

Masterarbeit

# Modellierung und Regelung von Pufferspeichern in Biomasseheizungen

HEMMER Johann

---

Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik  
Technische Universität Graz  
Vorstand: Univ.-Prof. Dr. techn. Dipl.-Ing. Martin Horn



Betreuer:  
Dr. techn. Dipl.-Ing. Markus Gölles  
Em. Univ.-Prof. Dr. techn. Dipl.-Ing. Nicolaos Dourdoumas  
Graz, Juni 2014

## Abstract

The intention of this thesis is to describe the derivation for a mathematical simulation model of a buffer storage, a solar collector and a plate heat exchanger. The simulation model of the buffer storage was developed on the basis of a commercially available buffer storage. The mathematical description of the simulation model is based on a partial differential equation for describing heat transfer in a cylindrical pipe. The resulting mathematical model is solved by an implicit algorithm.

Some of the parameters of the buffer storage model had to be determined experimentally, what was performed by special test runs. Finally, the simulation model of the buffer storage was verified by an independent additional experimental test run. In the end the mathematical model describes the examined buffer storage very well, so further investigations can be made without comprehensive test runs.

Finally, a regulation for the heat transfer between solar collector and buffer storage was developed. For this reason two different methods were investigated. In the first method the heat is transferred to the buffer storage through a solar register, which is located inside the buffer storage. In the second method the heat is transferred from the water-antifreeze-mixture by a plate heat exchanger to water, which is directly fed into the buffer storage. In both cases a model based static feed forward control was combined with an additional PI controller. After the development of the model based static feed forward control the parameters for the PI controller were determined by a simulation study. Finally, both methods were verified by simulation studies with a focus on the resulting temperature profile in the buffer storage.

It turned out that the buffer storage can be heated up quicker by transferring the heat through a plate heat exchanger and not through the solar register, at equal solar radiation effective at the solar collector in both cases. Furthermore, the usage of a plate heat exchanger enables a layering of the water temperature in the buffer storage. Thus, the heat can be stored on a higher level of temperature.

## Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit widmet sich der Herleitung mathematischer Simulationsmodelle eines Pufferspeichers, eines Solarkollektors sowie eines Plattenwärmeübertragers. Dabei wird das Simulationsmodell des Pufferspeichers anhand eines am Markt verfügbaren Pufferspeichers entwickelt. Die mathematischen Beschreibungen der Simulationsmodelle basieren auf einer partiellen Differentialgleichung zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr. Nach dem Erhalt der mathematischen Modelle werden diese mit einem impliziten Lösungsverfahren numerisch gelöst.

Anschließend werden die experimentell zu ermittelnden Parameter des Pufferspeichermodells anhand gezielt durchgeführter Versuche bestimmt. Nach dem Ermitteln der Parameter wird das Simulationsmodell des Pufferspeichers mit einem weiteren Versuch experimentell verifiziert. Schlussendlich bildet das mathematische Modell des Pufferspeichers den untersuchten Pufferspeicher sehr zufriedenstellend ab, womit ein Simulationsmodell vorliegt, das gezielte Untersuchungen ohne aufwändige Versuche ermöglicht.

Abschließend wird eine Regelung für die Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher entwickelt. Dabei werden zwei in der Praxis übliche Verfahren untersucht. Bei der ersten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher über ein im Pufferspeicher integriertes Solarregister. Bei der zweiten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme über einen Plattenwärmeübertrager vom Wasser-Frostschutzgemisch auf Wasser, welches dann direkt in den Pufferspeicher eingespeist wird. Als Reglerstruktur wird in beiden Fällen ein Standard-Regelkreis mit einer statischen Vorsteuerung verwendet. Anhand von Simulationsstudien werden zunächst die Parameter des PI-Reglers festgelegt und in weiterer Folge die mit der jeweiligen Variante resultierenden Temperaturverläufe des Wassers im Pufferspeicher untersucht und gegenübergestellt.

Dabei stellt sich heraus, dass die Temperatur des Wassers im Pufferspeicher, bei gleich bleibender Strahlungsstromdichte der Solarstrahlung  $I_g$  auf den Solarkollektor, die gewünschte Solltemperatur bei Wärmeübertragung mittels Plattenwärmeübertrager schneller erreicht, als bei Wärmeübertragung durch das Solarregister. Darüber hinaus ermöglicht die Verwendung des Plattenwärmeübertragers eine Schichtung der Temperatur des Wassers im Pufferspeicher und somit eine Speicherung der Wärme auf einem höheren Temperaturniveau.

## **Statutory Declaration**

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources.

## **Eidesstaatliche Erklärung**

Ich erkläre an Eides, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

---

Ort

---

Datum

---

Unterschrift

# Sperrvermerk

Das vorliegende Dokument enthält vertrauliche Daten der Firma Bioenergy 2020+. Veröffentlichungen oder Vervielfältigungen des vorliegenden Dokuments, auch nur auszugsweise, sind ohne ausdrückliche Genehmigung der Firma Bioenergy 2020+ nicht gestattet. Das Dokument ist lediglich den betreuenden Professoren zugänglich zu machen. Ohne schriftliche Genehmigung der Firma darf dieses Dokument nicht in der Bibliothek der Hochschule ausgelegt werden.

## Danksagung

Diese Masterarbeit wurde im Jahr 2014 am Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik an der Technischen Universität Graz in Kooperation mit dem Kompetenzzentrum BIOENERGY2020+ durchgeführt, bei dessen Mitarbeitern ich mich für die Ermöglichung der Arbeit sowie das angenehme Arbeitsklima herzlich bedanken will.

Mein besonderer Dank gilt Herrn Univ.-Prof. Nicolaos Dourdoumas sowie Herrn Dr. Markus Gölles für die hervorragende Betreuung meiner Arbeit. Weiters möchte ich Herrn Dipl.-Ing. Arnold Loidl für die zahlreichen Fachgespräche danken.

Großen Dank gilt auch meinen Eltern, die mir dieses Studium erst ermöglicht haben, sowie meiner gesamten Familie.

Letztendlich möchte ich meinen Studienkollegen, meinen Freunden und besonders meiner Freundin Ricarda für die Mithilfe, Unterstützung und das große Verständnis danken.

Graz, Juni 2014

Johann HEMMER

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1	Grundlagen der Wärmeübertragung . . . . .	3
2.1.1	Wärmeleitung . . . . .	3
2.1.2	Wärmeströmung . . . . .	4
2.2	Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Modellierung</b>	<b>8</b>
3.1	Modellierung des Pufferspeichers . . . . .	8
3.1.1	Aufbau des untersuchten Pufferspeichers . . . . .	9
3.1.2	Annahmen zur Modellierung eines Pufferspeichers . . . . .	10
3.1.3	Grundlegende Vorgehensweise zur Modellierung des Pufferspeichers	11
3.1.4	Modellierung des vereinfachten Pufferspeichers . . . . .	12
3.1.5	Erweitern des Pufferspeichermodells um die Umgebungsverluste	13
3.1.6	Erweitern des Pufferspeichermodells um den Heizkreis . . . . .	15
3.1.7	Anpassen der Beladungshöhen des Erzeugers . . . . .	17
3.1.8	Erweitern des Pufferspeichermodells um das Solarregister . . . . .	18
3.1.9	Freie Konvektion . . . . .	20
3.2	Modellierung eines Plattenwärmeübertragers . . . . .	21
3.2.1	Mathematische Beschreibung eines Plattenwärmeübertragers . . . . .	22
3.3	Modellierung eines Solarkollektors . . . . .	23
3.3.1	Mathematische Beschreibung eines Solarkollektors . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Numerische Lösung</b>	<b>29</b>
4.1	Implizite Lösung des Modells des vereinfachten Pufferspeichers . . . . .	30
4.2	Implizite Lösung des Modells des Solarkollektors . . . . .	36
4.3	Implizite Lösung des Modells des Plattenwärmeübertragers . . . . .	38
4.4	Implizite Lösung des Modells des Pufferspeichers . . . . .	46
4.5	Annäherung der freien Konvektion durch Mischung . . . . .	62
<b>5</b>	<b>Experimentelle Ermittlung der Parameter und Verifikation des Pufferspeichermodells</b>	<b>64</b>
5.1	Positionierung der Temperatursensoren am untersuchten Pufferspeicher	65

5.2	Experimentelle Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeiten . . . . .	67
5.3	Experimentelle Ermittlung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens . . . . .	71
5.4	Verifikation des Pufferspeichermodells . . . . .	75
<b>6</b>	<b>Entwicklung einer Regelung für den Solarkreis</b>	<b>77</b>
6.1	Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher über das Solarregister . . . . .	78
6.2	Nähere Betrachtung des Plattenwärmeübertragers . . . . .	82
6.3	Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher über einen Plattenwärmeübertrager . . . . .	90
6.4	Zusammenfassen der beiden Varianten . . . . .	95
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>98</b>
	<b>Nomenklatur</b>	<b>A-103</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>B-108</b>

# 1 Einleitung

Aus den Energiekrisen in den 1970-er Jahren ist deutlich geworden, dass ein Großteil Europas Primärenergie stark von importierten sowie begrenzten fossilen Brennstoffen (Öl, Kohle, Erdgas, Torf) abhängig ist. Durch die Verbrennung der fossilen Brennstoffe entsteht  $\text{CO}_2$ , das maßgeblich zum vieldiskutierten Treibhauseffekt und dem daraus verursachten Klimawandel beiträgt.

Um diesem Klimawandel und dem starken Import von fossilen Brennstoffen entgegenzuwirken, legte die Europäische Union das Abkommen 20-20-20 fest, welches besagt, dass bis zum Jahr 2020 mindestens 20% der Energie aus erneuerbaren Energieträgern erzeugt, dass 20% der Kohlendioxidemission verringert und dass 20 % weniger Energie verbraucht [9] werden soll.

Ein großer Bereich, in dem man die Verwendung von Primärenergie vermeiden und die Effizienz steigern könnte, ist die Wärmeversorgung von Gebäuden. Laut dem Institut für Nachhaltige Forschung an der Universität Klagenfurt macht die Wärmeversorgung von Wohnbauten circa ein Drittel des Energieaufkommens und 17% des jährlichen Kohlendioxidausstoßes in Österreich aus [10].

Somit spielt die Verwendung fester Biomasse als Energieträger eine wichtige Rolle, da sie neben ihrer regionalen Verfügbarkeit bei einer nachhaltigen Nutzung einen weitgehend neutralen  $\text{CO}_2$ -Ausstoß aufweist. Jedoch gestaltet sich die Verbrennung der Biomasse, durch die stark variierenden Brennstoffeigenschaften, deutlich schwieriger als jene von fossilen Brennstoffen.

Zu diesem Zweck wurde in den letzten Jahren am Kompetenzzentrum BIOENERGY2020+ in Zusammenarbeit mit dem Institut für Regelungs- und Automatisierungstechnik der Technischen Universität Graz eine modellbasierte Regelung für Biomassenfeuerungsanlagen entwickelt [3, 4, 5].

Die entwickelte modellbasierte Regelung für Biomassenfeuerungsanlagen soll nun auf weitere Komponenten des Heizsystems ausgeweitet werden um die Effizienz durch deren bessere Regelung noch weiter zu steigern.

Ziel dieser Arbeit ist es, mathematische Simulationsmodelle des Pufferspeichers, eines Plattenwärmeübertragers sowie eines Solarkollektors aufzustellen. Anschließend sollen die experimentell zu ermittelnden Parameter des Simulationsmodells des Pufferspeichers anhand eines am Markt verfügbaren Pufferspeichers und gezielt durchgeführter Versuche

ermittelt werden. Darüber hinaus soll eine Regelung für die Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher entwickelt werden.

Um den Einstieg in die Materie zu erleichtern werden in Kapitel 2 die wesentlichen Grundlagen der Wärmeübertragung erläutert. Anschließend wird eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr, beruhend auf der Energiebilanz für ein Volumenelement, hergeleitet. Basierend auf der partiellen Differentialgleichung und den für die Simulationsmodelle getroffenen Annahmen werden in Kapitel 3 die mathematischen Modelle des Pufferspeichers, eines Plattenwärmeübertragers und eines Solarregisters aufgestellt. Anschließend werden im Kapitel 4 die mathematischen Modelle des Pufferspeichers, eines Plattenwärmeübertragers und eines Solarkollektors mit dem numerischen impliziten Lösungsverfahren approximiert. Nach der Approximation werden in Kapitel 5 die experimentell zu ermittelnden Modellparameter des Pufferspeichermodells anhand eines am Markt verfügbaren Pufferspeichers mittels speziell durchgeführter Versuche ermittelt. In Kapitel 6 wird ein Regler, mit der Struktur eines Standard-Regelkreises und einer statischen Vorsteuerung, für die Wärmeübertragung aus einem Solarkollektor in den Pufferspeicher vorgestellt. Dabei werden zwei in der Praxis übliche Varianten untersucht: die Wärmeübertragung über ein im Pufferspeicher integriertes Solarregister und die Wärmeübertragung mittels Plattenwärmeübertrager. Abschließend werden die Ergebnisse der Arbeit nochmals im Kapitel 7 zusammengefasst.

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel sollen zum besseren Verständnis des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers und des Solarkollektors die wichtigsten Grundlagen der Wärmeübertragung kurz zusammengefasst werden. Die theoretischen Grundlagen beschränken sich dabei auf die wesentlichen Begriffe, wie sie in der Fachliteratur, z. B. [1, 2], verwendet werden.

Zunächst werden zwei grundlegende Phänomene der Wärmeübertragung vorgestellt, die Wärmeleitung und die Wärmeströmung. Anschließend folgt die mathematische Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr. Dabei handelt es sich um eine Energiebilanz für ein Volumenelement. Die daraus resultierende partielle Differentialgleichung bildet die Grundlage für die Modellierung des Pufferspeichers und des Plattenwärmeübertragers.

### 2.1 Grundlagen der Wärmeübertragung

Unter Wärmeübertragung wird die Übertragung von thermischer Energie in Form eines Wärmestroms verstanden. Gemäß des zweiten thermodynamischen Hauptsatzes wird Energie vom Medium mit der höheren Temperatur zum Medium mit der niedrigeren Temperatur übertragen [2]. Die wichtigsten Arten der Wärmeübertragung sind die Wärmeleitung, die Wärmeströmung und die Wärmestrahlung. Nachfolgend werden nur die Wärmeleitung und die Wärmeströmung näher betrachtet.

