Fig. 14. Der mehren Richtigkeit wegen soll man die Winkel nicht viel über, und nicht viel unter 60° messen, vermöge §. 108. und 109. Auch ist es vortheilhaft, wenn der tausendtheilige Maßstab $\frac{3}{4}$ bis 1 Fuß lang ist. Ferner erhellet von selbst, daß in den meisten gewöhnlichen Fällen die Secunden ohne Nachtheil hinweggelassen werden können.

Zweyter Abschnitt.

Verschiedene geometrische und trigonometrische Aufgaben, als Vorbereitung zur Vermessung ganzer Gegenden.

§. 121.

Die Ausmessung gerader Linien, wobey der Maßstab ohne Hinderniß unmittelbar angelegt werden kann, ist schon §. 75. bis 81. gezeigt worden: es kommt aber sehr oft vor, daß entweder die auszumessenden Linien zu lang sind, folglich die Messung zu weitläufig würde, oder daß Hindernisse sich entgegenstellen, die keine unmittelbare Messung zulassen, oder sie doch beschwerlich machen. In diesen Fällen gibt uns die theoretische Geometrie, besonders aber die Lehre von den Proportionallinien und der Ähnlichkeit der Figuren Hülfsmittel an die Hand, auch ohne wirkliche Anlegung des Maßstabes dergleichen Linien zu messen. Dieses kann nach Umständen entweder mit oder ohne Meßinstrumente geschehen.

A. Einige, der nützlichsten Aufgaben, welche auf dem Felde ohne Instrumente, bloß mittelst Stäben und der Kette aufgelöst werden können.

§. 122.

1. Aufgabe. Auf dem Felde einen Winkel von 60 Graden auszustecken.

Auflösung. Man schlage an beyden Enden der ausgespann-
52. ten Kette Pflöcke *a* und *b*, lasse einen Kettenring, z. B. in *a*, fest liegen, und reiße mit einem durch den andern *b* gesteckten Pflock bey angespannter Kette in der Gegend bey *c* einen kleinen Bogen auf der Erde, diesen Bogen durchschneide man mit derselben Länge der Kette aus *b*; so ergibt sich der Punct *c*, der mit *a* und *b* bey *a* einen Win-

kel von 60° bildet (Gmtr. 73.), und nöthigen Falls durch eine ge- Fig.
spannte Schnur oder ein aufgehauenes Gräbchen sichtbar gemacht werden kann. Theilt man den Bogen *cb* in zwey gleiche Theile, so ist der Winkel $fab = fac$ ein Winkel von 30 Graden, und trägt man auf dem verlängerten Bogen *cd* die Sehne *cf* von *c* bis *d* auf; so ist der Winkel *dab* ein rechter. Es erhellet nun leicht, wie durch eine bloße Theilung und Zusammenstellung der Bogen für den gewöhnlichen praktischen Gebrauch auch andere Winkel von beliebiger Anzahl der Grade auf dem Felde ausgesteckt werden können. 52.

2. Aufgabe. Einen Winkel $ca'b'$ auf dem Felde abzustecken, der einem gegebenen *fab* an Größe gleich ist.

Auflösung. Man messe den Schenkel *ab*, und übertrage dessen Länge von *a'* bis *b'*; sodann ziehe man mit der Länge *ab* aus *a* einen kleinen Bogen bey *c*, endlich durchschneide man diesen Bogen mit der gemessenen Länge *bf* aus *b'*; so wird der Winkel $ca'b' = fab$ seyn (Gmtr. 17.). 52. u. 53.

Es darf nur erinnert werden, daß aus den gemessenen zwey Schenkeln und der Sehne eines Winkels leicht ein Winkel von gleicher Größe auf dem Papier nach einem beliebigen verjüngten Maßstabe verzeichnet werden kann.

§. 123.

Aufgabe. Aus einem in einer Geraden *ab* gegebenen Puncte *c* eine Senkrechte auf dem Felde zu errichten. 54.

1. Auflösung. Man trage aus dem gegebenen Puncte *c* auf der Geraden rechts und links eine beliebige, jedoch gleiche Länge bis *f* und *d*, sodann lege man die Endringe der Kette über die in *f* und *d* befestigten Pflöcke, fasse die Kette in ihrer Mitte mittelst eines dritten Pflockes, und schlage diesen, bey gleichförmiger Anspannung der Kette, bey *g* in die Erde: so geben die zwey Puncte *g* und *c* die verlangte senkrechte Richtung auf *ab*, die nöthigen Falls mittelst eines Gräbchens oder einer gespannten Schnur sichtbar gemacht werden.

