Drittes Hauptstück.

Von den verjüngten Maßstäben, ihren Verjüngungsverhältnissen, und der Anwendung derselben bey verschiedenen geometrischen und trigonometrischen Aufgaben.

Erster Abschnitt.

Von den verjüngten Maßstäben und ihren Verjüngungsverhältnissen.

§. 110.

Fig. Ein verjüngter Maßstab ist eine durch geometrische Construction in mehre gleiche Theile getheilte Länge, welche zu dem in einem Lande üblichen Normal-Längenmaße für einen vorhabenden Zweck ein bestimmtes Verhältniß hat. Derselbe ist in der ausübenden Geometrie unentbehrlich, und die Größe des Verhältnisses zu dem Normalmaße hängt von dem Zwecke einer Vermessung ab. Ist z. B. von einer Gegend nur ein zur Übersicht gehöriger Situationsplan überhaupt zu entwerfen, bey welchem nur die Lage und Richtung der merkwürdigsten Wege, Flüsse, Bäche, Berge, ꝛc. ohne den Flächeninhalt, angezeigt werden sollen: so kann man die Größe des verjüngten Maßstabes dergestalt wählen, daß nur jene Gegenstände noch deutlich und lesbar genug ausgedrückt werden können. Hingegen muß für Karten zum ökonomischen Gebrauche, bey welchen der Flächeninhalt wenigstens bis in die Quadratklaftern noch richtig zu bestimmen ist, die Größe des verjüngten Maßstabes so gewählt werden, daß man auf demselben, nebst den Klaftern, auch noch einzelne Fuß oder Theile der Klafter im Decimalmaße abnehmen kann; weil die Länge eines Fußes auf die Richtigkeit des Flächeninhaltes einen beträchtlichen Einfluß hat, wie aus folgenden Beyspielen zu ersehen ist.

Es sey bey einem Dreyecke die Grundlinie Fig.

$= 48^\circ$

und die halbe Höhe desselben $= 23^\circ$

so ist der Flächeninhalt dieses Dreyeckes $= 48 \times 23 = 1104\ q^\circ$

Nun sey ebenfalls die Länge der Grundlinie $= 48^\circ$

die halbe Höhe aber $= 23^\circ,1$

so ist der Flächeninhalt des Dreyeckes $= 1108,8\ q^\circ$

also bey einem einzigen und so kleinen Dreyecke schon ein Unterschied von 4,8 Quadratklaftern.

Wäre endlich für ein neu aufzuführendes Gebäude, oder aber von einem schon stehenden ein Grundriß zu entwerfen, wobey es öfters auf Zolle noch ankommt: so müssen diese auf dem verjüngten Maßstabe auch kenntlich gemacht werden. Die zweckwidrigste Bestimmung der Größe eines verjüngten Maßstabes wäre aber jene, wenn man selbe nach der Größe des Papiers, auf welches der Grundriß entworfen werden soll, proportioniren wollte.

§. 111.

Im Allgemeinen wird das Verjüngungsverhältniß des Aufnahmsmaßstabes zu dem Normalmaße so bestimmt, daß

1) für General- oder Übersichtskarten eines Reiches gewöhnlich 1 Wiener Duodecimalzoll = 25000 bis 30000 Wiener Klaftern oder $\frac{1^\circ}{6.12} = 25000^\circ$ bis 30000°, oder eine Verjüngungsklafter $= 25000 . 72$ bis $30000 . 72$ wirkliche Wiener Klaftern ist, d. h. irgend eine verjüngte Länge auf der Karte ist der $\frac{1}{1800000}$ bis $\frac{1}{2160000}$ Theil ihrer gleichnamigen Länge in der Natur.

2) Für Specialkarten eines Landes pflegt man 1'' zu 6000 bis 10000 Klaftern oder 1,5 bis 2,5 Meilen *).

3) Zu topographischen Karten 1'' zu 2000 bis 3000 Klaftern oder $\frac{1}{2}$ oder $\frac{3}{4}$ Meilen zu wählen.

4) Zu Vermessungen für den ökonomischen, z. B. den Katastralgebrauch, wird gewöhnlich 1'' zu 40 Klaftern, zu Übersichtskarten einzelner Herrschaften und Güter nach Erforderniß 1 Zoll zu 200 bis 600 Klaftern gewählt;

*) 1 Meile zu 4000 Wiener Klaftern gerechnet.

Fig. 5) Zu Baurissen einzelner Gebäude wählt man nach Umständen 1 Zoll zu $\frac{1}{2}$ Klafter bis 4 Klaftern.

