47° 46' 13''	...
	Eben jenen End- punct <i>B</i> , und das auf dem Berge <i>D</i> errich- tete Zeichen.	69° 48' 29''	...
Im Thurmsfenster des Dorfes <i>C</i> . Fig. 123.	Die beyden End- puncte <i>A</i> und <i>B</i> der Grund- linie.	69° 22' 59''	$DC = 2,4$

u. f. w.

Nichtwin- kel.	Centrirte Winkel.	Verbesserte Winkel auf 180°	A n m e r k u n g.
Gr. zc.	Gr. zc.	Gr. zc.	
. .	47° 46' 13''	47° 46' 15''	Die Luft war etwas trübe.
. .	69° 48' 29''	69° 48' 28''	eben so.
ADC = 139° 25'	69° 17' 39''	69° 17' 41''	Starker Wind.

Fig.

Die Zeit und Witterung, wie auch die Beleuchtung der Objecte von der Sonne, haben auf die richtige Beobachtung der Winkel nicht selten einen beträchtlichen Einfluß. Obschon man sich dieselbe nicht jedes Mahl nach Wunsche wählen kann, so ist doch den dadurch entstehenden Unrichtigkeiten öfters sehr leicht auszuweichen. Wenn man z. B. früh nach Sonnenaufgang nach Objecten, die gegen Morgen liegen, visiren will, so wird man sie, besonders wenn sie etwas weit entfernt liegen, sehr undeutlich sehen, hingegen wird man alle gegen Abend liegende Gegenstände niemahls deutlicher sehen, als eben um diese Zeit; und so verhält es sich umgekehrt bey Sonnenuntergang.

Wenn man, besonders auf großen Ebenen und um Mittagszeit, da es sehr warm ist und Dünste in der Luft aufgelöst sind, durch das Fernrohr sieht, so werden sich die Gegenstände sehr unförmlich zeigen und zu zittern scheinen, und um so mehr, je mehr das Fernrohr vergrößert, welches der richtigen Beobachtung sehr entgegen ist. Am deutlichsten aber sieht man selbst die entferntesten Gegenstände jedes Mahl nach einem Regen, wenn die Luft wieder von Dünsten gereinigt worden ist; ja selbst während eines mäßigen Regens sieht man entfernte Gegenstände oft deutlicher, als bey dem hellsten Sonnenscheine, da die Luft mit Dünsten angefüllt ist; daher man bey dem Beobachten der Winkel hierauf Rücksicht nehmen muß. Deswegen pflegt man in der letzten Spalte der folgenden Tabelle die Witterung und das deutliche Sehen der anvisirten Punkte anzumerken, damit man bey der Verbesserung der Winkel eines Dreyeckes auf 180° den größeren Theil dahin vertheilen kann, wo man das Object nicht genug deutlich sehen konnte. Sollte daher ein Object aus einem Standpuncte nicht deutlich genug gesehen werden können, oder auch die Visirlinien oder Seiten der Dreyecke sich zu schief durchschneiden, so muß man einen solchen Gegenstand in der Folge aus einem andern vortheilhafteren Standpuncte noch ein Mahl anvisiren.

Wenn mit dem gebrauchten Winkelmesser die Winkel nicht unmittelbar horizontal gemessen werden können, so müssen auch die noch nöthigen Rubriken zu den Höhen- und Tiefenwinkeln *rc.* eingeschaltet werden.

Es versteht sich von selbst, daß die Verbesserung der Winkel auf 180° erst dann vorgenommen und diese Rubrike ausgefüllt werden kann, wenn alle drey Winkel eines Dreyeckes beobachtet, und auf das Centrum reducirt worden sind.

B. Die Zimmerarbeiten.

d) Das Centriren der beobachteten Winkel.

§. 185.

Bey trigonometrischen Mesoperationen kommt man sehr oft in den Fall, daß die Winkelmesser über denjenigen Punct, den man aus einem andern Standpuncte anvisirt hat, nicht gestellt werden kann, welches doch seyn sollte, um nicht falsche Winkel in die Rechnung zu 123. bringen. Wenn man z. B. bey Beobachtungen des Winkels A die Thurmspitze C und den Punct B anvisirt hat, so kann man das Instrument sodann bey Beobachtung des Winkels C nicht über den aus A anvisirten Punct, sondern man muß dasselbe seitwärts desselben, etwa auf der Fensteröffnung des Thurmes bey D aufstellen, und anstatt des wahren Winkels ACB den Winkel ADB beobachten, der von jenem um so mehr verschieden ist, je weiter der Mittelpunct D des Instrumentes von dem wahren Winkelpuncte C entfernt steht, und je kürzer die Schenkel DA und DB sind.

Solche Winkel, wie BDA , erfordern sodann eine kleine Verbesserung, welche man das Centriren der Winkel, oder die Reduction auf das Centrum nennt.

Die Stellung des Instrumentes, rücksichtlich des wahren Standpunctes, läßt sich in folgende fünf Hauptfälle bringen. Fig. 122., 122. Nr. 1, 2, 3, 4, 5.

Nr. 1. Wenn das Instrument neben dem wahren Standpuncte C über einen Punct D in einer Seite des Dreyeckes, oder

Nr. 2. neben dem wahren Standpuncte C auf der Verlängerung einer Seite in D , oder

Nr. 3. innerhalb, oder

Nr. 4. außerhalb des Dreyeckes in D neben dem wahren Standpuncte C , oder endlich

Nr. 5. seitwärts des Dreyeckes rechts oder links des wahren Standpunctes C in einem Puncte D , zu stehen kommt.

In Nr. 1 ist der wahre Winkel $C =$ dem beobachteten D — dem spizigen Winkel x ; es ist nämlich $C = D - x$

In Nr. 2 ist $C = D + x$.

Bey Nr. 3 ist $m = p + x$.

und $n = q + y$.

Gmtr.

54.

Fig.
122.

daher $m + n = p + q + x + y$ (Nk. 47. Grundf. I.)
 nämlich $D = C + x + y$ (Nk. 40. Grundf. II.)
 und endlich $C = D - x - y$.

Bey Nr. 4 findet man auf eben diese Art $C = D + x + y$.

Endlich bey Nr. 5 ist $E = C + y$
 und $E = D + x$

daher $C + y = D + x$, (Nk. 40. Grundf. III.)
 folglich $C = D + x - y$.

Dieser letzte Ausdruck zeigt, daß die Differenz der zwey Winkel x und y in den meisten Fällen sehr klein, und selbst gleich Null, mithin der beobachtete Winkel dem wahren Dreieckswinkel selbst gleich werden kann; und zwar geschieht dieses so oft, als sich der Beobachtungspunct D in dem Umfange eines Kreises befindet, den man sich durch die wahren Punkte A , B und C des Dreieckes gezogen denkt, wenn auch D noch so weit von C entfernt ist. (Gmtr. 45. 2.) Und da, wie aus dem nachfolgenden §. erhellet, der Winkel C desto schärfer gefunden wird, je weniger der Winkel D von C verschieden ist, so wählt man, wo es seyn kann, den Beobachtungswinkel jedes Mal vortheilhafter seitwärts des wahren Scheitels, als vor- oder rückwärts desselben.

