

Dritter Abschnitt.

Von den unvermeidlichen Abirrungen, die bey der Messung gerader Linien sowohl, als auch der Winkel sich ergeben, und insbesondere von dem Grade der Zuverlässigkeit, womit Linien und Winkel auf dem Felde gemessen und auf das Papier übertragen werden können.

A. Von den Ursachen der unvermeidlichen Abirrungen (Operationsabweichungen), und von dem Grade der Zuverlässigkeit überhaupt.

§. 93.

In der theoretischen Geometrie wird der Punct ohne aller Ausdehnung, und die Linie als bloße Ausdehnung in die Länge ohne Breite und Dicke betrachtet (Gmtr. 2.); ganz anders verhält es sich aber mit den Puncten und Linien in der praktischen Geometrie. Hier sind die Puncte, wenn sie in die Sinne fallen sollen, selbst Theilchen einer Fläche, und so haben auch die praktischen Linien eine gewisse Breite.

Auf dem Felde dienen nach Umständen oft ganze Flächen und Körper, z. B. Grenzsteine, Häuser, Bäume, Bergspitzen u. dgl. als Puncte; und Flüsse, Hecken, Wege u. dgl. als Linien. Aus diesem erhellet, daß bey der möglichsten Vollkommenheit der Instrumente und der genauesten Behandlung derselben bey Vermessungen, ferner bey der vollkommensten Befolgung der Theorie, in der ausübenden Geometrie Fehler gänzlich zu vermeiden, niemahls in unsern Kräften steht, weil uns die Natur hierin selbst Grenzen gesetzt hat, wie weiter unten deutlicher erhellen wird. Man nennt daher solche Fehler, die den gemachten Voraussetzungen ungeachtet dennoch sich ergeben, unvermeidliche Fehler, oder eigentlicher unvermeidliche Operationsabweichungen. Andere Fehler, die wegen unrichtiger Stellung und unrichtigen Gebrauch der Instrumente und Werkzeuge, oder aus Unachtsamkeit u. dgl. kann man vermeiden.

Fig.

§. 94.

Um sich von dem Daseyn der unvermeidlichen Abweichungen in der Ausübung durch ein einfaches Beispiel zu überzeugen, verzeichne man ein ungleichseitiges Dreyeck, messe dessen Seiten auf einem beliebigen Maßstabe, und berechne den Flächeninhalt, indem man jedes Mal eine andere Seite zur Grundlinie nimmt: so wird man finden, daß die dadurch erhaltenen drey Resultate fast nie übereinstimmen, sondern mehr oder weniger von einander abweichen werden.

Da nun ein Dreyeck die einfachste Fläche ist, die verzeichnet werden kann: so folgt, daß alles, was durch Zeichnung verrichtet wird, Abweichungen unterworfen ist, die um so größer werden, je öfter die Zeichnung wiederholt und fortgesetzt wird. Wir müssen daher auf dem Papier die praktischen Punkte und Linien den theoretischen so nahe als möglich zu bringen, d. h. sie so zart zu entwerfen, als es die Werkzeuge zulassen und die Umstände erfordern, und wo möglich jedes Mal die Rechnung der Zeichnung vorzuziehen, wie auch auf Mittel zu denken trachten, durch welche die unvermeidlichen Fehler, die einer jeden unserer Handlungen gleichsam eigen sind, in die Classe des möglichst Kleinsten versetzt werden.

§. 95.

Die unvermeidlichen Operationsabweichungen rühren hauptsächlich her:

1) Aus der Unvollkommenheit unsers Gesichtes. Es lehrt nämlich die Erfahrung, daß man Gegenstände, die sehr entfernt liegen, nicht mehr genug deutlich erkennen kann; welches jedoch auch von der Farbe, Figur und stärkern oder schwächern Beleuchtung der entfernten Gegenstände mit abhängt. Die Ursache hiervon liegt sowohl in der Unvollkommenheit unsers Auges selbst, als auch darin, daß die zwischen unserm Auge und dem Gegenstande befindliche Atmosphäre (Dunstkreis) einen großen Theil der von dem Objecte zurückfahrenden Lichtstrahlen zerstreuet. Die Folge daraus ist diese: wenn man in einer gewissen Entfernung ein kleines Object, welches z. B. unter einem Sehewinkel von 2 Minuten ins Auge fällt, nicht mehr deutlich erkennen kann, die Dioptr eines Visirmittels mögen, nach dem Augenmaße zu urtheilen, noch so gut gerichtet zu seyn scheinen: so bleibt es doch mit der Ungewißheit einer Minute un-

entschieden, ob man die Diopter nicht noch um etwas Weniges Fig. verrücken soll *).

Herr Professor Bugge hat durch Untersuchungen den kleinsten Winkel des deutlichen Sehens für ein gewöhnlich gutes Auge bey klarem Sonnenschein = 1 Minute; bey hellem Tage aber ohne Sonnenschein 2 Minuten gefunden. Diese dort Seite 59 und 60 angestellten Untersuchungen habe ich gleichfalls von verschiedenen Augen wiederholen lassen, und mich von der Richtigkeit des Resultates überzeugt.

Es folgt daraus: daß man unserm Auge auf große Entfernungen, oder Kurzsichtigen überhaupt mit Fernröhren zu Hülfe kommen muß (§. 64. bis 69.).

2) Von der Strahlenbrechung. Ein Lichtstrahl, der von einem Gegenstande durch die Luft in unser Auge kommt, geht in keiner geraden Linie fort (§. 59.), und es ist die Krümmung dieser Lichtstrahlen um so größer, je weniger der Gegenstand, von welchem sie kommen, über den Horizont erhaben ist; daher erfordern die Winkel, welche solche Gegenstände an unserm Auge machen, einige Verbesserungen, wovon das Nähere weiter unten.

3) Von der Körperlichkeit mancher Theile der Instrumente und Werkzeuge, die bloß mathematische Punkte und Linien vorstellen sollen; daher von der Unrichtigkeit oder vielmehr von der Unmöglichkeit der vollkommen genauen Eintheilung und Verfertigung der Winkelmessinstrumente, welches zum Theil aus dem Folgenden erhellet:

Es sey der Halbmesser eines gewöhnlichen Winkelmessers = 5 Zolle, so ist sein Umkreis = $2.5.3,14 = 31,4$ Zolle. Ist derselbe in 360 Grade eingetheilt, so kommt auf einen Grad, oder 60 Minuten, oder $60.60 = 3600$ Secunden, ein Raum von $\frac{31,4}{360} = \frac{31,4.12}{360} = 1,5$ Linien. Gesezt, es betrage die Breite eines Theilstreiches, wodurch die Grade von einander abgetheilt sind, nur $\frac{1}{100}$ einer Linie (sind diese Striche feiner, so muß man, um sie noch deutlicher

*) Nach meinen hierüber wiederholt angestellten Untersuchungen beträgt die Dicke eines mittlern Pferdehaares 0,1 Wiener Linien.