6) Zu Vermessungen der Forste insbesondere ist das Verjüngungsverhältniß für die Aufnahmsblätter oder Originalkarte 1'' zu 40 bis 80 Klaftern zureichend. Aus diesen Blättern wird sodann die sogenannte Blanketkarte nach demselben Maße copirt.

7) Aus den Aufnahmsblättern wird nachher durch Reduction etwa wie 1:2 die Bestandskarte, und weiter

8) Wie 1:4 die General- oder Übersichtskarte, welche zugleich zur Bodenkarte dient, folglich auch die Bergsituation enthält, entworfen.

9) Für diese Übersichtskarte mehrer Forste, z. B. einer Herrschaft oder eines Gutes, ist das Verhältniß 1'': 600 bis 1000 Klaftern;

10) Für jene einer ganzen Provinz aber 1'': 5000 bis 8000 Klaftern zureichend.

Soll eine besondere Grenzkarte eines Forstreviers entworfen werden, so wird hierzu ein Verhältniß von 1'' zu 10 bis 20 Klaftern gewählt; aus dieser Aufnahme werden sodann die vorgenannten Karten durch Reduction verzeichnet.

§. 112.

Dem nun angeführten zufolge ergibt sich für Forstkarten das Verjüngungsverhältniß:

1) für die Originalkarte (wornach der Flächeninhalt bestimmt wird) $\frac{1}{2880}$ bis $\frac{1}{5760}$, d. h. eine verjüngte Länge auf der Karte ist in der gleichnamigen Länge in der Natur 2880 (oder 5760) Mahl enthalten,

2) Für die reducirte Bestandskarte $\frac{1}{5760}$ bis $\frac{1}{11520}$,

3) für die reducirte Übersichtskarte (Bodenkarte) eines Forstrevieres $\frac{1}{11520}$ bis $\frac{1}{23040}$, endlich

4) für die Übersichtsforstkarte einer Herrschaft $\frac{1}{43200}$ bis $\frac{1}{72000}$; jene einer Provinz aber $\frac{1}{360000}$ bis $\frac{1}{576000}$.

Es versteht sich von selbst, daß die erst angegebenen Verhältnisse nur im Allgemeinen als Anhaltspuncte anzusehen sind, und für besondere Fälle der verjüngte Maßstab jedes Mahl nach dem vorhabenden Zwecke, wie z. B. bey Vermessung einzelner Grundstücke zur Vertheilung an mehre Interessenten, oder zu verschiedenen ökonomischen Benützungen u. dgl., zu wählen ist.

Fig.

§. 113.

Hat man nach dem vorhabenden Zwecke der Aufnahme das Verjüngungsverhältniß bestimmt, so geschieht die Verzeichnung des verjüngten Maßstabes nach folgender

Aufgabe. Das Verhältniß des verjüngten Maßstabes zu dem landesüblichen Normalmaße ist dergestalt bestimmt, daß 40 verjüngte Klaftern 1 wirklichen Wiener Zoll gleich seyen; man soll denselben so verzeichnen, daß darauf nebst einzelnen Klaftern auch Zehntel derselben abgegriffen werden können.

Auflösung. 1) Um dem Maßstabe eine solche Figur zu geben, daß die Bezifferung der Haupt- und Transversaleintheilung beym Ablesen und Abgreifen der Längen eine leichte Übersicht gewährt: so nehme man die gegebene Verjüngungszahl (hier 40) so oftmahl, daß das hieraus erhaltene Product die nächste Potenz von 10 (oder nach Erforderniß die Hälfte davon), hier also $40 \, . \, 2\frac{1}{2} = 40 \, . \, \frac{5}{2} = 100$, eine Hauptabtheilung des Maßstabes gibt.

2) Diesem zufolge nehme man, da hier 40 verjüngte Klaftern = 1 Wiener Zoll sind, diese Länge $2\frac{1}{2}$ Mahl oder $2\frac{1}{2}$ Wiener Zoll *), und trage diese Länge als Hauptabtheilung zu einer schicklichen Länge des Maßstabes mehre Mahle, z. B. dreymahl, auf eine Gerade *CD*, errichte in dem Endpuncte *C* und *D* senkrecht *CA* und *DB* von unbestimmter Länge. 48.