#### 2.1.1 Wärmeleitung

Bei der Wärmeleitung erfolgt der Energietransport nicht durch Stofftransport sondern zwischen zwei benachbarten Molekülen aufgrund einer Temperaturdifferenz im Material. Der Transport der Energie durch die Wärmeleitung kann in einem ruhenden Fluid oder auch in einem festen Körper auftreten.

Der Erste, der dieses Phänomen mathematisch beschrieb und die Theorie der Wärmeleitung aufstellte, war Jean Baptiste Joseph Fourier (1768 - 1830). Dabei schlug er das sogenannte Fouriersche Gesetz

$$\dot{q} = -\lambda \cdot \text{grad}T \quad (2.1)$$

zur Beschreibung des Zusammenhangs von 2.1, wobei  $\dot{q}$  die Wärmestromdichte,  $\lambda$  die Wärmeleitfähigkeit und  $T$  die Temperatur ist, vor. Das in dieser Gleichung auftretende Minuszeichen berücksichtigt den zweiten Hauptsatz der Thermodynamik, dass Wärme in Richtung des Temperaturgefälles übertragen wird. Die Wärmestromdichte  $\dot{q}$  hängt wiederum vom Ort  $x$  und Zeit  $t$  ab.

$$\dot{q} = \dot{q}(x, t) \quad (2.2)$$

Die Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  hängt von der Temperatur  $T$  und dem Druck  $p$  ab.

$$\lambda = \lambda(T, p) \quad (2.3)$$

Die Temperatur  $T$  hängt von Orts  $x$  und der Zeit  $t$  ab.

$$T = T(\mathbf{x}, t) \quad (2.4)$$

Der Wärmestrom  $\dot{Q}$  ergibt sich durch Integration der Wärmestromdichte  $\dot{q}$  über die Fläche  $A$ .

### 2.1.2 Wärmeströmung

Bei der Wärmeströmung erfolgt der Transport der Energie durch Stofftransport. Man unterscheidet zwei Fälle: die freie Wärmeströmung und die erzwungene Wärmeströmung.

Unter der freien Wärmeströmung, auch Naturkonvektion genannt, versteht man Strömungsvorgänge, die auf schwerkraftbedingte Auf- und Abtriebskräfte zurückzuführen sind. Fluide besitzen temperaturabhängige Stoffwerte, je nach Temperaturdifferenz und dem darauffolgenden Dichteunterschied treten die schwerkraftbedingten Auf- und Abtriebskräfte auf.

Bei der erzwungenen Wärmeströmung werden die Strömungsvorgänge nicht durch die schwerkraftbedingten Auf- und Abtriebskräfte beschrieben, sondern durch eine von außen erzeugte Druckdifferenz hervorgerufen, wie z.B. durch eine Pumpe.

## 2.2 Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr

Die Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr orientiert sich an der in [6] vorgeschlagenen Modellierung des Wasserteils eines Rauchwärmeübertragers, basierend auf lediglich einer partiellen Differentialgleichung. Dies beruht auf einer Energiebilanz für ein Volumenelement eines durchströmten Rohres (siehe Abbildung 2.1).

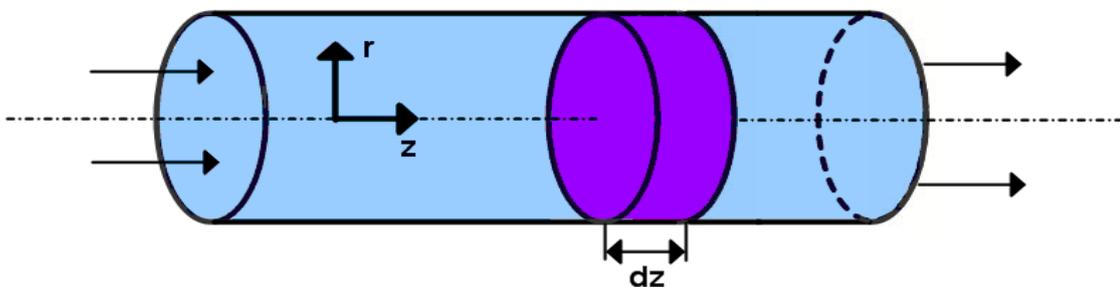


Abbildung 2.1: Volumenelement eines durchströmten zylindrischen Rohres

Wird dieses quer liegende Rohr mit Wasser durchströmt, und werden alle radialen Abhängigkeiten durch die vorherrschenden Strömungsverhältnisse im Rohr vernachlässigt, ergibt sich für die Energiebilanz des herausgeschnittenen Volumenelements folgende Gleichung:

$$\underbrace{\frac{\partial u_z}{\partial t}}_{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\partial s_z}{\partial z}}_{\text{Energietransport durch Strömung}} + \underbrace{s_q}_{\text{radiale Wärmeübertragung}} = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_W \frac{\partial T}{\partial z} \right)}_{\text{axiale Wärmeleitung}} \quad (2.5)$$

Wobei  $u_z$  die innere Energiedichte,  $s_z$  die Enthalpiestromdichte,  $s_q$  die Wärmestromdichte,  $T$  die Temperatur des Wassers,  $t$  die Zeit,  $z$  die Ortskoordinate und  $\lambda_W$  die Wärmeleitfähigkeit des Wassers kennzeichnen.

Die Größen ( $u_z$ ,  $s_z$ ,  $s_q$ ,  $\lambda_W$ ) hängen vom Druck  $p$  und von der Temperatur  $T$  ab, wobei diese wiederum von der Ortskoordinate  $z$  und von der Zeit  $t$  abhängen. Die vier Größen und ihre Abhängigkeit sind in der Tabelle 2.1 zusammengefasst.

Für eine bessere Lesbarkeit werden die Abhängigkeiten der Variablen weggelassen. Ausgehend von der Energiebilanz (2.5) soll in weiterer Folge eine mathematische Beschreibung der Wassertemperatur in Abhängigkeit des Ortes  $z$  und der Zeit  $t$

Abkürzungen	Beschreibung	Einheit
$u_z(p(z, t), T(z, t))$	innere Energiedichte	$[J/m^3]$
$s_z(p(z, t), T(z, t))$	Enthalpiestromdichte	$[W/m^2]$
$s_q(p(z, t), T(z, t))$	Wärmestromdichte	$[W/m^3]$
$\lambda_W(p(z, t), T(z, t))$	Wärmeleitfähigkeit	$[W/mK]$

Tabelle 2.1: Wesentliche Größen der Energiebilanz für ein Volumenelement eines durchströmten Rohres

erarbeitet werden. Unter der Annahme der Inkompessibilität<sup>1</sup> von Wasser kann die innere Energiedichte  $u_z$  aus der Dichte, der spezifischen isochoren<sup>2</sup> Wärmekapazität und der Temperatur wie folgt berechnet werden [1]:

$$u_z = \rho \cdot \left( \int_{T_0}^T c_v(\tau) d\tau + u_0 \right) \quad (2.6)$$

Die Annahme der Inkompessibilität impliziert zusätzlich, dass die spezifische isochore Wärmekapazität  $c_v$  gleich der spezifisch isobaren<sup>3</sup> Wärmekapazität  $c_p$  ist [1].

$$c_v(T) = c_p(T) = c_W(T) \quad (2.7)$$

Aus diesem Grund wird im Folgenden die spezifische Wärmekapazität von Wasser mit  $c_W$  bezeichnet. Da die Dichte  $\rho$  und die Wärmekapazität  $c_W$  nur geringfügig von der Temperatur  $T$  abhängig sind, werden sie für den betrachteten Temperaturbereich als konstant angenommen. Somit ergibt sich für die partielle Ableitung der inneren Energiedichte nach der Zeit folgendes:

$$\frac{\partial u_z}{\partial t} = \rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.8)$$

Weiters ist durch die Inkompessibilität des Wassers die spezifische Enthalpie  $h$  nur mehr von der Temperatur abhängig:

$$h = \int_{T_0}^T c_W(\tau) d\tau + h_0 \quad (2.9)$$

<sup>1</sup> Unter Inkompessibilität versteht man, dass sich das Volumen eines Systems unter Druckeinfluss nicht ändert.

<sup>2</sup> Isochor ist eine thermodynamische Zustandsänderung, bei der das Volumen unverändert bleibt.

<sup>3</sup> Isobar ist eine thermodynamische Zustandsänderung, bei der der Druck unverändert bleibt.

Somit ergibt sich für die partielle Ableitung der Enthalpiestromdichte  $s_z$  nach dem Ort:

$$\frac{\partial s_z}{\partial z} = \frac{\dot{m}}{A} \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_{T_0}^T c_W(\tau) d\tau + h_0 \right) = \frac{\dot{m}}{A} c_W \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.10)$$

Die radiale Wärmeleitung nach außen wird in der Energiebilanz mit der Wärmestromdichte  $s_q$  beschrieben. Da Energie entzogen wird, wird sie mit einem negativen Vorzeichen versehen. Die Wärmestromdichte lässt sich aus dem Wärmestrom  $\dot{q}_W$  bezogen auf den Querschnitt des Wasserstroms bestimmen:

$$s_q = -\frac{\dot{q}_W}{A} \quad (2.11)$$

Der letzte Term der Energiebilanz (2.5) beschreibt die axiale Wärmeleitung. Da die Temperaturabhängigkeit der Wärmeleitfähigkeit des Wasser im betrachteten Temperaturbereich nur geringfügig schwankt, wird die Wärmeleitfähigkeit als konstant angenommen. Setzt man die Gleichungen (2.8), (2.10) und (2.11) in (2.5) ein, erhält man eine partielle Differentialgleichung für die Beschreibung der Wassertemperatur  $T$ :

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\dot{q}_W}{A} = \lambda_W \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (2.12)$$

Von dieser partiellen Differentialgleichung des durchströmten zylindrischen Rohres wird im Kapitel 3 durch Erweitern und Abwandeln der Terme auf die mathematische Beschreibung des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers und des Solarkollektors geschlossen.

# 3 Modellierung

Dieses Kapitel widmet sich der mathematischen Modellierung des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers und des Solarkollektors. Bei der mathematischen Modellierung werden verschiedene Größen eines Systems durch Gleichungen qualitativ in Beziehung gesetzt [12]. Es ist darauf zu achten, dass die wesentlichen Eigenschaften des Systems wiedergegeben werden und dass das mathematische Modell für die geplanten Anwendungen geeignet und genau genug ist.

Am Anfang des Abschnitts 3.1 werden die grundlegende Funktionsweise und eine einfache übliche Verwendung des Pufferspeichers erläutert. Anschließend wird der Aufbau des untersuchten Pufferspeichers vorgestellt. Danach werden die wichtigsten Annahmen für die Modellierung des Pufferspeichers getroffen. Daraus und unter Einbeziehung der theoretischen Grundlagen aus Kapitel 2 wird zunächst die Modellierung des Pufferspeichers allgemein beschrieben. Danach wird ausgehend vom vereinfachten Pufferspeicher das Pufferspeichermodell um die Umgebungsverluste, den Heizkreis, die Beladung und das Solarregister erweitert. Am Ende dieses Abschnitts wird die Berücksichtigung der freien Konvektion erläutert.

In Abschnitt 3.2 wird, nach der Erklärung der wesentlichen Grundlagen und unter Verwendung und Abwandlung des Ansatzes zur Modellierung des Pufferspeichers, das Plattenwärmeübertragermodell beschrieben.

Abschließend wird in Abschnitt 3.3 auf die Modellierung eines Solarkollektors eingegangen. Zunächst werden die wichtigsten Informationen über Solarkollektoren erörtert. Danach folgt die mathematische Beschreibung des Solarkollektors, welche auf der Beschreibung des Wirkungsgrades beruht und für die benötigten Zwecke hinreichend genau ist.

## 3.1 Modellierung des Pufferspeichers

Den Pufferspeicher kann man sich im Allgemeinen als ein zylindrisches, mit dem Speichermedium Wasser befülltes, Fass vorstellen, in dem sich im oberen Bereich des Pufferspeichers das wärmere Wasser wegen der geringeren Dichte als das kältere Wasser befindet. Bei Pufferspeichern ist der Erhalt der Temperaturen des warmen Wassers von größter Bedeutung, deshalb ist der Pufferspeicher als ein möglichst hohes und schlankes

Fass ausgeführt um die Fläche zwischen dem kalten und warmen Wasser gering zu halten und somit wenig Vermischungen zwischen den Temperaturschichten zu haben.

Wie in Abbildung 3.1 gezeigt wird, besitzt der Pufferspeicher grundsätzlich vier Anschlüsse. Der Erzeuger entnimmt Wasser aus dem unteren (kälteren) Bereich des Pufferspeichers und erwärmt es. Anschließend wird das erwärmte Wasser wieder in den oberen (wärmeren) Bereich des Pufferspeichers eingespeist. Der Verbraucher kann das im Pufferspeicher gespeicherte warme Wasser über eigene Anschlüsse unabhängig vom Erzeuger entnehmen.

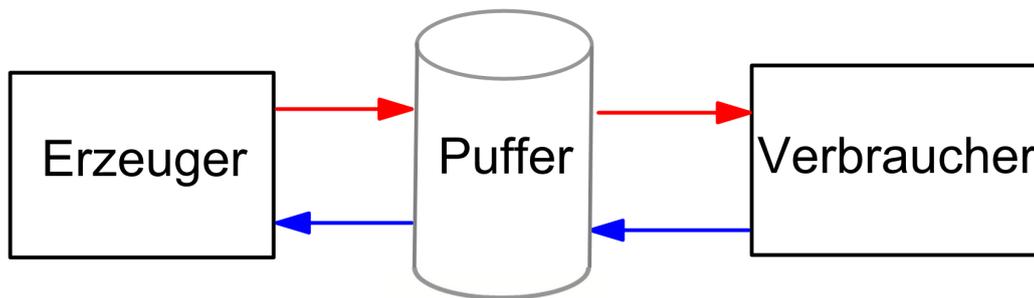


Abbildung 3.1: Vereinfachte übliche Verwendung eines Pufferspeichers

Die grundsätzliche Aufgabe eines Pufferspeichers ist es somit, das vom Erzeuger erwärmte Wasser über längere Zeit zu speichern, bis es vom Verbraucher benötigt wird. Das ist aber nur möglich wenn die Wärmeverluste an die Umgebung gering sind. Diese setzen sich aus den Verlusten durch die Wärmebrücken (Anschlüsse) und aus den Verlusten durch die Isolierung zusammen.