Man sieht auch aus diesem, daß es nur darauf ankommt, durch irgend ein Hülfsmittel die Winkel x und y zu bestimmen, um nachher aus diesen und dem beobachteten Winkel D den wahren C zu finden. Diese Winkel x und y können durch eine der folgenden Methoden am füglichsten bestimmt werden.

§. 186.

1) Man bestimme, wenn es angeht, nach §. 74. in der Seite AC einen beliebigen Punct d von der Beschaffenheit, daß man von d nach A und D sehen kann, messe sodann die Winkel AdA und AdD , und ziehe ihre Summe von 180° ab, so gibt der Ueberrest den Winkel x . Eben so kann auch der Winkel y bestimmt werden.

2) Man errichte aus dem Puncte D die Senkrechte Dd auf AD , und Dd' auf BD , und messe die Senkrechten Dd und Dd' auf das genaueste. Sodann berechne man die Seite AD aus dem beobachteten Winkel D , der Seite AB , und aus dem Winkel ABD (Nr. 1 und 2), welche schon aus einer vorhergegangenen Messung oder Berechnung bekannt seyn müssen, indem man schließt: $\sin D : AB = \sin B : AD$.

Endlich findet man aus dem rechtwinkligen Dreyecke ADd den Winkel x durch folgende Proportion: $AD : Dd = r : \text{tang } x$, vermög 122. Gmtr. 248.

Bei den Dreyecken Nr. 3, 4 und 5 werden die Seiten AD und BD aus folgenden Proportionen nur beynahe gefunden:

$$\sin D : AB = \sin ABC : AD,$$

$$\text{und } \sin D : AB = \sin CAB : BD.$$

Sind nun die Seiten AD und BD bekannt, so kann man die Winkel x und y aus folgenden Proportionen bestimmen:

$$AD : Dd = r : \text{tang } x,$$

$$BD : Dd' = r : \text{tang } y.$$

Die Seiten AD und DB werden zwar durch die vorigen Proportionen nicht genau gefunden, weil sie aus falschen Winkeln ABC und CAB berechnet werden; jedoch hat dieser Fehler keinen merklichen Einfluß auf die Bestimmung der Winkel x und y . Da man hier immer voraussetzen kann, daß die Seiten AD und DB in Hinsicht auf die Senkrechten Dd und Dd' sehr groß sind. Man setze z. B. die wirkliche Länge $AD = 5000$ Klaft. und die Senkrechte $Dd = 2$ Klaft., so ist der wahre Winkel $x = 0^\circ 1' 22,5''$. Man setze weiter, daß man durch die vorige Proportion $AD = 5050$ Klaft. gefunden hätte, so findet man sodann durch fernere Rechnung den Winkel $x = 0^\circ 1' 21,7''$; folglich nur um $\frac{8}{10}$ Secunden zu klein.

3) Da es öfters nicht thunlich ist, die Senkrechten Dd und Dd' zu bestimmen, hingegen die Entfernung des Mittelpunctes des Instruments vom wahren Winkelpuncte C , nämlich CD , oder die Entfernung vom Centrum, wie auch die Richtwinkel CDA und CDB , leichter als jene Senkrechten gemessen werden können, als z. B. bey einem Thurmfenster (Fig. 123.) u. dgl.; so kann man sodann aus diesen bekannten Stücken, nämlich aus der Entfernung CD , aus dem Richtwinkel ADC und aus der vorher berechneten Seite AD den Winkel x , und eben so auch den Winkel y finden. 123.

4) Hat man unmittelbar in A und B die Winkel beobachten können, so ergibt sich der Winkel C (bis auf die etwa erforderliche Verbesserung aller drey Winkel zu 180°) zur Berechnung der Seiten AC und BC mit zureichender Genauigkeit; wobey die Seite AB als schon berechnet vorausgesetzt wird. Nun kann aus dem Richtwinkel ADC , dem Abstände DC und der Seite AC , der Winkel x , und auf gleiche Art der Winkel y schärfer als vorher bestimmt, daraus sodann der Winkel ACB gefunden, endlich die Reduction auf

Fig. 180° vorgenommen, und in der Tabelle in die gehörige Rubrik 123. eingetragen werden.

5) Hätte man das Instrument bey zwey Winkeln eines Dreyeckes nicht unmittelbar über die Scheitel derselben stellen können, sondern darneben stellen müssen, so wird, nachdem die Winkel des nebenliegenden Dreyeckes CAB auf das Centrum, und sodann auf 180° reducirt sind, zuerst aus CB , den Winkeln CBE und BDE (indessen $= BCE$) die Seite CE gesucht. Nun kann aus dem Rechtwinkel CDE , dem Abstände DC und der Seite CE der Winkel DEC berechnet, und hierauf mittelst des Winkels DEC und des Winkels $y = DBC$, der beobachtete Winkel BDE auf den wahren BCE mehr angenähert, und durch Wiederholung dieser Rechnung endlich bis auf die stehende Secunde auf das Centrum reducirt werden. Der beobachtete Winkel m wird nun auf das Centrum E , wie oben der Punct D auf C reducirt, und endlich alle drey Winkel dieses Dreyeckes auf 180° verbessert.

Bey Winkeln, welche um einen Punct, z. B. um A liegen, und auf 360° zu verbessern sind, können die bereits auf 180° verbesserten nicht mehr ins Mitleid gezogen werden.

e) Unterschied des wahren und scheinbaren Horizontes und Verbesserung der Höhen- und Tiefenwinkel.

§. 187.

Was wir unter scheinbarem und wahren Horizonte verstehen, ist vorläufig schon §. 6. erklärt worden; wenn nämlich AME ein Stück des Durchschnittes unserer Erdkugel, AM und EM zwey Halbmesser, folglich die Richtung der Schwerkraft oder die Richtung frey fallender Körper in A und E sind; wenn ferner AD senkrecht auf AM , und BF senkrecht auf BM ist, so heißt AD eine durch den Punct A gezogene, und BF eine durch den Punct B (z. B. durch den Scheitel eines Berges) gezogene scheinbare Horizontallinie; und eine durch die Linie AD oder BF senkrecht auf AM oder BM gedachte ebene Fläche wird eine scheinbare Horizontalfäche des Punctes A oder B genannt. Hingegen heißt eine Linie, deren alle Puncte von dem Mittelpuncte der Erde gleichweit abstehen, nämlich der Bogen AE , eine wahre Horizontallinie, und eine durch den Punct A gedachte Fläche, deren alle Puncte vom Mittelpuncte der Erde M gleichweit abstehen, nämlich ein Stück der Kugelfläche, die wahre Horizontalfäche des

Punctes *A*. Man kann demnach von zwey oder mehrern Puncten nur dann sagen, daß sie in einem und demselben wahren Horizonte liegen, wenn sie vom Mittelpuncte der Erde gleichweit entfernt sind. Fig.

§. 188.

Wenn man bey der horizontalen Stellung eines Winkelmessers aus *A* nach *B* visirt, so heißt der Winkel *DAB* der scheinbare, *EAB* aber der wahre Höhenwinkel; visiret man hingegen aus *B* nach *A*, so ist *FBA* der scheinbare, und *GBA* der wahre Tiefenwinkel, wenn man im zweyten Falle durch *B* den Kreisbogen oder den wahren Horizont *GB* denkt. Eben so wird *BD* oder vielmehr die Senkrechte *Bd* die scheinbare Erhöhung des Punctes *B* über dem Horizonte des Punctes *A* genannt. Das Stück *ED* des verlängerten Halbmessers zwischen dem wahren und scheinbaren Horizonte des Punctes *A* heißt der Unterschied oder vielmehr die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für die Entfernung *AE*.

