

B. Von den nothwendigsten Elementar-Aufgaben, welche auf dem Felde mittelst der gewöhnlichen Meßinstrumente aufgelöst werden können. Fig.

§. 131.

Aufgabe. Die Entfernung zweyer auf dem Felde gegebenen Punkte *A* und *B*, die wegen zwischen liegender Hindernisse nicht unmittelbar gemessen werden kann, mittelst der Meßinstrumente anzugeben. 73.

Auflösung. I. Mittelst des Meßtisches.

1) Man wähle einen beliebigen Punct *C* von solcher Beschaffenheit, daß man von da aus nach den zwey gegebenen Puncten ungehindert sehen und messen kann, und daß die durch die Visuren entstehenden Winkeln *A*, *B* und *C*, wo möglich, einander ziemlich gleich werden (§. 109).

2) Hierauf stelle man den Meßtisch in diesem Orte horizontal (§. 87.), visire von einem auf dem Tischblatte beliebig gewählten Puncte *c* nach den beyden gegebenen Puncten *A* und *B*, senke diesen Punct *c* mittelst der Lothgabel auf die Erde hinab, bemerke ihn in *C**, und lasse von diesem Puncte aus bis nach den gegebenen *A* und *B* messen.

3) Die gefundene Länge von *C* bis *A* trage man nach dem verjüngten Maßstabe von *c* auf die gleichnamige Visur bis *a*, jene Länge *CB* aber von *c* bis *b*, verbinde *a* mit *b* durch eine Gerade; so gibt diese nach demselben verjüngten Maße die verlangte Länge der Geraden *AB* im wirklichen, landesüblichen oder Normalmaße zu erkennen.

Denn es sey das Verhältniß des verjüngten Maßes zum wirklichen des landesüblichen, wie $1 : n$ (nach dem Catastralmäße $1 : 2880$, d. h. die verjüngte Klafter ist $= \frac{1}{2880}$ der wirklichen Wiener Klafter): so verhält sich

$$ca : CA = 1 : n, \text{ und wegen } cab \sim CAB \text{ verhält sich} \\ ca : CA = ab : AB \text{ (Gmtr. 81.)};$$

also auch $1 : n = ab : AB$;
woraus endlich $AB = ab \cdot n$ folgt.

*) Es sind bey diesen Vorübungsaufgaben durchaus die Puncte auf der Erde mit den großen Buchstaben, ihre gleichnamigen auf dem Tische aber mit den kleinen des lateinischen Alphabets bezeichnet.

Fig.
73.

Es versteht sich von selbst, daß man auf eben diese Weise aus dem Standpuncte C auch mehre um diesen herumliegende sichtbare Puncte bestimmen könne. Es können daher mittelst dieser Aufgabe, wenn sie im Zusammenhange angewendet wird, kleine Flächen und Grundstücke aus Einem innerhalb desselben gewählten Standpuncte aufgenommen werden.

II. Mittelst eines Winkelmessers.

Man messe nach §. 91. den Winkel ACB , wie auch die Seiten CA und CB ; so sind im Dreyecke ACB zwey Seiten mit dem eingeschlossenen Winkel bekannt; folglich kann man die dritte Seite durch Rechnung bestimmen (Gmtr. 244. oder 264.).

III. Durch die Verzeichnung.

Man verzeichne den gemessenen Winkel nach §. 118. (oder nach Gmtr. 17. Zusatz) auf da^s Papier, und übertrage auf dessen Schenkel nach einem verzüngten Maßstabe die gemessenen Längen CA und CB von c bis a und b ; so wird auf demselben Maßstabe die Gerade ab die wirkliche Länge von AB zu erkennen geben, vermög oben unter I.

Um nicht unnöthig weitläufig zu werden, wird hier erinnert, daß die vorhergehende, und alle nachfolgende Aufgaben vermittelt der Bussole (und der Zollmann'schen Scheibe), mit Zuziehung des §. 92. nöthigen Falls sehr leicht gelöst werden können.

Aus der Behandlung dieser Aufgabe mittelst des Winkelmessers und der Verzeichnung, geht zugleich auch die Lösungsart für die folgenden einfachen Aufgaben hervor, wie nämlich dabey mittelst des Winkelmessers und trigonometrischer Rechnung, und geometrisch durch Verzeichnung nach den in der Theorie aufgestellten Gründen zu verfahren ist. Es wird daher nur bey zusammengesetzten Aufgaben ihre dießfällige Auslösung in der Folge beygesetzt werden.

§. 132.

74. Aufgabe. Es sey umgekehrt die Entfernung der zwey Puncte A und B in verzüngtem Maße auf dem Meßtische in ab bekannt, man soll die Lage und Entfernungen eines beliebigen dritten Punctes C in Bezug auf die zwey gegebenen bestimmen; oder welches daselbe ist: man soll dadurch den Meßtisch orientiren, eine Messoperation beginnen und fortsetzen.

I. Auflösung. Wenn ein Endpunct, der auf dem Tisch **Fig.** gegebenen Linie über den gleichnamigen auf der **74.** Erde gestellt werden kann.

1) Man stelle den Messtisch mit einem auf seinem Brete gegebenen Punkte, z. B. mit a , über den gleichnamigen vermög §. 87., Aufgabe 1., d. h. man orientire den Tisch nach AB , lasse in einem schicklichen Orte C *) eine Fahne errichten, und visire dieselbe von a aus an, ziehe aber die Visur so lang, als es das Visirlineal zuläßt, oder besser, man ziehe sie nur bis in jene Gegend, wo nach dem Augenmaße der Punct c hintreffen dürfte, markire aber an den Rändern des Tischblattes die Richtung dieser Visur mit kurzen Linien (Randmarken), damit man nachher in dem Puncte C das Visirlineal mit voller Sicherheit zur Orientirung des Tisches wieder anlegen könne **).

2) Nun lasse man in A eine Messfahne zurück, und begeben sich mit dem Tische in die Gegend von C . Hier, da dieser Punct auf dem Messtische noch nicht bestimmt ist, orientire man diesen mittelst des von A hierher gezogenen Rayon ***) nach A , ohne sich an den Punct C zu binden. Dieß geschieht um so leichter, wenn man den Messtisch hinter C in die Verlängerung von CA mit der §. 87. unter 1) gezeigten Behandlung orientirt.

*) Man muß, wo möglich, derley Punkte immer so wählen, daß durch die Visirlinien ziemlich gleichseitige Dreyecke gebildet werden. Nie aber sollen sich bey dem graphischen Trianguliren die Visirlinien unter kleinern Winkeln als 45, für die Detailvermessung aber nicht unter 30 Graden schneiden (§. 109.).

***) Diese Markirung am Rande des Tischblattes ist bey allen jenen Visuren, mittelst welcher der Messtisch orientirt werden muß, mit großem Vortheile anzuwenden, und ist zu einer richtigen Arbeit unerläßlich, welches ein für alle Mal hier erinnert wird.

****) Rayon, Strahl, nennet man jede von einem Puncte auf dem Tische in der Richtung nach dem gleichnamigen auf dem Felde gezogene Visirlinie (Visur); zum Unterschiede aber, nennet man die erste Visur nach einem Objecte Rayon, die zweyte und jede nachfolgende nach demselben Objecte von einem andern Standpuncte aber Schnitt; daher der technische Ausdruck in der praktischen Geometrie: man habe z. B. die Fahne M vom Standpuncte A rayonirt, und von den Puncten B und C geschnitten,

Fig. 3) Nicht zu übersehen ist dabey, daß man sich gewöhne, bey
74. dem Diopterlineale stets dasselbe Diopter, und zwar worauf die Bergdiopter angebracht sind, als Augdiopter zu behalten, wegen den §. 101 unter 3) angegebenen Gründen, und auch weil zum Bergauf- oder Bergabvisiren dieselben dazu schon in Bereitschaft sind.

4) Hierauf legt man das Visirmittel an den Punct *b*, visirt nach dem gleichnamigen *B* auf dem Felde, und durchschneidet den vorigen Rayon rückwärts: so ergibt sich dadurch die Lage des Punctes *c*, und zugleich auch seine Entfernungen *ca* und *cb* im verjüngten Maße; es kann nun der gleichnamige Punct *C* auf der Erde mittelst der Lothgabel bestimmt, und von da aus, wenn es erforderlich ist, die Messoperation weiter fortgesetzt werden, wozu diese Aufgabe sich vorzüglich eignet.

II. Auflösung der vorigen Aufgabe. Wenn der Meßtisch zwar über keinem der zwey auf dem Felde sichtbaren Puncte *A* oder *B*, jedoch zwischen denselben auf ihrer Verbindungslinie *AB* etwa in *D* gestellt werden kann.

1) Man bestimme den Punct *D* in der geraden Linie *AB* nach §. 74, und stelle sodann den Meßtisch mit der gegebenen *ab* in die Verticalfläche über *AB* nach §. 87. 2); mache wo möglich auch *db* mit *DB* verhältnismäßig, d. i. nach dem verjüngten Maße $db = DB$; oder auch, man wähle *D* und *d* indessen nur beliebig in den Geraden *AB* und *ab*.

2) Hierauf wähle man einen schicklichen Punct *C*, visire von *d* auf die daselbst aufgerichtete Fahne, ziehe und bemerke den Orientirungsrayon nach der obigen Bemerkung unter I., und begeben sich mit dem Meßtische dahin, nachdem man vorher in *D* eine Fahne aufrichten läßt.

3) Hier in *C* wird der Meßtisch mittelst des Rayon *cd* nach *D* zurück einvisirt (orientirt), hierauf an *a* angelegt, und nach dem gleichnamigen Puncte *A*, desgleichen an *b* angelegt und nach dem gleichnamigen *B* auf dem Felde visirt. Die rückwärts gezogenen Visuren werden nun den Standpunct *c* auf dem Tischblatte bestimmen, der nöthigen Falls mit der Lothgabel auf die Erde abgesehen werden muß. Vorausgesetzt, daß der Abstand *db* mit *DB* verhältnismäßig gewählt, daß nämlich von *D* nach *B* gemessen werden konnte, so

müssen alle drey Visuren durch den Punct c schneiden. Die Ge- Fig.
raden ca und cb geben in demselben verjüngten Maaße, als ab ge-
geben ist, die wirklichen Längen von C bis A und B zu erkennen.

4) Hat man die Puncte D und d indessen nur beliebig gewählt, so dient der Rayon cd bloß um das Tischblatt in C nach D zu orientiren; der Standpunct c wird sonach durch die zwey Visuren von a nach A und b nach B bestimmt. Wäre es erforderlich, den wahren Punct d auf dem Tische zu bestimmen, so kann dieses durch eine Visur von c nach D bewirkt werden, und er befindet sich da, wo die Gerade ab durch selbe geschnitten wird.

III. Wenn der Meßtisch weder über, noch zwischen den auf dem Felde sichtbaren Puncten A, B , jedoch 76.
in ihre Verlängerung etwa in D gestellt werden kann.

1) Man bestimme auf derjenigen Seite, wo die Deckung des entferntern von den näher liegenden sichtbaren Puncten der Verlängerung nicht hinderlich ist, nach S. 73. oder 74. den Standpunct D . Hierauf verlängere man die auf dem Tische gegebene ab bis zu einem beliebig gewählten Punct d , stelle nun d in die Verticalebene DB vermöge S. 87., und visire von d nach der im gewählten Puncte C errichteten Fahne.

2) Nachdem man in D eine Meßfahne zurück gelassen hat, orientirt man nun den in C gestellten Tisch nach D , und verfährt übrigens wie im vorigen Falle unter 3) bis 4), um die verlangte Lage des Punctes C , und seine Entfernungen von A und B zu erhalten.

3) Weil bey diesem Verfahren der gesuchte Punct durch rückwärts, von den gegebenen zwey Puncten, gezogenen Visuren sich ergeben hat; so nennet man dieses in der Praktik: das Rückwärts einzeichnen, wovon weiter unten das Nöthige noch folgen wird.