„ „ „ „ Menschenhaares 0,04 „ „
 „ „ „ einfachen Seidenfaden 0,004 „ „

Fig. zu unterscheiden, ein Vergrößerungsglas haben): so findet man aus der Proportion: $1,05 : 0,01 = 3600 : x$ (nämlich die Breite von 1,05 Linien nimmt einen Raum von 3600 Secunden ein, wie viel wird die Breite von 0,01 Linie in Secunden betragen?), daß ein Theilstrich, den man mit freyem Auge noch deutlich unterscheiden kann, 34 Secunden-betrage. Die Theilstriche auf den Reichenaich'schen Theodoliten sind so fein als ein einfacher Seidenfaden; daher nimmt nach dem Vorigen auf einen zehnzülligen Kreis ein Theilstrich einen Raum von 1,04 Secunden ein. Daraus erhellet deutlich, daß auch die allerfeinsten Theilstriche, da sie doch, um sichtbar zu seyn, einige Breite haben müssen, eine bis auf einzelne Secunden gehende Genauigkeit im Winkelmessen nicht zulassen. Nur durch die Repetition der Winkel wird es möglich, die erforderliche Genauigkeit zu erhalten.

Bei Transporteurs, wie sie sich in den Reißzeugen gewöhnlich vorfinden, sind die Theilstriche bey weitem breiter als ein Menschenhaar, man kann sie wenigstens für 0,05 einer Linie setzen, und ihr Halbmesser beträgt zwey, höchstens drey Zolle: man findet daher nach dem Vorhergehenden, daß für einen Halbmesser von zwey Zolle die Breite eines Grades oder 60 Minuten einen Raum von 0,418 oder beynähe 0,4 einer Linie; und ferner ein Theilstrich einen Raum von $7,2'$, also über 7 Minuten einnimmt. Man sieht hieraus, daß der gewöhnliche Transporteur dasjenige Instrument nicht ist, womit man Winkel bis auf einzelne Minuten auf das Papier zeichnen könne.

Die Linien mit einem feingeschärften Bleystifte können zwar feiner, als die erst erwähnten Theilstriche bey dem Transporteur gezogen werden, doch muß man für ihre Breite auch drey bis vier Minuten bey einem Halbmesser von fünf bis sechs Zolle, wie sie für gewöhnliche Winkel bey dem Meßtische und der Busssole vorkommen, setzen *).

*) Diejenigen, die glauben, daß man mit der Zirkelspitze feinere Linien als mit einem fein zugeschräkten Bleystifte ziehen könne, scheinen nur durch ein günstiges Vorurtheil für jene eingenommen zu seyn. Denn eine auf jene Art gezogene Linie kann nur vermittelt der mit der Zirkelspitze in das Papier gedruckten Vertiefung, d. i. durch Licht und Schatten dem Auge bemerklich gemacht werden; es wird also diese Vertiefung breiter seyn müssen, als eine mit einem fein zugeschräkten Bleystifte gezogene, bey der die schwarze Farbe auf dem weißen Grund zum deutlichen Erkennen schon sehr vieles beyträgt.

4) Von der Voraussetzung, daß die Richtungen der Magnet- **Fig.**
nadel sich beständig parallel sind; dieser Fehler hat jedoch,
wenn nur dieses Werkzeug sonst keinen Mängeln unterläge, bey nicht
gar zu großen Ausdehnungen der zu vermessenden Gegend (§. 7. und
34.) für die Ausübung beynahe keinen Einfluß.

5) Die trockene und feuchte Witterung und mehr der-
gleichen Ursachen haben keinen so beträchtlichen Einfluß, wenn das
Papier nach der §. 42. gezeigten Weise auf das Tischblatt gespannt
wird.

§. 96.

Die unvermeidlichen Fehler, die bey'm Messen sowohl der gera-
den Linien als der Winkel sich ergeben, können eine Linie, oder einen
Winkel entweder zu groß oder zu klein angeben. Ist z. B. eine
gemessene Linie = A Schuhe gefunden, und der größte der unvermeid-
lichen Fehler = n Schuhe: so kann die wahre Länge der Linie entwe-
der = $A + n$, oder = $A - n$ seyn. Eben so kann bey einem gemes-
senen Winkel der wahre Winkel entweder = $B + m$ oder = $B - m$
Grade seyn, wenn B den gemessenen Winkel, und m den größten
der unvermeidlichen Fehler bezeichnet. Beydes muß man annehmen,
und die Folgen daraus, wenn es nöthig ist, berechnen, weil man
weder das Eine noch das Andere entscheidend bestimmen kann. Denn
wäre man im Stande die Größe einer solchen Abweichung, bey der
Messung gerader Linien sowohl als der Winkel, jedes Mal bestimmt
anzugeben: so könnte man dadurch die gehörige Verbesserung auch
jederzeit sogleich vornehmen, und es wäre sodann eben so gut, als
hätte sich gar kein Fehler ergeben; allein diese sind wegen ihrer Man-
nigfaltigkeit, Ungleichartigkeit und Vermengung unter einander nie-
mahls bestimmt anzugeben. Daher werden sich zwar einige von diesen
unvermeidlichen, an und für sich unbedeutenden, kleinen Fehlerchen
zum Theil gegen einander wieder ausgleichen, wodurch öfters eine
Figur genau schließen kann; mehrentheils aber wird der Überschuß
der auf eine Seite fallenden (gleichartigen positiven), und der auf
die entgegengesetzte Seite fallenden (gleichartigen negativen) kleinen
Abweichungen am Ende durch ihre Summirung und Anhäufung mehr
oder minder merkbar sich zeigen. Eben aus diesem Grunde muß man
sich mit der Auffindung des größten und kleinsten Fehlers, der mit
einem Instrumente, oder nach einer Vermessungsmethode sich ergeben
kann, begnügen, und dieses gibt nach vielen Vergleichen eine
Regel an die Hand, nach der man von den Fehlern bey jeder Ver-

Fig. messung ein bestimmtes Verhältniß erhält, welches zu erkennen gibt, ob man einer gemessenen Größe entweder zusetzen, oder von ihr abnehmen soll, um der Richtigkeit so nahe als möglich zu kommen. Dieses Verhältniß bestimmt den Grad der Zuverlässigkeit. Hierzu dient vorzüglich die Anwendung der Theorie, wornach alle Vermessungen geprüft, die Instrumente beurtheilt, und die möglichen Abweichungen, die sich ergeben können, mit einander verglichen werden.

Der Geometer muß hiernach seine Instrumente untersuchen, Versuche anstellen, und sich auf diese Art den Grad der Zuverlässigkeit seiner Vermessungsmethoden und der dazu gebrauchten Instrumente bekannt machen, um eine gute Wahl bey wirklichen Vermessungen treffen zu können. Im Folgenden wird daher nur das für den vorliegenden Zweck Nöthigste hiervon angeführt werden, weil es außer den Grenzen dieses Werkes liegt, diese Lehre vollständig zu geben.

B. Von den unvermeidlichen Operationsabweichungen bey'm Messen gerader Linien, ihrem Einfluß auf die Richtigkeit der Arbeit, und der Bestimmung, mit welcher Zuverlässigkeit sie auf dem Felde gemessen, und auf das Papier übertragen werden können.

§. 97.

Folgende wesentliche Fehler, die bey der Messung gerader Linien gewöhnlich sich ergeben, kann und muß der Geometer durch Aufmerksamkeit, eigenes Nachsehen und Anordnen zu vermeiden suchen, d. h. er darf dieses Geschäft nicht unabgerichteten oder trägen Kettenziehern allein überlassen; sie rühren gewöhnlich daher:

1) Wenn die Kettenglieder gebogen oder verschlungen sind, oder überhaupt die Kette vorher nicht berichtigt worden ist. Der davon herrührende Fehler kann besonders bey langen Linien beträchtlich werden; es ist daher das §. 31. Gesagte wohl zu beachten.