3) Hierauf theile man die erhaltene Potenz von 10 (oder ihre Hälfte); hier also 100, in zwey gleiche (oder ungleiche, jedoch schickliche) Factoren 10.10, trage auf den Senkrechten *CA* und *DB* einen beliebigen (jedoch von schicklicher Länge gewählten) Theil so oftmahl auf, als der eine Factor durch seine Einheiten anzeigt (hier 10),**) verbinde die Endpuncte *A* und *B*, und trage die vorige Länge für die Hauptheile von *A* bis *B* eben so oft, wie von *C* bis *D* auf, wobey

---

*) Es bedarf wohl kaum einer Erinnerung, daß man sich die richtige Grundeinheit des Normalmaßes, den Wiener Fuß in seine Theile getheilt, zu verschaffen trachten muß.

**) Welcher bey ungleichen Factoren für die Breite des Maßstabes zu wählen ist, muß die Bezifferung und leichte Zählung entscheiden; gewöhnlich wird der Factor 10 hierzu zu wählen seyn. Siehe Figur 49 bey $20^{\circ} = 1$ Wiener Zoll.

Fig. man sich zugleich von der richtigen Stellung der Senkrechten über-
48. zeugen kann Gmtr. 85. 5).

4) Nun theile man den ersten Haupttheil *D* 0 in so viele gleiche Theile, als der andere Factor oben unter 3) durch seine Einheiten zu erkennen gibt (hier in 10); ziehe die Transversalen 90... *B* und die übrigen mit dieser parallel; so wie auch die Parallelen 1..1, 2..2, 3...3 u. s. w., setze endlich die Bezifferung dazu, wie aus der Figur zu sehen: so ist der verjüngte Maßstab nach dem verlangten Verjüngungsverhältniß construirt, worauf einzelne Klaftern, und zwischen je zwey Parallelen auch zehnte Theil derselben schätzungsweise mit dem Zirkel abgegriffen werden können.

Die richtige Verzeichnung eines Maßstabes wird nach Geometrie 85. 5) untersucht, aber nebst der äußerst genauen Verzeichnung ist auch die Unveränderlichkeit eine seiner wesentlichsten Eigenschaften. Kann man sich keinen auf Messing gestochenen verschaffen (§. 41. 3): so muß man wenigstens auf ein festes, nicht sehr poröses Holz, gutes Zeichenpapier leimen, und nach gänzlicher Trocknung erst den Maßstab nach vorbeschriebener Art darauf zeichnen. Anstatt der nichtssagenden Überschrift eines Maßstabes, z. B. Maß-
48. stab von 200 Wiener Klaftern, ist es sachdienlicher das Verjüngungsver-
u. hältniß desselben, und zwar oben darüber, wie Fig. 48. und 49.
49. zu sehen, nicht aber seitwärts zu setzen. Denn durch die erwähnte Überschrift erfährt man nicht mehr, als was die Bezifferung ohnedieß schon ausdrückt.

§. 114.

Man kann sich auf einer und derselben ungefähr 8′′ langen und 2′′ breiten Messingplatte, vier Maßstäbe zu verschiedenen ökonomischen Vermessungen stechen lassen, zwey davon sind Fig. 48. und andere zwey Fig. 49. vorgestellt. Der eine, $20^{\circ} = 1$ Wiener Zoll, zeigt die §. 113. unter 3) erwähnte Theilung nach ungleichen Factoren; der andere aber, $100^{\circ} = 1$ Wiener Zoll, kann, wenn man zu jeder Zahl in Gedanken eine Nulle hinzu fügt, als tausendtheiliger, wenn man hingegen bey jeder Zahl eine Nulle hinweg läßt, auch als Maßstab gebraucht werden, wo $10^{\circ} = 1$ Wiener Zoll gibt, und wovon auf der Transversaltheilung einzelne Zehntel der verjüngten Klafter genau bestimmt sind. Denkt man zwey Nullen hinweg, oder dividirt man jede Zahl durch 100; so wird jede Hauptabtheilung des Maßstabes Eine verjüngte Klafter, und es können zwischen 100 und 0, Zehntel, auf der Transversaltheilung selbst aber einzelne Hunderttheile der Klafter abgegriffen werden.

Aus der Einrichtung eines verjüngten Maßstabes, wie **Fig.** 50., kann man einzelne Zehntel einer Klafter genau abgreifen, welche bey vorzüglich genauen ökonomischen Vermessungen sehr zweckdienlich sind. **Fig.** 50.

§. 115.

Aufgabe. Umgekehrt, aus der Überschrift eines verzeichneten verjüngten Maßstabes das Verjüngungsverhältniß desselben zu dem Normalmaße zu finden.