Der Grund dieses Verfahrens in allen drey Fällen beruht auf der Ähnlichkeit der Dreyecke. Denn im ersten Falle Fig. 74. ist $abc \sim ABC$ wegen den zwey, wechselweise gleichen Winkeln $A = a$ und $C = c$; folglich haben jede zwey gleichliegenden Seiten dasselbe Verhältniß wie das gegebene $AB : ab$. Im zweyten Falle Fig. 76. ist der Winkel $ADC = adc$ construirt, folglich ist, wenn der Meßtisch mittelst der Geraden cd nach D orientirt worden, ab parallel zu AB (Gmtr. 37. 2), daher die Dreyecke $abc \sim ABC$ (Gmtr. 65.); folglich haben alle gleichliegenden Seiten das gleiche Verhältniß wie $AB : ab$. Auf gleiche Weise erhellet dieses aus dem Falle unter III.

Fig. Auch hier können sich die drey Geraden ac , bc und dc nur dann in einem einzigen Punct c schneiden, wenn bd im Verhältnisse BD gewählt werden konnte; außer diesem bestimmen wieder wie vorhin unter 4) nachdem der Tisch mittelst des Rayon cd nach D orientirt worden ist, die Visuren von b nach B und von a nach A rückwärts verlängert, den Standpunct c .

IV. Kürzere Auflösung der obigen Aufgabe, wenn aus einer vorausgegangenen Messoperation die Richtung der Magnetnadel oder der Magnetstrich in Beziehung auf die gegebene Gerade ab auf dem Tischblatte gezogen ist.

77. 1) Man wähle einen beliebigen Punct C , von der schon mehr erwähnten Eigenschaft, stelle den Tisch daselbst horizontal, lege das Dioptralineal an die Randmarken des Magnetstriches, und an dieses die Orientirbussole (§. 89.), lockere die Herzschraube, wende das Tischblatt, bis die Nadel beyläufig einspielt, mache jene wieder fest, und führe mittelst der Wendeschraube die Magnetnadel genau über das Nordzeichen; so ist das Tischblatt orientirt, d. i. es läuft die gegebene ab auf dem Tische mit ihren gleichnamigen AB auf dem Felde parallel (§. 89.).

2) Nun lege man an a , visire nach A , und ziehe den Rayon rückwärts, lege sodann auch an b , visire nach B ; so wird diese Visur rückwärts gezogen, die vorige in c schneiden, und dadurch die Lage des verlangten Punctes auf dem Messtische bestimmen, wodurch nun die Lage des gleichnamigen C auf der Erde mittelst des Senkfels, wie vorhin, bestimmt, und seine Entfernung von A und B , mittelst der Entfernung c von a und b , angegeben werden kann.

Dieses Verfahren nennet man das Rückwärts einschneiden mit Hülfe der Orientirbussole, und es können, wie in den vorigen Fällen, von diesem neu bestimmten Standpuncte aus mehre Puncte rayonirt, und durch die zulässige Messung ihrer Länge auf dem Tische im verjüngten Maße bestimmt, oder von einem andern Standpuncte aus geschnitten und die Messoperation fortgesetzt werden.

§. 133.

Aufgabe. Die Länge einer geraden Linie AB , die nur an Einem ihrer Endepuncte A zugänglich ist, zu messen, d. h. die Entfernung eines unzugängigen Punctes B , von einem beliebigen oder

78. gegebenen Puncte zu bestimmen.

Auflösung. 1) Man stelle den Meßtisch über den zugängigen Fig. Punct A horizontal, lasse in einem andern beliebigen schicklichen 78. Puncte C eine Meßfahne errichten, und visire von dem, mittelst der Lothgabel von der Erde auf das Tischblatt reducirten Punct a nach B und C .

2) Hierauf lasse man die Linie von A bis C messen, trage die verjüngte Länge von a bis c , stelle den Tisch in C , richte ihn nach A ein, und visire von c nach dem unzugängigen Punct B ; so wird der vorige, von a dahin gelegte Rayon ab geschnitten, folglich aus der Ähnlichkeit der Dreyecke acb und ACB die gesuchte Länge AB , vermög der gleichnamigen ab durch das verjüngte Maß bestimmt. 88

Diese und ähnliche Aufgaben lassen sich mittelst des Meßtisches auch aus Einem Standpuncte auflösen, d. h. ohne daß man nöthig habe, den Tisch in einen zweyten Standpunct zu übertragen; man darf sich den Meßtisch bey der Fig. 66. nur über A , bey 67. 68. und 70. über C gestellt denken, die S. 128. und 129. vorgeschriebenen Linien messen, auf die gehörigen Visirlinien auf dem Tischblatte tragen: so werden die verlangten Entfernungen daraus sich ergeben. Folgende Lösungsart, die in keinem Buche noch beschrieben seyn dürfte, scheint unter den bisher bekannten die einfachere zu seyn. Doch sind derley Künsteleyen von keinem sonderlichen practischen Werth; figuriren jedoch öfters als Paradesperde bey Prüfungen.

Es sey, um die Entfernung AB zu bestimmen, der Meßtisch 79. über A gehörig gestellt, von dem gleichnamigen Punct a , nach B und C visirt, auch die gemessene Linie AC im verjüngten Maße von a bis c wie vorhin aufgetragen. Nun stellt ein Gehülfe in die Verlängerung BC eine Fahne in D , welche man von a aus raponirt und die Visirlinie ad bemerkt. Hierauf wird CD gemessen, und mit dem verjüngten Maße aus c , diese Visur bey d durchschnitten. Verbindet man endlich die zwey Puncte d und e mittelst einer Geraden, und verlängert sie, bis der Rayon aB in b geschnitten wird; so ist ab die verjüngte Länge von AB .

Denn vermög Construction ist das Dreyeck $acd \sim ACD$ (Gmtr. 81.), daher ist dc parallel mit DC (Gmtr. 65. 2), also auch db parallel mit DB , und daher auch das Dreyeck $adb \sim ADB$ (Gmtr. 65. 1); folglich verhält sich $ab : AB = ac : AC$.

Sind in der Gegend bey B mehre Puncte, z. B. $E, F \dots$ zu bestimmen: so kann der Gehülfe sich mittelst der Meßkette oder einer andern bestimmten Länge im Kreis herum bewegend, jedes Mal in die Verlängerung von $CE, CF \dots$, stellen. Mit der verjüngten Länge wird dann aus c ein Kreisbogen beschrieben, auf dem sich die gehörigen Durchschnittpuncte der Visuren nach dem Gehülfen wie vorhin ergeben. 88

Fig. Da bey dieser und dergleichen Constructionen der Richtungspunct d immer sehr nahe an den zweyten Endpunct c der verjüngten Standlinie zu liegen kommt, daher der Durchschnittspunct b stets von einer unsthern Richtung abhängt, so leidet dabey die Richtigkeit dieser Bestimmungsarten. Außerdem würde es leicht seyn, ein einfaches Instrument anzugeben, an welchem sich ein Lineal ab um c bewegend befände, mittelst welchem man den Punct b , und so mehre sogleich stechen könnte, ohne daß es nöthig wäre, Visirlinien mit dem Bleystift zu ziehen.

§. 134.

80. Aufgabe. Auf einer gegebenen Geraden AB einen Punct zu bestimmen, der mit einem unzugängigen Punct C verbunden, eine Senkrechte CD mit der gegebenen AB bildet.

Auflösung. 1) Man stelle den Meßtisch über einen Endpunct, z. B. über A der gegebenen Geraden horizontal, ragonire den andern Endpunct B und auch den unzugängigen Punct C , um den Winkel $Cab = CAB$ zu erhalten.

2) Nun stelle man den Tisch über den andern Endpunct B^* , und orientire ihn mittelst des Rayon ba , nach der in A errichteten Fahne (§. 87.), und zeichne den Winkel $Cba = CBA$ wie vorhin, so wird die Visur bc den Rayon aC in c schneiden.

3) Aus diesem Puncte c fälle man auf ab die Senkrechte cd (Gmtr. 32. 3), trage das verjüngte Maß von bd , im wirklichen Maße von B gegen A bis D ; so wird dieser Punct mit dem unzugängigen C verbunden, die verlangte senkrechte Stellung auf AB geben.

Denn vermög Gmtr. 166. 4) ist der Winkel $a = A$ und $b = B$, daher das Dreyeck $abc \sim ABC$. Vermög Construction findet $bd : BD = bc : BC$ statt, also ist wegen des Winkels $b = B$ das Dreyeck $dbc \sim DCB$, und daher die Seite cd parallel mit CD (Gmtr. 65. 2); folglich ist wegen der senkrechten Stellung cd auf ab , auch CD senkrecht auf AB .

Bermittelst trigonometrischer Rechnung findet man aus den beobachteten Winkeln A und B , und der bekannten Seite AB die Seite BC (Gmtr. 243.). Hierauf aus dieser Seite und dem Winkel B und dem rechten D das Stück BD .

*) Oder auch vor oder rückwärts über einen beliebigen Punct, in der Geraden AB , da es hier nicht auf eine bestimmte Länge der gegebenen Geraden AB , sondern nur auf die senkrechte Stellung CD auf diese ankommt.

§. 135.

Aufgabe. Aus einer vorhergegangenen Messoperation ist der gleichnamige Punct b eines unzugängigen Punctes B auf dem Meßtischblatte gegeben, man soll von einem andern beliebigen Punct aus die Entfernung bis zu dem unzugängigen Punct B bestimmen. Fig. 45. 6'

Auflösung. 1) Man stelle den Meßtisch über einen beliebigen Punct A , von welchem man nach dem unzugängigen visiren kann, horizontal, lege das Visirlineal an den, auf dem Tischblatt gegebenen Punct b' , visire nach dem gleichnamigen B , und von einem in der gezogenen Visirlinie $b'a$, beliebig gewählten Puncte a , nach einem andern willkürlichen Puncte C .

2) Hierauf senke man den Punct a auf die Erde, lasse die Gerade AC messen, und trage ihre verjüngte Länge von a bis c auf.

3) Nun stelle man den Meßtisch mit dem Puncte c über C , visire von c nach B , und bemerke den Durchschnittspunct b in der vorigen Visirlinie ab' .

4) Endlich trage man die Entfernung ab in die Verlängerung ab , von b bis a' ; so wird $a'b$ die gesuchte Entfernung von AB , und a' der gleichnamige Punct zu A seyn.

Demn man ziehe durch den Punct a' zu ac eine Parallele von unbestimmter Länge, und sodann durch b' eine Parallele zu bc , bis die vorige in e' geschnitten wird: so sind die Dreyecke acb und $a'e'b'$ ähnlich, und gleich (§. 64. und 59.), mithin haben $ac = a'e'$ und $ab = a'b'$ am verjüngten Maße eben so viel, als AC und AB im wirklichen. Verbleibt der gegebene Punct auf dem Tischblatte außerhalb der zweyten Visirlinie, wie z. B. b'' , so muß die Entfernung ab von b'' gegen a getragen, und übrigens so wie vorhin verfahren werden. Wird nun der Punct c' über C gestellt, der Tisch nach A orientirt, so muß auch der gegebene Punct b' nach seinem gleichnamigen unzugängigen B eintreffen; und es kann nun die vorhergegangene Messoperation in Verbindung fortgesetzt werden.

§. 136.

Aufgabe. Die Länge einer Geraden AB zu bestimmen, deren beyde Endpuncte unzugänglich sind.

Auflösung. I. Mittelfst des Meßtisches.

1) Man wähle eine beliebige Gerade CD als Standlinie von einer solchen Lage und Länge, daß sich die Visirlinien vortheilhaft schneiden (§. 109.), stelle den Meßtisch über einen ihrer Endpuncte, z. B. über C , und visire von c nach A , B und D .

Fig. 2) Hierauf begeben sich mit dem Tisch nach dem zweyten Standpuncte *D*, orientire denselben hier mittelst des Orientirungsrayon *cd* (§. 87.), trage die verjüngte Länge der während dessen gemessenen Standlinie von *c* bis *d* auf *).

3) Endlich visire man von *d* aus auf die zwey unzugängigen Puncte *A* und *B*, so werden die vorigen, von *c* dahingezogenen Rayon geschnitten. Diese dadurch sich ergebenden Durchschnittpuncte *a* und *b* durch eine Gerade verbunden, geben sowohl die Entfernung der zwey unzugängigen Puncte *A* und *B*, als auch die Entfernungen der zwey Standpuncte *B* und *D* dahin, mittelst des verjüngten Maßes zu erkennen.