Bestimmt man mit einem längern Theil der Kette auf dieselbe Weise einen zweyten Punct *h*; so müssen bey richtigem Verfahren die drey Puncte *h*, *g* und *c* in einer geraden Linie liegen.

Bey erforderlicher größeren Genauigkeit trägt man eine größere Länge von *c* bis *d* und *f*, und reißt dann mit der ganzen Länge der nach einander in *f* und *d* befestigten Kette bey *g* kleine Bögen in die Erde, um den Punct *g* zu erhalten.

Fig. 45. Oder nachdem man auf die obige Weise die Senkrechte *cg* errichtet hat, verlängert man dieselben bis auf eine bestimmte erforderliche Länge *ch*, berechnet nun aus den bekannten Längen der Katheten die Hypothenuse *fh*, und trägt sie von *f* bis *h*, so wie von *d* bis *h*, an den daselbst ausgespannten Schnüren mittelst zwey wechselweise an einander geschobenen Klafterstäben, auf, und berichtiget, bey einer sich zeigenden Abweichung des Punctes *h*, die senkrechte Stellung *hc* auf *ab*. Es sey $cf = cd = 30$, $ch = 40$ Klaftern gemessen worden: so findet man $fh = dh = 50$ Klaftern (Gmtr. 89.).

2. Auflösung. Hat man eine Meßkette, deren jede Klafter in sechs Fuße getheilt ist: so stecke man drey Pflöcke dergestalt durch
55. Ringe der Kette, daß zwischen den Pflöcken *c* und *f* 15, zwischen *c* und *d* 20, und zwischen *f* und *d* 25 solche gleiche Kettentheile liegen, schlage, bey gleichförmig angespannter Kette, diese Pflöcke in die Erde; so wird *fc* senkrecht auf *ab* seyn (Gmtr. 89.). Bey einer Meßkette, deren jede Klafter in zehn gleiche Theile getheilt, und mit einem Ringe bezeichnet ist, werden 24, 32 und 40 solche gleiche Kettentheile genommen, und eben so angewendet.

Ein solcher, gleichsam tragbarer rechter Winkel, kann zur Errichtung mehrer Senkrechten auf einer Geraden sehr gut verwendet werden.

3. Auflösung. Man lege einen Endring der Kette über den
56. im gegebenen Puncte *a* befestigten Pflock, fasse den andern Endring auf einen zweyten Pflock, gehe auf der gegebenen Geraden, beyläufig die halbe Kettenlänge rechts oder links, und befestige diesen Pflock auf der gegebenen Geraden in *c*; hierauf fasse man die Mitte der Kette mit einem dritten Pflock, und befestige ihn unter gehöriger Spannung der beyden halben Kettenlängen auf derjenigen Seite der gegebenen Geraden, wohin die Lage der verlangten Senkrechten kommen soll, bey *d* in die Erde. Endlich hebe man das erste über den gegebenen Punct *a* liegende Kettenende vom Pflocke ab, und spanne die ganze Kette so aus, daß der Pflock *f* mit den Pflöcken *d* und *c* eine mittelst der Kette sichtbare gerade Linie bilden: so wird der Punct *f* mit *a* die verlangte senkrechte Richtung auf *ab* geben (Gmtr. 46.).

Bey einer größeren erforderlichen Genauigkeit nimmt man anstatt der halben, die ganze Kette, bestimmt den Punct *d* mittelst auf der Erde gerissener Bögen, trägt sodann die Länge *cd* von *d* bis *f* in der Richtung *cd* auf.

Hieraus ersieht man zugleich, daß man die Methode, Senkrechte am Ende einer Geraden zu errichten, auch in jedem beliebigen Puncte mit Vortheil anwenden kann. Fig.

§. 124.

Aufgabe. Aus einem außerhalb einer Geraden bc gegebenen Punct a auf dieselbe eine Senkrechte zu fällen. 57.

1. Auflösung. Man lege den einen Kettenring über den im gegebenen Punct a befestigten Pflock, durchschneide bey gespannter Kette durch kurze Bögen die gegebene Gerade in b und c. Hierauf lege man die beyden Endringe der Kette über die in diesen Puncten befestigten Pflöcke, fasse die Kette in ihrer Mitte mittelst eines Pflockes, und schlage diesen, bey gleichförmig gespannter Kette, entweder dieß- oder jenseits der Geraden bc in die Erde bey d oder bey f; so wird a mit d oder f die verlangte senkrechte Richtung auf bc geben (Gmtr. 26.), wodurch ein Pflock m in den gegebenen Geraden nach §. 71. leicht bestimmt werden kann.