Auflösung. Es seyen vermög der Überschrift eines Maßstabes
$80^{\circ} = 1$ W. Zoll: so sind 80 W. Klf. $= 1$ W. Zoll
oder 80 „ $= \frac{1}{12}$ W. Fuß.
oder 80 „ $= \frac{1}{12 \cdot 6} = \frac{1}{72}$ W. Klaf.
oder es ist 1 „ $= \frac{1}{72 \cdot 6} = \frac{1}{5760}$ W. K. 80

d. h. eine verjüngte Klafter ist gleich dem $\frac{1}{5760}$ Theil der Normalklafter, oder eine Länge in der vermessenen Fläche ist 5760 Mahl so groß als die gleichnamige auf der Karte.

Man erhält also das verlangte Verjüngungsverhältniß, **wenn man durch das Product aus der Auflösezahl mit der gegebenen Verjüngnngszahl die bekannte Normaleinheit dividirt.**

§. 116.

Aufgabe. Zuweilen bekommt man Karten oder geometrische Grundrisse zu Handen, worauf kein Maßstab sich befindet, nach welchem sie aufgenommen oder verzeichnet worden sind; sey es, daß derselbe entweder absichtlich, oder aus Nachlässigkeit hinweggelassen worden ist; man soll in beyden Fällen den Maßstab hierzu suchen.

1. **Auflösung.** Man wähle auf demjenigen Grundstücke oder in der Gegend, wovon man den Grundriß hat, zwey ausgezeichnete unveränderliche Puncte, z. B. zwey Grenzsteine u. dgl., von welchen einem man zu dem andern sehen und messen kann, und suche die gleichnamigen hierzu auf der Karte auf. Sodann messe man die Entfernung jener zwey Puncte auf dem Felde genau (versteht sich horizontal vermög §. 6. und 12.), welche z. B. in irgend einem landesüblichen Maße 73,2 Klafter betragen möge. Da die gemessene Länge aber selten eine solche Zahl von Klaftern gibt, die man in schickliche Factoren zerlegen, und darnach den zu suchenden Maßstab verzeichnen könnte, sondern vielmehr eine Primzahl geben wird, die sich in Factoren nicht zerlegen läßt (Rk. 79 in 11): so nehme man die

Fig. Entfernung der zwey Puncte auf der Karte, und untersuche auf einem beliebigen verjüngten Maßstabe (am besten auf einem 1000 theiligen), wie viel Theile sie auf demselben enthält, z. B. 149,5; ferner wähle man eine solche Zahl, die auf dem zu suchenden Maßstabe
48. für eine Hauptabtheilung gelten soll, z. B. 100 und schließe: $73,2:100=149,5:x$, nämlich 73,2 Klaftern des gesuchten Maßstabes geben 149,5 Theile auf dem willkührlichen Maßstabe: wie viel Theile werden 100 Klaftern des erstern auf dem letztern abschneiden? und man findet $x=203,95$, also beynahe 204 Theile des willkürlichen Maßstabes. Diese Länge trage man auf einer geraden Linie, z. B. von *A* nach *o*, und von da noch weiter mehrmahl auf, trage auch von *A* nach *C*, und von *B* nach *D* beliebige 10 gleiche Theile, und theile endlich die erste Hauptabtheilung gleichfalls in 10 gleiche Theile: so ist der gesuchte Maßstab, wenn derselbe gehörig ausgezogen und beschrieben wird, zu der vorgelegten Karte fertig, und es können auf demselben einzelne Klafter und Theile derselben abgegriffen werden.

2. Auflösung. Ist man von der vermessenen Gegend zu weit entfernt, und man hat davon bloß die Karte vor sich: so wähle man auf dieser eine einfache, möglichst geradlinige Figur, deren Flächeninhalt in der Vermessungstabelle, oder dem Lagerbuche u. dgl. angegeben ist, berechne den Inhalt einer solchen Figur nach einem beliebigen (1000theiligen) Maßstabe, und vergleiche diesen berechneten mit jenem in der Vermessungstabelle angegebenen. Wären beyde gleich, so wäre der gebrauchte Maßstab auch zugleich der dazu gehörige, welches jedoch nur zufällig und fast nie seyn wird. Ist hingegen der neu berechnete Inhalt kleiner als der schon angegebene, so ist der dabey gebrauchte Maßstab zu groß, und so umgekehrt. Es stehen nämlich die bey einer und derselben Figur sich ergebenen Flächeninhalte im verkehrten Verhältnisse mit den bey Berechnung derselben gebrauchten quadrirten Maßstäben. Es habe z. B. eine solche Figur nach der neuen Berechnung eines gewählten Maßstabes 5482 q^o, in der Vermessungstabelle aber ist für dieselbe Figur ihr Flächeninhalt 6420 q^o angegeben, so schließt man;

$$6420 : 5482 = 100^2 : x^2;\text{ woraus}$$

$$x = 100\sqrt{\frac{5482}{6420}} = 100 \cdot 0,924 = 92,4 \text{ Klaftern folgt.}$$