§. 189.

Aufgabe. Aus dem gemessenen scheinbaren Höhen- oder Tiefenwinkel, aus der gegebenen horizontalen Entfernung *AE* zweyer Gegenstände *A* und *B*, und aus dem Halbmesser *AM* der Erde, den wahren Höhen- oder Tiefenwinkel zu finden.

Auflösung. In Fig. 127. ist $EAB = DAB + EAD$, 127.
 und $GBA = FBA - GBF$; hingegen ist in Fig. 128. EAB 128.
 $= EAD - DAB$ (wo nämlich bey horizontal gestelltem Winkel- u.
 messer der scheinbare horizontale Visirstrahl *AD* über den Scheitel *B* 129.
 des Gegenstandes *EB* hinweg streicht). Es ist aber $EAD = \frac{1}{2} M$,
 und $GBF = \frac{1}{2} M$, weil *DA* und *FB* auf den Halbmessern in *A*
 und *B* senkrecht stehen, und die Umkreise *EA* und *GB* in *A* und *B*
 berühren (Gmtr. 44.). Es ist demnach in Fig. 127. der Winkel
 $EAB = DAB + \frac{1}{2} M$, und $GBA = FBA - \frac{1}{2} M$; hingegen
 in Fig. 128. $EAB = \frac{1}{2} M - DAB$.

Sehen wir den Halbmesser der Erde $AM = a$, und die horizontale Entfernung $AE = b$, welche mit dem Bogen *AE* und auch mit *AD* einerley Werth hat, so lange der Winkel *M* noch sehr klein ist*), so kann der Winkel *M* auf folgende Art gefunden werden.

*) Es versteht sich wohl von selbst, daß diese Winkel, die in der Ausübung immer sehr klein sind, hier der mehrern Deutlichkeit
 Practische Meskunst. 20

Fig. Es ist der ganze zu $AM = a$ gehörige Umkreis $= 2a\pi$, vermög Gmtr. 116. 1); ferner verhält sich $2a\pi : b = 360^\circ : M^\circ$ (Gmtr. 16); folglich ist

$$M = \frac{360 \cdot b}{2a\pi} = \frac{180 \cdot b}{a\pi} \text{ Gerade} = \frac{10800 \cdot b}{a\pi} \text{ Minuten.}$$

Es ist der Halbmesser der Erdkugel $a = 3356611$ Wiener Klaftern; folglich nach gehöriger Reduction $M = 0,00102 \times b$ Minuten, wobey die Entfernung $AE = b$ in Wiener Klaftern ausgedrückt seyn

127. muß. Endlich ist in Fig. 127. der wahre Höhenwinkel $EAB = DAB + 0,00051 \cdot b$ Minuten, und der wahre Tiefenwinkel GBA

128. $= FBA - 0,00051 \cdot b$ Minuten; hingegen in Fig. 128. ist der wahre Tiefenwinkel $EAB = 0,00051 \cdot b - DAB$.

127. Es sey z. B. in Fig. 127. der gemessene scheinbare Höhenwinkel $DAB = 4^\circ 57'$, und die horizontale Entfernung $AE = b = 1980$ Wiener Klaftern; so ist der wahre Höhenwinkel $EAB = 4^\circ 57' + 0,00051 \times 1980$ Minuten $= 4^\circ 57' + 1' = 4^\circ 58'$.

Da also der Unterschied zwischen dem wahren und scheinbaren Höhenwinkel in einer Entfernung von 1980 oder beynähe 2000 Wiener Klaftern erst eine einzige Minute beträgt, so ist es offenbar, daß man bey denjenigen Winkelmessern, mit welchen auf's Höchste einzelne Minuten beobachtet werden können, und auf solche Entfernungen, die nicht viel über 2000 Wiener Klaftern betragen, die angeführte Verbesserung hinweg lassen könne; wohl aber muß derselbe auf größere Entfernungen jedesmahl vorgenommen werden.

Die Veränderung des scheinbaren Höhenwinkels, die von der Brechung der Lichtstrahlen herrührt, kann um so mehr außer Acht gelassen werden, da sie nach den neuesten Erfahrungen nur $\frac{1}{24}$ des Mittelpunctwinkels M beträgt. Es ist nämlich aus sichern Erfahrungen bekannt, daß ein Lichtstrahl von einem nahe am Horizonte befindlichen Gegenstande B (Fig. 129.) nach einer etwas in die Höhe gebogenen krummen Linie in das Auge des Beobachters in A anlangt. Da nun der Beobachter in A die Lage des Gegenstandes B nach der letzten Richtung des Lichtstrahles, nämlich nach der Richtung der Tangente Ab beurtheilt, so wird dadurch der wirkliche scheinbare Höhenwinkel DAB um den Winkel BAb zu groß beobachtet. Da aber dieser Winkel BAb , welcher der Refraktionswinkel heißt, nur $\frac{1}{24} AME = \frac{1}{12} EAD$, so wie auch Bb nur $\frac{1}{12} ED$ beträgt, so kann

wegen, in den Figuren ganz unverhältnißmäßig größer gezeichnet werden mußten.

diese Verbesserung in den meisten gewöhnlichen Fällen außer Acht gelassen werden. Fig. 129.

De Lambre hat während der französischen Gradmessung von Dünkirchen bis Rhodéz gefunden, daß man in den meisten Fällen den Refractionswinkel $= 0,084 \text{ } A M E$ setzen könne.

Herr General Ritter von Fallon fand während der unter seiner Leitung stehenden Landesvermessung in den k. k. österreichischen Staaten, als Folge einer dießfälligen neunjährigen Erfahrung, den Refractionscoefficienten für 100 bis 300 Klaftern Höhe $= 0,081$

» 300 » 600 » » $= 0,070$ und

» 600 » 900 » » $= 0,064$,

welche Erfahrungen mit dem obigen $\frac{1}{24} \text{ } A M E = \frac{1}{12} \text{ } E A D$ und $\frac{1}{12} \text{ } E D$ sehr nahe zusammentreffen.

§. 190.

Aufgabe. Für eine jede gegebene Entfernung AC , welche man noch ohne merklichen Fehler $= AE$ setzen kann, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes, nämlich EC , zu finden. 130.

Auflösung. 1) Vermöge Gmtr. 94. verhält sich $EC : AC = AC : CF$; daraus findet man $EC = \frac{AC^2}{CF} = \frac{AE^2}{CF}$; weil wir AE nur so groß angenommen haben, daß man ohne merklichen Fehler $AC = AE$ setzen kann. Ferner kann man auch in eben derselben Voraussetzung ohne merklichen Fehler für die Ausübung $CF = EF = AB$ annehmen. Es ist sodann $EC = \frac{AE^2}{CF} = \frac{AE^2}{AB}$.