2. Auflösung. Wenn der gegebene Punct A von der Geraden BC zu weit entfernt, oder gar unzugängig wäre; so messe man 58.
in B den Winkel ABC vermög §. 122. 2). Sodann messe man auch die Gerade BC nach §. 76., trage einen bestimmten, z. B. den zehnten Theil davon, von C bis b zurück, stecke daselbst den Winkel $m'bn' = ABC$ ab vermög (§. 122. 2): so wird die Richtung AC mit der Richtung bm' den Punct a bestimmen. Fället man nach der vorigen Auflösung aus diesem Puncte die Senkrechte ad, und trägt die gemessene Länge Cd von C gegen B zurück zehnmahl auf; so wird der dadurch bestimmte Punct D mit dem gegebenen A die verlangte senkrechte Richtung auf BC geben (Gmtr. 59. und 80.).

§. 125.

Aufgabe. Zu einer gegebenen Geraden ab durch einen außerhalb gelegenen Punct c eine Parallele zu führen. 59.

1. Auflösung. Man fälle aus dem gegebenen Punct auf die Gerade ab nach §. 124. die Senkrechte cd, und messe ihre Länge. In einem andern von d möglichst entfernten Puncte h errichte man die Senkrechte hf vermöge §. 123., mache $hf = dc$; so wird die Richtung c und f, welche vermög §. 73. nach Belieben verlängert werden kann, die verlangte parallele Lage haben (Gmtr. 34.).

Fig. 60. 2. Auflösung. Ist der gegebene Punct *c* zu weit von der Geraden *ab* entlegen, oder ein kleines Hinderniß davor, so wähle man in der gegebenen Geraden einen Punct *d* dergestalt, daß der gegebene Punct *c* sichtbar ist, und der Winkel *cdb* zwischen 50 bis 70 Grade enthält. Nun messe man diesen Winkel, begebe sich nach *c*, und stecke daselbst einen gleich großen Winkel *ucv* an der Geraden *dc* ab, vermög §. 122. 2). Steht aber ein Hinderniß, wie bey *s*, entgegen: so verlängere man *cd* nach §. 73., und stecke an der Verlängerung *cq* den Winkel $= qcp = mdn$ ab; so wird in beyden Fällen durch die Puncte *u* und *c*, oder *p* und *c* die verlangte Parallele *hp* zu *ab* bestimmt (Gmtr. 36. 1).

61. 3. Auflösung. Ist die gegebene Gerade *AB* gänzlich unzugänglich; so errichte man sowohl in dem gegebenen *c*, als auch in einem beliebigen Punct *d*, von welchem man die Endpuncte *A* und *B* der unzugängigen sehen kann, Stäbe, so wie auch einen in der Verlängerung *cB*, in *f*, der zugleich in den Geraden *dA* liegt. Hierauf führe man nach dem vorigen Verfahren durch *f* die Parallele *fp* zu *dB*, sodann auch durch den gegebenen Punct *c* eine Parallele *gq* zu *dA* auf das genaueste. Im Durchschnittspuncte *g* errichte man einen Stab, schicke einen Gehülfen mit einem andern in die Parallele *fp*, in diese richte man ihn, von *g* nach *A* visirend, so ein, daß er mit seinem Stabe in den Durchschnittspunct *m* zu stehen kommt. Endlich verlängere man die Gerade *mc* nach Erforderniß vor- und rückwärts; so wird *ab* parallel zu *AB* seyn.

Denn es sind die Dreyecke $Aam \backsim mcg$, $Bbc \backsim mcf$, so wie $amf \backsim adb \backsim cbg$, weil ihre Seiten parallel sind. Aus den Dreyecken *Aam* und *mcg*, dann *amf* und *cgb* findet man $mc = \frac{af.cb}{Aa}$; ferner aus den Dreyecken *Bbc* und *mfc*, dann *cbg* und *amf*,

findet man $mc = \frac{bg.am}{Bb}$;

folglich $\frac{af.cb}{Aa} = \frac{bg.am}{Bb}$, und

daraus $af : am = aA.bg : cb.Bb$. Aus $afm \backsim adb$

ist ferner $af : am = ad : ab$;

daher $ad : ab = aA . bg : cb . Bb$. Aus $adb \backsim cbg$ ist

endlich $ab : bd = cb : bg$;

folglich $ad : bd = aA : Bb$, also ist *ab* parallel zu *AB*, vermög Geometrie 80.