Man nehme auf dem beliebig gewählten Maßstab diese 92,4 Klaftern, trage sie auf eine beliebige Gerade mehrmahl auf, theile Eine solche

Länge als Hauptabtheilung des gesuchten Maßstabes in 100 gleiche Theile, und verfahre übrigens eben so wie vorhin. Um sich von der Richtigkeit des gesuchten Maßstabes zu überzeugen, wähle man die obige, oder besser, eine andere einfache Figur, und berechne darnach ihren Inhalt: so muß, wenn in beyden Berechnungen kein Fehler unterlaufen ist, die in der Vermessungstabelle angegebene Fläche (kleine, unvermeidliche Abweichungen ausgenommen §. 94.) zum Vorschein kommen. Fig. 48.

§. 117.

Bey einer Figur, welche am Umfange mittelst eines Winkelmessers aufgenommen wird, pflegt man die Umfangswinkel, wo keine Genauigkeit erfordert wird, durch den bekannten Gradbogen, Transporteur genannt, oder durch den geradlinigen Transporteur, Sehnenmaßstab, auf das Papier zu übertragen, und umgekehrt in einzelnen Fällen schon verzeichnete Winkel zu messen. Allein dieses Verfahren liefert gar zu unrichtige Resultate. Folgende Methode, Winkel nach Graden auf das Papier zu übertragen, oder schon verzeichnete nach Graden zu messen, ist richtiger, und in einzelnen Fällen gut brauchbar. Für große zusammenhängende Vermessungen wird weiter unten ein eigenes Verfahren, gemessene Winkel auf das Papier zu übertragen, angegeben werden. Jeder 1000theilige Maßstab dient zugleich als geradliniger Transporteur oder Sehnenmaßstab (siehe Gmtr. **Fig.** 52.). Denn man kann vermittelst desselben, wenn man nur eine Tafel der natürlichen Sinuse, oder in Ermanglung derselben eine Tafel, welche die Logarithmen der Sinuse enthält, bey Handen hat, ebenfalls die Größe eines gegebenen Winkels auf dem Papier sowohl verzeichnen, als auch messen.

§. 118.

Aufgabe. Einen Winkel, z. B. von 64° 16′ vermittelst eine 1000theiligen Maßstabes zu verzeichnen.

1. Auflösung. Man ziehe, wenn nicht eine gerade Linie schon gegeben ist, eine willkürliche *cb*, fasse mit einem Handzirkel auf dem 1000theiligen Maßstabe genau 1000 Theile, setze die eine Zirkelspitze in *c* ein, beschreibe mit der andern einen Kreisbogen *bma*, und suche nun aus der Sinustafel den natürlichen Sinus des halben gegebenen Winkels, nämlich von $\frac{64^\circ\ 16'}{2} = 32^\circ\ 8'$ welchen man 51.

51. $= 0{,}5318913$ findet; in diesem Decimalbruche rücke man, wegen des Halbmessers $= 1000$, das Komma um drey Stellen weiter rechts: so hat man $531{,}8913$, und das Doppelte davon gibt die Sehne von 64°, $16'$, das ist: die Sehne von $64^\circ\ 16'$ enthält $531{,}8913 \times 2 = 1063{,}7826$, oder ohne Decimalstelle 1064 Theile des tausendtheiligen Maßstabes. Man fasse also die 1064 Theile, oder $10^\circ\ 6'\ 4''$ auf demselben, trage sie von *b* nach *a* als eine Sehne, und verbinde *a* mit *c*; so wird der Winkel $acb = 64^\circ\ 16'$ seyn.

2. Auflösung. Hat man keine Tafel der natürlichen Sinuse bey Handen, ist man aber mit einer logarithmisch-trigonometrischen Tafel versehen (man sehe meine Logarithmen 2. fehlerfreie Ausgabe. Wien bey Heubner), so verfährt man auf folgende Weise:

Man suche zu dem halben gegebenen Winkel, nämlich zu $\frac{64^\circ\ 16'}{2} = 32^\circ\ 8'$ den *log. sin.* auf, ziehe von der Kennziffer des *log. sin.* jedes Mahl 7 Einheiten ab, und suche zu diesem Reste in den gemeinen Logarithmen die entsprechende Zahl: so wird das Doppelte hiervon die Sehne des gegebenen Winkels seyn.