4) Sind die unzugängigen zwey Puncte so gelegen, daß einer derselben dießseits, der andere aber jenseits der zu wählenden Standlinie liegt, so ist diese Auflösungsart der so eben beschriebenen gleich, und auch aus der Fig. 82. ersichtlich.

Diese Aufgabe, wenn sie im Zusammenhange angewendet wird, ist zur Vermessung größerer Grundstücke und Flächen geeignet.

Die Richtigkeit dieser Lösungsart erhellet aus Folgendem: Die Dreyecke *dac* und *DAC* haben die Winkel $adc = ADC$ und $dca = DCA$ (Gmtr. 166. 4), daher sind sie ähnlich, und da die Seite *dc* im verjüngten Maße gleich ist *DC* im Normalmaße, so sind es wechselweise auch die übrigen zwey Seiten dieser ähnlichen Dreyecke. Dasselbe läßt sich vom Dreyecke *dbc* und *DBC* beweisen. Da nun die Seite *da* und *db* mit *DA* und *DB* in Proportion stehen, und die Winkel $adb = ADB$ einschließen, so ist auch das

*) Fände es sich, daß der Meßtisch über den zweyten Standpunct *D* nicht vortheilhaft gestellt werden könnte, die Standlinie aber schon gemessen wäre, so kann derselbe auch vor- oder rückwärts *D* in der Richtung *CD* gestellt werden, welches mittelst der in *C* und *D* befindlichen Fahnen, und des §. 87. gezeigten Verfahrens sehr schnell und leicht geschehen kann. Stellet man den Meßtisch auf der Geraden *CD* zwischen *C* und *D* auf, so ist es vortheilhaft, wenn man vorher einige Klaftern entfernt bey *v* einen Stab in die Gerade *CD* errichten läßt, der sodann mit dem in *C* befindlichen zum Einrichten des Meßtisches dient. Nur muß man sonach das Stück, um welches man den Punct *d* von *D* weiter vor- oder rückwärts gestellt hat, im erstern Falle zur gemessenen Geraden *CD* addiren, im zweyten Falle aber davon abziehen, um auf dem verjüngten Maßstabe die wahre Länge für *cd*, mithin den wahren Punct *d* auf dem Meßtische zu erhalten, durch welchen nun auch der wahre Punct *d* auf der Erde vermittelst des Senkfels bestimmt werden kann.

Dreieck $abd \sim ABD$ (Gmtr. 81.); folglich gibt das verjüngte Maß von ab das Normalmaß von AB zu erkennen. Aus der Ähnlichkeit der Dreiecke dca und dba mit DCA und DBA folgt auch die Ähnlichkeit der Vielecke, welche aus jenen Dreiecken bestehen (Gmtr. 107); und da endlich eine Seite dc des einen Vieleckes mit der gleichliegenden Seite DC des ähnlichen Vieleckes parallel ist, so sind auch alle andern gleichliegenden Seiten, folglich auch ab mit AB parallel (Gmtr. 117.).

Fig.
81.
u.
82.

5) Weil bey dem obigen Verfahren die zu bestimmenden Punkte durch vorwärts vom Standpuncte gezogene Visuren auf dem Meßtischblatt sich ergeben, so nennt man es das Vorwärtsabscheiden, im Gegensatze des Rückwärts einschneidens in der Aufgabe. §. 132. unter II. und III.

6) Aufmerkamen Lesern kann es nicht entgangen seyn, daß man durch das Rückwärts einschneiden nur die Standpuncte des Meßtisches, durch das Vorwärtsabscheiden hingegen die verschiedenen Punkte der aufzunehmenden Gegenstände auf demselben bestimmt.

II. Auflösung obiger Aufgabe mittelst des Winkelmessers.

1) Man messe eine Standlinie CD von gehöriger Länge, beobachte an jedem ihrer Endpuncte die Winkel, welche die Standlinie mit den Visuren nach den unzugängigen Puncten bildet, nämlich in C die Winkel ACD und BCD ; ferner in D die Winkel CDA und CDB .

2) Hierauf berechne man im Dreiecke ACD aus den beobachteten Winkeln ACD und ADC , und der gemessenen Standlinie CD die Seite AD , und im Dreiecke CDB die Seite DB (Gmtr. 243.).

3) Endlich bestimme man im Dreiecke ADB aus den nun bekannten Seiten AD und DB mit dem bekannten eingeschlossenen Winkel ADB die Seite AB (Gmtr. 245.).

III. Auflösung mittelst der Verzeichnung.

Aus diesem Verfahren erhellet zugleich, wie aus der bekannten Seite CD und den daran liegenden Winkeln durch Verzeichnung nach §. 131. III. die gesuchte AB bestimmt wird.

§. 137.

Fig. Um sich im Construiren der nöthigen Figuren zu den Auflösungen der Aufgaben eine Übersicht und Fertigkeit zu verschaffen, dürfen Anfänger nur die auf dem Felde gegebenen Punkte der geraden Linien sowohl, als der Dreyecke, auf einen gewöhnlichen Tisch in einer beliebigen Entfernung, etwa von zwey oder drey Fuß mittelst Nadeln abstecken, und die gleichnamigen Punkte auf einem rechteckigen, den Messtisch vorstellenden Stückchen Papier, etwa in der Länge und Breite von zwey oder mehreren Follen, nach dem verjüngten Maße, ungefähr nach $\frac{1}{4}$ der gleichnamigen auf dem Tische ausgesteckten Linien, übertragen, dieses Papierblättchen sodann mit Wachs nach Vorschrift und Erforderniß in den gehörigen Punkten befestigen, und die Visirlinien mittelst eines Lineales ziehen, welches von den Papierpunkten bis an die auf dem Tische ausgesteckten Nadeln reicht; so ist diese Vorbereitung wegen leichterer und besserer Übersicht der Constructionslinien für Anfänger weit überzeugender, als wenn sie dieselben Versuche zuerst auf dem Felde vornehmen.

78. Es seyen z. B. die Punkte *A* und *B* auf einem gewöhnlichen Tische, ungefähr zwey Fuß entfernt, mit Nadeln bezeichnet; das Rechteck vom Papier bey *A* sey mit dem Punkt *a* über *A* mit Wachs auf den Tisch geklebt, und *ab* etwa $\frac{1}{4} AB$ aufgetragen. Man lege ein Lineal an *a* und *B*, und orientire das Papierblättchen. Hierauf lege man an einen beliebigen, auf dem Tische gewählten schieflichen Punkt *C*, ziehe die Linie über das ganze Papierblättchen und über den Tisch unbestimmt lang über *C* hinaus. Nun nehme man das Papierblättchen von *B* hinweg, klebe dasselbe in der Gegend bey *C* so auf den Tisch, daß die über das ganze Papier gezogene *ac*, genau über die auf dem Tische sichtbare *AC* zu liegen kommt. Hierauf lege man das Lineal an den Punkt *b* auf dem Papierblättchen, und an den gleichnamigen *B* auf dem Tische, und ziehe eine Linie rückwärts, so wird der Punkt *c* bestimmt, und es wird $ca = \frac{1}{4} CA$, so wie $cb = \frac{1}{4} CB$ seyn.

Auf diese Weise kann jede Aufgabe in der practischen Geometrie sehr anschaulich construirt und versinnlicht werden.

§. 138.

81. Aufgabe. Zu einer unzugängigen Geraden *AB* durch einen auf dem Felde gegebenen Punkt *D* eine Parallele zu führen.

Auflösung. I. Mittelft des Meßtisches.

1) Da es hierbey nicht sowohl auf die Bestimmung einer Länge, **Fig.** als vielmehr auf die parallele Lage von ab zur gleichnamigen AB **81.** ankommt: so wähle man die (ungemessene) Standlinie CD von einer solchen Länge, daß die Visuren sich vortheilhaft schneiden (§. 109), und bestimme die erforderliche parallele Lage nach dem (§. 136. unter I) gezeigten Verfahren; mit dem Bemerken jedoch, daß der Tisch das zweyte Mahl über denjenigen Punct gestellt werde, durch welchen die Parallele zu führen ist.

2) Hierauf führe man durch den auf dem Meßtisch bestimmten Punct d eine Parallele dn zu ab (Gmtr. 38.), lege das Dioptrilineal an dn , und lasse durch einen Gehülfsen in der Verlängerung dn eine Fahne in N errichten, indem man ihn durch die Dioptr in diese Richtung leitet; so wird auch DN parallel zu AB seyn.

Da ab mit AB parallel ist, und für die Ausübung im wirklichen Maße unmerklich von d abliegt, so darf man nur das Dioptrilineal an ab legen, und in dieser Richtung ein paar Puncte, P und Q bestimmen: so ist auch diese Richtung mit AB parallel, und in vielen Fällen brauchbar.

Ist der Punct, z. B. M , wodurch die verlangte Parallele zu AB geführt werden soll, auch unzugänglich, so stelle man den Meßtisch über einen andern beliebigen Punct D unweit des gegebenen, bestimme die parallele Lage einer geraden DN nach der vorstehenden Anleitung, und verbinde zugleich damit die Lösung der §. 134. gegebenen Aufgabe. Mittelft der auf dem Tische sich ergebenden senkrechten Entfernung des unzugängigen Punctes ergibt sich nachher die Entfernung, welche man aus irgend einem Punct N der Parallelen DN im Normalmaße senkrecht auf diese austrägt; so wird der Endpunct g dieser Senkrechten Ng mit dem unzugängigen M die verlangte parallele Lage zur unzugängigen AB haben.

II. Mittelft eines Winkelmeßers.

1) Man stelle diesen auf der gegebenen auf dem Felde gemessenen Standlinie im zweyten Endpuncte C , das zweyte Mahl aber über dem gegebenen Punct D auf, und verfare übrighens ganz so, wie oben §. 136. unter II., um die Größe des Winkels DAB zu erhalten.

2) Hierauf steckt man im gegebenen Puncte D den Winkel $NDA = DAB$ ab, so wird DN mit der unzugängigen AB parallel seyn (Gmtr. 37. 1).

§. 139.

Fig. Aufgabe. Aus einem auf dem Felde gegebenen Punct D auf 81. eine unzugängige Gerade AB eine Senkrechte abzustecken.

Auflösung. I. Mittelfst des Meßtisches.

1) Man verfare wie bey der vorigen Auflösung unter **I.** wieder mit der Beobachtung, daß auch hier der Meßtisch das zweyte Mahl über den gegebenen Punct D zu stehen kommt, und daß ab parallel zu AB wird.

2) Aus dem auf dem Meßtische nun bestimmten Punct d fälle man die Senkrechte dm auf ab (Gmtr. 32. 3), lege das Diopterlineal an, und lasse in der Verlängerung von dm auf dem Felde eine Fahne in M errichten; so wird auch die Richtung DM senkrecht auf die unzugängige AB seyn.

Ist der Punct M , aus welchem die senkrechte Richtung einer Geraden auf die unzugängige abgesteckt werden soll, auch unzugänglich, so stelle man den Meßtisch bey der Auflösung der vorstehenden Aufgabe unweit des gegebenen unzugängigen Punctes, verbinde aber zugleich auch die Lösung der Aufgabe, in §. 134; so wird die dadurch erhaltene senkrechte Richtung MD verlängert, zugleich auf die unzugängige Gerade die verlangte senkrechte Stellung geben.

II. Mittelfst des Winkelmessers.

1) Man bestimme nach der Auflösung §. 138. unter **II.** den Winkel DAB .

2) Sodann stecke man auf dem Felde einen Winkel ADM ab, der den vorigen DAB auf 90° ergänzt; so wird DM die senkrechte Richtung auf die unzugängige AB anzeigen (Gmtr. 53. 2).

§. 140.

83. Aufgabe. Eine unzugängige Gerade AB zu verlängern.

Auflösung. I. Mittelfst des Meßtisches.

1) Ganz nach der Auflösung §. 136. unter **I.** bestimme man die parallele Lage ab zu AB .

2) Hierauf verlängere man ab auf dem Tischblatte, ziehe unter einer beliebigen Richtung eine Gerade dn , und lasse ihre verjüngte Länge von D in der Richtung DP bis N in wirklichem Maße, durch die angelegten Dioptern dirigirend, austragen; so wird wegen der

Dreyecke $abn \sim DBN$ und $dan \sim DAN$ der Punct N in der Verlängerung AB liegen (Gmtr. 81.). Fig. 83.