Es sey z. B. $AE = 200$ Wiener Klaftern, so ist $EC = \frac{200^2}{6713223} = \frac{40000}{6713223} = 0,0059584$ Wiener Klaftern $= 5,148$ Linien, weil der Durchmesser der Erde $AB = 6713223$ Wiener Klaftern ist.

Diese Methode, die Erhöhung des scheinbaren Horizontes für eine gegebene Entfernung zu bestimmen, hat zwar nicht die vollkommene geometrische Schärfe; jedoch weicht sie bey nicht gar zu großen Entfernungen, die in der Ausübung am gewöhnlichsten vorkommen, nicht merklich von der Wahrheit ab, wovon man sich auf folgende Weise überzeugen kann.

2) Es ist vollkommen genau $EC = MC - ME = MC - AM$.

Nun ist im rechtwinkligen Dreyeck AMC die Hypothenuse

Fig. $MC = \sqrt{AM^2 + AC^2}$; folglich ist auch $EC = \sqrt{AM^2 + AC^2}$
 130. — AM . Setzen wir nun, wie im vorigen Falle, $AC = 200$, und
 $AM = 3356611$ Wiener Klaftern, so ist $\sqrt{AM^2 + AC^2} =$
 $\sqrt{11266837445321} = 3356611,00596$; und folglich $EC =$
 $3356611,00596 - 3356611 = 0,00596$ W. Kl. = 5,149 Linien.
 Es ist nämlich die wahre Erhöhung des scheinbaren Horizontes für
 die Entfernung von 200 Klaftern nur um $\frac{1}{1000}$ einer Linie größer,
 als sie nach der vorigen Weise unter 1) berechnet worden ist; also für
 die Ausübung in den meisten Fällen eine unbedeutende Abweichung.

§. 191.

Wenn einmahl für eine bestimmte Entfernung, z. B. für die
 Entfernung von 200 Klaftern, die Erhöhung des scheinbaren Hori-
 zontes = 5,15 Linien bekannt ist, so kann für jede andere, in Wie-
 ner Klaftern gegebene Entfernung = b die zugehörige Erhöhung = x
 in Linien gefunden werden.

Denn es ist vermög des Vorigen $EC = \frac{AE^2}{AB}$;

aus eben diesem Grunde ist auch $HD = \frac{AH^2}{AB}$;

$$\text{daher } EC : HD = \frac{AE^2}{AB} : \frac{AH^2}{AB} \text{ (Kl. 72. Grundf. I)}$$

oder es ist $AE^2 : AH^2 = EC : HD$ (Kl. 268. V).

Setzen wir $AE = 200$ W. Kl., so ist $EC = 5,15$ Linien.
 Setzen wir ferner $AH = b$ W. Kl. und die zugehörige Erhöhung
 des scheinbaren Horizontes $HD = x$ Linien, und substituiren diese
 Werthe in die vorhergehende letzte Proportion, so ist endlich

$$200^2 : b^2 = 5,15 : x, \text{ nämlich } x = \frac{5,15 \cdot b^2}{40000} = 0,0001287 \cdot b^2$$

Wiener Linien.

So findet man z. B. nach dieser Gleichung in einer Entfernung
 von 1000 Wiener Klaftern die Erhöhung des scheinbaren Horizontes
 = 128,7 Linien = 10 Zoll $8\frac{2}{3}$ Linien.

Nach dieser Gleichung kann man die Erhöhungen des scheinbaren
 Horizontes für verschiedene, etwa von 10 zu 10 Klaftern auf einan-
 der folgende Entfernungen, von 60 Klaftern angefangen, berechnen
 und in eine Tabelle zum Gebrauche eintragen.

In solchen Fällen, wo es in der Ausübung nur erforderlich ist, für verschiedene Entfernungen unter 400 Klaftern die zugehörige Erhöhung des scheinbaren Horizontes zu bestimmen, kann man ohne merklichen Fehler für die Entfernung von 200 Wiener Klaftern diese Erhöhung geradezu für 5 Wiener Linien annehmen, und sodann folgende Proportion setzen: Das Quadrat von 200 verhält sich zum Quadrate der in Klaftern gegebenen Entfernung, gleich wie 5 Linien zur gesuchten Erhöhung in Linien.

Fig.

f) Reduction der schiefen Winkel auf den Horizont.

§. 192.

Wenn bey einem Winkelmesser, mit welchem man die Winkel beobachtet, das Fernrohr keine verticale Bewegung zuläßt, und daher die horizontalen Winkel nicht unmittelbar gemessen werden können, bey dem man also die Fläche der Gradscheibe in eine schiefe Lage bringen muß, um einen Winkel MCN zu beobachten, dessen Scheitel- oder Standpunct C und die anvisirten Puncte M und N in verschiedenen Horizonten liegen; so ist es klar, daß der beobachtete schiefe Winkel MCN von dem horizontalen mCn verschieden ist. Um demnach die Puncte M und N auf den Horizont des Punctes C zu reduciren, muß nebst dem schiefen Winkel MCN auch der Höhenwinkel mCM und der Tiefenwinkel nCN gemessen werden. Diese zwey Winkel verbessert man nöthigen Falls nach der vorhin unter §. 189. gezeigten Methode, und sodann wird jener nach der folgenden allgemeinen Gleichung auf den Horizont reducirt.

$$\log \sin \frac{1}{2} mCn = \frac{1}{2} [\log \sin (S - a) + \log \sin (S - b) - (\log \sin a + \log \sin b)].$$

In dieser Gleichung ist jedesmahl

$$a = 90 + \text{dem Tiefenwinkel } nCN$$

$$b = 90 - \text{dem Höhenwinkel } mCM$$

$$\text{und } S = \frac{1}{2} (b + a + \text{dem beobachteten Winkel } MCN).$$

Es sey z. B. $MCN = 95^\circ 48'$

$$nCN = 11^\circ 30'$$

$$mCM = 4^\circ 50'$$

so ist $a = 90^\circ + 11^\circ 30' = 101^\circ 30'$

$$b = 90^\circ - 4^\circ 50' = 85^\circ 10'$$

$$\text{und } S = \frac{1}{2} (85^\circ 10' + 101^\circ 30' + 95^\circ 48') =$$

$$\frac{282^\circ 28'}{2} = 141^\circ 14';$$

Fig. mithin ist $S - a = 141^\circ 14' - 101^\circ 30' = 39^\circ 44'$
 131. und $S - b = 141^\circ 14' - 85^\circ 10' = 56^\circ 4'$;

ferner ist $\log \sin (S - a) = 0,805647$

$\log \sin (S - b) = 9,918915$

D. E. $\log \sin a = 0,008807$ } (Nf. 350.)
 D. E. $\log \sin b = 0,001547$ }

Summe 19,734916 halbtirt gibt

$\log \sin \frac{1}{2} m C n = 9,867458$

das ist $\frac{1}{2} m C n = 47^\circ 28' 30''$

und endlich ist $m C n = 94^\circ 57'$ der gesuchte horiz. Winkel.

Wenn beyde Gegenstände M und N höher, oder beyde tiefer als C liegen, so wird im ersten Falle jeder Höhenwinkel besonders von 90° abgezogen, im zweyten Falle aber jeder Tiefenwinkel insbesondere zu 90° addirt, um die Winkel zu erhalten, die oben in der Gleichung mit a und b bezeichnet sind.