Im Laufe dieser Arbeit wird stets von einem vollständig mit Wasser befüllten Zustand des Pufferspeichers ausgegangen. Ist von Beladen die Rede, bezieht sich dies auf das Zuführen von warmem Wasser in den bereits befüllten Pufferspeicher, wobei gleichzeitig an einer anderen Stelle die gleiche Menge an Wasser entnommen wird.

### 3.1.1 Aufbau des untersuchten Pufferspeichers

Der untersuchte Pufferspeicher ist ein am Markt verfügbarer Schichtspeicher mit einem Fassungsvermögen von 1.500 l, zwei Glattrohrregistern zur Einbindung einer Solaranlage, einem Zentralheizungsanschluss und acht Beladungsanschlüssen. Zusätzlich besitzt der verwendete Pufferspeicher ein Frischwassermodul, zwei Heizkreisgruppen und eine Isolierung aus Polyester-Vlies mit der Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{\text{Isolierung}}$  von 0,035 W/m und einer Dicke von 0,1 m.

Abbildung 3.2 stellt den Innenaufbau des betrachteten Pufferspeichers dar. Die Glattrohrregister werden im Weiteren als Solarregister bezeichnet. Der Zentralheizungsanschluss (Heizkreis) ist mit einem Vorlauf- und einem Rücklaufrohr ausgestattet. Das Vorlaufrohr entnimmt warmes Wasser aus dem oberen Teil des Pufferspeichers und das Rücklaufrohr speist das abgekühlte Wasser wieder in den Pufferspeicher ein. Je nach Energieabgabe strömt das Wasser mit unterschiedlichen Temperaturen und somit unterschiedlichen Dichten in den Pufferspeicher ein. Um die Wassertemperaturschichten innerhalb des Pufferspeichers nicht zu zerstören, ist das Rücklaufrohr gelöchert. Somit ordnet sich das zurückkommende Wasser in die Wassertemperaturschicht mit der selben Dichte ein.

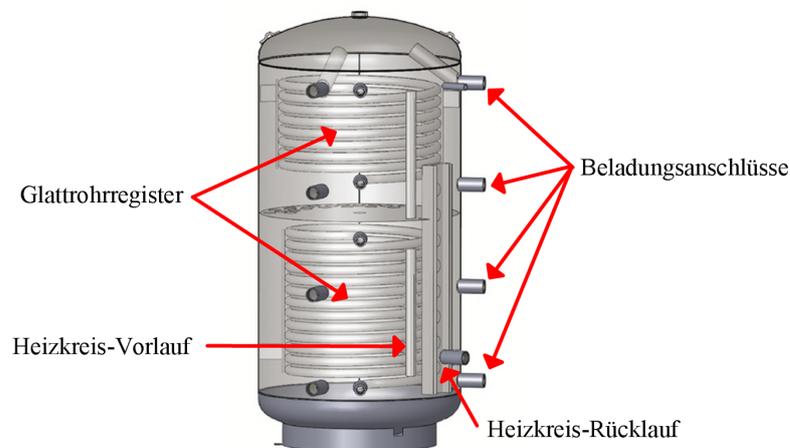


Abbildung 3.2: Innenaufbau des betrachteten Pufferspeichers [11]

Abbildung 3.3 zeigt den betrachteten Pufferspeicher von außen, mit dem verwendeten Solarkreis, dem auf zwei Heizkreise erweiterten Zentralheizungsanschluss und dem Frischwassermodul, das als Plattenwärmeübertrager (siehe Abschnitt 3.2) ausgeführt ist.

In den folgenden Abschnitten ist darauf zu achten, dass der Massenstrom durch die verschiedenen Höhen der Beladungsanschlüsse und der Höhe des Heizkreises über die Pufferspeicherhöhe variiert.

### 3.1.2 Annahmen zur Modellierung eines Pufferspeichers

In der Folge werden vereinfachende Annahmen getroffen, um den Pufferspeicher zwar hinreichend genau aber mathematisch möglichst einfach beschreiben zu können. Dabei muss darauf geachtet werden, dass die wesentlichen Eigenschaften des Pufferspeichers

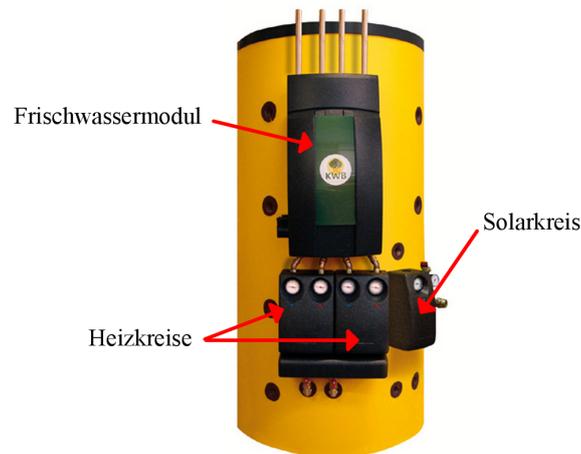


Abbildung 3.3: Außenansicht des untersuchten Pufferspeichers [11]

in jedem Fall durch das mathematische Modell beschrieben werden. Es werden folgende, auch in der Literatur übliche, z.B. [8]), Annahmen getroffen:

- Die Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher werden in der horizontalen Ebene als isotherm [1] betrachtet, so dass die Temperaturen nur von der Speicherhöhe, das heißt der vertikalen Position  $z$ , und der Zeit  $t$  abhängen.
- Die radialen Geschwindigkeitskomponenten werden vernachlässigt, somit tritt die Strömung des Pufferspeichers nur in der vertikalen Richtung auf.
- Der Pufferspeicher wird bei der Modellierung als Zylinder betrachtet.
- Das Speichermedium Wasser des Pufferspeichers wird als inkompressibel angenommen.
- Die Reibungskräfte und die durch die Reibung in Wärme dissipierte kinetische Energie werden vernachlässigt.

### 3.1.3 Grundlegende Vorgehensweise zur Modellierung des Pufferspeichers

Basierend auf den Annahmen aus Abschnitt 3.1.2 und der partiellen Differentialgleichung (2.12) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem Rohr soll der Pufferspeicher durch folgenden Ansatz modelliert werden:

$$\begin{array}{c}
 \text{Speicherung der Energie} \\
 \underbrace{\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t}} \\
 + \underbrace{\frac{\dot{m} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} + \underbrace{\frac{\dot{q}_{\text{solar}}}{A}}_{\text{Solarregister}} + \underbrace{\frac{\dot{q}_{\text{umgebung}}}{A}}_{\text{Umgebungsverluste}} = \underbrace{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\text{axiale Wärmeleitung}}
 \end{array} \quad (3.1)$$

Dabei wird das mathematische Modell, ausgehend von einem vereinfachten Pufferspeicher, schrittweise um einzelne Komponenten und physikalische Phänomene erweitert. Alle in Gleichung (3.1) enthaltenen Größen sind in der Tabelle 3.1 zusammengefasst.

Abkürzungen	Beschreibung	Einheit
$\rho$	Dichte	$[kg/m^3]$
$c_W$	spezifische Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$T$	Temperatur des Wassers	$[K]$
$t$	Zeit	$[s]$
$\dot{m}$	Massenstrom	$[kg/s]$
$A$	Querschnittsfläche des Pufferspeichers	$[m^2]$
$z$	axiale Ortskomponente	$[m]$
$\lambda$	effektive vertikale Wärmeleitfähigkeit	$[W/mK]$
$\dot{q}_{\text{solar}}$	Wärmestrom des Solarregisters je Höhe	$[W/m]$
$\dot{q}_{\text{umgebung}}$	Wärmestrom an die Umgebung je Höhe	$[W/m]$

Tabelle 3.1: Größen des Ansatzes zur Modellierung des Pufferspeichers

### 3.1.4 Modellierung des vereinfachten Pufferspeichers

Abbildung 3.4 stellt den schematischen Aufbau des vereinfachten Pufferspeichers mit einem Durchmesser  $d = 1$  m und einer Höhe  $H = 1,91$  m dar. Beim vereinfachten Pufferspeicher erfolgt die Beladung in der oberen Deckfläche und die Entnahme des Wassers in der unteren Deckfläche.  $T_{\text{Be,E}}$  kennzeichnet die Temperatur des einfließenden Wassers, das mit dem Massenstrom  $\dot{m}_W$  in den Speicher strömt.  $T_{\text{Be,A}}$  kennzeichnet die Temperatur des ausfließenden Wassers, das mit dem selben Massenstrom aus dem Pufferspeicher strömt.

Bei der mathematischen Beschreibung des vereinfachten Pufferspeichers werden nur die Terme *Speicherung der Energie*, *erzwungene Konvektion* und *axiale Wärmeleitung* aus (3.1) betrachtet:

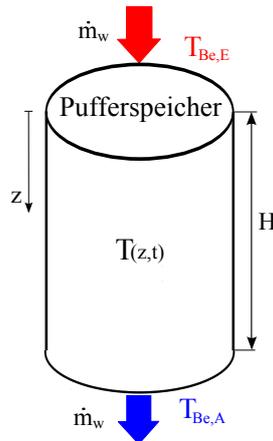


Abbildung 3.4: Schematischer Aufbau des vereinfachten Pufferspeichers

$$\underbrace{\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} = \underbrace{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\text{axiale Wärmeleitung}} \quad (3.2)$$

Die Terme *Umgebungsverluste* und *Solarregisters* werden in den folgenden Abschnitten schrittweise dem Modell des vereinfachten Pufferspeichers hinzugefügt.

### 3.1.5 Erweitern des Pufferspeichersmodells um die Umgebungsverluste

Das mathematische Modell des vereinfachten Pufferspeichers aus (3.2) wird im nächsten Schritt um die *Umgebungsverluste* erweitert:

$$\underbrace{\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} + \underbrace{\frac{\dot{q}_{\text{Umgebung}}}{A}}_{\text{Umgebungsverluste}} = \underbrace{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}_{\text{axiale Wärmeleitung}} \quad (3.3)$$

Bei den Umgebungsverlusten setzt sich die Übertragung der Wärme vom wärmeren Wasser im Pufferspeicher an die Umgebung aus mehreren Wärmeübergangs- und Wärmeleitungsvorgängen zusammen. Dabei wird zunächst Wärme vom wärmeren Wasser auf die innere Oberfläche der Eisenlegierung übertragen. Von dort wird die Wärme durch Wärmeleitung an die äußere Oberfläche der Eisenlegierung übertragen. Bei der äußeren Oberfläche der Eisenlegierung erfolgt der Wärmeübergang an die

innere Oberfläche der Isolierung. Von der inneren Oberfläche der Isolierung wird die Wärme durch Wärmeleitung an die äußere Oberfläche übertragen und von dort an die Umgebung abgegeben.

Diese Abfolge von Wärmeübergangs- und Wärmeleitungsvorgängen bezeichnet man als Wärmedurchgang [2], der mit Hilfe des Wärmedurchgangswiderstands beschrieben werden kann. Bei Pufferspeichern sollte der Wärmedurchgangswiderstand hoch sein, um möglichst wenig Wärme nach außen zu übertragen.

Aufgrund der wesentlich größeren Wärmeleitfähigkeit und der geringeren Wandstärke der Eisenlegierung gegenüber der Isolierung wird sie im Weiteren vernachlässigt. Bei konstanter Temperatur des Wassers  $T$  über die gesamte Höhe des Pufferspeichers setzt sich die Übertragung der Wärme durch die Isolierung an die Umgebung, gekennzeichnet durch den an die Umgebung abgegebenen Wärmestrom  $\dot{Q}_{umg}$  aus dem Produkt des inversen Wärmedurchgangswiderstands und der Differenz aus der Wassertemperatur  $T$  und Umgebungstemperatur  $T_{umg}$  zusammen:

$$\overset{\text{inverser Wärmedurchgangswiderstand}}{\dot{Q}_{umg}} = \frac{\overbrace{\lambda_{iso} \cdot A_m}}{\delta_{iso}} \cdot (T - T_{umg}) \quad (3.4)$$

$\lambda_{iso}$  kennzeichnet die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung,  $A_m$  die mittlere Fläche der Isolierung und  $\delta_{iso}$  die Dicke der Isolierung. Die mittlere Fläche der Isolierung  $A_m$  wird, wie z. B. in der Literatur [2], wie folgt definiert:

$$\frac{1}{A_m} = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{A(r)} \quad (3.5)$$

$r_1$  steht für den inneren und  $r_2$  für den äußeren Durchmesser des Pufferspeichers. Beim Durchmesser  $r_2$  wird die Dicke der Isolierung berücksichtigt. Die Querschnittsfläche  $A(r)$  wird wie folgt berechnet:

$$A(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot H \quad (3.6)$$

Setzt man die Querschnittsfläche (3.6) in die mittlere Fläche der Isolierung (3.5) ein und löst das Integral erhält man folgendes:

$$\begin{aligned} \frac{1}{A_m} &= \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{2 \cdot \pi \cdot r \cdot H} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot H} \frac{1}{(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot H} \frac{1}{(r_2 - r_1)} \ln(r) \Big|_{r_1}^{r_2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot H} \frac{\ln(r_2/r_1)}{(r_2 - r_1)} \end{aligned} \quad (3.7)$$

Da sich die Temperatur des Wassers  $T$  über die Höhe des Pufferspeichers  $H$  ändert, muss der auf die Höhe bezogene Wärmestrom  $\dot{q}_{\text{umgebung}}(z)$  betrachtet werden:

$$\dot{q}_{\text{umgebung}}(z) = \frac{\lambda_{\text{iso}} \cdot A_m}{\delta \cdot H} \cdot (T(z) - T_{\text{umg}}) \quad (3.8)$$

Setzt man nun die Berechnungsvorschrift für den an die Umgebung abgegebenen Wärmestrom je Höhe (3.8) in den erweiterten Ansatz (3.3) ein, erhält man die mathematische Beschreibung des vereinfachten Pufferspeichers, erweitert um die Umgebungsverluste:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\lambda_{\text{iso}} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{\text{umg}}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.9)$$

Für den Wert der Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{iso}}$  kann nicht der Wert des Polyester-Vlieses aus dem Datenblatt angenommen werden, da sonst die vorhandenen Wärmebrücken des betrachteten Pufferspeichers nicht mit berücksichtigt wären. Aus diesem Grund wurde die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{iso}}$  experimentell ermittelt, was in Kapitel 5 ausführlicher dargestellt ist.