2) Wenn während des Messens bergauf oder bergab die Kette nicht gehörig aufgehoben, oder bey unebenem Boden nicht horizontal liegt, d. h. nicht gut ausgespannt wird, und daher in ihrer Mitte sich senket (§. 75. bis 80.). Kleine Unvollkommenhei-

ten in ihrer horizontalen Lage haben nichts zu bedeuten; denn beträgt Fig. die Senkung in der Mitte von der Horizontallinie 0,2 Rlf.; so ist der Fehler etwa $0,004^\circ$, welchen man leicht untersuchen und bestimmen kann (Gmtr. 87.).

3) Wenn man während des Messens von der geraden Linie AB abweicht, d. i. von A nach a , von a 33. nach d u. s. w. mißt. Auch die Größe dieses Fehlers kann man nach (Gmtr. 87.) untersuchen. Da dieser Fehler, wenn nicht gar sehr schlecht gemessen wird, nicht beträchtlich, und bey $0,1^\circ$ Abweichung von der geraden Linie, auf zehn Kettenzüge erst $0,03^\circ$ beträgt: so können die daher rührenden Fehler, wenn, wie gesagt, nicht gar zu nachlässig gemessen wird, und die Linien etwa nicht gar sehr lang sind, nicht beträchtlich seyn.

4) Wenn der Kettenstab nicht in das Loch des Kettennagels, und umgekehrt letzterer nicht in das Loch des ersteren genau eingesteckt wird, (darüber l. m. §. 76); oder bey den neuen Meßketten, wo an den Endringen durch die Quereinschnitte die Länge der Kette bestimmt ist, nicht an den Querstrich angelegt wird. Deshalb muß das §. 75. unter b) Gesagte wohl beobachtet werden.

5) Wenn bey dem Vergauf- und Vergabmessen derjenige Kettenstab, an welchem man die Kette in die Höhe hält, nicht senkrecht gehalten wird. Hierdurch kann das Maß einer Linie beträchtlich von ihrer wahren Länge abweichen; daher ist das §. 77. Gesagte auf das Strengste zu beachten.

6) Ein gewöhnlicher Fehler bey dem Messen einer Linie mit Meß- oder Klafterstäben ist der, wenn man den Stab umschlägt; dadurch wird die gemessene Linie zu kurz, und zwar um so viel, als die Dicke des Klafterstabes multiplicirt mit der Anzahl der Umschläge beträgt. Ist z. B. der Stab $1''$ dick, und man hat ihn zehnmal umgeschlagen: so ist die Linie um $1'' \times 10 = 10''$ zu kurz, um die sie also verbessert werden müßte.

7) Aber weit beträchtlicher wird der Fehler dann, wenn man sich die Mühe nicht gibt, den Maßstab ganz auf die Erde niederzulegen, sondern, um sich das öftere Bücken zu ersparen, das hintere Ende des Stabes erhebt, ehe noch das vordere den Boden erreicht hat, wie solches die Fig. 43. zeigt, bey welcher AB den Meßstab, der in m gehalten wird, vorstellt. Wenn nun der Punct A unver-

Fig. rückt bleibt, bis man AB auf den Boden niedergelegt, und also der Punct B bey C den Boden erreicht hat: so ist $AC = AB =$ der wahren Länge. Gibt man sich aber nicht die Mühe, den Stab ganz niederzulegen, sondern erhebt denselben bey A , und läßt ihn um m , wo man ihn hält, drehen, bis derselbe bey D den Boden erreicht; so würde man einen großen Fehler begehen, wenn man AD für die Länge des Stabes, das ist: $AD = AC = AB$ setzen wollte. Dieser Fehler ist bey einer Stabeslänge schon beträchtlich, welches man wieder vermögt (Gmtr. 87.) für angenommene und festgesetzte Größen leicht bestimmen kann. Bey der Länge des Stabes $AB = AC = 6'$, bey der Höhe $mn = 1'$, und daß man den Stab in der Mitte hält, also $Am = mB = mD = \frac{1}{2} AB$, und $AD = 2 n D$ wäre: würde der Fehler $DC = AC - AD = 4\frac{1}{4}'' = 0,06^\circ$ für Eine Stabeslänge; folglich für eine Linie nur von mäßiger Länge, z. B. von 20° schon $20 \cdot 0,06 = 1,2$ Klaftern betragen.

8) Auch fehlt man gewöhnlich beym Messen mit Stäben, wenn man vorher nicht eine Schnur längs der zu messenden Linie spannt, weil man sonst von der geraden Linie sehr oft abweicht; hat man daher keine Schnur sogleich bey Handen, so muß ein Zweyter den Messenden dirigiren, d. i. immer in die gerade Linie einrichten.

33. 9) Es kann sich jedoch derjenige, welcher eine gerade Linie AB mit dem Stabe ausmisst, selbst leicht dirigiren, wenn er sich in derselben gegen den Endpunct, worauf er hinmisst, noch einen andern, z. B. durch kleine Stauden, hohes Gras, Erdschollen u. dgl. ausgezeichneten Punct m wählet, und über das vordere Ende b des Klafterstabes Ab nach m und B hinsieht, und so jedes Mal diesen Klafterstab (Meßruthen oder Meßstab) in die Richtung mB , und mithin auch in jene der Geraden AB bringt. Sollte man von m aus noch so weit nach B haben, daß während des Messens noch eine Abweichung von der geraden Richtung zu besorgen wäre, so wähle man zwischen m und B , oder auch hinter B wieder einen Punct, und verfähre wie vorher; daher ist ein so gewählter Punct noch vorthafter, wenn er hinter B hinaus liegt.

§. 98.

Um den Grad der Zuverlässigkeit zu bestimmen, mit welcher man eine gerade Linie auf dem Felde mittelst der Kette zu messen im Stande ist, verfährt man auf folgende Art:

Man stecke eine ziemlich lange Linie auf einem bergab oder berg- Fig.
 auf laufenden Boden nach S. 72. ab, messe diese Linie einige Mahl 33.
 mit derjenigen Aufmerksamkeit, die man bey der Ausübung gewöhn-
 lich auch darauf verwenden soll, und notire sich jedes Mahl die ge-
 fundene Länge, addire die verschiedenen Maße und dividire ihre Summe
 durch die Anzahl der Messungen: so erhält man im Quotienten das
 arithmetische Mittel an Klasteren u., welche die gemessene Linie höchst
 wahrscheinlich enthalten möchte; subtrahirt man nun die kleinste ge-
 fundene Zahl der gemessenen Linie von der größten, und dividirt diese
 Differenz durch das gefundene arithmetische Mittel: so erhält man ein
 Verhältniß, welches den Grad der Zuverlässigkeit, mit
 welchem gerade Linien auf dem Felde gemessen werden können, zu
 erkennen gibt.