Bey der trigonometrischen Aufnahme einer Reihe von Dreyecken muß diese Reduction der Winkel auf den Horizont jederzeit vorgenommen werden, wenn man die horizontalen Winkel nicht unmittelbar messen kann, weil es nothwendig ist, die Seiten aller Dreyecke für denjenigen Horizont zu berechnen, worauf die Grundlinie gemessen worden ist (§. 12.).

Die Richtigkeit der oben angeführten Reduction der schiefen Winkel auf den Horizont erhellet aus Vega's Mathem. 2. Band, und es führet diese Methode den besondern Vortheil mit sich, daß die Fehler, welche bey der Beobachtung der Höhen- und Tiefenwinkel gar leicht einschleichen, keinen merklichen Einfluß auf die Berechnung des gesuchten horizontalen Winkels haben. Man setze z. B., daß man den Höhenwinkel $m C M$ um 10 Minuten zu klein, und den Tiefenwinkel $n C N$ um 20 Minuten zu groß, nämlich $m C M = 4^\circ 40'$ und $n C N = 11^\circ 50'$ beobachtet habe, so wird sodann aus dem schief geneigten Winkel $M C N = 95^\circ 48'$ der horizontale Winkel $m C n = 94^\circ 57' 42''$, und folglich nur um 42 Secunden größer, als im vorigen Falle.

g) Das Berechnen der Dreyecke.

§. 193.

Sind alle Verbesserungen, die bey den beobachteten Winkeln vorzunehmen waren, vollendet, so können nun die Dreyecke nach Gmtr. 242. und 244. berechnet werden. Sind die horizontalen Win-

kel gleich unmittelbar gemessen worden, so bleiben die unter §. 189. Fig. und 192. angeführten Verbesserungen hinweg, und man kann nach der Centrirung der Winkel (§. 185.) und der Verbesserung derselben auf 180° sogleich zur Berechnung der Dreyecke selbst schreiten. Man fängt nämlich, wenn die Grundlinie gleich Anfangs gemessen wurde, von da an, die Dreyecke zu berechnen. Wird aber jene erst späterhin gemessen, so kann man dessen ungeachtet die Berechnung der Dreyecke beginnen und fortsetzen, indem man die Grundlinie einstweilen für 1 annimmt, und die daraus erhaltenen Resultate sodann, wenn die wirkliche Länge der Grundlinie bekannt ist, mit dieser Zahl multiplicirt. Wenn z. B. AB die noch nicht gemessene Grundlinie ist, 121. und in dem Dreyecke ABC die Winkel $C = 69^\circ 17' 41''$, und $B = 62^\circ 56' 4''$ bekannt sind, so verhält sich

$$AB : AC = \sin C : \sin B$$

$$\text{oder } 1 : AC = \sin 69^\circ 17' 41'' : \sin 62^\circ 56' 4''$$

$$\text{daher } AC = 1 \cdot \frac{\sin 62^\circ 56' 4''}{\sin 69^\circ 17' 41''} \quad (\text{Gmtr. 225.}),$$

und $\log AC = \log \sin 62^\circ 56' 4'' - \log \sin 69^\circ 17' 41'' = 9,949627 - 9,971003 = 0,978624 - 1$, (Nk. 342.); endlich ist $AC = 0,951972$ (Nk. 341.).

Wäre demnach die wirkliche Länge der Grundlinie, z. B. $AB = 2000$ Klaftern gefunden worden, so würde $AC = 2000 \cdot 0,951972 = 1903,94$ Klaftern seyn, und so bey den übrigen.

Da man im Beobachten der Winkel durch üble Witterung ohnehin oft gehindert wird, so kann in dieser Zwischenzeit die Berechnung der Dreyecke um so zweckdienlicher vorgenommen und fortgesetzt werden, als dadurch dieses Geschäft theils sich nicht zu sehr häuſet, theils ein vorkommender Anstand gleich an Ort und Stelle leicht berichtigt werden kann.

Die berechneten Resultate, sie mögen nun gleich für die wirkliche oder nur indessen für 1 angenommene Länge der Grundlinie erhalten worden seyn, werden jedesmahl in eine ähnliche Tabelle, wie die folgende ist, eingetragen.

Fig.
121.

Bezeichnung der Dreyecke, der Winkel und der denselben gegenüber liegenden Seiten.	Logarithmen.	Größe des Winkels.	Länge der Seite.
		Grad &c.	Klaftern.
ABC			
A	9,869503	47° 46' 15"	
CB	3,199279		1583,18
B	9,949627	62 56 4	
AC	3,279654		1903,95
C	9,971003	69 17 41	
AB	3,001030		2000
ABD			
A	9,972456	69 48 32	
BD	3,471780		2963,33
B	9,975373	70 53 12	
AD	3,474697		2983,30
D	9,801706	39 18 16	
ADE			
A	9,839840	43 45 18	
DE	3,329052		2133,30
D	9,941716	60 58 32	
AE	3,430928		2697,29
E	9,985486	75 16 10	
u. f. w.			

Hier ist die wirkliche Länge der Grundlinie gleich in die Rechnung genommen; wäre sie aber indessen = 1 angenommen worden, so müßten deswegen auch die Rubriken darnach eingerichtet werden.

h) Das Reduciren der Dreyeckspuncte auf die Mittagslinie.

§. 194.

Da nun alle Dreyecke berechnet sind, so könnten sie entweder nach Gmtr. 17. mittelst des Transporteurs, oder nach Gmtr. 51.

mittelft Durchschnitte der Seiten, oder auch nach §. 118. auf das Fig. Papier getragen, und das trigonometrische Netz formirt werden. 121. Allein hierdurch würde, aller angewandten Mühe ungeachtet, dennoch keine richtige Arbeit erwartet und geliefert werden können, weil bey dieser Art Zeichnung jeder unvermeidliche Fehler, §. 94., so klein er in Einem Dreyecke auch seyn möge, den übrigen Dreyecken durch die ganze Figur sich mittheilen, und durch die Summirung dieser kleinen Fehler die Unrichtigkeit am Ende sehr beträchtlich werden würde. Um diese unausbleibliche Unrichtigkeit jedesmahl zu vermeiden, muß man die Winkelpuncte der Dreyecke nach der, Gmtr. 119. 3) gezeigten Methode durch Abscissen und Ordinaten bestimmen, weil hierdurch die unvermeidlichen kleinen Fehler bey ihrem Ursprunge verbleiben müssen, und sich nicht weiter mittheilen können. Die Bestimmung der hierzu nöthigen Abmessungen erhellet aus dem Folgenden:

Man entwerfe einstweilen das nach §. 193. berechnete Netz der Dreyecke nur beyläufig nach Gmtr. 51., welches sehr schnell von Statten geht, auf das Papier, ziehe unter dem, §. 184. 8) beobachteten Winkel NAB die Richtung der Mittagslinie NS als Abscissenlinie, und fälle auf diese aus allen Winkelpuncten senkrechte Ordinaten $Bb, Qq, Mm, Pp, \dots Dd, Ee \dots Gg, Hh \dots x' x'', z' z'' Ff \dots$; so können diese Ordinaten und ihre von dem Puncte A an gerechneten Abscissen aus den bekannten Seiten und Winkeln der ganzen Figur auf folgende Art berechnet werden.