In den beiden folgenden Abschnitten 3.1.6 und 3.1.7 wird bei der partiellen Differentialgleichung (3.9) jeweils nur die *erzwungene Konvektion* betrachtet. Die restlichen Terme im Modell (3.9) bleiben unverändert.

### 3.1.6 Erweitern des Pufferspeichermodells um den Heizkreis

Beim Heizkreis wird in der Höhe  $H_{\text{Hk,A}}$  Wasser mit der Temperatur  $T_{\text{Hk,A}}$  aus dem Pufferspeicher entnommen und in der Höhe  $H_{\text{Hk,E}}$  wieder aus dem Heizkreis mit der Temperatur  $T_{\text{Hk,E}}$  in den Pufferspeicher eingespeist (siehe Abbildung 3.5). Die Entnahme und die Rückeinspeisung des Wassers erfolgen mit dem Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{\text{Hk}}$ .

Der Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{\text{Hk}}$  fließt im gesamten Heizkreis und verursacht zwischen den beiden Heizkreishöhen im Pufferspeicher eine zusätzliche konvektive Strömung, die der konvektiven Strömung der Beladung durch einen Erzeuger  $\dot{m}_W$

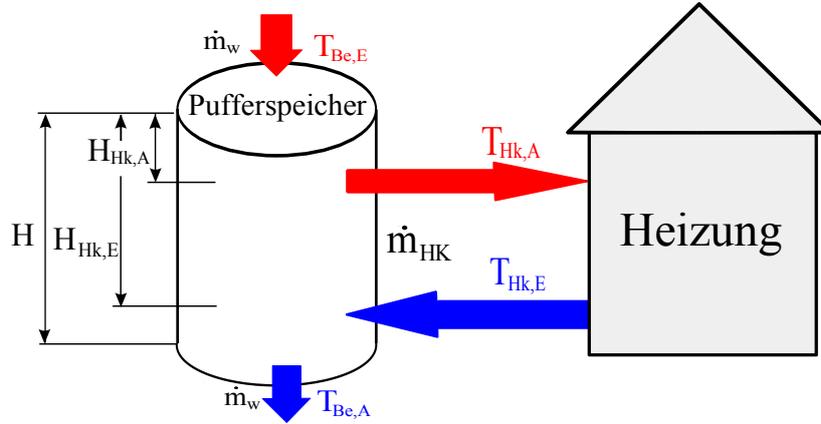


Abbildung 3.5: Entnahme von wärmerem Wasser aus dem Pufferspeicher in der Höhe  $H_{\text{HK},A}$  und Rückeinspeisung des abgekühlten Wassers vom Heizkreis in den Pufferspeicher in der Höhe  $H_{\text{HK},E}$

entgegenwirkt. Dadurch wird der Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{\text{HK}}$  mit einem negativen Vorzeichen versehen und man erhält folgende Verteilung des resultierenden Massenstroms  $\dot{m}_{\text{Ges}}$  über die Höhe des Pufferspeichers:

$$\dot{m}_{\text{Ges}} = \begin{cases} \dot{m}_{\text{W}} & \text{für } z < H_{\text{HK},A} \\ (\dot{m}_{\text{W}} - \dot{m}_{\text{HK}}) & \text{für } H_{\text{HK},A} \leq z \leq H_{\text{HK},E} \\ \dot{m}_{\text{W}} & \text{für } z > H_{\text{HK},E} \end{cases} \quad (3.10)$$

Aus Gleichung (3.10) ist ersichtlich, dass oberhalb der Höhe  $H_{\text{HK},A}$  und unterhalb der Höhe  $H_{\text{HK},E}$  die partielle Differentialgleichung (3.9) aus dem vorhergehenden Abschnitt übernommen werden kann. Erst ab der Höhe  $H_{\text{HK},A}$ , wo der Heizkreis Warmwasser aus dem Pufferspeicher entnimmt, kommt zu (3.9) ein zusätzlicher konvektiver Term hinzu:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{\text{W}} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial x} - \overbrace{\frac{\dot{m}_{\text{HK}} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial x}}^{\text{zusätzlicher konvektiver Term}} + \frac{\lambda_{\text{iso}} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{\text{umg}}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.11)$$

Gleichung (3.11) ist nur zwischen den Höhen  $H_{\text{HK},A}$  und  $H_{\text{HK},E}$  gültig. Werden nun die beiden Massenströme zum resultierenden Massenstrom  $\dot{m}_{\text{Ges}}$  entsprechend der Höhenverteilung (3.10) zusammengefasst, ergibt sich ein um den Heizkreis erweiterter Pufferspeicher:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{Ges} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (3.12)$$

Zusätzlich muss bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung die Temperatur des aus dem Heizkreis in den Pufferspeicher  $T_{Hk,E}$  eintretenden Wassers durch entsprechende Randbedingungen berücksichtigt werden. Darauf wird im Zuge der numerischen Lösung in Kapitel 4 näher eingegangen.

### 3.1.7 Anpassen der Beladungshöhen des Erzeugers

Bis jetzt erfolgte das Beladen des Pufferspeichers in der oberen und die Entnahme in der unteren Deckfläche. Im Weiteren sollen das Beladen in der Höhe  $H_{Be,E}$  mit der Temperatur  $T_{Be,E}$  und die Entnahme in der Höhe  $H_{Be,A}$  mit der Temperatur  $T_{Be,A}$  und dem Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$  erfolgen (siehe Abbildung 3.6).

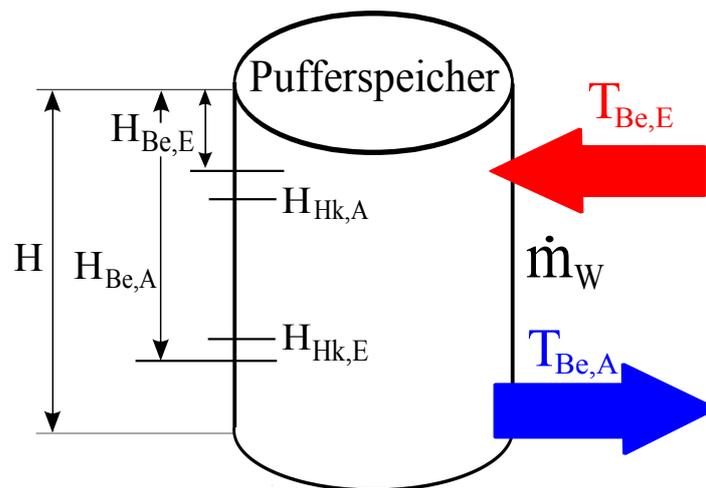


Abbildung 3.6: Beladen des Pufferspeichers in der Höhe  $H_{Be,E}$  mit der Temperatur  $T_{Be,E}$  und Entladen des Pufferspeichers in der Höhe  $H_{Be,A}$  mit der Temperatur  $T_{Be,A}$

Somit ergibt sich folgende Verteilung des resultierenden Massenstroms  $\dot{m}_{Ges}$  über die Höhe des Pufferspeichers:

$$\dot{m}_{Ges} = \begin{cases} 0 & \text{für } z < H_{Be,E} \\ \dot{m}_W & \text{für } H_{Be,E} \leq z < H_{Hk,A} \\ (\dot{m}_W - \dot{m}_{Hk}) & \text{für } H_{Hk,A} \leq z \leq H_{Hk,E} \\ \dot{m}_W & \text{für } H_{Hk,E} < z \leq H_{Be,A} \\ 0 & \text{für } z > H_{Be,A} \end{cases} \quad (3.13)$$

Oberhalb der Höhe  $H_{Be,E}$  und unterhalb der Höhe  $H_{Be,A}$  ist der Gesamtmassenstrom  $\dot{m}_{Ges}$  Null, somit nimmt auch der Term *erzwungene Konvektion* keinen Einfluss. Zwischen den Höhen  $H_{Be,E}$  &  $H_{Hk,A}$  und  $H_{Be,A}$  &  $H_{Hk,E}$  entspricht der Gesamtmassenstrom  $\dot{m}_{Ges}$  dem Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$ . Wie auch im vorhergehenden Abschnitt nimmt zwischen den Höhen  $H_{Hk,A}$  und  $H_{Hk,E}$  die Differenz der beiden Massenströme Einfluss.

Die partielle Differentialgleichung (3.12) stellt somit in Kombination mit dem über die Höhe verteilten resultierenden Massenstrom (3.13) das Modell für den Pufferspeicher mit angepassten Beladungshöhen des Erzeugers dar.

Zusätzlich muss auch bei der Lösung der partiellen Differentialgleichung die Temperatur des in den Pufferspeicher eintretenden Wassers  $T_{Be,E}$  bzw.  $T_{Hk,E}$  durch entsprechende Randbedingungen berücksichtigt werden. Darauf wird im Zuge der numerischen Lösung in Kapitel 4 näher eingegangen.

### 3.1.8 Erweitern des Pufferspeichermodells um das Solarregister

Das Modell des Pufferspeichers aus (3.12) wird im nächsten Schritt um das *Solarregister* erweitert:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{Ges} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} + \overbrace{\frac{\dot{Q}_{solar}}{A}}^{\text{Wärmeübertragung Solarregister}} + \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.14)$$

Durch das im Pufferspeicher befindliche Solarregister strömt warmes Fluid, das die innere Rohroberfläche des Solarregisters erwärmt. Die Übertragung der Wärme durch das Metall des Solarregisters von der inneren an die äußere Rohroberfläche erfolgt durch Wärmeleitung. Von der äußeren Rohroberfläche des Solarregisters wird die Wärme auf das dort befindliche Wasser des Pufferspeichers mit der Temperatur  $T$  übertragen. Die mathematische Beschreibung des je Höhe vom Solarregister in den Pufferspeicher übertragenen Wärmestroms  $\dot{Q}_{Solar}$  wird, ähnlich wie die Umgebungsverluste in Abschnitt 3.1.5, mit der Temperaturdifferenz angeschrieben:

$$\dot{q}_{solar}(z) = \frac{U_A \cdot (T(z) - T_{W\ddot{U}}(z))}{H_{W\ddot{U}}} \quad (3.15)$$

$T$  kennzeichnet die Wassertemperatur im Pufferspeicher,  $T_{W\ddot{U}}$  die Fluidtemperatur im Solarregister und  $H_{W\ddot{U}}$  die Höhe des im Pufferspeicher integrierten Solarregisters.  $U_A$  bezeichnet man als das Wärmeübertragungsvermögen des Solarregisters. Zur Ermittlung des Wärmeübertragungsvermögens  $U_A$  kann folgender Ansatz verwendet werden [8]:

$$U_A = K_{W\ddot{U}} \cdot (\dot{m}_{W\ddot{U}})^{b_1} \cdot |T_{W\ddot{U}} - T|^{b_2} \cdot \left( \frac{T_{W\ddot{U}} + T}{2} \right)^{b_3} \quad (3.16)$$

$K_{W\ddot{U}}$  bezeichnet einen konstanten Parameter zur Beschreibung des Wärmeübertragungsvermögens des Solarregisters und die Exponenten  $b_1, b_2, b_3$  dienen zur Gewichtung der einzelnen Größen. Der Exponent  $b_1$  gewichtet die Abhängigkeit des Wärmeübertragungsvermögens des Solarregisters vom Massenstrom des Mediums  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$  durch den Wärmeübertrager.  $b_2$  gewichtet die Abhängigkeit des Wärmeübertragungsvermögens von der Differenz der Fluidtemperatur  $T_{W\ddot{U}}$  und der Wassertemperatur  $T$ .  $b_3$  gewichtet die Abhängigkeit des Wärmeübertragungsvermögens vom Temperaturniveau.

Aus Gleichung (3.16) ist ersichtlich, dass das Wärmeübertragungsvermögen letztendlich durch die Parameter  $K_{W\ddot{U}}, b_1, b_2, b_3$  bestimmt wird. Diese Parameter müssen experimentell ermittelt werden, worauf im Kapitel 5 näher eingegangen wird.

Setzt man nun den Solarregisterwärmestrom je Höhe  $q_{solar}$  (3.15) in die partielle Differentialgleichung (3.14) ein, erhält man das Modell des um ein Solarregister erweiterten Pufferspeichers:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{Ges} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} + \overbrace{\frac{U_A \cdot (T - T_{W\ddot{U}})}{A \cdot H_{W\ddot{U}}}}^{\text{Solarregister}} + \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (3.17)$$

Gleichung (3.17) stellt das Gesamtmodell des Pufferspeichers dar. Jedoch kommt es vor, dass sich beim Beladen oder durch die Wärmeübertragung des Solarregisters wärmeres Wasser in Bereichen von kälterem Wasser im Pufferspeicher befindet. Somit entsteht durch den Dichteunterschied zwischen dem wärmeren und dem kälteren Wasser freie Konvektion, auf die im nächsten Abschnitt eingegangen wird.

### 3.1.9 Freie Konvektion

Unter der freien Konvektion versteht man Strömungsvorgänge, die sich aufgrund der schwerkraftbedingten Auf- und Abtriebskräfte zusammensetzen, wie es in Abschnitt 2.1.2 kurz erörtert wurde.

Mathematisch wird die freie Konvektion als partielle Differentialgleichungen höherer Ordnung beschrieben. Da das Lösen partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung relativ kompliziert ist, wird die freie Konvektion durch eine vergleichsweise einfache Art, die Durchmischung, angenähert. Dies ist aber nur möglich, da das Mischen der Temperatur des Wassers viel schneller erfolgt als die anderen bis jetzt betrachteten Vorgänge im Pufferspeicher.

Auf diese vergleichsweise einfache aber für diese Zwecke hinreichend genaue Berücksichtigung wird im Rahmen der numerischen Lösung im Kapitel 4 näher eingegangen.