Folgendes ist das Resultat einer Untersuchung, die am 22. July
 1813 im k. k. Thiergarten auf einem theils sanft, theils mehr stei-
 genden, im Ganzen um 11 Grad sich hebenden Boden, mit einer 10
 Wiener Klf. langen Kette von mir vorgenommen wurde:

1te Messung bergab mit aufgehobener Kette	450° —	=	2700'
2te = bergauf	=	=	449 4' = 2698
3te = bergab	=	=	450 1½' = 2701,5
4te = bergauf	=	=	449 4½' = 2698,5
Summe = 10798'			

Das arithmetische Mittel $10798' : 4 = 2699,5'$.

Differenz der größten und kleinsten Zahl $2701,5 - 2698 = 3,5'$.

Schließt man nun: bey einer mittlern Länge von 2699,5' hat
 sich bey der wirklichen Messung die größte Differenz von 3,5' ergeben,
 wie groß wird die Differenz auf a° mittlerer Länge seyn? nämlich:

mittl. Länge Differ.

$2699,5 : a^\circ = 3,5 : x$; hieraus findet man

$$x = \frac{a \cdot 3,5}{2699,5} = a \cdot 0,001;$$

man ist demnach bey einer auf diese Art gemessenen Linie bis auf $\frac{1}{1000}$
 ihrer Länge gewiß, ob sie auf einem solchen steigenden Boden zu
 groß oder zu klein gemessen werde. Auf eben diese Weise fand ich auf
 ebenem Boden das Verhältniß $6 : 10000 = 0,0006$.

Aus dieser Erfahrungsregel hat man daher in der Praktik als
 erlaubte Operationsabweichung angenommen: Daß bey gewöhn-
 lichen unmittelbaren Messungen gerader Linien un-
 ter mehr oder weniger günstigen Umständen eine

Fig. Abweichung von $\frac{1}{1000}$ bis $\frac{1}{500}$ der Länge Statt finden
33. könne.

Hiervon kann man Anwendungen auf geringere und beträchtlichere Entfernungen machen, wenn man einerley Beschaffenheit des Bodens, worauf man mißt, voraussetzen kann. Will man nun wissen, auf wie viel Klaftern oder Fuß man unter der ersten Bedingung bey einer Länge von 200 Klaftern gewiß ist, so schließt man:

$$1000 : 200 = 1 : x; \text{ woraus } x = \frac{200 \cdot 1}{1000} = \frac{2^{\circ}}{10} \text{ gefunden wird.}$$

Hieraus ersieht man zugleich, daß eine Grundlinie für große trigonometrische Arbeiten mit der Meßkette zu messen, nicht rathsam wäre (§. 81.).

§. 99.

So wie man vermöge des Vorigen bey einer gemessenen Linie auf dem Felde bis auf einen gewissen Theil derselben ungewiß bleibt, ob man sie zu groß oder zu klein gefunden hat; eben so bleibt man auch bey der Übertragung derselben von dem verjüngten Maßstabe auf das Papier, bis auf einen gewissen Theil der verjüngten Linie ungewiß, ob man sie mit dem Zirkel zu groß oder zu klein gefaßt habe. Denn wenn wir eine praktische Linie (die von der mathematischen Linie (Gmtr. 2.) wohl zu unterscheiden ist) auf dem Papier oder verjüngten Maßstabe mit dem Zirkel fassen: so werden sich dabey immer kleine Abweichungen ergeben; theils wegen der Dicke der Zirkelspitzen (die mathematische Punkte seyn sollen), theils wenn der Handzirkel so ausgestreckt wird, daß seine Schenkel beynähe schon auf dem Papier aufliegen, welches man aber durch Hülfe eines Stangenzirkels (§. 41.) vermeiden kann und soll, theils auch, wenn der Maßstab selbst vielleicht nicht ganz verläßlich ist, und endlich wegen der Unvollkommenheit unserer Augen, die im Sehen ihre Grenzen haben, und praktische Punkte auf dem Papier nicht mehr deutlich erkennen.

Durch viele Versuche hat man gefunden, daß die meisten Menschen eine auf weißem Papier mit Tusch gezogene feine Linie, z. B. *AB*, in der Entfernung von 8 Zollen bis auf $\frac{1}{100}$ Theil eines Zolles mit dem Zirkel genau fassen können; oder um so viel könnte man sie zu groß oder zu klein nehmen, wenn dem Auge die äußersten Grenzen dieser Linie in der Entfernung von 8 Zollen unkenntlich werden. Gesezt nun, die Linie *AB* hätte 5 Zoll: so wäre das Verhältniß des Fehlers zur ganzen Länge = $\frac{1}{100} : 5$, oder 1:500; also bloß wegen der undeutlichen Empfindung der äußersten Punkte dieser Linie

würde man ihre Länge von fünf Zollen nur höchstens bis auf Fig. ihren 500. Theil genau abtragen und messen können, wenn auch 33. gleich die Zirkelspitzen mathematische Punkte wären, und also aus dieser Ursache keine neuen Fehler entsprängen. Indessen werden in den meisten Fällen die Abweichungen, deren Grund in dem Baue unserer Augen liegt, nicht sehr beträchtlich seyn. Weit größer sind diejenigen Fehler, die aus Nachlässigkeit begangen werden, z. B. wenn man die Zirkelspitzen nicht genau und vertical haltend einsetzt, oder sie nicht genug scharf sind, die äußersten Grenzen einer Linie gehörig zu fassen.

Ubrigens kann ein jeder nach diesem Verfahren sein Auge selbst leicht prüfen, und die Zuverlässigkeit bestimmen, mit welcher er Linien von dem Maßstabe auf das Papier übertragen könne.

C. Von den unvermeidlichen Abweichungen bey dem Messen der Winkel mit verschiedenen Instrumenten, ihrem Einfluß auf die Richtigkeit der Arbeit, und der Bestimmung, mit welcher Zuverlässigkeit sie auf dem Felde gemessen, und auf das Papier übertragen werden können.

§. 100.

Die Abweichungen, welche sich bey dem Messen der Winkel ergeben, sind öfters nicht nur größer, sondern auch mannigfaltiger, als bey der Messung gerader Linien. Sie rühren von der Theilung des Gradbogens, von der Stellung des Instrumentes, Bewegung der Kippregel und des Fernrohrs, und von andern mehrerley Umständen her, die hierauf mehr oder weniger Einfluß haben; daher kann auch der Grad der Zuverlässigkeit, mit welchem man Winkel zu messen im Stande ist, schwerer angegeben werden, als jener, womit Längen oder Weiten bestimmt werden können.

Durch mehre Versuche und Erfahrungen kann man indessen doch bey jedem Instrumente gewiß werden, ob die Beobachtungsabweichungen (vermöß §. 55.) + oder — d. h. größer oder kleiner werden, als sie seyn sollten. Bey großen Vermessungen ist es daher nothwendig, jedes Mal einen und denselben Winkel mehrmahl zu beobachten, und daraus ein arithmetisches Mittel zu nehmen; d. h.

Fig. die Winkel durch die Repetition auf das genaueste zu bestimmen. Es kann diese mehrfache Beobachtung eines Winkels um so leichter geschehen, als die darauf verwendete Zeit, gegen jene, die erforderlich ist mit dem Instrumente an den Beobachtungsort zu gelangen, und dasselbe allda gehörig aufzustellen, für nichts zu rechnen ist, und dadurch die Arbeit sehr an Richtigkeit gewinnt.