3) Wäre man von N aus gehindert, nach B zu sehen, um von diesen zwey Puncten die Verlängerung weiter fortzusehen, so kann auf dieselbe Art noch ein zweyter Punct M bestimmt werden, der wie N in der Verlängerung AB liegt, um mittelst diesen zweyen sodann die Verlängerung zu bewirken. Dieser letzte bestimmte Punct dient in dem Falle, als B sichtbar ist, als Controllpunct, da die drey Puncte M, N und B bey richtigem Verfahren in gerader Linie liegen müssen.

II. Mittelst des Winkelmessers.

1) Man bestimme nach (§. 138. unter II.) die Gerade DB und den Winkel ABD , so ist dadurch auch der Nebenwinkel DBN bekannt (Gmtr. 19.).

2) Hierauf stecke man in D an der Geraden DB einen Winkel BDN von einer beliebigen Anzahl der Grade aus; so ist in dem Dreyecke BDN die Seite BD mit den anliegenden Winkeln bekannt; folglich kann dadurch die Seite DN gefunden, und ihre Länge auf dem Schenkel DN von D bis N getragen werden, um den Punct N zu erhalten. Eben so wird der zweyte Punct M , wenn es erforderlich ist, bestimmt, weil im Dreyecke MBD die Seite BD mit den anliegenden Winkeln bekannt ist, und folglich DM sich daraus bestimmen läßt.

Wie zu verfahren ist, um aus den bekannten Winkeln und Seiten, im ersten Falle die parallele im zweyten die senkrechte Richtung und im dritten die Verlängerung mittelst Verzeichnung auf dem Papier zu erhalten, kann nach dem bisher Gesagten keiner Schwierigkeit unterliegen.

§. 141.

Aufgabe. Es ist bloß die Länge einer unzugängigen Geraden AB aus einer vorhergegangenen Messoperation ohne ihrer Lage 84. auf dem Tisch bekannt, man soll daraus die Lage zweyer Puncte C und D bestimmen, von welchen man nach A und B sehen kann, d. i. man soll die Entfernung CA, CB, DA und DB angeben.

II. Auflösung. Mittelfst des Meßtisches.

Fig. 84. 1) Man verfähre bey einer Standlinie CD von beliebiger Länge *) ganz so, wie §. 138. um die Figur $a'b'd'c' \sim ABDC$ und folglich die Lage $a'b$ parallel zu AB zu erhalten.

2) Nun trage man die bekannte Länge AB nach einem verjüngten Maßstabe auf die Gerade ba' von b bis a , und verzeichne die Figur $bacd \sim ba'c'd'$, indem man durch a die Parallele ad zu $a'd'$, und sodann durch d die Parallele cd zu $c'd'$ zieht; so werden die Längen ca , cb , da und db auf demselben verjüngten Maßstabe die wirklichen Längen der gleichnamigen Geraden CA , CB , DA und DB , und folglich die Lage der Punkte C und D gegen A und B bestimmen. Auch ist nun durch cd die Länge CD , ohne diese wirklich gemessen zu haben, bekannt. Ist es weiter nöthig, den Punkt D auf der Erde zu bezeichnen, so muß er aus d mittelst des Senkels bestimmt werden.

3) Soll nun eine vorausgegangene Messoperation weiter fortgesetzt werden, so ist es zur Überzeugung allerdings erforderlich die Gerade CD zu messen, und ihr Normalmaß mit dem verjüngten cd zu vergleichen.

II. Mittelfst des Winkelmessers.

1) Man beobachte in C die Winkel ACB und BCD , sodann in D die Winkel CDA und ADB , und nehme indessen für CD eine beliebige Länge, z. B. $CD = 1$ an, berechne nach dieser Voraussetzung die Geraden AC , AD , CB , DB und AB (Gmtr. 243. u. 245.).

2) Hierauf schliesse man wegen der Ähnlichkeit der Dreyecke: Die berechnete Länge AB verhält sich zu der wirklichen Länge AB , gleichwie jede andere berechnete Linie AC , AD , $CD \dots$ sich zu der wirklichen Länge von AC , AD , $CD \dots$ verhält; d. h. man darf nur jede die-

*) Es ist in Hinsicht auf Richtigkeit und Zeitgewinn vortheilhaft, wenn man die beyläufig etwa durchs Abschreiten bestimmte Länge CD im verjüngten Maße, also $c'd'$ etwas größer austrägt, um die ähnliche Figur $a'c'd'b$ zu $ACDB$ zu erhalten, weil man dadurch unnöthige nicht immer richtige Verlängerungen der Linien, in der Figur $a'c'd'b$ auf dem Tische vermeidet.

fer berechneten Geraden mit einem Bruche multipliciren, dessen Zähler die wirkliche, der Nenner aber die berechnete Länge von AB ist. Fig. 84.

Man findet auch die Lage eben dieser zwey Punkte durch die Verzeichnung, wenn man an einer Geraden von beliebiger Länge $c'd'$ die beobachteten Winkel, mithin die Figur $a'c'd'b$ verzeichnet, sodann die Länge BA nach einem verjüngten Maßstabe auf ba' von b bis a aufträgt, und endlich wie oben in 2) die Figur $a'c'd'b \sim a'c'd'b$ verzeichnet.

Aus dem Vorhergehenden erhellet, daß auch die Aufgabe auf eben diese Weise gelöst werden kann, wenn einer der zu bestimmenden Punkte dießseits, und der andere jenseits der gegebenen Geraden liegt. Z. B. wenn CB die gegebene Gerade, D und A aber die zu bestimmenden Punkte wären. Diese Aufgabe ist bey der Fortsetzung einer Aufnahme vorzüglich brauchbar.

§. 142.

Aufgabe. Es sey im umgekehrten Falle der Aufgabe §. 136. die Lage und Länge der Geraden ab im verjüngten Maße auf dem Meßtische schon gegeben, und die Endpunkte ihrer gleichnamigen auf dem Felde sichtbar, aber unzugänglich, man soll die Lage und Entfernungen zweyer anderer Punkte C und D auf dem Felde in Bezug auf jene zwey unzugängigen A und B bestimmen, d. h. man soll die gegebene ab mit ihrer gleichnamigen AB auf dem Felde parallel stellen, oder den Meßtisch orientiren. 85.

Auflösung. Wie das Orientiren des Meßtisches in den Fällen geschieht, wenn derselbe über die gleichnamige AB selbst oder auf ihre Verlängerung gestellt werden kann, ist schon §. 132. gesagt worden. Hier soll nur gezeigt werden, wie zu verfahren ist, wenn man den Meßtisch seitwärts der gleichnamigen AB stellen muß, ohne die Magnetnadel gebrauchen zu dürfen oder zu können.

1) Man wähle einen beliebigen, jedoch vortheilhaft gelegenen Punkt C (§. 109.), stelle den Tisch daselbst gehörig, so daß ab nur beyläufig mit AB parallel läuft, visire von a nach A und von b nach B , so werden die rückwärts gezogenen Rayon den Punkt c auf dem Tische bestimmen.

2) Hierauf wähle man mit der vorigen Beobachtung einen zweyten Standpunkt D , und ziehe eine Visirlinie cd dahin, stelle den Meßtisch bey D mit dc genau über die gleichnamige DC , visire von a nach A ; so wird rückwärts der Punkt d bestimmt. Von hier, d. i. von d , visire man nach B , ohne auf b zu sehen, so wird der

Fig. vorige, von c nach B gezogene Rayon cb in einem Punkte m geschnitten (der auch außerhalb ab , d. i. zwischen ab und AB , liegen kann). Verbindet man nun den auf diese Art sich ergebenden Durchschnittpunct m mit a , so läuft am mit AB parallel (S. 138.).

3) Da aber ab mit AB gleichlaufend seyn soll, so zeigt der Winkel mab an, um welchen das Tischblatt gedreht werden muß. Zu diesem Ende lege man das Visirlineal zuerst an am , bemerke in dieser Richtung einen schon vorhandenen oder eigens bezeichneten Punct M , der in dieser Richtung auch auf der entgegengesetzten Seite, hier links, liegen kann.

4) Nun lege man die Diopter an die gegebene ab , und drehe das Tischblatt um den Verbesserungswinkel mab , bis man nämlich durch das Visirmittel (Diopter oder Fernrohr) den Punct M genau entdeckt; so wird ab mit ihrer gleichnamigen AB die verlangte parallele Lage, d. i. die beabsichtigte Orientirung erhalten *). Schneidet man sich nun von a und b rückwärts ein, so erhält man dadurch den wahren Standpunct d' .

5) Hat man, ehe noch der Tisch um den Verbesserungswinkel gewendet wurde, an ac das Visirlineal angelegt, und in der Verlängerung einen Punct N bemerkt, hierauf nach der Verbesserung, d. h. nachdem das Tischblatt orientirt war, von a diesen Punct N rayonirt, und den Rayon ac gezogen; so liegt in dieser der vorige oder erste wahre Standpunct. Zieht man nun von dem schon bestimmten zweyten wahren Standpunct d' aus eine Gerade $d'e$ nach dem vorigen Stande C ; so wird, wo diese die Gerade ac' schneidet, der vorige oder erste wahre Standpunct c' auch auf dem Tische bestimmt seyn.

Da hierbey, wo man das erst beschriebene Verfahren zur Orientirung des Meßtisches anwendet, kein dritter Punct vorhanden seyn kann, der zur Probe der Richtigkeit dienen konnte (weil man bey drey gegebenen Puncten die weiter unten folgende sichere Methode anwenden würde); so ist es vortheilhaft, wenn man sich einen dritten

*) Weil das Tischblatt um den Mittelpunct der Herzschraube gedreht wird, da dasselbe doch um den Scheitelpunct a des Verbesserungswinkels gewendet werden soll: so muß man, wenn dieser Winkel beträchtlich wäre, und der Punct a von der Mitte des Tischblattes bedeutend seitwärts läge, mithin der Punct a merklich aus seiner Stelle gerückt würde, diese Operation noch einmahl wiederholen, um die wahre Orientirung zu erhalten.

Punct in der Verlängerung oder zwischen den gegebenen Puncten nach Fig. §. 74. bestimmt, und nach §. 132., oder bey Zulässigkeit mittelst der Orientirbussole nach §. 132. unter IV. verfährt. Von dieser Aufgabe ist also nur im Nothfalle Gebrauch zu machen. Bey der graphischen Triangulirung muß man anstatt ihr jedes Mahl das weiter unten §. 145. folgende Verfahren anwenden.

§. 143.

1) Wenn man zwey ähnliche Dreyecke abc und ABC mit ihren gleichliegenden Seiten, d. i. mit jenen, die den gleichen Winkeln gegenüber liegen, parallel richtet, und ihre Scheitelpuncte durch gerade Linien verbindet, so schneiden sich die Verbindungslinien in einem gemeinschaftlichen Punct d .

Gesetzt, es wäre bey der vorausgesetzten Bedingung und der Lage der Dreyecke dennoch mehr als Ein Schnitt, etwa auch der Schnitt m möglich, so findet doch vermög der Ähnlichkeit der Dreyecke

$$CB : cb = Bd : bd, \text{ und auch}$$

$$CB : cb = Bm : bm \text{ statt, daher ist}$$

$$Bd : bd = Bm : bm, \text{ oder}$$

$$(Bd - bd) : bd = (Bm - bm) : bm, \text{ oder}$$

$$Bb : bd = Bb : bm, \text{ also auch}$$

$$bd = bm \text{ (Rf. 265. 2) und 268. IV.).}$$

$$\text{Nun aber ist } bd = bm + md$$

$$\text{daher } bm + md = bm$$

folglich ist $md = 0$; also muß auch die dritte Verbindungslinie durch den Schnitt d gehen. Daraus folgt:

2) Daß umgekehrt die gleichliegenden Seiten zweyer ähnlicher Dreyecke parallel seyn müssen, wenn sich ihre durch die gleichnamigen Scheitelpuncte geführten Verbindungslinien in einem einzigen Punct schneiden.