## 3.2 Modellierung eines Plattenwärmeübertragers

Ein Plattenwärmeübertrager wird üblicherweise nach dem Gegenstromprinzip betrieben und setzt sich aus mehreren wellenförmig profilierten Platten zusammen, die miteinander verschraubt und abgedichtet sind. Durch die Verschraubung der Platten kann der Plattenwärmeübertrager auf einfache Weise erweitert werden. Die grundsätzliche Aufgabe eines Plattenwärmeübertragers ist es, zwei Medien zu trennen und die Wärme durch Wärmeleitung von der Primärseite auf die Sekundärseite zu übertragen. Abbildung 3.7 stellt grob den schematischen Aufbau eines Plattenwärmeübertragers dar. Die Anordnung der Platten erfolgt so, dass jeweils in den aufeinanderfolgenden Zwischenräumen das wärmeabgebende und das wärmeaufnehmende Medium fließt.

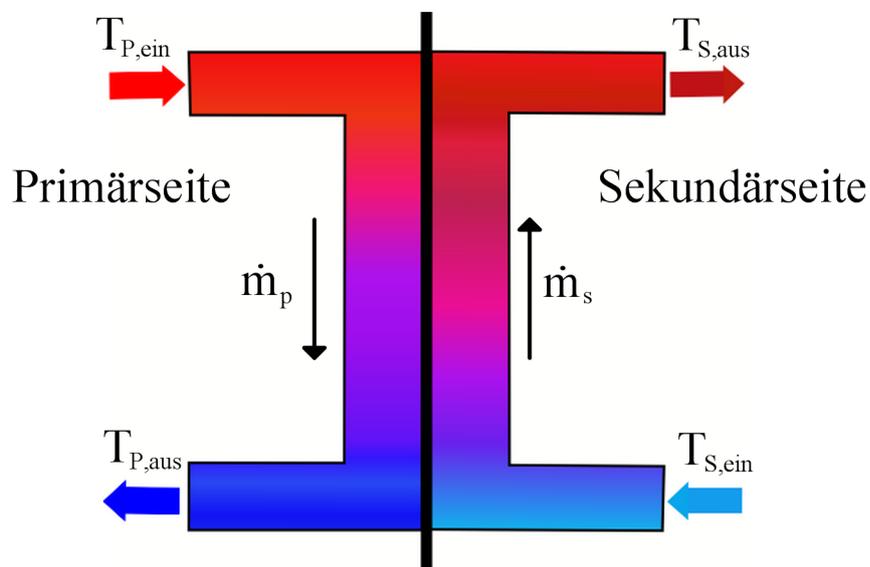


Abbildung 3.7: Schematischer Aufbau eines Plattenwärmeübertragers im Gegenstromprinzip

Die wesentlichen Größen, die für die Modellierung eines Plattenwärmeübertragers betrachtet werden, sind die Temperaturen auf der Primär- und der Sekundärseite sowie die dazugehörigen Massenströme. Bei der Primärseite kennzeichnet  $T_{P,ein}$  die Eintrittstemperatur,  $T_{P,aus}$  die Austrittstemperatur und  $\dot{m}_p$  den Massenstrom des Mediums durch die Primärseite. Bei der Sekundärseite kennzeichnet  $T_{S,ein}$  die Eintrittstemperatur,  $T_{S,aus}$  die Austrittstemperatur und  $\dot{m}_s$  den Massenstrom des Mediums durch die Sekundärseite.

### 3.2.1 Mathematische Beschreibung eines Plattenwärmeübertragers

Die mathematische Beschreibung des Plattenwärmeübertragers basiert auf der partiellen Differentialgleichung (2.12) des durchströmten zylindrischen Rohres aus Abschnitt 2.2. Zunächst werden vereinfachende Annahmen getroffen, um den Plattenwärmeübertrager zwar hinreichend genau aber mathematisch möglichst einfach beschreiben zu können. Die dabei getroffenen Annahmen ähneln denen der Modellierung des Pufferspeichers (siehe 3.1.2). Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Temperaturen der Medien in der Primär- und Sekundärseite im üblicherweise vertikal durchströmten Plattenwärmeübertrager werden in der horizontalen Ebene als isotherm [1] betrachtet, so dass die Temperatur nur von der vertikalen Position  $z$  und der Zeit  $t$  abhängt.
- Die radialen Geschwindigkeitskomponenten werden vernachlässigt, somit tritt die Strömung des Plattenwärmeübertragers nur in der vertikalen Richtung auf.
- Der Plattenwärmeübertrager wird bei der Modellierung als zwei nebeneinander liegende identische Rohre betrachtet, bei denen die Übertragung der Wärme an den äußeren Rohroberflächen stattfindet.
- Die den Plattenwärmeübertrager durchströmenden Speichermedien werden als inkompressibel angenommen.
- Die Reibungskräfte und die durch die Reibung in Wärme dissipierte kinetische Energie werden vernachlässigt.
- Durch die kurze Verweilzeit der Medien in der Primär- und Sekundärseite werden die axiale Wärmeleitung sowie die Verluste an die Umgebung nicht berücksichtigt.

Basierend auf den Annahmen und der partiellen Differentialgleichung (2.12) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem Rohr wird der Plattenwärmeübertrager durch den folgenden Ansatz modelliert:

$$\overbrace{\rho \cdot c_{sp} \frac{\partial T}{\partial t}}^{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m} \cdot c_{sp}}{A_r} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} + \overbrace{\frac{\dot{q}_{platten}}{A_r}}^{\text{Wärmeübertragung durch die Platten}} = 0 \quad (3.18)$$

Alle in Gleichung (3.18) vorkommenden Größen sind in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

Der Plattenwärmeübertrager setzt sich aus zwei identischen Rohren mit entgegenfließenden Massenströmen zusammen. Somit kann der allgemeine Ansatz (3.18) für beide Rohre verwendet werden. Der Zusammenhang des primären und des sekundären Rohres

Abkürzungen	Beschreibung	Einheit
$\rho$	Dichte	$[kg/m^3]$
$c_{sp}$	spezifische Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$T$	Temperatur des Mediums	$[K]$
$t$	Zeit	$[s]$
$\dot{m}$	Massenstrom	$[kg/s]$
$A_r$	Querschnittsfläche des Rohres	$[m^2]$
$z$	axiale Ortskomponente	$[m]$
$\dot{q}_{platten}$	Wärmestrom durch die Platten je Höhe	$[W/m]$

Tabelle 3.2: Größen zur Modellierung des Plattenwärmeübertragers

wird über den Term *Wärmeübertragung durch die Platten* hergestellt. Die mathematische Beschreibung dieses Terms ähnelt der Beschreibung des Terms *Umgebungsverluste* aus Abschnitt 3.1.5, mit dem Unterschied, dass die Wärme von der Primärseite an die Sekundärseite übertragen wird und nicht an die Umgebung. Somit erhält man je eine partielle Differentialgleichung für die Primär- und Sekundärseite:

$$\rho_p \cdot c_{Wp} \frac{\partial T_P}{\partial t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{Wp}}{A_r} \frac{\partial T_P}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_P - T_S) = 0 \quad (3.19)$$

$$\rho_s \cdot c_{Ws} \frac{\partial T_S}{\partial t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{Ws}}{A_r} \frac{\partial T_S}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_S - T_P) = 0 \quad (3.20)$$

$T_P$  kennzeichnet die Temperatur des Mediums der Primärseite,  $T_S$  die Temperatur des Mediums der Sekundärseite,  $\dot{m}_p$  den Massenstrom durch die Primärseite,  $\dot{m}_s$  den Massenstrom durch die Sekundärseite,  $\lambda_{platte}$  die Wärmeleitfähigkeit des Metalls des Rohres,  $A_{mr}$  die mittlere Fläche des Rohres,  $d_{platte}$  die Rohrwandstärke,  $H_r$  die Höhe des Rohres,  $\rho_p$  die Dichte des Mediums der Primärseite,  $\rho_s$  die Dichte des Mediums der Sekundärseite,  $c_{Wp}$  die spezifische Wärmekapazität der Primärseite und  $c_{Ws}$  die spezifische Wärmekapazität der Sekundärseite.

Die partiellen Differentialgleichungen der Primär- (3.19) und Sekundärseite (3.20) stellen somit das mathematische Modell für den Plattenwärmeübertrager dar.

### 3.3 Modellierung eines Solarkollektors

Zunächst sollen die Grundlagen zu Solarkollektoren kurz erläutert werden, wobei sich diese auf die wesentlichen Begriffe, wie sie üblicherweise in der Literatur, z. B. [15], verwendet werden, beschränken.

Der Solarkollektor ist das Kernelement thermischer Solaranlagen. Seine wesentliche Aufgabe ist es, Energie durch Sonnenstrahlung zu absorbieren und an Wärmeträger weiter zu geben. Die Absorption der Sonnenstrahlung erfolgt bei Solarkollektoren durch einen unter der transparenten Abdeckung befindlichen Absorber. Der Wärmeträger, der durch die Absorber strömt, ist für gewöhnlich ein Wasser-Frostschutzgemisch, da er in den kalten Jahreszeiten auch Temperaturen unterhalb des Nullpunktes ausgesetzt ist. Ein Absorber besteht aus einem sehr gut wärmeleitenden Material und wird üblicherweise als Serpentina- oder als Streifenabsorber, wie in Abbildung 3.8 dargestellt, ausgeführt.

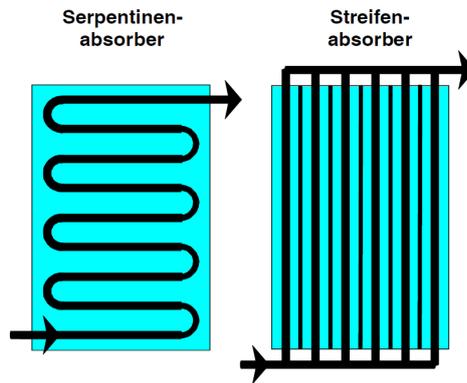


Abbildung 3.8: Die zwei häufigsten Bauformen von Absorbern [15]

Abbildung 3.9 zeigt den prinzipiellen Aufbau eines Solarkollektors, ausgeführt als ein Streifenabsorber, mit den wesentlichen Wärmeströmen.

Die Gesamtstrahlung, die auf eine Solarkollektorfläche  $A_{\text{koll}}$  trifft und somit Energie in den Solarkollektor bringt, wird als Strahlungsstromdichte  $I_g$  gekennzeichnet. Der Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{koll}}$  kennzeichnet die erhaltene Nutzwärmeleistung, die das Wasser-Frostschutzgemisch im Solarkollektor erwärmt. Die Nutzwärmeleistung setzt sich aus der Strahlungsstromdichte  $I_g$  auf die Solarkollektorfläche  $A_{\text{koll}}$  abzüglich der Verlustwärmeströme zusammen:

$$\dot{Q}_{\text{koll}} = I_g \cdot A_{\text{koll}} - \dot{Q}_{\text{re,abs}} - \dot{Q}_{\text{abst}} - \dot{Q}_{\text{konv}} - \dot{Q}_{\text{leit}} \quad (3.21)$$

Der Verlustwärmestrom  $\dot{Q}_{\text{re,abs}}$  kennzeichnet die reflektierte Strahlung an der transparenten Abdeckung, bei der die Strahlungsstromdichte  $I_g$  auf die Solarkollektorfläche  $A_{\text{koll}}$  trifft, sowie an der Absorberoberfläche. Der heiße Absorber gibt einen Teil seiner absorbierten Energie durch Strahlung wieder ab, dies wird mit dem Verlustwärmestrom  $\dot{Q}_{\text{abst}}$  gekennzeichnet. Neben den Strahlungsverlusten  $\dot{Q}_{\text{abst}}$  treten auch konvektive Verluste vom Solarkollektor an die Umgebung auf, sie werden mit dem Verlustwärmestrom  $\dot{Q}_{\text{konv}}$  beschrieben. Die Verluste aufgrund der Wärmeleitung werden durch den Verlustwärmestrom  $\dot{Q}_{\text{leit}}$  gekennzeichnet.

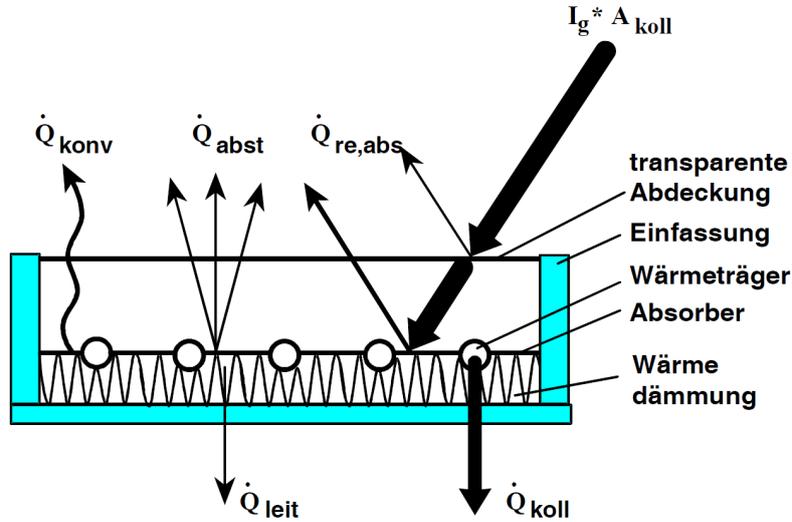


Abbildung 3.9: Schematischer Aufbau eines Solarkollektors mit den wesentlichen Wärmeströmen [15]

### 3.3.1 Mathematische Beschreibung eines Solarkollektors

Die Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$ , die das Wasser-Frostschutzgemisch in einem Solarkollektor erwärmt, ist bei Solarkollektoren vom größtem Interesse. Somit wird zunächst die mathematische Beschreibung der Nutzwärmeleistung betrachtet und anschließend das mathematische Modell des Solarkollektors aufgestellt.