Wir wollen in dem Folgenden nur auf die wesentlichsten unvermeidlichen Fehler und ihren Einfluß auf eine Vermessung, die mit den gebräuchlichsten Instrumenten unternommen werden, aufmerksam machen.

I. Von den Fehlern, die sich bey dem Messen der Winkel mit dem Meßtische ergeben, und von dem Grad der Zuverlässigkeit, womit sie bestimmt werden können.

§. 101.

Bey der Messung der Winkel mit diesem Instrumente können nebst den §. 95. im Allgemeinen schon angeführten, noch folgende wesentliche, theils durch gehörige Aufmerksamkeit zu vermeidende, theils aber unvermeidliche Fehler unterlaufen:

1) Durch die unrichtige Stellung eines Punktes auf dem Tischblatte über dem gleichnamigen auf der Erde. Ein solcher Fehler ist jedoch, besonders bey einem §. 16. und 18. beschriebenen Meßtische, theils fast ganz zu vermeiden (§. 87.), theils kann derselbe (wenn etwa, besonders bey kurzen Visir- oder Standlinien, nicht gar zu nachlässig gearbeitet wird) an und für sich nie so groß seyn, daß er hier einen merkbaren Einfluß haben könnte. Daher ist es vortheilhafter, wenn der Punct auf dem Tischblatte lieber etwas seitwärts des Scheitelpunctes außerhalb des zu messenden Winkels, als vor- oder rückwärts desselben abweicht, weil im ersten Falle der falsch gemessene Winkel dem wahren vollkommen gleich seyn, oder doch nur äußerst wenig davon abweichen kann, wie solches weiter unten (§. 185. bey dem Centriren der Winkel) deutlich erhellet. Eben dieses ist auch bey solchen Instrumenten zu verstehen, die mit ihren Mittelpuncten genau über den Scheitelpunct des zu messenden Winkels auf der Erde gestellt werden sollen. Aus diesem läßt sich beurtheilen, in welchen Fällen man mehr oder weniger genau hierbey zu verfahren habe.

2) Wenn das Tischblatt nicht genau horizontal Fig. gestellt wird. Es ist nicht zu vermuthen, daß ein Geometer so nachlässig arbeitet, daß hierdurch ein Fehler entstehe, der auf die Richtigkeit der Arbeit einen merkbaren Einfluß haben könnte, wie aus den folgenden Betrachtungen erhellet. Es sey der Winkel dcb der horizontale Winkel, den man auf dem Meßtischblatte hätte erhalten sollen, wegen der schiefen Neigung cab des Tischblattes hat man aber den schiefen Winkel bca gemessen. Man denke aus a eine Verticallinie ad auf den Horizont dcb , ferner aus d und a senkrechte Linien df und af auf cb ; so ist afd der Neigungswinkel der horizontalen Ebene dcb und der schiefen Ebene cab (Gmtr. 163.). Nun finden folgende Proportionen Statt: In dem bey f rechtwinkligen Dreyecke cfa verhält sich

$$ac : af = \sin tot : \sin acf$$

$$\text{oder } ac : af = 1 : \sin acf \text{ (Gmtr. 242),}$$

$$\text{und auch } ac : cf = 1 : \cos acf \text{ (Gmtr. 242. 2)}$$

$$\text{daraus findet man } af = ac \cdot \sin acf$$

$$\text{und } cf = ac \cdot \cos acf.$$

In dem bey d rechth. Dreyecke adf ist $af : df = 1 : \cos afd$,

$$\text{daher ist } df = af \cdot \cos afd;$$

$$\text{folglich ist } df = ac \cdot \sin acf \cdot \cos afd$$

wenn man für af den obigen Werth setzt.

In dem bey f rechtwinkl. Dreyecke $cf d$ ist $cf : df = 1 : \tan dcf$ (Gmtr. 248);

$$\text{daraus folgt } \tan dcf = \frac{df}{cf}; \text{ substituirt man für } df$$

und cf die oben gefundenen Werthe; so ist

$$\tan dcf = \frac{ac \cdot \sin acf \cdot \cos afd}{ac \cdot \cos acf} = \frac{\sin acf \cdot \cos afd}{\cos acf};$$

$$\text{da aber } \frac{\sin acf}{\cos acf} = \tan acf \text{ ist, für } \sin. tot. = 1 \text{ (Gmtr. 230. II.):}$$

so ist endlich $\tan dcf = \tan dcb = \tan acb \cdot \cos afd$; man findet nämlich die Tangente des auf den Horizont reducirten Winkels dcb , wenn man die Tangente des beobachteten Winkels acb mit dem Cosinus des Neigungswinkels afd des Tisches multipliciret.

Es betrage z. B. der beobachtete Winkel $acb = 60^\circ$, und die Neigung des Tisches wäre, nämlich der Winkel $afd = 1^\circ$; so ist

Fig. 33. $\log \tan 60^\circ = 10,238561 - 10$
 und $\log \cos 1^\circ = 9,999934 - 10$ } vermög Gmtr. 240.
 daher $\log \tan dcb = 10,238495$
 und endlich $dcb = 59^\circ 59' 46''$.

Man sieht hieraus, daß, wenn auch der Tisch (oder ein anderes Instrument) die sehr beträchtliche Neigung von 1° hätte, der gemessene Winkel von dem wahren doch nur um $14''$ unterschieden, d. h. größer ist, als wenn der Tisch vollkommen horizontal gestellt worden wäre.

Eine gut eingerichtete Wasserrage (§. 25) gibt eine Neigung von drey bis vier Minuten an, daher können die kleinen bey der horizontalen Stellung des Meßtisches zurückgebliebenen Abweichungen, wenn auch derselbe $\frac{1}{4}$ oder $\frac{1}{2}$ Grad sich neigte, keinen merklichen Fehler in der Beobachtung der Winkel hervorbringen.

Hier wurde angenommen, daß der eine Schenkel bc des gemessenen Winkels im Horizonte liegt; hat demnach der gemessene Winkel auf dem schief geneigten Tischblatte eine solche Lage, daß beyde Schenkel desselben von dem Horizonte abweichen: so kann man aus ihrer bekannten Abweichung vom Horizonte, und aus dem gemessenen schiefen Winkel den wahren oder horizontalen Winkel vermög des weiter unten Folgenden finden.

3) Wenn sich bey dem Visirlineale die Diopterfäden (§. 21.) oder die Rippregel (§. 22.) mit dem schief zugeschliffenen Rande des Lineals nicht genau in einer und derselben Ebene befinden, oder in jeder Erhöhung oder Vertiefung sich nicht in derselben bewegen. Hierdurch könnte, besonders in letztem Falle, bey sehr hoch oder tief liegenden Gegenständen, der Fehler ziemlich beträchtlich werden; daher man nach §. 23. vorher die nöthige Verbesserung anbringen muß. Diese Abweichung wird sehr vermindert, wenn man stets dasselbe Diopter als Augdiopter behält.