Hier in diesem Beyspiele findet man $\log. \sin. 32^\circ\ 8' = 9{,}725823$; davon 7 abgezogen, verbleiben $2{,}725823$; hierzu findet man die entsprechende Zahl $= 531{,}89$ und das Doppelte derselben ist $531{,}89 \times 2 = 1063{,}78 = 1064$, wo man dann weiter wie oben verfährt *).

Die Richtigkeit dieses Verfahrens in beyden Fällen erhellet aus dem folgenden

Beweis zu 1).

Es ist $ad = \frac{1}{2}ab = \sin \frac{1}{2} acb = \sin acd$ (Gmtr. 220), und $2\,ad = ab = 2 \sin acd =$ der Sehne des Winkels acb, oder des Bogens bma; ferner, weil vermög Gmtr. 239. trigonometrische Linien von ähnlichen Bogen sich verhalten, wie die dazu gehörigen Halbmesser: so verhält sich

$$ac : ad = \sin cda : \sin dca \text{ (Gmtr. 242)},$$

oder $1000 : ad = (\sin 90^\circ = 1) : \sin 32^\circ\ 8'$ (Gmtr. 239);

daraus folgt $ad = \sin 32^\circ\ 8' \times 1000 = 0{,}531891 \times 1000 = 531{,}891$

und $2\,ad = ab = 531{,}891 \times 2 = 1063{,}782 = 1064$.

---

*) Es ist nicht nothwendig, daß man den *log. sin.* insbesondere erst herausschreibt, und dann 7 davon abzieht, sondern man kann diese Subtraction in Gedanken sehr leicht verrichten, und gleich unmittelbar die entsprechende Zahl aus den gemeinen Logarithmen nehmen.

Beweis zu 2). Fig. 51.

Aus der vorstehenden Proportion ist

$ad = sin\ 32° \ 8' \times 1000$ gefunden worden; ferner ist $log\ ad = log\ sin\ 32° \ 8' + log\ 1000$

oder $log\ ad = (9{,}725823 - 10) + 3$ (Gmtr. 240.),

oder $log\ ad = 9{,}725823 - 7 = 2{,}725823$; hieraus

folgt $ad = 531{,}89$

und $2\ ad = ab = 531{,}89 \times 2 = 1064$ wie oben.

Wäre ein Winkel nahe bey 90°, oder ein stumpfer Winkel ncb zu verzeichnen, und man könnte im ersten Falle die ganze Sehne von dem tausendtheiligen Maßstabe nicht auf einmahl abgreifen, so kann man in beyden Fällen auf folgende Weise verfahren.

Man ziehe von dem zu verzeichnenden Winkel so oftmahl 60° ab, als es angeht, und nachdem mit einem Halbmesser $= 1000$ Theile der Bogen bfn beschrieben ist, trage man den Halbmesser als Sehne von 60° auf den Bogen so oftmahl auf, als man von dem zu verzeichnenden Winkel 60° abgezogen hat; zu dem halben Überreste suche man auf die vorige Art entweder nach 1) oder 2) die Sehne, und trage sie von dem auf dem Kreisbogen zuletzt bestimmten Punct als Sehne noch weiter auf, so ist der verlangte Winkel verzeichnet. Z. B. es wäre ein Winkel von 89° 20′ zu verzeichnen, so trage man den Halbmesser $= 1000 = cb$ von b nach f als Sehne von 60° auf; und weil $89° \ 20' - 60° = 29° \ 20'$ ist, weiters für $\frac{29° \ 20'}{2} = 14° \ 40' = 0{,}253195$ aus den Sinustafeln gefunden wird; da ferner $0{,}253195 \times 1000 = 253{,}195$, und endlich $253{,}195 \times 2 = 506{,}390 = 506$ ist: so darf man die 506 Theile auf dem Maßstabe nur abnehmen, und als Sehne von f bis g auftragen, um den verlangten Winkel gcb oder Bogen $bfg = 89° \ 20'$ zu erhalten.

Auf ähnliche Weise verfährt man bey einem stumpfen Winkel ncb; oder besser, man zeichnet seinen Nebenwinkel hcn nach der oben unter 1) oder 2) angeführten Methode.

§. 119.