Sind demnach A , B und C drey sichtbare Puncte auf dem Felde, und die Puncte a , b und c die gleichnamigen auf dem Meßtische in einer solchen Lage gegeben, daß sie mit jenem zwey ähnliche Dreyecke bilden, so sieht man leicht ein, daß es bey Bestimmung der Lage und Entfernung eines vierten Punctes (beym Rückwärtseinschneiden) aus drey auf dem Meßtisch gegebenen, und auf dem Felde sichtbaren Puncten hauptsächlich darauf ankommt, das Meßtischblatt jedesmahl in eine solche Lage zu bringen, daß die Seiten des auf demselben gegebenen Dreyeckes mit jenen des auf dem Felde ähnlichen genau

Fig. parallel liegen. Auch erhellet hieraus, daß die Orientirung aus bloß
 86. zwey Puncten nicht immer verläßlich ist, weil zwey gegen einander sich neigende gerade Linien zwar ein Mahl sich schneiden, dieser Durchschnittspunct jedoch in Bezug auf andere Puncte nicht immer die richtige Lage hat, wie dieses Fig. 92. bis 96. deutlich zeigen, und daß folglich zur Prüfung der Richtigkeit der Orientirung des Meßtisches jedes Mahl ein dritter Punct erforderlich ist.

88. um 134. 135. 136. 137. 138. 139. 140. 141. 142. 143. 144. 145. 146. 147. 148. 149. 150. 151. 152. 153. 154. 155. 156. 157. 158. 159. 160. 161. 162. 163. 164. 165. 166. 167. 168. 169. 170. 171. 172. 173. 174. 175. 176. 177. 178. 179. 180. 181. 182. 183. 184. 185. 186. 187. 188. 189. 190. 191. 192. 193. 194. 195. 196. 197. 198. 199. 200.

§. 144.

Ob es gleich der Methoden mehre gibt, den Meßtisch zu orientiren, wenn er nicht wie nach §. 132. auf eine der Dreyeckseiten
 91. oder ihre Verlängerung Fig. 91 gestellt werden kann, so ist doch die hier beschriebene und gebrauchte directe Methode in der Ausübung die vorzüglichste. Hierbey orientirt man nämlich den Meßtisch indessen nur beyläufig, und sucht dann die genaue Orientirung folglich auch den richtigen Standpunct, durch welchen als Probe der Richtigkeit alle drey Wjuren genau gehen müssen.

Um diese in der practischen Meßkunst so wichtige Aufgabe in allen vorstehenden Fällen einfach und rein geometrisch = graphisch aufzulösen, mit Ausschließung aller weitläufigen, in der Praxis nicht anwendbaren Constructionen (wie z. B. durch Kreise, Sehnen dreypfüßige Zirkel u. dgl.), ist ein Hülfspunct u erforderlich, der mit einem Tischpuncte, hier mit b verbunden, diejenige Richtungslinie gibt, mittelst welcher dem Tischblatte eine solche Lage gegeben werden kann, daß jede Dreyeckseite auf dem Meßtische mit ihrer gleichnamigen auf dem Felde die erforderliche parallele Lage und folglich der Meßtisch die durch diese Aufgabe beabsichtigte Orientirung erhalte, um eine Meßoperation zu beginnen, fortzusetzen und zu vollenden.

Obgleich der Meßtisch mit drey gegebenen Puncten in Hinsicht auf die gleichnamigen und ähnlich liegenden drey Feldpuncte acht verschiedene Stellungen erhalten kann, nämlich:

- 1) innerhalb der drey Feldpuncte ABC Fig. 87.;
- 2) außer dem Felddreyecke, einem Winkel gegenüber, Fig. 89.;
- 3) außerhalb des Dreyeckes, einer Seite gegenüber, aber innerhalb des um die gegebenen drey Puncte ABC gedachten Kreises, Fig. 88.;

- 4) außerhalb des Dreyeckes und Kreises, einer Seite gegen- Fig.
über, Fig. 91.; 87.
5) auf einer Seite des Felddreyeckes, Fig. 91., oder bis
6) auf der Verlängerung einer Seite, Fig. 91., oder 91.
7) auf einem dieser Feldpuncte selbst, Fig. 89.; und endlich
8) auf dem Umfange des um die drey Feldpuncte gedachten
Kreises, Fig. 88.; so reduciren sich die Stellungen desselben, wobey
der oben erwähnte Hülfspunct u zu bestimmen erforderlich ist, doch
nur auf die erstern vier Fälle. In den folgenden drey Fällen bedarf
man zur Orientirung des Nesttisches keinen Hülfspunct, da derselbe
mittelft des gegebenen Tischdreyeckes selbst genau in's Alignement
gestellt und orientirt werden kann. Der letzte oder achte Fall endlich
ist als practisch unbrauchbar gänzlich auszuschließen.

Bey jeder der oben bezeichneten Stellungen des Nesttisches er-
scheint dem Beobachter jedesmahl ein Punct des Felddreyeckes zwis-
schen zweyen desselben. Da der Nesttisch vermittelst dieser Puncte
in die Orientirung gerichtet wird, so wollen wir, um uns kurz und
bestimmt auszudrücken, diese die äußern, jenen aber den mitt-
lern Richtpunct nennen. Bey der Stellung außerhalb dem Feld-
dreyecke (auch wenn die gegebenen drey Puncte in gerader Linie lie-
gen, Fig. 95.), hat man jedesmahl alle drey Puncte vor sich; im
Dreyecke stehend aber, den mittlern Richtpunct hinter sich.

§. 145.

Um den erwähnten Hülfspunct u , und vermittelst desselben zu-
gleich auch den Standpunct d des Nesttisches zu bestimmen, verfährt
man in allen vier Fällen nach folgender Weise:

- 1) Man wähle auf dem Felde einen dem vorhabenden Zwecke
angemessenen Standort D *) Fig. 91., von solcher Beschaffenheit, 91.
daß die gegebenen drey Feldpuncte A , B und C deutlich sichtbar sind,
und die auf dem Tischblatte nach denselben gezogenen Rayon sich
gut (nicht in zu spitzigen Winkeln) schneiden.
2) Hierauf lege man das Visirlineal an die zwey äußern Richt-
puncte, z. B. an a und c , drehe das Tischblatt um die geöffnete
Herzschraube, bis man einen von den gleichnamigen Puncten, z. B.
 C auf dem Felde durch das Visirmittel (Diopter oder Fernrohr) ent-

*) Der Punct D muß auf der Erde vertical unter dem Tischpuncte d
gedacht werden.

Fig. deckt, und stelle das Tischblatt fest; so wird das Dreyeck abc jetzt die Lage $a'b'c'$ erhalten haben. Nun drehe man das Visirmittel jedesmal um den äußern Punct, hier um a' (von den in gerader Linie liegenden dreyen a' , c' und C) so weit herum, bis der mittlere Richtpunct B auf dem Felde im Diopter sichtbar wird, und ziehe den Rayon $a'h$, so ergibt sich dadurch der Winkel n .

3) Auf gleiche Weise lege man das Visirmittel wieder an die zwey äußern Richtpuncte, nun an a' und c' , drehe das Tischblatt so, daß der zweyte äußere Feldpunct, also A im Diopter sichtbar wird, und stelle das Tischblatt fest, so wird das Dreyeck $a'b'c'$ nun die Lage $a''b''c''$ erhalten haben. Dreht man das Visirmittel wieder um den äußern Punct, hier nämlich um c'' (von den in gerader Linie liegenden dreyen c'' , a'' und A), so weit herum, bis der mittlere Richtpunct B auf dem Felde im Visirmittel gehörig erscheint, und zieht die Visur $c''h''$; so ergibt sich der Winkel m , und die vorige Visur $a''h''$, welche nun die Lage $a''h'$ hat, wird in dem Puncte u geschnitten. Dieser Punct kann sowohl in das Dreyeck als außer demselben zu liegen kommen, jedesmal aber wird der gesuchte Hülfspunct u auf dem Tischblatte, zwischen der gewählten Richtungslinie, hier z. B. ac und ihrer gleichnamigen auf dem Felde AC liegen.

4) Hierauf lege man das Visirlineal an den mittlern Richtpunct b'' und den gefundenen Hülfspunct u , ziehe eine Gerade $b''u$ rückwärts gegen sich von unbestimmter Länge, gebe dem Tischblatte eine solche Wendung, daß man den gleichnamigen mittlern Richtpunct B auf dem Felde in der Visur entdeckt, und also das Dreyeck $a''b''c''$ die Lage abc erhält; endlich stelle man das Tischblatt vermittelst der Herzschraube fest (eine kleine Verrückung hierbey wird durch die Wendeschraube verbessert, daß die Richtung $b''u$ scharf nach B schneidet); so ist der Messtisch, bey richtigem Verfahren, orientirt.

5) Um sich aber von der richtigen Orientirung auch zu überzeugen, visiret man von den zwey äußern Tischpuncten a und c nach ihren gleichnamigen A und C auf dem Felde, so werden, bey vollkommener Orientirung des Tisches, die rückwärts gezogenen Visuren mit der vorigen $b''u$ in einem einzigen Puncte d sich schneiden (§. 143.), der mittelst der Lothgabel den gleichnamigen D auf der Erde gibt; und es kann nun von hier aus eine Messoperation begonnen werden.

Die Richtigkeit dieses Verfahrens ist in Folgendem begründet: Fig.

1) Nachdem (§. 145. unter 2) die Gerade ac in die Richtung $a'C$ 91. und das gegebene Tischdreyeck abc in die Lage $a'b'c'$ gebracht, und von dem äußersten Punkte a' der Rayon nach B gezogen worden ist, ist zugleich der Winkel $h'a'C = n$ construirt worden.

2) Und nachdem man das Dreyeck $a'c'b'$ vermög §. 145. unter 3) in die Lage $a''b''c''$ und also die Gerade $a'h'$ in die Lage $a''h''$ gebracht, und den Rayon $c''B$ gezogen hat, ist der Winkel $h''c''A = m$ construirt und zugleich der Rayon $a''h''$ geschnitten, folglich der Hülfspunct u bestimmt worden.

3) Nach §. 145. unter 4) ist das Wisirmittel an dem mittlern Richtpunct b'' und an den Hülfspunct u angelegt, und das Dreyeck $a''b''c''$ in die Lage abc , folglich der Winkel m in die Lage m' , der Winkel $h'a''c'' = h'a'C = n$ aber in die Lage n' und die Punkte b'' und u in die Richtung bu oder in die Gerade Bd gebracht worden; da ferner bey dieser Stellung des Tischblattes nach §. 145. unter 5) die Rayon Aa und Cc rückwärts in Einem Punkte geschnitten wurden; so sind die Winkel $Ca'B = n = CdB = n''$, und auf gleiche Weise die Winkel $Ac''B = m = AdB = m''$ gezeichnet worden.

4) Da in der Praxis das Tischdreyeck abc in Vergleichung des Felddreyeckes ABC nur sehr klein, ihre Entfernung aber immer beträchtlich groß ist, so hat die Excentricität der Scheitelpuncte a' und c'' , die nie genau über den Scheitel d gebracht werden können, gar keinen Einfluß, und ist als Null zu achten; es kann demnach der Winkel $n = n' = n''$, so wie $m = m' = m''$ gesetzt werden.

5) Da ferner in dem Vierecke $adcu$ zwey Winkel wechselweise zweyen entgegenstehenden gleich sind, nämlich $m' = m''$ und $n' = n''$, so läßt sich um dasselbe ein Kreis so umschreiben, daß alle Scheitel desselben im Umfange dieses Kreises liegen (Gmtr. 75); es sind also $n'' = n'$ und $m'' = m'$, als gleiche Umfangswinkel zu betrachten, weil die vorerwähnte Excentricität der Scheitelpuncte a' , c'' und d in der Praxis ganz ohne Einfluß ist.

6) So oft demnach von ähnlichen Dreyecken abc und ABC die drey Verbindungslinien ihrer gleichnamigen Scheitelpuncte in einem einzigen Punkte d sich schneiden, laufen ihre gleichliegenden Seiten parallel (§. 143.), und folglich ist der Meßtisch orientirt.

Auf gleiche Art gilt dieser Beweis für die Richtigkeit des Verfahrens, um den Meßtisch aus drey gegebenen Punkten zu orientiren, bey jeder andern Stellung des Tisches in den §. 144. bezeichneten Fällen 1) bis 4). Nur der einfachen Darstellung wegen ist hier der 4. Fall in Fig. 91. gewählt worden.

§. 146.