4) Wenn man auf einen schief stehenden (von der Verticalrichtung abweichenden) Stab visirt. Auch hier kann der Fehler oft einen merkbaren Einfluß auf eine Vermessung haben, und er wird um so größer, je näher der Stab beym Standpuncte des Tisches ist. Die Größe dieses Fehlers kann vermög Gmtr. 248 sehr leicht bestimmt werden, wenn man sich die Figur dazu gehörig entwirft. Man muß daher die Stäbe möglichst senkrecht in die

Erde stecken, und wenn etwa, wie es öfters geschieht, einer vom Fig. Wind aus dieser Richtung gedrückt wird: so muß man es zur Regel machen, Visirstäbe und Meßfahnen so tief als möglich am Boden anzuvisiren; wenn aber dieses wegen Hindernisse nicht angeht, so ist er durch einen Gehülfen wieder in die verticale Richtung bringen zu lassen.

5) Bedient man sich beyh Orientiren des Meßtisches der Magnetnadel, so wird der Fehler, der hierdurch in einem Standpunkte entstehen kann, wenn dieses Werkzeug sonst die vorne angeführten nöthigen Eigenschaften hat, und keine äußeren Ursachen, vermög S. 35. und 36., zur Zeit des Gebrauches auf dieselbe wirken, an und für sich in der Ausübung von keiner Bedeutung seyn, wenn die Vermessung überhaupt den Gebrauch der Magnetnadel zuläßt; in entgegengesetzten Fällen aber müßte man auf den Gebrauch der Magnetnadel Verzicht leisten, weil sonst die Richtigkeit einer Vermessung dadurch sehr beträchtlich leiden würde.

6) Durch die Dicke der Anschlagnadeln. Dieser unvermeidliche kleine Fehler kann dadurch noch vermindert werden, wenn man das S. 88 angegebene Verfahren anwendet.

7) Wenn der Meßtisch während der Arbeit verrückt wird. Hierdurch kann ein sehr großer Fehler entstehen, den man öfters erst am Ende der Vermessung gewahr wird, und dessen Entdeckung viele Mühe und Zeit kostet; daher man während der Arbeit alles dasjenige vom Meßtische entfernen muß, was einen solchen Fehler veranlassen könnte, dabey aber die weiter unten empfohlenen Vorsichten anwenden muß, um die vermeidlichen Fehler zu entdecken, der Fortpflanzung der unvermeidlichen aber vorzubeugen.

8) Wenn bey feuchter Witterung das aufgespannte Papier Blasen oder Falten wirft, die bey trockenem und warmen Wetter wieder angespannt werden; so kann eine Vermessung sehr unrichtig werden. Dieser unvermeidliche Fehler wird aber dadurch sehr unmerkbar, wenn man ein gutes und festes Imperial- oder Royal-Papier nimmt, und solches auf das Meßtischblatt spannt, wie S. 42. gezeigt worden ist.

S. 102.

Um den Grad der Zuverlässigkeit zu bestimmen, womit Winkel vermittlest des Meßtisches gemessen werden können, kann man auf folgende Weise verfahren:

Fig. 1) Man stecke auf dem Felde wo möglich ein gleichseitiges Dreyeck
45. ABC von beliebiger Größe ab *), und messe alle drey Seiten desselben auf das genaueste nach der unter §. 75. und 76. gegebenen Anleitung.

2) Hierauf stelle man den Meßtisch über den Punct A , messe den Winkel BAC , d. i. man mache den Winkel bac auf den Meßtisch gleich dem Winkel BAC auf der Erde, vermög §. 87. 3) und trage das verjüngte Maß der Linie AC von a bis c .

3) Ferner stelle man vermög §. 87. 1) den Meßtisch mit dem Puncte c dergestalt über C , daß auch die Linie ca genau über CA zu liegen komme, lege das Visirlineal an den Punct c , und visire nach dem Stabe B , ziehe die Visirlinie cb : so wird dadurch die andere Visur ab im Puncte b geschnitten.

4) Nun trage man (bey unverrücktem Meßtische) das verjüngte Dreyeck aus den, auf das genaueste gemessenen drey Seiten AB , AC und CB vermög (Gmtr. 51. 3) auf den Meßtisch; man beschreibe nämlich mit dem verjüngten Maße der Seite AB aus a vermittelst des Zirkels in der Gegend bey b einen Bogen, und durchschneide diesen Bogen mit dem verjüngten Maße der Seite CB aus c ; so wird nahe bey dem vorherbestimmten b , entweder links oder rechts, ein Durchschnittpunct sich ergeben.

5) An diesen neu bestimmten Punct, und an den Punct c lege man das Visirlineal, lasse in dieser Richtung durch einen Gehülfsen einen Stab unweit B in M dergestalt einrichten, daß MB senkrecht auf BC ist, und nachher diesen senkrechten Abstand MB messen.

6) Endlich bestimme man nach Gmtr. 248. aus dem rechtwinkligen Dreyecke BCM , in welchem, nebst dem rechten Winkel, die zwey Katheten bekannt sind, den Winkel BCM , theile ihn durch die Anzahl der Winkel des Dreyeckes, also durch 3; so gibt der Quotient zu erkennen, bis zu welcher Zuverlässigkeit die Winkel mittelst des Meßtisches gemessen werden können.

Bey einem am 12. April 1815 im Beyseyn der hiesigen Forst-

*) Es ist zweckmäßiger, wenn man einen Platz wählt, der nicht ganz eben, sondern zum Theil auch hügelig ist, weil man bey wirklichen Meßoperationen selten auf ganz ebenem Boden arbeitet.

jünglinge gemachten Untersuchung, waren die Seiten des Dreieckes Fig. 45.
 $AC = 100,55$ Rlstr. *).

$AB = 98,12$ =

$BC = 124,33$ = und $BM = 0,36$ Klafter; daraus hat sich der Winkel $BCM = 9' 30''$ ergeben; folglich geben $(9' 30'') : 3 = 3' 10''$. Man ist demnach bey dem Meßtische bis auf vier Minuten gewiß, die auf dem Felde beobachteten Winkel auf dem Papier entweder zu groß oder zu klein zu erhalten **). Herr Prof. Bugge hat aus andern Gründen ein gleiches Resultat für den Grad der Zuverlässigkeit bey dem Messen der Winkel mit dem Meßtische hergeleitet. (Man sehe die Übersetzung aus dem Dänischen von L. H. Tobiesen. Altona 1798.)

II. Von den Abweichungen, die bey der Messung der Winkel mit eigentlichen Winkelmessern sich ergeben, und von dem Grad der Zuverlässigkeit, womit Winkel auf dem Felde bestimmt werden können.

§. 103.

Nebst den §. 101. von 1) bis 4) angeführten Fällen können bey Messung der Winkel mit dem eigentlichen Winkelmesser noch folgende wesentliche Fehler, die wieder theils zu vermeiden, theils aber unvermeidlich sind, unterlaufen:

1) Wenn der Mittelpunkt des Instrumentes nicht genau über den Punct auf der Erde gestellt ist. Diesen Fehler kann man größten Theils vermeiden, und wo es nicht möglich ist, das Instrument über den gehörigen Punct zu stellen, da kann der wahre Winkel durch Rechnung, wie weiter unten §. 186. folgen wird, gefunden werden.

2) Wenn die Eintheilung auf dem Limbus und Nonius fehlerhaft ist. Obwohl man hierin nie eine mathematische Genauigkeit erwarten darf (§. 95. 3); so ist doch nicht zu ver-

*) Daß bey dieser Untersuchung die Seiten des Dreieckes auf das genaueste gemessen worden sind, erhellet daraus, weil die aus diesen Seiten nach Gmtr. 266 berechneten Winkel zusammen $159^{\circ} 59' 55''$ betragen; folglich von 180° nur um 5 Secunden abweichen. (Gmtr. 53.)