Aufgabe. Einen gegebenen Winkel acb vermittelst eines tausendtheiligen Maßstabes zu messen.

1. Auflösung. Durch Hülfe der Sinustafeln, die sich auf den *sinustotus* $= 1$ beziehen. Man beschreibe aus der Spitze c mit einem Halbmesser $cb = 1000$ Theile des Maßstabes einen Bogen bma, fasse mit dem Zirkel die halbe Sehne $= ad$, und sehe, wie viel Theile sie auf dem tausendtheiligen Maßstabe abschneidet, so ist dieses der Sinus des halben gegebenen Winkels. Z. B. man hätte $ad = 248$ gefunden: so dividire man diese Zahl durch

Fig. 51. 1000, d. i. man setze ihr eine Null als Kennziffer vor, nämlich $\frac{248}{1000}$ $=0,248$, und suche zu diesem Sinus den Winkel auf, welchen man $=14^\circ\ 21' +$ noch einigen Secunden findet, die man nach Gmtr. 237. 2) bestimmen kann: also ist der gegebene Winkel $acb = (14^\circ\ 21' +) \times 2 = 28^\circ\ 42' +$ noch einigen Secunden, die aber vermög §. 95. 3) ohne Nachtheil hinweggelassen werden können.

2. **Auflösung. Durch Hülfe logarithmisch-trigonometrischer Tafeln.** Man verfahre ganz auf die vorige Weise, um den Decimalbruch 0,248 zu erhalten, suche zu diesem den gemeinen Logarithmus auf, und setze demselben die Kennziffer 9 vor, wenn der Decimalbruch in der ersten Stelle eine bedeutliche Ziffer enthält, wie hier: so hat man den *log sin* des halben gegebenen Winkels, nämlich mit der vorgesetzten Kennziffer 9 ist *log sin* $acd = 0,248 = 9,394452$. Hierzu findet man einen Winkel $= 14^\circ\ 21'\ 33'' = acd$; folglich ist der gegebene Winkel $2 . acd = acb = (14^\circ\ 21'\ 33'') \times 2 = 28^\circ\ 43'\ 6''$.

Wenn der auf obige Art gefundene Decimalbruch erst in der zweyten Stelle eine bedeutliche Ziffer hat, als z. B. 0,028; so darf man dem *log* 28 nur die Kennziffer 8; und da, wo erst die dritte Stelle eine bedeutliche Ziffer enthält, wie z. B. 0,004, darf man nur dem *log* 4 die Kennziffer 7 vorsetzen. Die Richtigkeit dieses Verfahrens erhellet auf ähnliche Weise, wie oben §. 118 gezeigt wurde.

Ist ein stumpfer Winkel *bcn* zu messen, so mißt man seinen Nebenwinkel *hcn*, und ziehe ihn von 180° ab. Oder man trägt auf den Bogen *bfn* den Halbmesser = 1000 als Sehne von 60 Grade so oftmahl auf, als es angeht, bis nämlich ein Bogen übrig bleibt, der kleiner als 60° ist. Man messe die Sehne dieses Bogens, bestimme die Anzahl Grade und Minuten wie vorhin, entweder nach 1) oder 2), und addire hierzu so vielmahl 60°, als man Halbmesser auf den Bogen *bfn* getragen hat: so hat man auch die Größe des gegebenen stumpfen Winkels.

§. 120.

Kommt man in den Fall, Winkel nach Graden möglichst genau auf dem Felde anzugeben, ohne daß man einen eigentlichen Winkelmesser bey Handen hat: so leistet hierbey der Meßtisch gute Dienste, und man verfährt auf folgende Art:

Nachdem der Meßtisch nach §. 87. 3) über den Punct *A* (Fig. 3.) eines Winkels *BAC* gestellt ist, und die Visirlinien auf dem Tischblatte gezogen sind *), welches in **Fig. 14.** deutlicher zu sehen ist, schneide man nach einem richtig eingetheilten tausendtheiligen Maßstab auf der längsten Seite ad mit einem Halbmesser $= 1000 = ab$ ab, und messe den senkrechten Abstand dieses Punctes b von dem andern Schenkel in Theilen dieses Maßstabes: so wird jener Abstand, nämlich bc der Sinus des Winkels a seyn, und vermöge Gmtr. 242. verhält sich **Fig. 14.**

$$ab : bc = \sin acb : \sin a,$$

oder $1000 : bc = 1 : \sin a$, vermög Gmtr. 239;

daraus folgt $\sin a = \dfrac{bc}{1000}$.