Fig. 91. Aus dieser Darstellung ersehen wir, daß der gesuchte vierte Punct d , nämlich der Standpunct des Meßtisches, der Hülfspunct u und die äußern zwey Richtpuncte a und c des Tischdreyeckes in dem Umfange eines Kreises liegen. Verfolgen wir diese Merkmale bey jeder Stellung des Meßtisches in Bezug auf die drey Feldpuncte, so finden wir, daß bey jedem Stande des Meßtisches der Hülfspunct u eine gewisse Lage in Bezug auf den mittlern Richtpunct b annimmt, d. h. bald mehr, bald weniger vortheilhaft zur Orientirung des Meßtisches mitwirken kann.

1) Betrachten wir die Stellung des Tisches auf der Dreyeckseite CB (Fig. 91. in Nr. 2), welche als das Fundament der fraglichen Aufgabe zu betrachten ist, so finden wir den Hülfspunct u , wenn er (was aber in diesem Falle nicht nothwendig ist), nach dem §. 145. gezeigten Verfahren bestimmt werden wollte, in dem mittlern Richtpunct A auf dem Felde selbst; er ist hier unter allen Tischstellungen am weitesten vom mittlern Richtpuncte a entfernt, und wäre in diesem Falle zur Orientirung am vortheilhaftesten, wenn hier der Meßtisch nicht ohnedieß schon durch die Dreyeckseite cb auf ihrer gleichnamigen CB bestens ins Alignement gerichtet oder orientirt werden könnte. Dagegen kann hier der Standpunct d aus dem Puncte $u = A$ unmittelbar bestimmt werden.

2) Kommt der Meßtisch auf die Verlängerung einer Dreyeckseite CB Nr. 3. zu stehen, so kann derselbe mittelst der gleichnamigen Seite cb aufs Genaueste ins Alignement gerichtet, und der Standpunct d mittelst der dritten Puncte a und A bestimmt werden.

3) Kommt der Tisch auf einen gegebenen Dreyeckspunct, z. B. über C selbst zu stehen, Fig. 89. Nr. 1., so kann er daselbst vermittelst der Dreyeckseiten CA und CB auf das Genaueste orientirt werden, wozu gleichfalls kein Hülfspunct erforderlich, aber hier auch keiner bestimmbar ist. Der Hülfspunct u kann hier im Puncte a oder b gedacht werden.

4) Denken wir uns den Meßtisch aus dem Stande Nr. 1. (Fig. 91.) näher an die Seite AC des Felddreyeckes gerückt, so werden die Winkel n und m , folglich auch n' und m' immer größer, je näher wir dieser Seite kommen, dadurch rückt der Hülfspunct u mehr gegen den mittleren Richtpunct b , und die Orientirungslinie wird in eben diesem Verhältnisse kürzer, daher die Anlage des Wärmittels an eine so kurze Linie unsicher. Kommt nun

5) der Meßtisch gar auf den Umfang des um die drey Feld- Fig. 88.
 puncte gedachten Kreises zu stehen, Fig. 88. Nr. 1., so fällt der Hülfspunct u mit dem mittlern Richtpunct c überein, die Orientirungslinie für die Anlage des Visirmittels wird Null, und da alle Umfangswinkel des Kreises einander gleich sind, so können sich die drey Visuren aus A , B und C in dem Standpuncte d schneiden, ohne daß der Meßtisch orientirt ist. Es ist also der Standpunct des Meßtisches auf dem Umfange des um die gegebenen drey Punkte gedachten oder wirklich beschriebenen Kreises unbestimmt.

6) Diese Unbestimmtheit verschwindet aber sogleich, als man von dem Umfange des Kreises weiter gegen die Dreyeckseite AB in den Kreis hinein kommt; der Hülfspunct u rückt nun über das Tischdreyeck hinaus, und die Anlage des Visirmittels an die Orientirungslinie bu (in Nr. 2.) wird wieder desto vortheilhafter, je näher der Meßtisch an die Seite AC zu stehen kommt. Auf der Seite AC selbst fällt der Hülfspunct u mit B überein, und es tritt derselbe vortheilhafte Tischstand ein, wie bey Nr. 2. in Fig. 91.

7) Denken wir den Meßtisch von der Seite AC weiter in das Dreyeck ABC selbst versetzt, Fig. 87., so erscheint der Hülfspunct 87.
 u entgegengesetzt vom mittlern Richtpunct b , dadurch erhält das Visirmittel eine sehr vortheilhafte Anlage; hierbey kann es sich aber auch fügen, daß der Hülfspunct über das Tischbret hinausfällt. In diesem Falle darf man aber nur den Meßtischstand näher gegen den mittlern Richtpunct hier gegen B wählen, um den Hülfspunct u auf das Tischblatt zu bringen.

8) Ist man in die Lage versetzt, den Meßtisch außerhalb des Dreyeckes einem Winkel, z. B. B , gegenüber zu stellen, Fig. 89. 89.
 in Nr. 2., wo sich die Visuren schon sehr schief schneiden, zumahl, wenn auch noch die dem Winkel entgegen liegende Seite kleiner ist, als die anliegenden, so wird die Bestimmung des Standpunctes schon unsicher, und der auf die bekannte Weise bestimmte Hülfspunct u rückt immer näher an die Dreyeckseite ac , je mehr man gezwungen ist, vom Puncte B zurückzugehen; dieser Punct würde in die Seite ac selbst fallen, wenn der Tisch unendlich weit von B entfernt gestellt, daher der Winkel $n = n'$ und $m = m'$ gleich Null würden.

9) Liegen die gegebenen drey Feldpuncte A , B und C in gerader Linie, Fig. 90., so kann hierbey der Meßtisch zwey brauchbare 90.
 Stellungen erhalten: und zwar jedesmahl den gegebenen Feldpunc-

Fig. ten gegenüber, entweder innerhalb oder außerhalb des um 90. die äußern Punkte *A* und *C* gedachten Kreises; auf dieser Kreislinie selbst wäre der Tischstand eben so wie oben unbestimmt. Ganz nach der gezeigten Weise wird der Hülfspunct *u* gefunden und mittelst desselben der Meßtisch orientirt.

§. 147.

Nach dem bereits §. 145. gezeigten Verfahren kann der Meßtisch an jedem beliebigen und vortheilhaft befundenen Standorte auf die einfachste Weise orientirt, eine geometrische Vermessung begonnen, fortgesetzt und vollendet werden. Kann man den Standort so wählen, daß der Hülfspunct *u* von dem mittlern Richtpuncte *b* eine vortheilhafte Lage und Entfernung erhält (§. 145. 4) bis 9), und vorausgesetzt, daß die Dreyecke *abc* und *ABC* vollkommen ähnlich sind, so werden bey diesem Verfahren die drey Visuren jedesmahl in einem einzigen Punkte sich schneiden und die richtige Orientirung des Meßtisches bewähren.

Ist man aber mit der Wahl des Meßtischstandes beschränkt, so daß die Visuren sich zu schief schneiden, oder daß der Hülfspunct *u* zu nahe an dem mittlern Richtpuncte *b* liegt, daher als eine zu kurze Linie dem Visirmittel keine verlässliche Anlage und Richtung gewähren; so werden diese Visuren nicht immer in einem einzigen, sondern in drey verschiedenen Punkten sich schneiden, und ein kleines Dreyeck bilden, welches den Fehler der Orientirung anzeigt, daher das fehlerzeigende Dreyeck, oder kurz das Fehlerdreyeck genannt werden kann.

Wären hingegen die gegebenen Dreyecke *abc* und *ABC* nicht vollkommen ähnlich, so wäre die Grundlage schon unrichtig, und aus einer solchen kann kein richtiger Erfolg erwartet noch gefordert werden. In einem solchen Falle, wenn nämlich die drey Visuren in drey verschiedenen Punkten sich schneiden, ist auch der Standpunct des Meßtisches noch nicht bestimmt, doch kann seine wahre Lage, wie sogleich gezeigt werden wird, leicht beurtheilt und für die Praxis auch zureichend genau bestimmt werden.

Wenn wir nun diejenigen Fälle, wo kein Hülfspunct zur Orientirung erforderlich ist (Fig. 91. Nr. 2. und 3., und Fig. 89. Nr. 1.), und auch jenen ausscheiden, der sich in der Praxis als unbestimmt, und folglich als unbrauchbar gezeigt hat (Fig. 88. Nr. 1.); so bleiben uns zur Stellung und Orientirung des Meßtisches mittelst des

Hilfspunctes u nur die oben §. 144. von 1) bis 4) bezeichneten vier Fig. Fälle übrig, und zwar derselbe kann gestellt werden: 92.

- 1) innerhalb des gegebenen Dreyeckes ABC (Fig. 92.), oder
- 2) außer dem Dreyecke einem Winkel gegenüber (§. 94.), oder
- 3) außerhalb des Dreyeckes einer Seite gegenüber, aber noch innerhalb des um die gegebenen drey Punkte gedachten Kreises (Fig. 93.), oder endlich
- 4) außerhalb des Dreyeckes und Kreises einer Seite gegenüber (Fig. 96. und auch Fig. 95.).

Macht man auf das §. 146. Gesagte einen Rückblick, so erkennt man leicht, daß bey den vorbezeichneten Stellungen des Meßtisches jener innerhalb der drey gegebenen Feldpuncte A , B und C in Fig. 87. und 92. der vortheilhafteste ist, wobey die zur Orientirung dienenden Puncte u und b fast immer in so weitem Abstände zu liegen kommen, daß das Visirmittel eine sichere Anlage erhalten könne, und deshalb, bey vorausgesetzter Ähnlichkeit der Dreyecke ABC und abc und bey richtigem Verfahren nach der §. 145. gegebenen Anleitung, nie ein Fehlerdreyeck, sondern der richtige Standpunct d unmittelbar sich ergibt. Dasselbe gilt auch bey der Stellung außerhalb des Felddreyeckes einem Winkel gegenüber in Fig. 89. und 94.; nur wenn der Tischstand vom Feldpuncte weit entfernt zu nehmen wäre, tritt hier der Umstand hindernd entgegen, daß sich die drey Visuren schon sehr spitzig, daher nicht genug scharf schneiden.

Bey dem Stande des Tisches in Fig. 95. und 96. entsteht selten ein Fehlerdreyeck, wenn derselbe nicht zu nahe an den um die drey Feldpuncte gedachten Kreis zu stehen kommt. Nahe an dem Kreise aber geben die Richtpuncte u und b eine zu kurze, daher keine sichere Anlage des Visirmittels zur Orientirung des Meßtisches.

Ergibt sich aus den oben angeführten und den vorstehenden Ursachen bey der Orientirung des Meßtisches ein Fehlerdreyeck, so liegt im ersten oben angegebenen Falle, da der Meßtisch im gegebenen Dreyecke ABC selbst steht (Fig. 92.), auch der gesuchte Punct d im Fehlerdreyecke, jedoch nicht immer genau in der Mitte desselben, wie die im größern Maße gezeichnete Figur $b' a' c'$ zeigt und weiter unten erhellen wird. Im zweyten und dritten Falle (Fig. 93. bis 95.) liegt der gesuchte wahre Standpunct d jedesmahl auf der entgegengesetzten Seite des Fehlerdreyeckes, d. i. das Fehlerdreyeck liegt auf einer Seite der mittlern Visur, der Standpunct d aber auf der andern Seite dieser Visurlinie. In dem vierten Falle hingegen liegt der gesuchte

Fig. Standpunct d jedesmahl auf derselben Seite der mittlern Bisur, wo das Fehlerdreyeck liegt (Fig. 96.); die Ansicht stets so genommen, daß man, am Nestische stehend, beyde Dreyecke, das Feld- und Tischdreyeck, vor sich habe. Dabey ist noch zu bemerken, daß der Standpunct d in allen Fällen stets auf einerley Seite aller drey Bisuren liegt, d. h. wenn er auf der linken Seite der mittlern Bisur seine Lage hat, so liegt er auch auf der linken Seite der zwey andern Bisuren (Fig. 94. und 95.), und so umgekehrt auf der rechten Seite (Fig. 93.).