Die mathematische Beschreibung der Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$  basiert auf dem Ansatz des Wirkungsgrades. Im Allgemeinen setzt sich der Wirkungsgrad als Verhältnis von Nutzen und Aufwand zusammen. Der Nutzen entspricht beim Solarkollektor der erhaltenen Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$  und der Aufwand der auf die Solarkollektorfläche  $A_{koll}$  auftretenden Strahlungsstromdichte  $I_g$ . Somit erhält man die allgemeine Beschreibung für den Wirkungsgrad des Solarkollektors  $\eta_{koll}$ :

$$\eta_{koll} = \frac{\dot{Q}_{koll}}{I_g \cdot A_{koll}} \quad (3.22)$$

In der Literatur, z.B [15], wird der Wirkungsgrad des Solarkollektors  $\eta_{koll,Ansatz}$ , aufbauend auf der allgemeinen Beschreibung der Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$  (3.21), häufig mit folgendem Ansatz beschrieben:

$$\eta_{koll,Ansatz} = \eta_0 - a_1 \frac{T_m - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{(T_m - T_{umg})^2}{I_g} \quad (3.23)$$

Dabei kennzeichnet  $\eta_0$  den Konversionsfaktor. Dieser beschreibt den Wirkungsgrad ohne Wärmeverluste, somit stellt er den höchstmöglichen Wirkungsgrad eines Solarkollektors dar. Die Temperaturdifferenz zwischen Absorber und Umgebung wird mit dem Parameter  $a_1$  und die quadratische Temperaturdifferenz mit dem Parameter  $a_2$  gewichtet.  $T_{\text{umg}}$  kennzeichnet die Temperatur der Umgebung und  $T_m$  die mittlere Temperatur des Absorbers. Da die mittlere Absorbertemperatur schwer zu bestimmen ist, wird sie aus der mittleren Temperatur der Absorberflüssigkeit bestimmt, welche sich aus den Temperaturen des einfließenden Mediums  $T_{\text{koll,vl}}$  und des ausfließenden Mediums  $T_{\text{koll,rl}}$  zusammensetzt [15]:

$$T_m = \frac{T_{\text{koll,vl}} + T_{\text{koll,rl}}}{2} \quad (3.24)$$

Im nächsten Schritt wird der Wirkungsgrad des Solarkollektors  $\eta_{\text{koll}}$  (3.22) mit den Wirkungsgrad des Ansatzes  $\eta_{\text{koll,Ansatz}}$  (3.23) gleich gesetzt und auf die Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{koll}}$  umgeformt:

$$\dot{Q}_{\text{koll}} = I_g \cdot A_{\text{koll}} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{T_m - T_{\text{umg}}}{I_g} - a_2 \frac{(T_m - T_{\text{umg}})^2}{I_g} \right) \quad (3.25)$$

Gleichung (3.25) ist die mathematische Beschreibung der Nutzwärmeleistung, wobei die darin enthaltenen Parameter ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $\eta_0$ ) aus dem Datenblatt des Solarkollektors bestimmt werden können. Als nächstes wird das mathematische Modell des Solarkollektors aufgestellt.

Die mathematische Beschreibung des Solarkollektors basiert auf der partiellen Differentialgleichung (2.12) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr aus Abschnitt 2.2. Zunächst werden vereinfachende Annahmen getroffen, um den Solarkollektor zwar hinreichend genau aber mathematisch möglichst einfach beschreiben zu können. Es werden folgende Annahmen getroffen:

- Die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches wird in der Ebene normal zur Durchströmungsrichtung als isotherm [1] betrachtet, so dass die Temperatur nur von der Position in Strömungsrichtung  $z$  und der Zeit  $t$  abhängt.
- Die radialen Geschwindigkeitskomponenten werden vernachlässigt, somit tritt die Strömung des Solarkollektors nur in Durchströmungsrichtung auf.
- Der Solarkollektor wird bei der Modellierung als Rohr betrachtet.
- Das Wasser-Frostschutzgemisch, das durch den Solarkollektor strömt, wird als inkompressibel angenommen.

- Die Reibungskräfte und die durch die Reibung in Wärme dissipierte kinetische Energie werden vernachlässigt.
- Durch die relativ kurze Verweilzeit des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarkollektor wird die axiale Wärmeleitung vernachlässigt.
- Der auf das Wasser-Frostschutzgemisch übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{koll}}$  verteilt sich gleichmäßig auf das für die Modellierung des Solarkollektors angenommene Rohr.

Basierend auf den Annahmen und der partiellen Differentialgleichung (2.12) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr wird der Solarkollektor durch den folgenden Ansatz modelliert:

$$\underbrace{\rho \cdot c_{sk} \frac{\partial T}{\partial t}}_{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_{sk} \cdot c_{sk}}{A_{koll}} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} + \underbrace{\frac{\dot{q}_{koll}}{A_{koll}}}_{\text{Nutzwärme}} = 0 \quad (3.26)$$

Alle vorkommenden Größen in Gleichung (3.26) werden in der Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Abkürzungen	Beschreibung	Einheit
$\rho$	Dichte	$[kg/m^3]$
$c_{sk}$	spezifische Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$T$	Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches	$[K]$
$t$	Zeit	$[s]$
$\dot{m}_{sk}$	Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches	$[kg/s]$
$A_{koll}$	Querschnittsfläche des Solarkollektors	$[m^2]$
$z$	axiale Ortskomponente	$[m]$
$\dot{q}_{koll}$	Wärmestrom je Länge in den Solarkollektor	$[W/m]$

Tabelle 3.3: Größen zur Modellierung des Solarkollektors

Beim Ansatz zur Modellierung des Solarkollektors (3.26) beschreibt der Term *Nutzwärme* die Erwärmung des im Solarkollektor befindlichen Wasser-Frostschutzgemisches durch die Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{koll}}$ . In der Nutzwärmeleistung (3.25) werden die Verluste des Solarkollektors an die Umgebung durch die Parameter ( $a_1$ ,  $a_2$ ) beschrieben. Dadurch wird in der partiellen Differentialgleichung (3.26) kein Term für die Verluste an die Umgebung benötigt. Im Weiteren wird angenommen, dass der übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{koll}}$  gleichmäßig auf das für die Modellierung angenommene Rohr verteilt ist, somit kann die Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{\text{koll}}$  mit der Gleichung (3.25) für das gesamte Rohr bestimmt werden. Der für die Modellierung benötigte übertragene Wärmestrom je

Länge  $\dot{q}_{koll}$  ergibt sich aufgrund der Annahme eines gleichverteilten Wärmeeintrages der Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$  durch die Länge  $L_{sk}$  des Solarkollektors durch Division:

$$\dot{q}_{koll} = \frac{\dot{Q}_{koll}}{L_{sk}} \quad (3.27)$$

Setzt man nun die Nutzwärmeleistung je Länge (3.27) in den allgemeinen Ansatz des Solarkollektors (3.26) ein, erhält man das mathematische Modell des Solarkollektors:

$$\rho \cdot c_{sk} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{sk} \cdot c_{sk}}{A_{sk}} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\dot{Q}_{koll}}{L_{sk} \cdot A_{Koll}} = 0 \quad (3.28)$$

## 4 Numerische Lösung

Dieses Kapitel widmet sich der numerischen Lösung der im vorhergehenden Kapitel aufgestellten Modelle des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers sowie des Solarkollektors. Die hergeleiteten partiellen Differentialgleichungen zur Beschreibung des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers und des Solarkollektors besitzen zeitliche sowie örtliche Ableitungen. Partielle Differentialgleichungen können numerisch entweder mit einem impliziten oder einem expliziten Lösungsverfahren gelöst werden. Aufgrund des überwiegenden Vorteils der wesentlich besseren Stabilität, siehe z.B. [14], wird im Weiteren nur das implizite Lösungsverfahren verwendet.

Im Abschnitt 4.1 wird die implizite Lösung anhand des Modells des vereinfachten Pufferspeichers (siehe Abschnitt 3.1.4) erläutert. Grundsätzlich wird die partielle Differentialgleichung für diskrete Orts- und Zeitpunkte gelöst. Dabei werden die Differentialquotienten der partiellen Differentialgleichung durch Differenzenquotienten approximiert. An den äußersten örtlichen Punkten müssen die Approximationen zum Teil anders erfolgen, sowie die Randbedingungen berücksichtigt werden. Anschließend werden die aufgestellten Differenzenquotienten für jeden diskreten Ortspunkt zu einem Zeitpunkt in die partielle Differentialgleichung eingesetzt. Dadurch erhält man ein lineares Gleichungssystem mit  $N$  Gleichungen für  $N$  Unbekannte für jeden Zeitschritt. Zum Schluss werden die Gleichungen in der kompakten Matrixschreibweise zusammengefasst und alle gesuchten Temperaturen für diesen Zeitschritt auf einmal berechnet.

In den Abschnitten 4.2, 4.3 und 4.4 werden die Modelle des in Abschnitt 3.3 betrachteten Solarkollektors, des Plattenwärmeübertragers aus Abschnitt 3.2 sowie des untersuchten Pufferspeichers aus Abschnitt 3.1 unter Verwendung des impliziten Lösungsverfahrens, welches anhand des vereinfachten Pufferspeichers erläutert wird, gelöst.

Abschließend wird in Abschnitt 4.5 näher auf die Berücksichtigung der freien Konvektion durch Mischen der Temperaturen des Wassers eingegangen.

## 4.1 Implizite Lösung des Modells des vereinfachten Pufferspeichers

Das Modell des vereinfachten Pufferspeichers aus Abschnitt 3.1.4 wird wie folgt angeschrieben:

$$\overbrace{\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t}}^{\text{Speicherung der Energie}} + \underbrace{\frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{erzwungene Konvektion}} = \overbrace{\lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}}^{\text{axiale Wärmeleitung}} \quad (4.1)$$

Die Temperatur des Wassers im Pufferspeicher  $T$  ist von der Zeit  $t$  und dem Ort  $z$  abhängig. Dabei sind die Zeit  $t$  und der Ort  $z$  unabhängige Variablen. Der Massenstrom des Wassers  $\dot{m}_W$  bei der Beladung des Erzeugers ist nur von der Zeit  $t$  abhängig. Die Dichte  $\rho$  sowie die spezifische Wärmekapazität  $c_W$  hängen von der Temperatur des Wassers  $T$  ab. Der Wert der effektiven vertikalen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  wurde experimentell ermittelt, worauf in Kapitel 5 näher eingegangen wird. Die Querschnittsfläche  $A$  des Pufferspeichers wird aus den bekannten Größen aus dem Datenblatt des untersuchten Pufferspeichers bestimmt.

Im nächsten Schritt wird die Temperatur des Wassers  $T$  zeitlich und örtlich diskretisiert. Die Temperatur des Wassers  $T$  wird bei der Orts- und Zeitdiskretisierung durch ihre Werte an einzelnen örtlichen Stützpunkten  $l$  ( $l = 0 \dots N_z$ ) zum zeitlichen Stützpunkt  $j$  ( $j = 0 \dots N_t$ ) beschrieben [16]. Somit wird die Temperatur des Wassers in weiterer Folge an diskreten Orten zu diskreten Zeiten, mit der örtlichen Schrittweite  $\Delta z$  und der zeitlichen Schrittweite  $\Delta t$ , betrachtet:

$$T = T(z, t) \rightarrow T_l^j = T \Big|_{\substack{t = j \cdot \Delta t \\ z = l \cdot \Delta z}} \quad (4.2)$$

Der Massenstrom des Wassers  $\dot{m}_W$  wird in weiterer Folge nur an den zeitlichen Stützpunkten ( $j = 0 \dots N_t$ ) betrachtet:

$$\dot{m}_W = \dot{m}_W(t) \rightarrow \dot{m}_W^j = \dot{m}_W \Big|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.3)$$

Zur Zeit  $t = 0$  ist die Temperatur des Wassers  $T$  sowie der Massenstrom  $\dot{m}_W$  bekannt. Der Ort  $z$  erstreckt sich von der Höhe  $H$  bei  $z = 0$  bis zum Boden des Pufferspeichers bei  $z = N_z \cdot \Delta z$ . Die örtliche Schrittweite  $\Delta z$  resultiert aus der Höhe  $H$  des Pufferspeichers und der Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte  $N_z$ :

$$\Delta z = \frac{H}{N_z} \quad \text{wenn } l = 0 \dots N_z$$

Die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_W$  werden bei jedem örtlichen Stützpunkt ( $l = 0 \dots N_z$ ) aus den entsprechenden Temperaturen des vorhergehenden Zeitpunktes  $j - 1$  bestimmt.

Abbildung 4.1 stellt einen Ausschnitt der diskretisierten Temperatur des Wassers  $T$  dar. Auf der Ordinate werden die zeitlichen Stützpunkte und auf der Abszisse die örtlichen Stützpunkte aufgetragen. Jeder Kreis kennzeichnet die Temperatur des Wassers an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit.

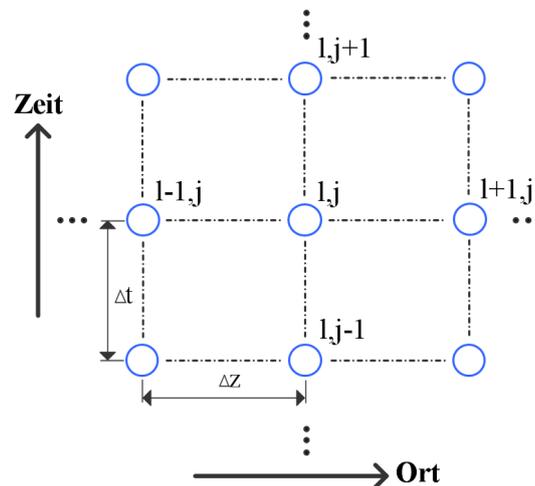


Abbildung 4.1: Diskretisierung der Temperatur des Wassers  $T$  in Ort und Zeit, dargestellt als Gitterstruktur

Im nächsten Schritt werden die beiden örtlichen und der zeitliche Differentialquotient aus dem vereinfachten Modell des Pufferspeichers (4.1) durch entsprechende Differenzenquotienten angenähert. Die in der Folge aufgestellten Differenzenquotienten werden beispielhaft für die zu bestimmende Temperatur des Wassers  $T_l^{j+1}$  beim örtlichen Stützpunkt  $l$  zum zeitlichen Stützpunkt  $j + 1$  beschrieben.