Es sey $bc = 528$ gefunden worden:

so ist $\sin a = \frac{528}{1000} = 0{,}528$; (für $\sin 90° = 1$).

Oder $\log \sin a = \log 0{,}528 = 0{,}722634 - 1$ (Rk. 341.),

und $\log \sin a = 9{,}722634$ (für $\sin tot = r$ Gmtr. 239. 1);

endlich ist $a = 31°\ 52'\ 13''$.

Wäre $bc = 28$, mithin $\sin a = \frac{28}{1000} = 0{,}028$,

und $\log \sin a = 0{,}028 = 0{,}447158 - 2$ gefunden worden:

so ist $\log \sin a = 8{,}447158$; folglich $a = 1°\ 36'\ 16''$.

Und hätte man $bc = 0{,}09$; daher $\sin a = \frac{9}{1000} = 0{,}009$, und

$\log \sin a = 0{,}009 = 0{,}954243 - 3$ gefunden: so ist

$\log \sin a = 7{,}954243$; folglich $a = 0°\ 31'\ 6''$.

Man sieht aus diesem, daß man, wenn die Zahl des Sinus in der ersten Decimalstelle, d. i. in der Stelle der Zehntel, eine bedeutliche Ziffer enthält, nur dem *log sin* die Kennziffer 9; wenn sie nur Hundertel enthält, die Kennziffer 8; und wenn sie nur Tausentel enthält, die Kennziffer 7 vorsetzen dürfe, um sogleich den *log sin* des Winkels zu haben.

Daß dieses erst gezeigte Verfahren einen gegebenen Winkel zu messen, besonders der nicht viel über 60° hat, anstatt der gewöhnlichen Messung mittelst des Transporteurs mit Vortheil gebraucht werden kann, leuchtet von selbst ein; jedoch wird jeder bey einigem Nachdenken auch zugleich einsehen, daß die §. 118. bis 119. gezeigte Art, Winkel zu messen und zu verzeichnen, nur in einzelnen Fällen, nicht aber im Großen bey ganzen Vermessungen Statt finden könne, wie weiter unten erhellen wird.

*) Es ist in einem solchen besonderen Falle vortheilhaft, den Scheitelpunct des zu messenden Winkels auf dem Tischblatte über dem Drehungspunct, d. h. in der Mitte desselben zu wählen.

Fig. 14. Der mehren Richtigkeit wegen soll man die Winkel nicht viel über, und nicht viel unter 60° messen, vermöge §. 108. und 109. Auch ist es vortheilhaft, wenn der tausendtheilige Maßstab $\frac{3}{4}$ bis 1 Fuß lang ist. Ferner erhellet von selbst, daß in den meisten gewöhnlichen Fällen die Secunden ohne Nachtheil hinweggelassen werden können.

Zweyter Abschnitt.

Verschiedene geometrische und trigonometrische Aufgaben, als Vorbereitung zur Vermessung ganzer Gegenden.

§. 121.

Die Ausmessung gerader Linien, wobey der Maßstab ohne Hinderniß unmittelbar angelegt werden kann, ist schon §. 75. bis 81. gezeigt worden: es kommt aber sehr oft vor, daß entweder die auszumessenden Linien zu lang sind, folglich die Messung zu weitläufig würde, oder daß Hindernisse sich entgegenstellen, die keine unmittelbare Messung zulassen, oder sie doch beschwerlich machen. In diesen Fällen gibt uns die theoretische Geometrie, besonders aber die Lehre von den Proportionallinien und der Ähnlichkeit der Figuren Hülfsmittel an die Hand, auch ohne wirkliche Anlegung des Maßstabes dergleichen Linien zu messen. Dieses kann nach Umständen entweder mit oder ohne Meßinstrumente geschehen.

A. Einige, der nützlichsten Aufgaben, welche auf dem Felde ohne Instrumente, bloß mittelst Stäben und der Kette aufgelöst werden können.

§. 122.

1. Aufgabe. Auf dem Felde einen Winkel von 60 Graden auszustecken.

Auflösung. Man schlage an beyden Enden der ausgespann-
52. ten Kette Pflöcke *a* und *b*, lasse einen Kettenring, z. B. in *a*, fest liegen, und reiße mit einem durch den andern *b* gesteckten Pflock bey angespannter Kette in der Gegend bey *c* einen kleinen Bogen auf der Erde, diesen Bogen durchschneide man mit derselben Länge der Kette aus *b*; so ergibt sich der Punct *c*, der mit *a* und *b* bey *a* einen Win-