1) Im rechtwinkligen Dreyecke AbB ist nebst dem Winkel BAb auch die Seite AB bekannt; es kann daher die Abscisse Ab und die Ordinate bB vermög Gmtr. 242. gefunden werden; es verhält sich nämlich

$$AB : Bb = \text{sintot} : \sin BAb, \text{ woraus die Senkrechte } Bb = \frac{AB \cdot \sin BAb}{r}, \text{ und } \log Bb = \log AB +$$

$\log \sin BAb - 10$ folgt (Gmtr. 240. und 242.).

Die Abscisse Ab findet man aus der Proportion

$$AB : Ab = \text{sintot} : \cos bAB \text{ (Gmtr. 242. 2)}$$

und $\log Ab = \log AB + \log \cos bAB - 10.$

2) Eben so findet man aus dem rechtwinkligen Dreyecke AcC , vermög des bekannten Winkels $bAB + BAC = cAC$ und der Seite AC die Abscisse Ac und Ordinate cC .

3) Zieht man von 180° die bekannten Winkel $bAB + BAC$

Fig. 121. $\triangle CAD$ ab, so kann aus dem rechtwinkligen Dreyecke ADD , vermög des nun bekannten Winkels DAd und der Seite AD , die Abscisse Ad und Ordinate dD bestimmt werden.

4) Und so kann man alle Abscissen und Ordinaten in jenen rechtwinkligen Dreyecken bestimmen, welche durch Dreyeckseiten mit dem Punkte A unmittelbar verbunden sind; als $E Ae$, $F Af$, $z' A z'$, $G Ag$ und $H Ah$.

5) Nun können auch die Abscissen und Ordinaten jener Dreyeckspuncte, die durch Dreyeckseiten nicht unmittelbar mit der Abscissenlinie NS verbunden sind, bestimmt werden; zu diesem Behufe ziehe man durch einen solchen Punct, dessen Abscissen und Ordinaten schon bestimmt sind, und der mit den zu bestimmenden neuen Puncten durch bekannte Dreyeckseiten unmittelbar verbunden ist, wie hier durch E , M , H , G und F , parallele Linien zu der Abscissenlinie NS . Da z. B. die zwey Parallelen $d'v'$ und NS durch die Gerade AE geschnitten sind, so sind die Wechselwinkel $eAE = AEd'$; ferner sind die Winkel $AED + DET + TEt' = 180 + AEd'$, daher ist $TEt' = 180 + (AEd' = eAE) - (AED + DET)$; nun können aus dem rechtwinkligen Dreyecke $Et'T$ die beyden Katheten, und endlich die Abscisse $At = Ae + (et = Et')$, so wie die Ordinate $tT = (tt' = eE) + t'T$ bestimmt werden.

6) Ähnlicher Weise findet man die Abscissen und Ordinaten für die Puncte V und W ; und sodann für den Punct U .

7) Auf eben diese Art findet man die Abscissen und Ordinaten der übrigen Puncte, indem man jedesmahl durch einen vermittelst Ordinaten und Abscissen schon bestimmten, und durch bekannte Dreyeckseiten unmittelbar mit den neu zu bestimmenden Puncten zusammenhängenden Punct eine Parallele zu NS zieht, und durch das Addiren oder Subtrahiren der Winkel von 180° oder umgekehrt die nöthigen Winkel für jedes rechtwinkelige Dreyeck, sodann daraus die Katheten derselben, und endlich die Abscissen und Ordinaten durch etwa erforderliche Addition oder Subtraction wie vorhin bestimmt. So z. B. wird die Ordinate und Abscisse für den Punct M bestimmt, wenn man durch B die Parallele Bm' zu NS denkt; dadurch wird der Wechselwinkel $eAB = ABm'$, sodann ist $ABI + IBM = ABm' + m'BM$; woraus

$m'BM = ABI + IBM - (ABm' = eAB)$ folgt. Nun ist Fig. 121. das weitere Verfahren wie oben.

8) Mitteltst einer Parallele durch M , können hierauf die Abscissen und Ordinaten für die Punkte R, Q, P und O bestimmt werden.

9) Für einen solchen Punkt, wie z. B. y' wird die Abscisse und Ordinate bestimmt, mittelst der Parallelen ny''' zu NS ; wodurch der Wechselwinkel $nFA = FAF$; hierauf $nFA + AFy' + y'Fy''' = 180^\circ$, und endlich $y'Fy''' = 180^\circ - (nFA + AFy')$ wird. Nun werden im rechtwinkligen Dreyecke $Fy'y'''$ die Katheten, und darauf die Abscisse und Ordinate wie vorhin gefunden; u. s. w.

10) Diese berechneten Abscissen und Ordinaten werden sodann in eine ähnliche Tabelle, wie die folgende ist, zum weitem Gebrauche eingetragen.

01,0000	00,0000	0	00,0000	01,0000	0
01,0000	00,0000	1	00,0000	01,0000	1
01,0000	00,0000	2	00,0000	01,0000	2
01,0000	00,0000	3	00,0000	01,0000	3
01,0000	00,0000	4	00,0000	01,0000	4
01,0000	00,0000	5	00,0000	01,0000	5
01,0000	00,0000	6	00,0000	01,0000	6
01,0000	00,0000	7	00,0000	01,0000	7
01,0000	00,0000	8	00,0000	01,0000	8
01,0000	00,0000	9	00,0000	01,0000	9
01,0000	00,0000	10	00,0000	01,0000	10
01,0000	00,0000	11	00,0000	01,0000	11
01,0000	00,0000	12	00,0000	01,0000	12
01,0000	00,0000	13	00,0000	01,0000	13
01,0000	00,0000	14	00,0000	01,0000	14
01,0000	00,0000	15	00,0000	01,0000	15
01,0000	00,0000	16	00,0000	01,0000	16
01,0000	00,0000	17	00,0000	01,0000	17
01,0000	00,0000	18	00,0000	01,0000	18
01,0000	00,0000	19	00,0000	01,0000	19
01,0000	00,0000	20	00,0000	01,0000	20

Fig.
121.

Entfernung					
des Punc- tes	gegen Nord	gegen Ost	des Punc- tes	gegen Nord	gegen West
<i>A</i>	0	0	<i>G</i>	750,12	3500,13
<i>C</i>	230,10	1950,08	<i>H</i>	2800,00	700,05
<i>R</i>	1150,09	5450,14	<i>L</i>	4301,08	3200,25
<i>B</i>	1650,20	1200,28	<i>I</i>	5850,17	325,15
<i>Q</i>	2556,12	7200,35	<i>K</i>	7250,32	2560,06
<i>M</i>	4700,18	2700,52			
<i>P</i>	7000,50	7050,10			
<i>O</i>	7600,00	2775,09			
	gegen Süd	gegen Ost		gegen Süd	gegen West
<i>D</i>	1000,01	3050,11	<i>x'</i>	405,17	5802,10
<i>E</i>	2675,16	1301,11	<i>z'</i>	1350,26	3854,09
<i>T</i>	4502,17	7115,12	<i>a</i>	3301,19	5150,23
<i>W</i>	5325,21	1660,04	<i>F</i>	3650,78	1907,15
<i>V</i>	6151,07	4150,19	<i>Z</i>	4801,00	3151,10
<i>U</i>	6750,18	7300,41	<i>y'</i>	5651,41	850,18
<i>X</i>	7603,08	1215,37	<i>Y</i>	7310,15	3035,14

i) Auftragung der Dreyeckspuncte auf das Papier. Fig.