Ist in der Verlängerung der gegebenen Geraden *AB* (Fig. 63.) irgend ein ausgezeichneter weit entlegener Gegenstand N (Fig. 59.) sichtbar *): so darf man aus dem gegebenen Punct *h* nach einem solchen Gegenstand hinvisirend, in dieser Richtung nur einen Stab bey *p* errichten (§. 72.); so wird *hp* für manche, minder genaue Erfordernisse eine zureichende parallele Lage mit *AB* haben. (Man sehe Fig. 59. und 63., welche in dieser Beziehung zusammen hängen.) Fig.

4. Auflösung. Ist der gegebene Punct *n* auch unzugängig, so wähle man rück- oder vorwärts desselben einen beliebigen Punct *c* von solcher Beschaffenheit, daß er indessen die Stelle eines gegebenen zugängigen vertreten könne, und bestimme nach der vorigen Auflösung die parallele Lage *ab* zu *AB*. Hierauf bestimme man nach §. 124. 2) die senkrechte Entfernung des unzugängigen Punctes von dieser Parallelen, und stecke endlich in dieser Entfernung nach §. 125. 1) eine Parallele zu *ab* ab; so geht selbe durch den gegebenen unzugängigen Punct *n*, und ist gleichlaufend zu der gegebenen *AB*. 61.

§. 126.

1. Aufgabe. Aus dem gegebenen Halbmesser $ma = 25$ Fuß eines Kreises, den Umfang des Kreises auf dem Felde abzustecken. 62.

Auflösung. Man befestige in dem gegebenen oder gewählten Mittelpunct *m* einen Pflock, und lege darüber einen Endring der Meßkette, fasse in der gegebenen Länge des Halbmessers die Kette mittelst eines zweyten Pflockes, und reiße bey gleichförmig gespannt gehaltener Kette den Umfang des Kreises auf der Erde sichtbar auf, oder bezeichne nach Erforderniß denselben mittelst Pflöcke. Der Flächeninhalt wird nöthigen Falles durch Gmtr. 141. bestimmt.

2. Aufgabe. Aus dem bekannten Flächeninhalt $= 48209$ q′ eines Kreises den Halbmesser zu finden, und den Kreis auf dem Felde abzustecken.

Auflösung. Man bestimme nach Gmtr. 142. 3) den Halbmesser des Kreises und verfahre dann wie in der vorigen Aufgabe.

§. 127.

Aufgabe. Die Länge einer geraden Linie *AB* zu bestimmen, die nur an ihren Endpuncten, nicht aber in ihrer ganzen Länge zugängig ist. 63.

*) Solche Gegenstände findet man fast allenthalben, die mit zwey gegebenen Puncten in gerader Linie liegen, als Thurm-, Berg- und Baumspitzen u. dgl.

Fig. 63. 1. Auflösung. Kann man von A ungehindert nach B sehen, so visire man in m und q Stäbe in die Richtung AB ein, und messe von A bis nahe an das Hinderniß, errichte daselbst vermög §. 123. die Senkrechte mn von einer solchen Länge, daß man unter einem zweyten rechten Winkel n neben dem Hinderniß vorbey bis p messen kann. Hier errichte man wieder die Senkrechte $pq = mn$. Endlich messe man von q bis B: so wird $Am + np + qB = AB$ der verlangten Länge seyn, weil im Rechtecke $mnpq$ die Seite $np = mq$ gesetzt werden kann.

Ist in der Richtung BA in einer großen Entfernung irgend ein ausgezeichneter Gegenstand (der Baum in Fig. 59.) N sichtbar, so kann man entweder in B (oder q) eine Senkrechte errichten, von h (oder p) aus nach N visiren, in dieser Richtung vermög §. 72. einen Stab in n errichten, hn (oder pn) messen, in n eine Senkrechte nm errichten, endlich $nm = hB$ (oder pq) messen lassen. Im ersten Falle wird sodann $hn + mA = AB$, im zweyten aber $Bq + pn + mA = AB$ seyn.