Auch erkennt man sogleich, daß in den ersten drey Fällen das Tischblatt nach der Lage des Fehlerdreyeckes eine entgegengesetzte Wendung um die Hertzschraube verlange, d. h. wenn das Fehlerdreyeck auf der rechten Seite der mittleren Bisur liegt, so verlangt das Tischblatt eine Wendung links (Fig. 94.), im umgekehrten Falle aber rechts (Fig. 93.), damit die Dreyeckseite ab zu ihrer gleichliegenden AB auf dem Felde die parallele Lage erhalte *). Dagegen muß in dem Falle oben unter 4) und Fig. 96. dem Tischblatte eine Wendung nach jener Seite gegeben werden, auf welcher das Fehlerdreyeck liegt, um die verlangte parallele Lage der Dreyeckseiten zu erhalten; liegt nämlich das Fehlerdreyeck auf der rechten Seite der mittleren Bisur, so verlangt auch das Tischblatt eine Wendung nach rechts, und so umgekehrt links, wenn das Fehlerdreyeck links liegt. Die Ansicht stets so genommen, wie schon oben erwähnt **).

96. Betrachtet man die Figur 96., so zeigt das Fehlerdreyeck uwy , daß der Nestisch noch nicht orientirt ist, und daß dem eben Gesagten zu Folge das Tischblatt eine Wendung nach links verlange, damit die Dreyeckseite $a'b'$ mit ihrer gleichnamigen AB die erforderliche parallele Lage erhalte. Wird das Tischblatt so weit links gewendet, daß aus der Lage des Tischdreyeckes gegen das Felddreyeck ABC auf dieser Seite ein zweytes Fehlerdreyeck wy entsteht, so muß nach dem Vorigen der wahre Standpunct d zwischen beyden liegen. Verbindet

*) Die Rechts- oder Linkswendung des Tischblattes wird so verstanden, daß dasselbe mit seinem vordern, dem Geometer entfernten Rande rechts oder links gewendet werde.

**) Liegen die gegebenen drey Puncte in gerader Linie (Fig. 95), so gilt in Bezug auf das Fehlerdreyeck und der Lage des Standpunctes d dasselbe, was oben von dem Tischstande unter 1), 2) und 3) gesagt worden ist.

man die gleichnamigen Durchschnittspuncte, die nämlich in beyden Fig. Fehlerdreyecken aus gleichnamigen Wisuren entstanden sind, 96. durch gerade Linien *), so gibt ihr Durchschnitt den Ort an, wo der Punct d liegen soll. Es sind nämlich hier in beyden Fehlerdreyecken die Durchschnitte yy aus den Wisuren nach A und C , die Durchschnitte xx aus den Wisuren nach C und B , endlich die mittleren Durchschnitte aus den Wisuren nach A und B entstanden. Die Verbindungen dieser gleichnamigen Puncte werden in ihrem gemeinschaftlichen Durchschnitte auf dem Tischblatte den Standpunct d zu erkennen geben **).

Zur Bildung eines zweyten gleichstimmigen Fehlerdreyeckes ist aber die beyläufige Lage des Punctes d auf dem Messtische erforderlich, welche auf folgende Weise erhalten wird. Der Standpunct d muß, wie sogleich bewiesen werden wird, von den drey Wisuren in solchen Abständen liegen, die sich verhalten wie die Entfernungen dieses Punctes von den gleichnamigen Dreyeckspitzen; es müssen sich nämlich verhalten:

$$du : dr : ds = (da \text{ oder } dA) : (dc \text{ oder } dC) : (db \text{ oder } dB).$$

Es kommt also bey der vorläufigen Bestimmung (die zu unserm Behufe nicht ängstlich zu geschehen hat) nur darauf an, diese Verhältnisse annähernd zu beurtheilen, was um so leichter ist, da nach dem Augenmaße schon ziemlich gut erkannt wird, wo der Ort dieses Punctes d liegen kann.

Man wähle demnach einen Punct für d , deute ihn mit Bleystift nur leicht an, und nehme den Abstand bis zum nächsten Dreyeckspuncte b' als Einheit zum Maßstabe, und beurtheile damit nur nach dem Augenmaße (oder auch mit einer leichten Zirkelöffnung) die zwey andern Entfernungen bis a' und c' ; es zeige sich z. B. hier, daß a' etwa um $\frac{1}{10}$ weiter als b' ; hingegen c' um etwas mehr als $\frac{1}{3}$ weiter vom gewählten Puncte als b' entfernt sey; so muß auch der senkrechte Abstand du um $\frac{1}{10}$ mehr als ds , dr aber $\frac{1}{3}$ mehr als ds betragen.

Nun lege man das Wisurlineal an den vorläufig gewählten Punct

*) Diese in der Wirklichkeit stets kurzen Verbindungslinien sind Kreisbogen, in welchen die Puncte $CBaxdx$, $CAydy$ u. s. w. liegen, jedoch von so großen Halbmessern, daß man die Kreisbogen $axdx$, ydy u. s. w. als practisch gerade ansehen kann.

***) Selbst dann, wenn diese drey Verbindungslinien nicht genau in Einem Puncte sich schneiden, so zeigen sie doch den Ort des Punctes d zu obigem Zwecke zureichend genau an.

Fig. *a* und an den mittlern Richtpunct *c'* und beurtheile, um wie viel 96. der Visirstrahl neben dem gleichnamigen Punct *C* auf dem Felde rechts vorbeyschneide, wende das Tischblatt so weit zur linken, daß die Visur, nach dem Augenmaße, nun eben so weit links, als vorher rechts neben *C* vorbeyschneide; so wird sich nach dem bekannten Verfahren ein zweytes Fehlerdreyeck ergeben, welches mit dem erstern gleichstimmig ist, und aus beyden wird sich endlich nach den vorhin gezeigten Verfahren, durch die Verbindung der gleichnamigen Spitzen der zwey Fehlerdreyecke der Standpunct *d* so genau ergeben, daß, wenn der Meßtisch nach §. 145. unter 4) auf den mittlern Richtpunct *C* eingerichtet ist, die gehörige Orientirung erhalten und durch die Überzeugung nach 5) sich auch so bewähren wird, daß, bey richtigem Verfahren, selten oder nie eine Verbesserung durch Wiederholung erforderlich werden dürfte.

In der wirklichen Anwendung kann man auch die Überzeugung gewinnen, daß das ganze Verfahren weit schneller auszuführen ist, als es hier beschrieben werden konnte; so wie auch daß hierbey die vorläufige Bestimmung des Punctes *d* nicht sehr ängstlich zu geschehen habe.

Die Richtigkeit der eben beschriebenen Annäherungsmethode *) in allen vier Fällen gründet sich auf folgenden Beweis:

Es stelle in Fig. 96. das Dreyeck *a'b'c'* die Lage des noch nicht orientirten Meßtisches vor, daher die Verbindungslinie *a'A*, *b'B* und *c'C* der Dreyecke verlängert sich in drey verschiedenen Puncten schneiden und das Fehlerdreyeck *xuy* bilden; es sey ferner *abc* die richtige Lage des auf dem Tische gegebenen Dreyeckes, welche dasselbe durch das oben beschriebene Verfahren erhalten hat: so ist der Durchschnittpunct *d* der verlängerten Verbindungslinien *Aa*, *Bb* und *Cc* der gesuchte richtige Standpunct des Meßtisches, und es ist nun zu beweisen, daß die senkrechten Abstände *du*, *dr* und *ds* (als Sinuse der Abweichungswinkel) aus diesem Puncte *d* auf die Seiten des Fehlerdreyeckes sich so verhalten, wie die Entfernungen *dA*, *dC* und *dB* (als Halbmesser zu jenen Sinusen).

Zu diesem Behufe ziehe man aus dem Puncte *d* Kreise durch die Scheitelpuncte *a*, *b*, und *c* des gegebenen Dreyeckes, in welchen auch die gleichnamigen Scheitel *a'*, *b'*, *c'* desselben Dreyeckes in der schiefen Lage *a'b'c'* sich befinden. Nun verbinde man den Punct *d* mit dem entferntesten Scheitelpuncte *c'* des schief liegenden Dreyeckes, so werden dadurch auch die kleinern zwey Kreise in den Puncten *n* und *g* geschnitten, und es ist der Bogen *mn* eben so groß, als der Bogen *b'b'*, so wie der Bogen *pg* mit *aa'* gleiche Größe hat. Denn während der Wendung des Tischblattes um die Herzscharbe, damit der

*) Von Lehmann, Königl. sächsl. Artillerie-Major, zuerst angegeben.

Punct c' nach c , der Punct a' nach a , und b' nach b zu liegen kam *), Fig. sind zugleich auch die Bogen $qp = a'a$ und $nm = b'b$ durchlaufen 96. worden.

Es sind also die Winkel dAu , dCr und dBs (wegen der geringen Excentricität) einander gleich, folglich die aus A , B und C mit den Halbmessern Ad , Bd und Cd beschriebenen Bogen ähnlich; fällt man diesernach aus dem Punct d die Senkrechten du , ds und dr , so sind diese die Sinuse jener Bögen **) und verhalten sich wie ihre Halbmesser;

es verhält sich nämlich . . . $du : dr : ds = dA : dC : dB$;

und wegen der Ähnlichkeit der

Dreyecke $dac \sim dAC$ und

$dcb \sim dCB$ verhält sich . . . $da : dc : db = dA : dC : dB$,

folglich auch . . . $du : dr : ds = da : dc : db$;

das heißt: bey einem sich ergebenden Fehlerdreyecke verhalten sich die Senkrechten, welche aus dem wahren Standpuncte d auf die Seiten des Fehlerdreyeckes gefällt werden, wie die Abstände der betreffenden Dreyeckspitzen von jenen Puncten. Dasselbe gilt, wenn auf der zweyten Seite durch die schiefe Lage des Dreyeckes ein Fehlerdreyeck entsteht.

§. 148.

Aus dem bisher Gesagten kann deutlich erhellen, daß aus drey gegebenen sichtbaren Fixpuncten ein vierter als Standpunct des Meßtisches beliebig gewählt, nach §. 145. schnell und richtig bestimmt, oder bey einem entstandenen Fehlerdreyecke nach §. 147. durch Annäherung zureichend genau gefolgert werden kann. Ja es ist das hier gezeigte Verfahren, den Meßtisch aus drey gegebenen sichtbaren Puncten zu orientiren, um so sachdienlicher, als man nach Umständen oft das Detail einer ganzen Meßtisch-Section größtentheils aus den ursprünglichen Daten, aus drey gegebenen Fixpuncten ableitend, ausarbeiten kann, indem man, wo es die Lage des Terrains zuläßt, für den Meßtisch immer nur einen solchen Standort wählt, in welchem das Tischblatt aus den gegebenen drey Puncten orientirt werden kann, wodurch die ganze Vermessung wie aus einer Einheit, gleichsam wie aus Einem Gusse hervorgeht.

*) Liegt der gesuchte Punct d nicht über den Drehungspunct des Meßtisches, so ergibt sich wegen der Excentricität eine kleine Abweichung, die aber vermög §. 145. 4) in der Praxis von keinem merkbarern Einfluß ist.

**) Bey sehr spitzigen Winkeln, die sich bey der großen Entfernung des Meßtisches vom Felddreyecke ABC in der Wirklichkeit jedesmahl ergeben, fallen die Sinuse (Senkrechten) mit ihren Bogen überein.

Fig. Sind im Verfolge einer Vermessung aus einem solchen auf dem Felde beliebig gewählten, Standorte dann mehre Richtpuncte sichtbar, durch welche der Tisch orientirt werden kann, so sind nicht jede drey derselben gleich gut geeignet, den zu suchenden Standpunct auf dem Meßtische richtig zu bestimmen; sondern unter allen können nur drey die geeignetsten seyn, und zwar: je größer der Unterschied der Entfernungen der drey Richtpuncte vom Standorte ist, desto bestimmbarer ist der zu suchende Standpunct; je kleiner aber diese Unterschiede sind, desto weniger bestimmend sind die Durchschnitte ihrer Visuren. Demnach diene zur Wahl des Standortes für den Meßtisch Folgendes:

1) Sind auf dem Felde nur drey Richtpuncte sichtbar, so wähle man den Standort für den Meßtisch dergestalt, daß sich die zwey nächsten oder die zwey entferntesten Richtpuncte so rechtwinkelig als möglich, nie aber spitziger als nahe bey 45° durchschneiden (Fig. 92. bis 96.). Denn bey einer solchen Lage des Standortes *D* ergibt sich der gleichnamige Punct *a* auf dem Tischbrette mittelst des Hülfspunctes *u* nach §. 145. in den meisten Fällen unmittelbar genau; bey einem sich ergebenden Fehlerdreyecke aber lassen sich die Abstände des Punctes *a* von den Visirlinien nach §. 147. am leichtesten beurtheilen, und nachher daraus auch zureichend genau bestimmen.