**) Man sehe Joh. Tob. Mayers practische Geometrie, 1. Theil, 3. Auflage, Seite 415.

Fig. muthen, daß, bey dem dermahligen Stand der Wissenschaften und
 45. Künste, ein Instrument so fehlerhaft aus des Mechanikers Hand komme, bey welchem die von der Eintheilung herrührenden Fehler, nach §. 55. gehörig aufgesucht und verbessert, noch einen beträchtlichen Einfluß auf die Messung haben sollten; daher ist es rathsam, alle Winkel mehrmahl zu messen (§. 91.), wodurch die daher rührenden unvermeidlichen Beobachtungsfehler mehr gleich und unmerklich werden (§. 100.). Ein Gleiches versteht sich von der Mikrometerschraube, wenn bey einem Instrumente eine angebracht wäre.

4) Wenn das Fernrohr eine verticale Bewegung zuläßt, und sich bey jeder Erhöhung oder Vertiefung nicht immer in der verticalen Ebene bewegt. Hierdurch kann, besonders wenn das Fernrohr oder die Kippregel sehr stark auf- oder abwärts gerichtet wird, der Fehler für eine Vermessung beträchtlich werden; daher man nach §. 55. vor dem Gebrauche die nöthige Verbesserung vorzunehmen hat.

5) Wenn das Instrument während der Arbeit verrückt wird. Es ist daher gut, wenn bey einem Winkelmesser ein Versicherungsdioptr oder derley Rohr (§. 54.) angebracht ist, um sich während der Arbeit von der unverrückten Stellung jedes Mahl überzeugen zu können. Ubrigens sind auch hier die im §. 101. 7) erwähnten Vorsichten nöthig.

§. 104.

Um bey einem Winkelmesser zu erfahren, mit welcher Zuverlässigkeit man die Winkel bestimmen könne: so messe man

1) Bey einem beliebigen Dreyecke *ABC* ebenfalls alle drey Seiten auf das genaueste.

2) Beobachte man nach der §. 91. gegebenen Anweisung alle drey Winkel des Dreyeckes, addire selbe, und untersuche, wie viel ihre Summe von 180° abweicht (Gmtr. 53). Diesen Unterschied dividire man durch 3; so gibt der Quotient die Größe der Zuverlässigkeit zu erkennen, womit Winkel auf dem Felde durch den gebrauchten Winkelmesser bestimmt werden können.

Mit einem früher an der hiesigen Forstlehranstalt vorhanden gewesenen Winkelmesser hierüber angestellten Versuch ist der Winkel

$$A = 77^\circ 28'$$

$$B = 52 \quad 7$$

$$C = 50 \quad 23$$

und ihre Summe

$$= 179^\circ 58' \text{ gefunden worden.}$$

Nun ist $180^\circ - (179^\circ 58') = 2$ Minuten, der Unterschied; **Fig.**
 daher $(2' = 120'') : 3 = 40$ Secunden die Zuverlässigkeit, mit wel- 45.
 cher Winkel auf dem Felde vermittelt diesem Instrumente gemessen
 werden können, d. i., um so viel können sie zu groß oder zu klein
 gefunden werden.

Anstatt diesem Winkelmesser besitzt nun die hiesige Forstlehran-
 stalt einen Reichensbach'schen Theodoliten, der oben S. 54. beschrie-
 ben worden ist.

S. 105.

Wenn aber die auf dem Felde gemessenen Winkel erst durch Hülfe
 eines gewöhnlichen Transporteurs (Gmtr. 17) oder eines tausendthei-
 ligen Maßstabes, wie unten gezeigt werden wird, auf das Papier
 übertragen werden müssen *): so erhellet vermög S. 95. 3) von selbst,
 daß hierbey an der Richtigkeit wieder sehr viel verloren geht. Um dem-
 nach auch den Grad der Zuverlässigkeit zu finden, mit welchem die
 Winkel durch die vorerwähnten zwey Hülfsmittel auf das Papier
 übertragen werden können, verfahre man auf folgende Art:

1) Man verbessere (wenn es nöthig wäre) die auf dem Felde ge-
 messenen Winkel um den gefundenen Unterschied auf 180° , also hier
 in unserm Beispiele um $40''$; es wird demnach der Winkel

$$A = 77^\circ 28' 40''$$

$$B = 52 \quad 7 \quad 40$$

$$C = 50 \quad 23 \quad 40.$$

Eine so kleine Verbesserung, wie diese hier ist, kann aber um
 so mehr außer Acht gelassen werden, als man mit dem Transporteur
 die Winkel höchstens nur auf zehn bis zwölf Minuten sicher bestimmen
 könne (S. 95. 3).

2) Hierauf ziehe man eine gerade Linie, trage das verjüngte 46.
 Maß einer gemessenen Seite des Dreyeckes, z. B. ac auf, ver-
 zeichne entweder vermittelt des Transporteurs oder eines tausendthei-
 ligen Maßstabes nach S. 118. bey a den oben verbesserten Winkel A ,
 und bey c den Winkel C ; so werden sich die verlängerten Schenkel
 in dem Puncte b durchschneiden.

3) Nun trage man das Dreyeck auch aus seinen gemessenen drey

*) Weiter unten werden wir sehen, daß man bey der Übertragung eines
 trigonometrischen Netzes auf das Papier, der erforderlichen Genauig-
 keit wegen, sich einer andern Methode bedienen soll und muß.

Fig. 46. Seiten nach dem verjüngten Maßstabe auf, wie §. 102. unter 4) angeführt wurde: so wird sich nahe bey dem vorherbestimmten Punct b entweder links oder rechts desselben ein anderer Punct m ergeben.

4) Man messe den senkrechten Abstand bm , und berechne aus dem rechtwinkligen Dreyecke bmc den Winkel bcm , und dividire diesen durch 3; so zeigt der Quotient die Zuverlässigkeit an, mit welcher die Winkel durch diese Methoden auf das Papier getragen werden können.

Bev obiger Untersuchung hat man durch die Verzeichnung der Winkel mit dem Transporteur, der in halbe Grade getheilt ist, den senkrechten Abstand $bm = 4\frac{1}{2}$ Fuß, und sonach den Winkel $bcm = 20' 50''$, mithin $(20' 50'') : 3 = 6' 56''$ gefunden. Man ist also bey einem solchen Transporteur nur bis 7 Minuten gewiß, die Winkel auf das Papier zu tragen. Bev der Verzeichnung der Winkel durch Hülfe eines tausendtheiligen Maßstabes (§. 118.) wurde $bm = 2\frac{1}{2}$ Fuß, und der Winkel $bcm = 11' 20''$; mithin der Grad der Zuverlässigkeit $= (11' 20'') : 3 = 3' 46''$ gefunden.

Es erhellet hieraus, daß mit dem Meßtische die Winkel auf dem Felde gleich unmittelbar auf das Papier eben so richtig, wie mit einem Winkelmesser, bev welchem aber die Winkel nach der §. 118 angeführten etwas beschwerlichen und viele Zeit raubenden Methode verzeichnet werden müssen, erhalten werden. Im ersten Falle wird eine Arbeit wenigstens in der halben Zeit vollendet, als zu derselben Arbeit mit einem Winkelmesser erforderlich ist, bev dem die gemessenen Winkel durch Hülfe eines tausendtheiligen Maßstabes auf das Papier übertragen würden *).