Es sey z. B. $hN = 4000°$, $Bh = 12°$ und $hn = 28°$
so ist $nN = 4000 - 28 = 3972°$; und es verhält sich
$hN : Bh = nN : nm$,
oder $4000 : 12 = 3972 : nm$, woraus man

$$mn = \frac{3972 \cdot 12}{4000} = 11,°9 \text{ findet.}$$

Man sieht hieraus, daß der Unterschied, um welchen die Senkrechte nm zu groß gemacht wurde, auf die gewöhnlichen Fälle in der Anwendung keinen merklichen Einfluß habe, und daher auch näher liegende Gegenstände hierzu benützt werden können, deren Entfernung auch nicht einmahl genau, sondern nur schätzungsweise bekannt seyn dürfte, wenn man die Abweichung durch die obige Proportion beurtheilen und verbessern wollte. Der obige Ausdruck für mn zeigt zugleich, daß es vortheilhaft ist, die Entfernung eher zu groß als zu klein zu schätzen.

Auch erhellet nun, daß die §. 125. erwähnte Methode, parallele Linien mittelst eines sehr entfernten Gegenstandes abzustecken, für solche Fälle zureichend richtig ist.

2. Auflösung. Ist das Hinderniß von der Art (z. B. Gebüsch), daß man von B nach A nicht sehen kann, so errichte man in einem dieser Puncte, z. B. in B, die Senkrechte Bd von einer solchen Länge, daß man von d nach A ungehindert sehen und messen könne. Die Länge Bd sowohl, als jene von Ad erhebe man jede in das Quadrat, und ziehe aus der Quadratdifferenz die Quadratwur-

zel; so ist diese Länge $= AB$. Denn es ist $AB = \sqrt{Ad^2 - dB^2}$. Fig. 63.
Es sey z. B. $Bd = 50°$, $dA = 110$ Kl. gemessen worden; so ist $AB = \sqrt{110^2 - 50^2} = 98{,}4$ Klaftern.

3. Auflösung. Man wähle einen Punct C von solcher Beschaffenheit, daß man von ihm aus nach A und B ungehindert sehen und messen könne, und daß das Dreyeck CBA nach dem Augenmaße ziemlich gleichseitig werde (§. 109.). Hierauf messe man CA und CB (wobey man das §. 75. und 76. Gesagte zu beobachten hat), trage von C bis a einen bestimmten, z. B. den 3., 4. oder allgemein $n$ten Theil von CA, und so auch von C bis b den eben so vielten Theil von CB entweder auf die Schenkel CA und CB selbst, oder wenn es wegen Hindernisse nicht angeht, auf ihre Verlängerung rückwärts, messe endlich die Gerade ab, und multiplicire sie mit der Zahl n (z. B. mit 4), welche den von CA und CB aufgetragenen Theil bis a und b anzeigt: so wird dieses Product die verlangte Entfernung anzeigen *).

Denn es ist das Dreyeck $aCb \sim ACB$ (Gmtr. 81.),
daher verhält sich $Ca : CA = ab : AB$,

oder $\frac{CA}{n} : CA = ab : AB$,

oder auch $\frac{1}{n} : 1 = ab : AB$ (Rk. 268. VI.);

daraus folgt endlich $AB = ab \cdot n$.

Hat man z. B. $AC = 80°$; und $CP = 84°$ gefunden, und von C bis a den vierten Theil von AC, also $\frac{80}{4} = 20°$, und von C bis b $\frac{84}{4} = 21°$ getragen, und die Länge $ab = 24{,}°2$ gefunden; so ist $AB = 24{,}2 \cdot 4 = 96°{,}8$.

§. 128.

Aufgabe. Die Entfernung eines Punctes A von einem andern B auf dem Felde zu bestimmen, d. h. die Gerade AB zu messen, die nur an Einem ihrer Endpuncte A zugängig ist. 64.

1. Auflösung. Man errichte vermög §. 123. 3) in A die Senkrechte AC von beliebiger Länge, messe von A nach d eine solche Anzahl von Klaftern, daß der Winkel dBA nicht zu spitzig ist, trage

---

*) Man muß die Linie ab sehr genau bis in die Fuß und Zolle messen, weil hierbey ein kleiner Fehler bey Bestimmung der Länge von AB vervielfacht, in unserm Beyspiele um das Vierfache vergrößert wird.

Fig. 64. von d gegen C einen bestimmten ($n$ten Theil von Ad, errichte in C die Senkrechte Cf, und suche in dieser einen Punct g, der sowohl mit d und B, als auch mit f und C in gerader Linie liegt. Hierauf messe man Cg, und multiplicire sie mit der Zahl, welche den von d nach C getragenen Theil von dA anzeigt: so gibt das Product die Länge von AB zu erkennen, deren Richtigkeit aus der Ähnlichkeit der Dreyecke ABd und dCg folgt. Ist z. B. $Ad = 60$, $dC = 20 = \frac{60}{3}$ und $Cg = 35$ Klaftern gemessen worden; so ist $AB = 35.3 = 105$ Klaftern.