2) Werden aber im Verlaufe der Vermessung mehre Puncte sichtbar, deren gleichnamige auf dem Tischbrette auch festgelegt sind, so wähle man unter allen entweder den entferntesten und die zwey nächsten (Fig. 93.), oder die zwey entferntesten und den nächsten (Fig. 94.), so zwar, daß sich im ersten Falle die Visuren nach den beyden nächsten, im zweyten aber die Visuren nach den beyden entferntesten Richtpuncten gleichfalls wieder so rechtwinkelig als möglich, nie aber spitziger, als bey 45° schneiden; dieser Durchschnitt ist leicht zu beurtheilen, und gibt den vortheilhaftesten Standort *D*, über welchen sich nachher der gleichnamige Punct *a* auf dem Meßtische nach §. 145. oder §. 147. am schnellsten bestimmen läßt.

3) Da nach der Lage einer langen Linie die Lage einer kürzern viel richtiger, als umgekehrt jene nach dieser bestimmt werden kann, so soll man, um mit desto größerer Verlässlichkeit von einem nach obiger Weise auf dem Meßtische bestimmten Standpunct weiter zu operiren, keine Gegenstände (als neue Dreyeckspuncte des graphischen oder Sectionsnetzes, neue zu wählende Standpuncte, Situations-

gegenstände u. dgl.) anvisiren, oder schon anvisirte durchschneiden, Fig. welche vom Meßtiſche weiter entfernt liegen, als der entfernteste Richtungspunct von ihm abliegt.

4) Wären demnach beträchtlich entfernte Objecte von einem Standpuncte d anzuvisiren, so müßte bey der Wahl des Standortes D nach 2) schon Bedacht dahin genommen werden, daß der entfernteste Richtungspunct vom Meßtiſche weiter abliege, als die Objecte, welche von demselben außs Neue bestimmt werden sollen.

Erschöpfend dürfte diese in der pract. Meßkunst so wichtige Aufgabe gelöst seyn: in der systematischen Abhandlung über die Pothenot'sche Aufgabe in ihrer einfachsten Anwendung u. c.; allen deutschen Geometern gewidmet vom Verfasser der vorliegenden Schrift. Wien 1843, bey J. G. Heubner.

§. 149.

Auflösung der §. 144. gegebenen Aufgabe mittelst des Winkelmessers.

Aus Fig. 98. bis 101. ist deutlich zu ersehen, daß man die 98. mittelst des Meßtiſches gesuchte Lage des vierten Punctes D auch bis trigonometrisch durch Rechnung leicht finden kann, wenn nur einmahl 101. der Winkel $x = BAD$ bekannt ist. Dieser Winkel BAD ist aber aus dem gegebenen Dreyecke ABC und den beobachteten Winkeln m und n auf folgende Art zu bestimmen:

Es sey die bekannte Seite $AB = a$, $BC = b$, der eingeschlossene bekannte Winkel $ABC = p$, und der zu suchende Winkel $BAD = x$; so ist Fig. 98. und 99.) $BCD = 360^\circ - p - m - n - x = q - x$, wenn man $360^\circ - p - m - n = q$ setzt; in Fig. 100. ist $BCD = p - m - n - x = q - x$; wenn man $p - m - n = q$ setzt; und in Fig. 101. ist $BCD = 180^\circ - m - n - x = q - x$, weil $m + n + x + (q - x) = 180^\circ$, folglich $180^\circ - m - n = q$ ist.

Nun findet im Dreyecke DBA folgende Proportion statt:

$$\sin m : a = \sin x : BD \text{ (Gmtr. 242.)};$$

$$\text{es ist nämlich } BD = \frac{a \cdot \sin x}{\sin m},$$

und im Dreyecke DBC findet man aus der Proportion

$$\sin n : b = \sin (q - x) : BD, \text{ daraus ist}$$

$$\text{gleichfalls } BD = \frac{b \cdot \sin (q - x)}{\sin n};$$

Fig. 98. folglich ist auch $\frac{a \cdot \sin x}{\sin m} = \frac{b \cdot \sin (q - x)}{\sin n}$, oder

bis 101. $\frac{a \cdot \sin x}{\sin m} = \frac{b}{\sin n} \cdot \left(\frac{\sin q \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos q}{r} \right)$

(Gmtr. 233. 2);

ferner $\frac{a \cdot r \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = \frac{\sin q \cdot \cos x - \sin x \cdot \cos q}{\sin x}$,

oder $\frac{a \cdot r \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} = \frac{\sin q \cdot \cos x}{\sin x} - \cos q$,

oder $\frac{a \cdot r \cdot \sin n}{b \cdot \sin m} + \cos q = \sin q \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$, oder auch

wenn man die vorstehende Gleichung mit r multiplicirt und durch $\sin q$ dividirt, so erhält man

$$\frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} + \frac{r \cdot \cos q}{\sin q} = \frac{r \cdot \cos x}{\sin x}$$

(Nf. 63. I., und 72. I., dann Gmtr. 230. III.); und wenn man

für $\frac{r \cdot \cos q}{\sin q}$ und $\frac{r \cdot \cos x}{\sin x}$ die *cotang* dieser Winkel setzt, so erhält

man endlich $\cot x = \frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} + \cot q$.

Bei dieser Gleichung ist wohl zu merken, daß *cot q* negativ wird, wenn $q > 90^\circ$ ist, und daß $x > 90^\circ$ seyn muß, wenn die berechnete Cotangente des gesuchten Winkels negativ ausfällt, vermöge Gmtr. 228.

B e y s p i e l.

99. Es sey (Fig. 99.) $p = 126^\circ 40'$, $m = 25^\circ$, $n = 36^\circ$, die Seite $a = 621$ Klaftern, und $b = 919$ Klaftern; so ist vermög des Vorhergehenden $q = 172^\circ 20'$. Nun kann x durch Hülfe einer trigonometrischen Tafel für den Halbmesser $r = 1$ (Gmtr. 240.) auf folgende Weise berechnet werden:

Es ist $\log a = \log 621 = 2,793092$

$\log \sin n = \log \sin 36^\circ = 9,769219 - 10$ (für $r = 1$)

$\log r^2 = 2 \log 1 = 0$

sohin ist $\log (a \cdot r^2 \cdot \sin n) = 12,562311 - 10 = 2,562311$;

ferner ist:

$$\log b = \log 919 = 2,963316$$

$$\log \sin m = \log \sin 25^\circ = 9,625948 - 10$$

$$\log \sin q = \log \sin 172^\circ 20' = 9,125187 - 10$$

$$\text{also ist } \log (b \cdot \sin m \cdot \sin q) = 21,714451 - 20 = 1,714451;$$

$$\text{folglich ist } \log \frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} \dots\dots\dots = 0,847860,$$

und die entsprechende Zahl dazu ist = + 7,044665.

Weiter ist:

$$\log \cot q = \log \cot 172^\circ 20' = - \log \cot 7^\circ 40' =$$

$$= - (10,870913 - 10) = - 0,870913,$$

diesem Logarithm. entspricht die Zahl = - 7,428700,

hierzu die obige entsprechende Zahl = + 7,044665,

$$\text{Rest} \dots\dots = - 0,384035 \text{ f\u00fcr } r = 1,$$

$$\text{daher } - \log \cot x = \left. \begin{array}{l} + 10,000000 \\ 9,615965 \end{array} \right\} \text{ f\u00fcr } r = 10;$$

$$\text{diesem } \log \cotang \text{ entspricht der Winkel } \dots\dots\dots = \left\{ \begin{array}{l} 67^\circ 34' - 28,8'' \\ -67^\circ 33' 31,2'' \end{array} \right.$$

$$\text{endlich ist der Winkel } x = \left\{ \begin{array}{l} 179^\circ 59' 60'' \\ 112^\circ 26' 28,8'' \end{array} \right.$$

Da nun der Winkel $BAD = x = 112^\circ 26' 29''$ bekannt ist, so findet man den Winkel $BCD = q - x = 172^\circ 20' - (112^\circ 26' 29'') = 59^\circ 53' 31''$; $ABD = 180^\circ - m - x = 42^\circ 33' 31''$, und den Winkel $DBC = 180^\circ - n - (q - x) = 84^\circ 6' 29''$.

Die Seiten DA , DB und DC k\u00f6nnen demnach durch folgende Proportionen berechnet werden:

$$\sin m : a = \sin ABD : DA \text{ oder}$$

$$\sin 25^\circ : 621 = \sin 42^\circ 33' 31'' : DA; \text{ daraus folgt}$$

$$DA = 993,8 \text{ Klaftern. Ferner ist:}$$

$$\sin m : a = \sin x : DB \text{ oder}$$

$$\sin 25^\circ : 621 = \sin 67^\circ 33' 31'' : DB, \text{ daraus findet man}$$

$$DB = 1358,8 \text{ Klaftern. Weiter ist}$$

$$\sin n : b = \sin DBC : DC \text{ oder}$$

$$\sin 36^\circ : 919 = \sin 84^\circ 6' 29'' : DC, \text{ hieraus folgt endlich}$$

$$DC = 1555,3.$$

Beym Gebrauche dieser Gleichung

$$\cot x = \frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q} + \cot q, \text{ und zwar bey Fig. 99. Kann es sich}$$

Fig.
99.

ergeben, daß $q > 180^\circ$ wird. In einem solchen Falle muß man 180° von q abziehen, und dann zu dem Überreste in den trigonometrischen Tafeln den zugehörigen Sinus und die Cotangente auffuchen, um $\sin q$ und $\cot q$ zu erhalten. Dabey ist aber wohl zu merken, daß ein solcher Sinus negativ ist und folglich der Ausdruck

$\frac{a \cdot r^2 \cdot \sin n}{b \cdot \sin m \cdot \sin q}$ das Zeichen — hat, vermög Gmtr. 229. Hingegen ist

die Cotangente in einem solchen Falle nur damahls negativ, wenn der Überrest, nachdem man 180 von q abgezogen hat, noch größer als 90° ausfällt. Ist aber dieser Überrest kleiner, als 90° ; so ist die entsprechende Cotangente positiv.

C. Anwendung der einfachen Aufgaben auf Vermessung kleiner Flächen.

§. 150.

102. Aufgabe. Eine Figur aus einem innerhalb derselben willkürlich angenommenen Standpuncte M mittelst des Meßtisches aufzunehmen.

Auflösung. 1) Man umgehe mit einem Handlanger die Figur, lasse in jedem Endpuncte derselben einen nach der Ziffernfolge bezeichneten Pflock einschlagen und nach §. 39. markiren, entwerfe zugleich auch von dem Umfange der Figur mit den beygesetzten numerirten Pflocken eine Zeichnung nur nach dem Augenmaße (Handskizze, Handriß, Feldbrouillon), wenn die Figur nicht mehr als 8 bis 10 Winkel enthält; bey mehr Winkeln aber eine etwas genauere auf folgende Art:

2) Man ziehe auf dem zum Entwurfe bestimmten Papierblatt am obern Rand eine Gerade, und darauf einige beliebige oder nach dem Aufnahmsmaßstabe bestimmte Abtheilungen von 10 zu 10 Klaffern, oder 25 zu 25 Schritten, ungefähr in dieser Form:

5	10	20	30	40	80 Klaffern
12	25	50	75	100	200 Schritte

stelle sich über den mit Nr. 1. bezeichneten Punct, richte das Papierblatt so vor sich, daß man, nach dem Augenmaße zu urtheilen, die ganze Figur darauf entwerfen könne, ziehe auf demselben in der Richtung nach Nr. 2. eine unbestimmte Bleylinie, schreite die Entfernung ab, und trage sie nach dem Entwurfsmaßstabe von Nr. 1. bis 2. auf.

3) In Nr. 2. hält man das Papier so vor sich, daß der Punct Nr. 2. über den gleichnamigen Pflock stehe, die Linie 2 1 aber