§. 195.

Sind die Abscissen und Ordinaten aller Dreyeckspuncte auf diese Weise in einer Tabelle zusammengestellt, so könnten nun in jedem Falle diese Puncte mit Beyhülfe der zur Berechnung entworfenen Figur 121. aus der Tabelle auf die Meßtischblätter zur geometrischen Vor-Triangulirung nach und nach übertragen werden. Zur nöthigen Übersicht und zur Vermeidung aller Irrung ist es jedoch zweckdienlich, diese Puncte nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe (der, um alle Puncte des Netzes auf Einen oder zwey zusammen gesetzte und ausgespannte Bogen zu bringen, gegen denjenigen zur geometrischen Triangulirung bestimmten um vieles kleiner seyn kann) zu entwerfen, und in Sectionen nach der Größe eines Meßtischblattes in Quadrate einzutheilen; woraus denn sonach zu ersehen seyn wird, wie viel Meßtischblätter man zur Vortriangulirung nöthig habe, dann wie viele und welche Puncte auf ein und dasselbe Tischblatt fallen. Dieses kann auf folgende Weise geschehen:

1) Man ziehe auf dem gespannten Papier eine gerade Linie NS (Fig. 124.), die wir für die bestimmte Mittagslinie des Ortes A annehmen wollen, wähle in dieser einen beliebigen Punct für den Anfangspunct A ; jedoch wähle man jene Linie NS und in dieser den Anfangspunct A , dessen Abscisse und Ordinate = Null ist, dergestalt, daß kein Dreyeckspunct über das Papier hinaus falle.

2) Um z. B. den Punct C zu bestimmen, trage man die Entfernung aus der vorigen Tabelle nach dem hierzu bestimmten verjüngten Maßstabe*), nämlich 230,10 Theile dieses Maßstabes von A gegen N bis c auf, errichte in diesem Puncte rechts eine Senkrechte cC auf NS , und trage auf diese Senkrechte die in der Tabelle bemerkte Entfernung 1950,08; so ist dadurch der Punct C bestimmt.

3) Auf gleiche Art werden auch die übrigen Puncte aufgetragen; es wird nämlich für den Punct x' von A gegen S bis x'' getragen 405,17, in diesem Puncte links die Senkrechte $x''x'$ auf NS errichtet, für die Länge dieser Senkrechten 5802,10 Theile aufgetragen; wodurch der Punct x' bestimmt ist. Und so bey den übrigen.

4) Diese auf solche Weise auf das Papier übertragene Puncte

*) Hierzu ist ein 1000theiliger oder der sogenannte geometrische Maßstab am vortheilhaftesten.

Fig. bringe man nun in Sectionen von der Größe eines Triangulirblattes, 124. nämlich in Quadrate von 4000 verjüngten Klaftern Länge und Breite. Zu diesem Ende trage man von *A* gegen *N*, und sodann auf eine in *A* auf *NS* errichtete Senkrechte gegen *W* und *O* 4000 Klaftern so oft auf, als es die Ausdehnung der in Fig. 121. vorläufig entworfenen Netzpunkte erfordert, und bilde mittelst der durch diese Punkte zu *NS* und *WO* geführten parallelen Linien das Quadratnetz Fig. 124.; woraus man die Anzahl von Sectionen für die geometrische Triangulirung, und zugleich ersichtlich wird, wie viel und welche Punkte in jede Section fallen.

5) Um diese Quadrat-Sectionen von einander gehörig unterscheiden zu können, werden die (verticalen) Columnen oben an der Nordseite mit römischen Ziffern fortlaufend bezeichnet, und die oberhalb eines Quadrates stehende Ziffer kommt der ganzen von Nord gegen Süd laufenden Colonne zu. Die von West gegen Ost laufenden horizontalen Sectionen werden links von Nord gegen Süd mit den arabischen Ziffern von 1 angefangen nach der Ordnung fortlaufend bezeichnet, und es gehört wieder jede Ziffer gemeinschaftlich der ganzen horizontalen Schichte zu.

6) Die einzelnen Quadrate sind demnach durch ihre zusammen-treffenden römischen und arabischen Ziffern sehr leicht unterscheidbar. So z. B. wird das (Fig. 124. in 20 Sectionen eingetheilt) Quadrat, welches in Fig. 125. einzeln vorgestellt ist, mit III. 3 bezeichnet, wodurch seine Lage, in Hinsicht auf die übrigen Quadrate der zu vermessenden Fläche, genau unterschieden ist.

§. 196.

Um nun die §. 193. und 194. berechneten und §. 195. in eine Übersicht zusammengestellten Dreieckspunkte einer jeden einzelnen Section auf Messischblätter zur graphischen Triangulirung zu übertragen, verzeichne man auf ein nach §. 42. aufgespanntes Papier ein Quadrat von 20'' Länge und Breite auf das Genaueste entweder mittelst der §. 49. beschriebenen Sectionslehre oder auf folgende Art:

1) Man ziehe aus der zweyfachen Quadratzahl von 20, d. i. aus $2 \cdot 20 \cdot 20 = 800$ die Quadratwurzel = $28, 28''$, trage diese Länge im wirklichen Maße mittelst eines Stangenzirkels (§. 41. 2) auf eine früher gezogene Diagonale des Tischblattes von *m* bis *p*, bestimme aus diesen Punkten mit der Länge der Quadratseite = 20'' die Punkte *A* und *n* mittelst Bögen, und verbinde sie durch gerade

Linien; so ist das Quadrat $Amnp$ in der verlangten Größe auf das Fig. Genaueste bestimmt (Gmtr. 89. a.).

2) Es ist natürlich und auch am vortheilhaftesten, die graphische Triangulirung von dem gemeinschaftlichen Punct A aus zu beginnen, 124. nach und nach fortzusetzen und zu beendigen. Um demnach zu diesem u. Behufe die trigonometrischen Puncte, z. B. der Section III. 3., auf 125. das zur graphischen Triangulirung vorgerichtete Tischblatt (Fig. 125.) mit der erforderlichen Schärfe zu bestimmen, greife man auf dem zu dieser Triangulirung bestimmten verjüngten Maßstabe die in der Tabelle S. 194. verzeichneten Längen der Abscissen und Ordinaten ab, und trage erstere auf den Quadratseiten in der Richtung von Nord gegen Süd auf Am und pn , letztere aber auf jene von West gegen Ost auf mn und Ap , und zwar ist hier der Punct A schon im Scheitelpunct des Quadrates selbst bestimmt. Für den Punct D trage man die 1000,01 Theile dieses Maßstabes von A und p gegen m und n (gegen Süd) und ziehe durch diese Puncte eine feine Bleylinie. Hierauf 3050,11 Theile von A und m gegen p und n (gegen Ost), und ziehe auch durch diese auf den Quadratseiten Ap und mn bestimmten Puncte eine feine Bleylinie; so wird im Durchschnitte dieser und der vorigen der Punct D auf das Genaueste bestimmt seyn.