Dabei wird der zeitliche Differentialquotient, der im vereinfachten Modell des Pufferspeichers (4.1) im Term *Speicherung der Energie* vorkommt, durch einen rückwärtigen Differenzenquotienten approximiert, der sich durch die Differenz der zu bestimmenden

Temperatur  $T_1^{j+1}$  und der bekannten Temperatur  $T_1^j$  des vorhergehenden Zeitschritts  $j$  beim Ort  $l$ , gebrochen durch die zeitliche Schrittweite  $\Delta t$ , zusammensetzt:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial t} \right|_{l,j+1} \approx \frac{T_l^{j+1} - T_l^j}{\Delta t} \quad (4.4)$$

Der örtliche Differentialquotient erster Ordnung, der im vereinfachten Modell des Pufferspeichers (4.1) im Term *erzwungene Konvektion* vorkommt, wird durch die Temperatur des vorherigen Ortes  $T_{l-1}^{j+1}$  und des nachfolgenden Ortes  $T_{l+1}^{j+1}$ , gebrochen durch die doppelte örtliche Schrittweite  $\Delta z$ , approximiert:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{l,j+1} \approx \frac{T_{l+1}^{j+1} - T_{l-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} \quad (4.5)$$

Der örtliche Differentialquotient zweiter Ordnung, der im vereinfachten Modell des Pufferspeichers (4.1) im Term *axiale Wärmeleitung* vorkommt, wird durch die Temperatur des vorherigen Ortes  $T_{l-1}^{j+1}$  und des nachfolgenden Ortes  $T_{l+1}^{j+1}$  abzüglich der doppelten Temperatur  $T_l^{j+1}$ , gebrochen durch das Quadrat der örtlichen Schrittweite  $\Delta z$ , approximiert:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{l,j+1} \approx \frac{T_{l+1}^{j+1} - 2 \cdot T_l^{j+1} + T_{l-1}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.6)$$

Setzt man die aufgestellten Approximationen von (4.4) bis (4.6) in die partielle Differentialgleichung des vereinfachten Pufferspeichers (4.1) ein, erhält man eine Gleichung mit drei unbekanntem ( $T_{l-1}^{j+1}$ ,  $T_l^{j+1}$ ,  $T_{l+1}^{j+1}$ ) und einer bekannten Temperatur  $T_l^j$ :

$$\rho \cdot c_W \frac{T_l^{j+1} - T_l^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{T_{l+1}^{j+1} - T_{l-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} = \lambda \frac{T_{l+1}^{j+1} - 2 \cdot T_l^{j+1} + T_{l-1}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.7)$$

Um dies zu lösen benötigt man zwei weitere Gleichungen mit den selben Unbekannten. Da die Approximationen der beiden örtlichen Differentialquotienten als zentrale Differenzenquotienten ausgeführt sind, und da nach den äußeren örtlichen Randstützpunkten ( $l = 0$  und  $l = N_z$ ) keine weiteren Stützpunkte mehr vorkommen, werden zunächst die örtlichen Stützpunkte bei  $l = 1 \dots N_z - 1$  betrachtet. Wird nun für die örtlichen Stützpunkte ( $l = 1 \dots N_z - 1$ ) zum gleichen Zeitpunkt  $j + 1$  mit derselben Vorgehensweise der Approximationen (4.4) bis (4.6) jeweils eine Gleichung aufgestellt, erhält man  $N_z - 1$  Gleichungen für  $N_z + 1$  Unbekannte. An den örtlichen Randstützpunkten ( $l = 0$  und  $l = N_z$ ) muss anders approximiert werden.

Der örtliche Differentialquotient zweiter Ordnung wird beim örtlichen Randstützpunkt  $l=0$  durch einen vorwärtigen Differenzenquotienten angepasst, welcher auch der Approximation des örtlichen Stützpunktes bei  $l = 1$  entspricht:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{0,j+1} \approx \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{1,j+1} \approx \frac{T_2^{j+1} - 2 \cdot T_1^{j+1} + T_0^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.8)$$

Der örtliche Differentialquotient zweiter Ordnung beim örtlichen Randstützpunkt  $l = N_z$  wird durch einen rückwärtigen Differenzenquotienten angepasst, der auch der Approximation des örtlichen Stützpunktes bei  $l = (N_z - 1)$  entspricht:

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{N_z,j+1} \approx \left. \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right|_{N_z-1,j+1} \approx \frac{T_{N_z}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_z-1}^{j+1} + T_{N_z-2}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad (4.9)$$

Der örtliche Differentialquotient erster Ordnung beim örtlichen Stützpunkt  $l = N_z$ , bei dem Wasser mit der dort befindlichen Temperatur aus dem Pufferspeicher entnommen wird, wird durch einen rückwärtigen Differenzenquotienten angepasst:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{N_z,j+1} \approx \frac{T_{N_z}^{j+1} - T_{N_z-1}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.10)$$

Beim vereinfachten Pufferspeicher wird angenommen, dass beim örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung am örtlichen Stützpunkt  $l = 0$  Wasser mit dem Massenstrom der Beladung mit der Temperatur  $T_{Be,E}$  in den Pufferspeicher strömt:

$$T_{Be,E} = T_{Be,E}^j = T_{Be,E}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.11)$$

Somit wird diese Randbedingung beim örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung beim Stützpunkt  $l = 0$  als ein vorwärtiger Differenzenquotient mit der einfließenden Temperatur  $T_{Be,E}$  des Wassers approximiert:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{0,j+1} \approx \frac{T_1^{j+1} - T_{Be,E}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.12)$$

Setzt man nun bei den örtlichen Randstützpunkten bei  $l = 0$  und  $l = N_z$  zum Zeitpunkt  $j + 1$  die aufgestellten Approximationen von (4.8) bis (4.12) passend in die partielle Differentialgleichung des vereinfachten Pufferspeichers (4.1) ein, erhält man zwei approximierte Gleichungen ohne neue Unbekannte:

$$\rho \cdot c_W \frac{T_0^{j+1} - T_0^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{T_1^{j+1} - T_{Be,E}^{j+1}}{\Delta z} = \lambda \frac{T_2^{j+1} - 2 \cdot T_1^{j+1} + T_0^{j+1}}{\Delta z^2} \quad \text{bei } l = 0 \quad (4.13)$$

$$\rho \cdot c_W \frac{T_{N_z}^{j+1} - T_{N_z}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_W \cdot c_W}{A} \frac{T_{N_z-1}^{j+1} - T_{N_z}^{j+1}}{\Delta z} = \lambda \frac{T_{N_z}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_z-1}^{j+1} + T_{N_z-2}^{j+1}}{\Delta z^2} \quad \text{bei } l = N_z \quad (4.14)$$

Stellt man nun für jeden örtlichen Stützpunkt ( $l = 0 \dots N_z$ ) unter Zuhilfenahme der zeitlichen Approximation (4.4) beim Zeitpunkt  $j+1$  und der örtlichen Approximationen von (4.5) bis (4.12), passend für jeden örtlichen Stützpunkt eingesetzt in die partielle Differentialgleichung (4.1), eine Gleichung auf, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit  $N_z + 1$  Gleichungen für  $N_z + 1$  Unbekannte.

Um die aufgestellten  $N_z + 1$  Gleichungen kompakt und übersichtlich in der Matrixschreibweise darzustellen, wird im nächsten Schritt die Differentialgleichung des Pufferspeichers (4.7), die mit den Differenzenquotienten beim örtlichen Stützpunkt  $l$  zum zeitlichen Stützpunkt  $j+1$  approximiert wurde, auf die bekannte Temperatur  $T_l^j$  beim vorherigen Ort zum bekannten Zeitpunkt  $j$  umgeformt:

$$T_l^j = T_l^{j+1} - \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{l+1}^{j+1} - 2 \cdot T_l^{j+1} + T_{l-1}^{j+1}}{\Delta z^2} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{\rho \cdot A} \frac{T_{l+1}^{j+1} - T_{l-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} \quad (4.15)$$

Wird nun jede Gleichung bei den örtlichen Stützpunkten ( $l = 0 \dots N_z$ ) auf die Temperatur des Wassers aus dem vorhergehenden Zeitpunkt  $j$  umgeformt (siehe Gleichung (4.15)) erhält man folgende  $N_z + 1$  Gleichungen für  $N_z + 1$  Unbekannte:

$$T_0^j = \left(1 - \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2}\right) \cdot T_0^{j+1} + \left(\frac{2 \cdot \Delta t \cdot \lambda}{c_W \cdot \rho \cdot \Delta z^2} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z}\right) \cdot T_1^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2}\right) \cdot T_2^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{Be,E}^{j+1} \quad (4.16)$$

$$T_1^j = \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} - \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_0^{j+1} + \left(1 + \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2}\right) \cdot T_1^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_2^{j+1} \quad (4.17)$$

⋮

$$\begin{aligned}
T_{N_z-1}^j &= \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} - \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{N_z-2}^{j+1} \\
&+ \left( 1 + \frac{2 \cdot \Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} \right) \cdot T_{N_z-1}^{j+1} + \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{N_z}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
T_{N_z}^j &= \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot 2 \cdot \Delta z^2} \right) \cdot T_{N_z-2}^{j+1} + \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_W \cdot \Delta z^2} - \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{N_z-1}^{j+1} \\
&+ \left( 1 - \frac{\Delta t \cdot \lambda}{c_W \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z^2} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{N_z}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Als nächstes werden die  $N_z + 1$  aufgestellten Gleichungen zum Zeitpunkt  $(j + 1)$  in der Matrizenschreibweise kompakt zusammengefasst:

$$\mathbf{T}^j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{j+1} + \mathbf{B} \tag{4.20}$$

$\mathbf{T}^j$  kennzeichnet den Temperaturvektor des vorhergehenden Zeitschrittes  $j$ ,  $\mathbf{T}^{j+1}$  den Temperaturvektor mit den für den Zeitpunkt  $j + 1$  zu berechnenden Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher. Die Vektoren  $(\mathbf{T}^j, \mathbf{T}^{j+1}, \mathbf{B})$  und die Matrix  $\mathbf{A}$  werden in der Folge beispielhaft für die örtlichen Stützpunkte bei  $(l = 0 \dots 5)$  aufgestellt. Die beiden Temperaturvektoren werden wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{T}^{j+1} = \begin{bmatrix} T_0^{j+1} \\ T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ T_4^{j+1} \\ T_5^{j+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}^j = \begin{bmatrix} T_0^j \\ T_1^j \\ T_2^j \\ T_3^j \\ T_4^j \\ T_5^j \end{bmatrix}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}$  stellt den Zusammenhang der Temperaturen des Wassers bei den örtlichen Stützpunkten dar. Die Parameter aus den Approximationen des vereinfachten Pufferspeichers werden für eine bessere Übersichtlichkeit zu den Größen  $C_1$  und  $C_2$  zusammengefasst:

$$C_1 = \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho \cdot c_w \cdot \Delta z^2} \right) \quad C_2 = \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \quad (4.21)$$

Somit erhält man folgende Matrix **A**:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (1 - C_1) & (2 \cdot C_1 + 2 \cdot C_2) & (-C_1) & 0 & 0 & 0 \\ (-C_1 - C_2) & (1 + 2 \cdot C_1) & (-C_1 + C_2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-C_1 - C_2) & (1 + 2 \cdot C_1) & (-C_1 + C_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-C_1 - C_2) & (1 + 2 \cdot C_1) & (-C_1 + C_2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-C_1 - C_2) & (1 + 2 \cdot C_1) & (-C_1 + C_2) \\ 0 & 0 & 0 & (-C_1) & (2 \cdot C_1 - 2 \cdot C_2) & (1 - C_1 + 2 \cdot C_2) \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Im Vektor **B** wird die Eintrittstemperatur  $T_{Be,E}$  des Wassers in den Pufferspeicher dargestellt:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \cdot C_2 \cdot T_{Be,E}^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

Im Weiteren werden die mathematischen Modelle des Solarkollektors, des Plattenwärmeübertragers sowie des Pufferspeichers aufbauend auf der Lösung des vereinfachten Pufferspeichers implizit gelöst.

## 4.2 Implizite Lösung des Modells des Solarkollektors

Das mathematische Modell des Solarkollektors aus Abschnitt 3.3 wird wie folgt angeschrieben:

$$\rho_{sk} \cdot c_{sk} \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{sk} \cdot c_{sk}}{A_{sk}} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{\dot{Q}_{koll}}{L_{sk} \cdot A_{Koll}} = 0 \quad (4.24)$$

Die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T$  im Solarkollektor ist von der Zeit  $t$  und dem Ort  $z$  abhängig. Die Dichte  $\rho$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_{sk}$  des Solarkollektors hängen von der Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches ab. Der gesamte übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{koll}$  sowie der Massenstrom durch den Solarkollektor  $\dot{m}_{sk}$  hängen nur von der Zeit  $t$  ab. Die restlichen Parameter der Gleichung (4.24) werden aus dem Datenblatt eines Solarkollektors entnommen.

Die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T$  wird bei der Orts- und Zeitdiskretisierung durch ihre Werte an einzelnen örtlichen Stützpunkten  $k$  ( $k = 0 \dots N_{sk}$ ) zum zeitlichen Stützpunkt  $j$  ( $j = 0 \dots N_t$ ) beschrieben. Somit wird die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in weiterer Folge an diskreten Orten zu diskreten Zeiten, mit der örtlichen Schrittweite  $\Delta z$  und der zeitlichen Schrittweite  $\Delta t$ , betrachtet:

$$T = T(z, t) \rightarrow T_k^j = T \Big|_{\substack{t = j \cdot \Delta t \\ z = k \cdot \Delta z}} \quad (4.25)$$

Der Massenstrom durch den Solarkollektor  $\dot{m}_{sk}$  wird in weiterer Folge nur an den zeitlichen Stützpunkten ( $j = 0 \dots N_t$ ) betrachtet. Die zeitabhängige Nutzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$  kann gemäß (3.25) wie folgt angeschrieben werden:

$$\dot{Q}_{koll} = I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{T_m - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{(T_m - T_{umg})^2}{I_g} \right) \quad (4.26)$$

$T_m$ , die mittlere Temperatur des Absorbers (siehe Abschnitt 3.3.1), setzt sich aus der Vorlauftemperatur  $T_{koll,vl}$  des in den Solarkollektor eintretenden und der Rücklauftemperatur  $T_{koll,rl}$  des aus dem Solarkollektor austretenden Wasser-Frostschutzgemisches des vorangegangenen Zeitschrittes zusammen:

$$T_m^{j+1} = \frac{(T_{koll,vl}^j + T_{koll,rl}^j)}{2} \quad (4.27)$$

In der Gleichung für die Nutzwärmeleistung (4.26) sind die Umgebungstemperatur  $T_{umg}$ , die Strahlungsstromdichte  $I_g$  sowie die Vorlauftemperatur  $T_{koll,vl}$  und die Rücklauftemperatur  $T_{koll,rl}$  des Wasser-Frostschutzgemisches nur von der Zeit  $t$  abhängig.