Läßt die Örtlichkeit die Errichtung der Senkrechten rückwärts nicht, dagegen vorwärts zu; so trage man auf der Senkrechten AC von der bis C gemessenen Länge den $n$ten Theil von C bis d, errichte in
65. d die Senkrechte df, messe sie, und multiplicire selbe mit der Zahl, welche den von C bis d getragenen Theil der Linie AC anzeigt: so gibt das Product die Länge von AB zu erkennen.

2. Auflösung. Man errichte auf die zu messende Gerade AB nebst der Senkrechten AC in einiger Entfernung von dem Hindernisse noch eine zweyte hg, messe die Länge einer jeden der beyden Senkrechten AC und hg, nebst ihrem Abstande Ah: so läßt sich daraus die verlangte Entfernung auf folgende einfache Weise berechnen; es ist nämlich:

$$AB = \frac{AC \,.\, Ah}{AC - hg}.$$

Denn in den ähnlichen Dreyecken ABC und hBg verhält sich
$AB : AC = hB : hg$,
oder $AB : AC = (AB - Ah) : hg$.
Daher auch $AB.hg = AC\,(AB - Ah) = AC.AB - AC.Ah$;
ferner $AB\,(AC - hg) = AC.Ah$,
woraus endlich $AB = \dfrac{AC.Ah}{AC - hg}$ folgt.

Ist z. B. $AC = 60°$, $Ah = 50$, und $hg = 29{,}5$ Klaftern gemessen worden:

so ist $AB = \dfrac{60.50}{60 - 29{,}5} = 98{,}3$ Klaftern.

3. Auflösung. Ist man bey Errichtung des rechten Winkels durch Hindernisse beschränkt, oder findet man diese kurze Rechnung dennoch zu beschwerlich: so lasse man in beliebiger Richtung
66. und Entfernung einen Stab in C, und einen zweyten in der Richtung CB in einer angemessenen Entfernung von C in D errichten. Hierauf messe man AC und AD, trage von jeder gefunde-

nen Länge einen bestimmten, z. B. den dritten Theil, in der zuge- Fig.
hörigen Richtung von *A* bis *c* und von *A* bis *d*, errichte daselbst 66.
Stäbe, in deren Verlängerung man einen dritten in *b* einrichtet, daß dieser zugleich auch in der Richtung von *AB* steht; so wird das gemessene Stück *Ab* mit derjenigen Zahl multiplicirt, welche den von *A* bis *c* der gemessenen *AC*, und von *A* bis *d* der gemessenen *AD* getragenen Theil anzeigt, die verlangte Entfernung der Geraden *AB* geben.

Der Grund dieses Verfahrens wird aus der Ähnlichkeit der Dreyecke *ACD* und *Acd* (Gmtr. 81.); ferner aus der parallelen Lage *CD* und *cd* (Gmtr. 80.), und ihren Verlängerungen *CB* und *cb*, und der davon abhängenden Ähnlichkeit der Dreyecke *ACB* und *Abc* gefolgert (Gmtr. 79).

4. Auflösung. Ist man gehindert, von dem zugängigen 67.
Punct *A* nach dem unzugängigen *B* zu sehen; so wähle man eine Standlinie *CD*, von deren Endpuncten *C* und *D* man nach *B* sehen und nach den zugängigen Punct *A* messen kann. Hierauf wähle man in der Geraden *DB* einen beliebigen Punct *E* und messe die beyden Linien *DC* und *EC*, trage von jeder den *n*ten Theil von *c* bis *d* und *e*, verlängere die Gerade *ed*, bis *CB* in *f* geschnitten wird; endlich messe man auch *AC* und trage ihren *n*ten Theil von *C* bis *g*, messe *gf*, und multiplicire ihre Länge mit der Verhältnißzahl *n*, so gibt das Product die Länge *AB*.

Die Gründe hierzu erhellen aus dem bisher Gesagten zur Genüge.

§. 129.

Aufgabe. Eine gerade Linie *AB* zu messen, welche durchaus 68.
unzugängig ist.