Auf gleiche Weise wird auch der Punct E übertragen; und es ist vortheilhaft, oder vielmehr eine richtige Arbeit erfordert es, die Lage dieser Puncte durch feine Linien an den vier Tischrändern zu markiren, und mit feinen Nadelstichen, die mit Bleyringen von genüglcher Weite eingefasst werden, festzulegen (S. 89. und 132.), wie Fig. 125. zu sehen. Hierdurch kann die ursprüngliche Lage dieser Puncte, wenn sich das Bret während einer Wechselwitterung verzogen hätte, wieder hergestellt werden, weil, wie bekannt, sich das Holz nach der Länge ihrer Fasern bey solcher Witterung nicht merklich ändert, wie weiter unten an seinem Orte noch deutlicher erhellen wird. Auch werden die trigonometrischen Puncte durch kleine Dreyecke bezeichnet, um sie nachher von jenen, welche durch diese geometrisch bestimmt werden, sogleich unterscheiden zu können.

3) Will man einen außerhalb einer Section, jedoch nahe an der Rahmlinie gelegenen Punct, wie z. B. V im Quadrate IV. 4. auf die nebenliegende Section III. 4. übertragen, so verlängere man die zwey Quadratseiten auf dem Tischbrette, zwischen deren Verlängerung er liegt, und trage auf beyde verlängerten Quadratseiten den in der Tafel verzeichneten östlichen (oder westlichen) Abstand, hier 4150,19.

Fig. Hierauf ziehe man von dem in der Tafel enthaltenen südlichen (oder 124. nördlichen) Abstand so viel Quadratseiten, als zwischen dem Anfangs- u. puncte *A* und der betreffenden Section liegen, hier 4000 von 125. 6151,07 ab, trage den Rest 2151,07 auf die gehörigen Quadratseiten auf, und verfare, um den Punct selbst und seine Markirung an den Tischrändern festzulegen, wie vorhin.

4) Und nun erhellet aus diesem gezeigten Verfahren schon, wie die übrigen Puncte auf die betreffenden Sectionen zur geometrischen Vortriangulirung nach Erforderniß übertragen werden. Zugleich geht daraus hervor, wie nahe am Rande einer Sectionlinie liegende Puncte öfters auf zwey oder drey nebenliegenden, ja der Punct *A* sogar in vier Sectionen gemeinschaftlich verwendet werden können.

5) Bey solchen Quadraten, in welche nur ein trigonometrischer Punct oder gar keiner fällt, jedoch aus demselben in zwey neben oder entfernt liegenden Quadraten zwey Puncte sichtbar sind, kann eine Orientirungslinie nach der folgenden Weise berechnet, sodann auf das Tischbret übertragen, und dieses darnach orientirt werden. Es sey Fig. 124. im Quadrate IV. 1. bloß der Punct *P* gegeben, aus irgend einem Puncte desselben, z. B. *k*, seyen die Puncte *Q* und *O* der anstoßenden Quadrate III. 1. und IV. 2. sichtbar. Da die Abscisse *hb* und die Ordinate $Ob = 4000 - oO$, wie auch *hf* und *fQ* der sichtbaren Puncte *O* und *Q*, so wie $bc + cf = bf = oq = Ao - Aq$ bekannt sind, so verhält sich in den ähnlichen Dreyecken *Obc* und *cfQ*

$$\begin{aligned} Ob : bc &= fQ : fc, \\ \text{oder } Ob : Qf &= bc : fc, \\ \text{oder } (Ob + Qf) : Ob &= (bc + fc) : bc, \\ \text{oder } (Ob + Qf) : Ob &= fb : bc; \end{aligned}$$

$$\text{woraus } bc = \frac{Ob \cdot fb}{Ob + fQ} \text{ folgt.}$$

Nun ist $cf = bf - bc$; und $ch = bh - bc$; und es verhält sich in den ähnlichen Dreyecken *cfQ* und *chi* ferner:

$$cf : fQ = ch : hi,$$

$$\text{woraus man } hi = \frac{fQ \cdot ch}{cf} \text{ findet.}$$

6) Werden nun die gefundenen Werthe nach dem zugehörigen verjüngten Maße für *ch* und *hi* auf den Randlinien der gegebenen Quadratmeile IV. 1. aufgetragen, so kann endlich vermittlest Anlegung des Visirlineals an die solchergestalt bestimmten Puncte *c* und *i*

der Meßtisch vermög §. 87. 2) nach den zwey entfernten sichtbaren Fig. Puncten O und Q orientirt werden. 124.

7) Legt man hierauf an den gegebenen Punct P , und visirt nach dem gleichnamigen auf dem Felde *), so bestimmt der Durchschritt rückwärts auf der Linie ci den Punct k auf dem Tische, worüber dieser auf der Erde steht. Von hier aus können nun mehre Signale anvisirt, auch ein Rayon auf den folgenden Standpunct m hingeworfen, und sodann hier der Tisch wieder nach k zurück einvisirt oder orientirt, und von P her rückwärts abgeschnitten werden. Weil man hier in m , so wie in k noch keine Controll- oder Prüfungspuncte an Händen hat, so kann man sich von der Richtigkeit dieser Puncte nur durch die unmittelbare genaue Messung der Linien Pk oder km überzeugen. Nun kann das graphische Netz nach der weiter unten folgenden Anleitung weiter fortgesetzt und in diesem Quadrate vollendet werden.

8) Auch in dem noch schlechtern Falle, wenn auf eine Quadratmeile, wie z. B. IV. 3. gar kein trigonometrischer Punct gebracht werden könnte, es wären aber aus derselben in andern Quadraten IV. 2. und IV. 4. zwey Puncte R und T sichtbar, deren Abscissen und Ordinaten bekannt sind, so lassen sich aus den ähnlichen Dreyecken $r'u'v'$, $r'zs'$ und $r'pq$ (wenn man zu RT die Parallele $r'u'$ sich denkt) ebenfalls wieder die Stücke zs' und pq , und nachher an den Randlinien der gegebenen Quadratmeile IV. 3. die zwey Puncte s und f' aus $zs' + (zf' = r'R)$, und $pq + (ps = r'R)$ bestimmen, wodurch endlich, so wie vorhin, der Tisch vermittelst der Linie $f's$ nach den sichtbaren Puncten R und T orientirt werden kann. Um nun das graphische Netz anfangen und fortsetzen zu können, muß man aus einem der anstoßenden Quadrate einen nahe an der Randlinie schon bestimmten und sichtbaren graphischen Punct auf die weiter unten folgende Weise übertragen, welcher (obschon außerhalb der Randlinie dieser Section liegend) die Stelle des obigen gegebenen Punctes P vertritt.

Obgleich diese Fälle zu den schlechtesten gehören, die man in der Meßkunst so gern zu vermeiden wünscht, und auch wo möglich zu vermeiden sucht (die aber zum Glück nur in sehr ausgedehnten ununterbrochenen waldigen Gegenden vorkommen, wo der Boden gewöhnlich einen geringern Werth hat); so geben sie doch im Nothfalle ein Hülfsmittel mehr an die Hand, welches man, wenn auch nur zur Prüfung anderer minder guten Mittel, jedesmahl anwenden soll.

*) Wenn derselbe sichtbar ist, außer diesem müßte man wie in dem folgenden Falle verfahren.