§. 106.

Bev einer mit der Bußsole vorgenommenen Untersuchung habe ich den Winkel $A = 77\frac{1}{4}$ Grad

$$B = 51\frac{1}{4} \quad "$$

$$C = 52 \quad "$$

und die Summe $= 180\frac{3}{4}$ Grad gefunden. Man ist also hier bis auf 10 Minuten gewiß, die Winkel auf dem Felde zu messen. Da man aber die mit der Bußsole auf dem Felde beobachteten Winkel auch vermittelst derselben nach der §. 92. gezeigten Methode auf das Pa-

*) Man sehe hierüber Bugge Seite 183 u. f. w.

pier übertragen kann: so bleibt obige Zuverlässigkeit ziemlich dieselbe; Fig. und man ist daher bey der Busssole überhaupt von 10 bis 12 Minuten gewiß, die Winkel auf das Papier zu bringen.

Obgleich die nun angeführten einzelnen Fehler, die sowohl bey der Messung gerader Linien, als der Winkel unvermeidlich sind, und jeder für sich betrachtet, von keiner Bedeutung zu seyn scheint: so können sie durch die Summirung und Mittheilung in einer ganzen Figur am Ende doch beträchtlich werden; daher man sie im Einzelnen schon so viel als möglich zu vermeiden, vorzüglich aber ihrer Mittheilung vorzubeugen trachten muß.

D. Von der Zuverlässigkeit, womit Entfernungen durch Dreiecksmessung und trigonometrische Rechnung bestimmt werden können.

§. 107.

Da bey Bestimmung der Entfernungen durch Dreiecke die unvermeidlichen Abweichungen sowohl der gemessenen Grundlinie (§. 98.), als die der Winkel (§. 104.) einigen Einfluß haben; so folgt, daß man jene Entfernungen nicht ganz genau, und ebenfalls nur bis auf eine gewisse Grenze richtig bestimmen könne. Gesezt, man hätte die Standlinie AB und den Winkel CAB ohne Fehler, den Winkel CBA aber um den Winkel CBm unrichtig gemessen: so ist klar, daß man aus diesen drey gemessenen Stücken nicht die wahre Entfernung BC , sondern die unrichtige Bm erhält, welche kleiner ist, als BC . 47.

Ist ein Winkel, z. B. CBD an der Grundlinie BD stumpf, so wird der Fehler in der Bestimmung der Weite BC noch größer als vorhin. Denn man nehme auch hier an, daß BD und BDC völlig richtig, der Winkel CBD aber um CBn falsch gemessen wurde: so würde man auch in diesem Falle nicht das wahre Dreieck CBD , sondern das unrichtige nBD , mithin auch nicht die Entfernung CB , sondern $nB < CB$ finden; und zwar wird der Fehler hier größer als vorhin seyn, bey der Voraussetzung, daß der Winkel $CBn = CBm$ sey; wovon man sich sehr leicht überzeugt, wenn man aus den Dreiecken CBA und CBD vermittelst der Grundlinien und der anliegenden Winkel die Seite BC nach Gmtr. 243, als ob diese Stücke ohne Fehler gemessen wären, bestimmt; nachher aber auch die Ent-

Fig. fernung BC auf diese Art berechnet, daß man die Winkel CBA und CBD um $CBm = CBn$ größer oder kleiner annimmt. Werden hingegen alle Stücke, wodurch die Entfernung BC bestimmt wird, unrichtig gemessen; so muß um so mehr der Fehler noch größer werden, welches erhellet aus dem folgenden

§. 108.

Aufgabe. Aus der Standlinie AB und den anliegenden Winkeln CAB und CBA die Entfernung BC mit dem größten Grad der Zuverlässigkeit zu bestimmen.

Auflösung. 1) Man nehme an, diese Stücke seyen vollkommen genau gemessen, und $AB = 3000$ Einheiten, der Winkel $A = 52^\circ 12' 20''$, und $CBA = 70^\circ 15' 40''$ gefunden worden: so ist der Winkel $ACB = 180 - (70^\circ 15' 40'' + 52^\circ 18' 20'') = 57^\circ 26'$, vermöge Gmtr. 53. 3); und man findet die wahre Länge $BC = 2816,7$ und $AC = 3350,5$ (Gmtr. 243).

2) Man nehme jeden gemessenen Winkel um 20 Secunden, und die Grundlinie AB um $\frac{6}{10000}$ ihrer Länge kleiner an *) (§. 98. und 104); so findet man $BC = 2814,49$ und $AC = 3348,0$. Diese Zahl zeigt die kleinste Grenze, oder sie zeigt, daß bey der obigen Voraussetzung BC nicht kleiner als 2814,49 seyn könne.

3) Man nehme jeden gemessenen Winkel um $20''$, und die Seite AB um $\frac{6}{10000}$ ihrer Länge größer an; so wird $BC = 2818,99$, und $AC = 3353,9$ gefunden. Diese Zahl gibt die größte Grenze, d. h. sie zeigt, daß BC nicht größer als 2818,99 seyn könne.

Nun ist die Differenz der größten und kleinsten Zahl, nämlich $2818,99 - 2814,49 = 4,5$; d. h. es kann die Entfernung BC bis auf 4,5 gewiß bestimmt werden. Dividirt man endlich $4,5$ durch $\frac{2818,99 + 2814,49}{2} = 2816,74$; so gibt der Quotient den Grad der Zuverlässigkeit zu erkennen, mit welchem man Entfernungen vermittlest der Dreyeckmessung, unter obigen Voraussetzungen, zu

*) Die Winkelmesser der neueren und bessern Art, wovon die hiesige Forstlehranstalt nun einen zehnzölligen Reichenbach'schen repetirenden besitzt, geben die Winkel viel genauer, und durch die Repetition bis auf die stehende Secunde an (§. 91.).

bestimmen im Stande ist; und es ist $4,5:2814,7 = 0,0016$, sol- Fig.
cher Einheiten, welche bey den gemessenen Dreyeckseiten zum Grunde 47.
liegen.

§. 109.

Hier wurden beyde Winkel an der Grundlinie spitzig angenom-
men, wäre aber einer davon stumpf, so wäre der Quotient größer ge-
worden. Überhaupt findet man, daß dieser Quotient desto größer wird,
je stumpfer der eine, und je spitziger der andere Winkel an der Grund-
linie ist; nähern sich hingegen die Winkel an der Grundlinie gegen
60 Grade, so wird der Quotient kleiner, und am kleinsten findet
man ihn, wenn jeder Winkel an der Grundlinie 60 Grade, folglich
das Dreyeck gleichseitig ist.

Hieraus folgt, daß, wenn zwey Seiten eines Drey-
eckes auf dem Felde mit der Grundlinie Winkel von
60° machen, oder diesem Winkel sehr nahe kommen,
alsdann die Standlinie die vortheilhafteste Lage
und GröÙe hat. Übrigens gilt diese Regel auch für die Beobach-
tung und Zeichnung der Winkel eines jeden Dreyeckes auf dem Felde
und auf dem Papier, so wie bey jedem Instrumente.