1. Auflösung. Man errichte in einem Puncte *C* von solcher Lage, daß seine Entfernungen *AC* und *CB* von den unzugängigen Endpuncten ziemlich gleich mit der zu messenden *AB*, und beyde Puncte daraus sichtbar sind, einen Stab. In einer schicklichen, von *C* aus meßbaren, Entfernung *CD* wähle man einen Punct *D*, von welchem man zugleich nach dem unzugängigen *A* und *B* sehen kann, errichte hier, und in der Richtung *DB* in einiger Entfernung einen dritten in *F*, endlich einen vierten Stab in *G*, welcher in der geraden Linie *DA* ungefähr in ihrer Mitte steht. Hierauf lasse man die Linien *CD*, *CF* und *CG* messen, trage von jeder ihrer Länge einen

Fig. bestimmten Theil von C bis d, bis f und g auf, und bezeichne diese
68. Puncte mit Stäben. Endlich setze man in die Verlängerung von df einen Stab in b, der zugleich auch in der Geraden CB steht; so wie auch einen Stab in die Verlängerung dg in a, der sich auch in der Linie CA befindet; messe hierauf die Gerade ab, und multiplicire ihre Länge mit derjenigen Zahl, welche die aus C bis d, f und g getragene Theile der gemessenen Geraden CD, CF und CG anzeigt: so wird das Product die Länge der unzugängigen Geraden AB zu erkennen geben.

Der Grund dieses Verfahrens wird, wie vorhin zunächst aus der Ähnlichkeit der Dreyecke CDB und Cdb, so wie $CDA \sim Cda$, sodann aus der Ähnlichkeit der Dreyecke CAB und Cab (Gmtr. 81.) bewiesen.

Kann der Stab G so errichtet werden, daß er in beyden Geraden AD und CB in i zugleich steht; so müssen bey richtigem Verfahren die vier Stäbe C, g, i, b, mit dem Gegenstande B in gerader Linie sich befinden.

69. 2. Auflösung. Ist die zu messende unzugängige Gerade so gelegen, daß man in ihrer Verlängerung dießseits des Hindernisses einen Punct C wählen, auf dieselbe eine Senkrechte CD errichten, und in dieser einen solchen Punct finden kann, aus welchem die Endpuncte A und B der zu messenden Geraden sichtbar sind: so errichte man in einem andern Puncte F auf CD eine Senkrechte Fb, welche noch dießseits des Hindernisses liegt, und meßbar ist. Hierauf richte man in dieser Senkrechten Fb zwey Stäbe, a und b, so ein, daß der erste zugleich auch in der Geraden DA, der andere aber in der Richtung DB steht. Endlich messe man DC, DF und ab; so ist

$$AB = \frac{DC \cdot ab}{DF}.$$

Denn es verhält sich

$$DA : DC = Da : DF; \text{ wegen } DAC \sim DaF,$$
$$\text{und } DA : AB = Da : ab; \text{ wegen } DAB \sim Dab;$$

daher auch $AB : ab = DC : DF$ (Rk. 270. 1).

Daraus folgt $AB = \dfrac{DC \cdot ab}{DF}$.

Hat man demnach DF einen bestimmten Theil z. B. der Hälfte von DC gleich gemacht, so ist $AB = 2\,ab$.

3. Auflösung. Man wähle einen Punct *C*, und bestimme den Punct *b*, und sodann den Punct *a* mittelst Anwendung der Aufgabe §. 128. 3). Hierauf messe man *ab*, und multiplicire ihre Länge mit der Zahl, welche die aus *C* bis *g*, bis *h* bis *d* und bis *f* getragenen Theile der gemessenen Geraden *CG*, *CH*, *CD* und *CF* anzeigt: so gibt das Product die Länge der unzugängigen *AB* zu erkennen. Fig. 70.

Anwendung des Bisherigen auf die Vermessung kleiner Flächen und Grundstücke mittelst Stäben und der Kette.

§. 130.

Aufgabe. Ein einzelnes Grundstück, z. B. eine Wiese oder Waldblöße u. dgl., ohne Instrumente, bloß mittelst der Kette und Stäbe zu vermessen, und den Flächeninhalt anzugeben.

1. Auflösung. Wenn man auf der zu vermessenden Fläche selbst operiren kann, so bezeichne man die längste Diagonale mit zwey Stäben *a* und *b*, spanne von *a* in der Richtung nach *b* die Kette aus, messe die Abscisse *a*1, *a*2..., so wie die dazu gehörigen Ordinaten 1*m*, 2*t*... vermög §. 85., und schreibe die gefundenen Maße im beyläufigen Entwurfe (§. 150) an die gehörigen Linien. Ist die Fläche an einigen Stellen sehr krummlinig begrenzt, wie z. B. zwischen *n* und *o*; so wird ein solcher Theil, besonders auf die erst besagte Art behandelt. Hierauf wird die Fläche jedes einzelnen Dreyeckes und Trapez berechnet (Gmtr. 135. und 137.), welches erforderlichen Falles gleich an Ort und Stelle geschehen kann, ohne erst die Figur nach einem verjüngten Maße verzeichnen zu müssen. Die Summe davon gibt den Inhalt der ganzen Fläche. Soll die vermessende Fläche nach einem verjüngten Maße verzeichnet werden; so geschieht dieses in derselben Ordnung, wie die wirklichen Längen auf dem Felde gemessen wurden. (Man sehe auch Gmtr. 119. und 120.). 71.

Wäre man ohne Gehülfen und auch mit keiner Kette versehen, so errichte man auf der Diagonale zwischen ihren Endpuncten noch einen dritten Stab *c* vermög §. 72., um sich in jedem Puncte 1, 2, 3, mittelst zwey Richtpuncten *a* und *c* oder *c* und *b* in die Gerade *ab* selbst einrichten, und darauf die senkrechte Richtung der Ordinaten nach §. 85 angeben zu können.

2. Auflösung. Bey der obigen Voraussetzung wähle man beyläufig in der Mitte einen Punct *M*, messe von diesem aus in alle 72.

Fig. 72. Endpuncte *a*, *b*, *c*......, und von einem Endpunct der Fläche zum andern *ab*, *bc*, *cd*..... Hierauf berechne man jedes Dreyeck *aMb*, *bMc*..... aus den drey gemessenen Seiten vermög Gmtr. 266. 2), oder man verzeichnet sich vorher die Figur (Gmtr. 51. 3), und berechnet die Fläche nach Gmtr. 135. Sehr krumme Begrenzungen, wie z. B. zwischen *h* und *i*, werden nach der vorigen Auflösung behandelt. Die berechneten einzelnen Flächen geben sodann den Flächeninhalt der ganzen Figur. Die etwa erforderliche Zeichnung nach einem verjüngten Maße erhellet nun schon aus dem Vorigen.

Soll eine Figur in eine schon vorhandene Karte, in welcher zwey Puncte *P* und *Q* bestimmt, und aus *M* auf dem Felde sichtbar, aber unzugängig sind, in Verbindung gebracht werden: so geschieht die Verbindung des Punctes *M* mit *P* und *Q* nach der §. 129. 3) gezeigten Art.

3. Auflösung. Ist die zu vermessende Fläche von innen nicht zugängig, wie z. B. ein Teich, eine kleine Waldparthie u. dgl., so stecke man außerhalb der Figur am Anfange gerade Linien *ab*, *bc*, *cd*.... ab, verlängere *ab* und *ay*, messe von *a* bis *n*, und von *a* bis *m* einige Klaftern (am vortheilhaftesten wird *am*=*an* gemacht), sodann auch die Entfernung der Stäbe *n* und *m*, und notire diese Längen gehörig im Entwurfe, um daraus nachher den Winkel *nam*=*yab* verzeichnen zu können. Hierauf messe man die Geraden *ab*. Wenn die nöthige Abmessung zur Bestimmung des Nebenwinkels *abc*, nämlich des Winkels *zbq* innerhalb nicht zu erhalten sind; so trägt man von *b* bis *p* und *q* gleiches Maß, und mißt auch die Länge *pq*, um daraus den stumpfen Winkel *abc* verzeichnen zu können, sodann die Länge von *b* bis *c* u. s. w. Um den Winkel *bcd* nachher bestimmen zu können, messe man für seinen Nebenwinkel *dcr* die Längen *cr*=*cs*, und auch *rs* u. s. w. Die an einer Umfangslinie liegenden Krümmungen, wie z. B. zwischen *h* und *i*, werden mittelst Abscissen und Ordinaten angemessen. Die Verzeichnung einer solchen Figur nach einem verjüngten Maße erhellet schon aus dem bisher Gesagten.

Es ist von selbst klar, daß diese Messungsart nur auf kleine, in ziemlich einerley (horizontalen oder schief geneigten) Ebenen liegenden Flächen Anwendung findet, wie auch, daß die erste Auflösungsmethode der zweyten vorzuziehen ist, und daß in beyden Fällen der Flächeninhalt gleich auf dem Felde bestimmt werden kann, ohne erst die Figur nach einem verjüngten Maße verzeichnen zu müssen.