Dabei werden die zeitabhängigen Größen an den zeitlichen Stützpunkten ( $j = 0 \dots N_t$ ) betrachtet. Die Dichte  $\rho_{sk}$  und die spezifische Wärmekapazität  $c_{sk}$  des Wasser-Frostschutzgemisches werden bei jedem örtlichen Stützpunkt ( $l = 0 \dots N_{sk}$ ) aus den entsprechenden Temperaturen des vorgehenden Zeitpunktes bestimmt. Zur Zeit  $t = 0$  sind alle zeitabhängigen Größen des Solarkollektors aus Gleichung (4.24) bekannt. Der Ort  $z$  erstreckt sich von der Länge  $L_{sk}$  des Solarkollektors bei  $z = 0$  bis zu  $z = N_{sk} \cdot \Delta z$ . Die örtliche Schrittweite  $\Delta z$  resultiert aus der Höhe  $H_{sk}$  des Solarkollektors und der Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte  $N_{sk}$ :

$$\Delta z = \frac{H_{sk}}{N_{sk}} \quad \text{wenn } k = 0 \dots N_{sk}$$

Im nächsten Schritt werden der zeitliche und der örtliche Differentialquotient erster Ordnung aus Gleichung (4.24) durch Differenzenquotienten approximiert. An den äußersten örtlichen Stützpunkten ( $k = 0$ ,  $k = N_{sk}$ ) müssen die Approximationen angepasst werden. Der Solarkollektor wird beim örtlichen Stützpunkt  $k = 0$  mit der eintretenden Rücklaufftemperatur  $T_{koll,rl}$  des Wasser-Frostschutzgemisches beladen. Beim örtlichen Stützpunkt  $k = N_{sk}$  tritt das Wasser-Frostschutzgemisch mit der dort befindlichen Temperatur aus dem Solarkollektor, welche im Weiteren als Vorlaufttemperatur  $T_{koll,vl}$  bezeichnet wird. Das Aufstellen der zeitlichen und örtlichen Approximationen sowie der angepassten Approximationen am Rand entspricht denen aus Abschnitt 4.1 für den vereinfachten Pufferspeicher.

Anschließend werden für jeden örtlichen Stützpunkt zum selben Zeitpunkt die passenden Approximationen in die partielle Differentialgleichung (siehe Gleichung (4.24)) eingesetzt, umgeformt und in der kompakten Matrixschreibweise zusammengefasst:

$$\mathbf{T}^j = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T}^{j+1} + \mathbf{B} - \mathbf{K} \quad (4.28)$$

$\mathbf{T}^j$  kennzeichnet den Temperaturvektor des vorhergehenden Zeitpunktes  $j$  und  $\mathbf{T}^{j+1}$  den Temperaturvektor mit den für den Zeitpunkt  $j + 1$  zu berechnenden Temperaturen des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarkollektor. Die Matrix  $\mathbf{A}$  stellt den Zusammenhang der Temperaturen des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarkollektor dar. Im Vektor  $\mathbf{B}$  wird die Vorlaufttemperatur  $T_{koll,vl}$  des einströmenden Wasser-Frostschutzgemisches in den Solarkollektor berücksichtigt. Der Vektor  $\mathbf{K}$  beschreibt die übertragene Wärme auf das Wasser-Frostschutzgemisch durch die Nuzwärmeleistung  $\dot{Q}_{koll}$ .

### 4.3 Implizite Lösung des Modells des Plattenwärmeübertragers

Das Modell des Plattenwärmeübertragers aus Abschnitt 3.2 wird wie folgt angeschrieben:

$$\rho_p \cdot c_{Wp} \frac{\partial T_P}{\partial t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{Wp}}{A_r} \frac{\partial T_P}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_P - T_S) = 0 \quad (4.29)$$

$$\rho_s \cdot c_{Ws} \frac{\partial T_S}{\partial t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{Ws}}{A_r} \frac{\partial T_S}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_S - T_P) = 0 \quad (4.30)$$

Wie zu erkennen ist, setzt sich das mathematische Modell des Plattenwärmeübertragers aus jeweils einer partiellen Differentialgleichung für die Primär- (4.29) und die

Sekundärseite (4.30) zusammen. Somit werden in weiterer Folge die beiden Differentialgleichungen gleichzeitig bei den entsprechenden Orten zu den dazugehörigen Zeiten gelöst.

Die Temperatur der Medien der Primärseite  $T_P$  und der Sekundärseite  $T_S$  hängen vom Ort  $z$  und der Zeit  $t$  ab. Die beiden Massenströme der Primärseite  $\dot{m}_P$  und Sekundärseite  $\dot{m}_S$  hängen nur von der Zeit  $t$  ab. Die Dichte und die spezifische Wärmekapazität der Primärseite ( $\rho_P, c_{W,P}$ ) hängen von der Temperatur der Primärseite  $T_P$  ab. Analog dazu verhält es sich mit der Dichte und der spezifischen Wärmekapazität ( $\rho_S, c_{W,S}$ ) auf der Sekundärseite. Die restlichen Parameter aus den Gleichungen (4.29) und (4.30) werden aus dem Datenblatt eines Plattenwärmeübertragers entnommen.

Die Temperaturen der Medien der Primärseite  $T_P$  sowie der Sekundärseite  $T_S$  werden bei der Zeit- und Ortsdiskretisierung durch ihre Werte an einzelnen örtlichen Stützpunkten  $l$  ( $l = 0 \dots N_{pwü}$ ) zu zeitlichen Stützpunkt  $j$  ( $j = 0 \dots N_t$ ) beschrieben:

$$T_P = T_P(z, t) \rightarrow T_P^j_k = T_P \Big|_{\substack{t = j \cdot \Delta t \\ z = k \cdot \Delta z}} \quad (4.31)$$

$$T_S = T_S(z, t) \rightarrow T_S^j_k = T_S \Big|_{\substack{t = j \cdot \Delta t \\ z = k \cdot \Delta z}} \quad (4.32)$$

Der Ort  $z$  erstreckt sich von der Höhe  $H_r$  des Plattenwärmeübertragers bei  $z = 0$  bis zu  $z = N_{pwü} \cdot \Delta z$ . Die örtliche Schrittweite  $\Delta z$  resultiert aus der Höhe  $H_r$  des Plattenwärmeübertragers und der Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte  $N_{pwü}$ :

$$\Delta z = \frac{H_r}{N_{pwü}} \quad \text{wenn } k = 0 \dots N_{pwü}$$

Die beiden Massenströme der Medien durch die Primär-  $\dot{m}_P$  und die Sekundärseite  $\dot{m}_S$  werden in weiterer Folge nur an den zeitlichen Stützpunkten betrachtet:

$$\dot{m}_P = \dot{m}_P(t) \rightarrow \dot{m}_P^j = \dot{m}_P \Big|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.33)$$

$$\dot{m}_S = \dot{m}_S(t) \rightarrow \dot{m}_S^j = \dot{m}_S \Big|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.34)$$

Die Dichten ( $\rho_P, \rho_S$ ) und die spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{W,P}, c_{W,S}$ ) werden an jedem örtlichen Stützpunkt aus den entsprechenden Temperaturen des vorherigen Zeitpunktes bestimmt. Die zeitabhängigen Größen sind beim Zeitpunkt  $t = 0$  bekannt.

Als nächstes werden die zeitlichen sowie die örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung aus dem Modell des Plattenwärmeübertragers (4.29), (4.30) durch entsprechende Differenzenquotienten angenähert. Dabei werden die Approximationen beispielhaft für die zu bestimmende Temperatur der Medien  $(T_{P_l}^{j+1}, T_{S_l}^{j+1})$  beim örtlichen Stützpunkt  $l$  zum zeitlichen Stützpunkt  $j + 1$  beschrieben. Setzt man nun für den örtlichen Differentialquotient erster Ordnung die Approximation (4.5) und für den zeitlichen Differentialquotient die Approximation (4.4) aus dem Abschnitt 4.1 für den vereinfachten Pufferspeicher in das Modell des Plattenwärmeübertragers (4.29), (4.30) ein, erhält man folgende Beschreibung:

$$\rho_p \cdot c_{Wp} \frac{T_{P_l}^{j+1} - T_{P_l}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{Wp}}{A_r} \frac{T_{P_{l+1}}^{j+1} - T_{P_{l-1}}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{P_l}^{j+1} - T_{S_l}^{j+1}) = 0 \quad (4.35)$$

$$\rho_s \cdot c_{Ws} \frac{T_{S_l}^{j+1} - T_{S_l}^j}{\Delta t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{Ws}}{A_r} \frac{T_{S_{l+1}}^{j+1} - T_{S_{l-1}}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{S_l}^{j+1} - T_{P_l}^{j+1}) = 0 \quad (4.36)$$

Es ist zu erkennen, dass man aus den beiden approximierten Differenzialgleichungen (4.35) und (4.36) sechs unbekannte  $(T_{P_l}^{j+1}, T_{P_{l+1}}^{j+1}, T_{P_{l-1}}^{j+1}, T_{S_l}^{j+1}, T_{S_{l+1}}^{j+1}, T_{S_{l-1}}^{j+1})$  und nur zwei bekannte Temperaturen  $(T_{P_l}^j, T_{P_l}^j)$  erhält. Um dies zu lösen benötigt man vier weitere Gleichungen mit den selben Unbekannten (siehe Abschnitt 4.1).

Wird nun für die örtlichen Stützpunkte  $(l = 1 \dots N_{pwü} - 1)$  zum gleichen Zeitpunkt  $j + 1$  mit derselben Vorgehensweise der Approximationen (4.4) bis (4.6) jeweils eine Gleichung aufgestellt, erhält man  $2 \cdot (N_{pwü} - 1)$  Gleichungen für  $2 \cdot (N_{pwü} + 1)$  Unbekannte. Um dieses unterbestimmte Gleichungssystem zu lösen müssen die örtlichen Randstützpunkte bei  $l = 0$  und  $l = N_{pwü}$  durch entsprechende Approximationen angepasst werden.

Beim Plattenwärmeübertrager wird angenommen, dass jeweils am örtlichen Randstützpunkt  $l = 0$  an der Primärseite ein Medium mit dem Massenstrom  $\dot{m}_p$  mit der Temperatur  $T_{P, \text{ein}}$  einströmt und an der Sekundärseite das Medium im Plattenwärmeübertrager mit dem Massenstrom  $\dot{m}_s$  ausströmt und dass jeweils beim örtlichen Randstützpunkt  $l = N_{pwü}$  an der Primärseite das Medium mit dem Massenstrom  $\dot{m}_p$  ausströmt und an der Sekundärseite ein Medium mit dem Massenstrom  $\dot{m}_s$  mit der Temperatur  $T_{S, \text{ein}}$  einströmt:

$$T_{P, \text{ein}} = T_{P, \text{ein}}^j = T_{P, \text{ein}}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.37)$$

$$T_{S, \text{ein}} = T_{S, \text{ein}}^j = T_{S, \text{ein}}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.38)$$

Somit werden die örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung in den partiellen Differentialgleichungen der Primärseite (4.29), (4.30) beim örtlichen Stützpunkt  $l = 0$  zum Zeitpunkt  $j + 1$  bei der Primärseite als vorwärtige Differenzenquotienten mit der dazugehörigen einfließenden Temperatur  $T_{P,\text{ein}}$  des Mediums und bei der Sekundärseite als vorwärtige Differenzenquotienten approximiert:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{0,j+1} \approx \frac{T_{P1}^{j+1} - T_{P,\text{ein}}^{j+1}}{\Delta z} \quad \dot{m}_p > 0 \quad (4.39)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{0,j+1} \approx \frac{T_{S1}^{j+1} - T_{S0}^{j+1}}{\Delta z} \quad \dot{m}_s < 0 \quad (4.40)$$

Die örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung in den partiellen Differentialgleichungen (4.29), (4.30) werden beim örtlichen Stützpunkt  $l = N_{\text{pwü}}$  zum Zeitpunkt  $j + 1$  bei der Primärseite als rückwärtige Differenzenquotienten und bei der Sekundärseite als rückwärtige Differenzenquotienten mit der einfließenden Temperatur  $T_{S,\text{ein}}$  des Mediums approximiert:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{N_{\text{pwü}},j+1} \approx \frac{T_{P_{N_{\text{pwü}}}}^{j+1} - T_{P_{N_{\text{pwü}}-1}}^{j+1}}{\Delta z} \quad \dot{m}_p > 0 \quad (4.41)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{N_{\text{pwü}},j+1} \approx \frac{T_{S,\text{ein}}^{j+1} - T_{S_{N_{\text{pwü}}-1}}^{j+1}}{\Delta z} \quad \dot{m}_s < 0 \quad (4.42)$$

Setzt man nun bei den örtlichen Randstützpunkten  $l = 0$  und  $l = N_z$  zum Zeitpunkt  $j + 1$  die aufgestellten Approximationen von (4.39) bis (4.42) passend in die partielle Differentialgleichung des Plattenwärmeübertragers (4.29), (4.30) ein, erhält man dafür folgende approximierten Gleichungen:

Für den örtlichen Randstützpunkt  $l = 0$ :

$$\begin{aligned} \rho_p \cdot c_{Wp} \frac{T_{P0}^{j+1} - T_{P0}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{Wp}}{A_r} \frac{T_{P1}^{j+1} - T_{P,\text{ein}}^{j+1}}{\Delta z} \\ + \frac{\lambda_{\text{platte}} \cdot A_{mr}}{d_{\text{platte}} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{P0}^{j+1} - T_{S0}^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \cdot c_{W_s} \frac{T_{S_0}^{j+1} - T_{S_0}^j}{\Delta t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{W_s}}{A_r} \frac{T_{S_1}^{j+1} - T_{S_0}^{j+1}}{\Delta z} \\ + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{S_0}^{j+1} - T_{P_0}^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.44)$$

Für den örtlichen Randstützpunkt  $l = N_{pwü}$ :

$$\begin{aligned} \rho_p \cdot c_{W_p} \frac{T_{P_{N_{pwü}}}^{j+1} - T_{P_{N_{pwü}}}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{W_p}}{A_r} \frac{T_{P_{N_{pwü}}}^{j+1} - T_{P_{N_{pwü}-1}}^{j+1}}{\Delta z} \\ + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{P_{N_{pwü}}}^{j+1} - T_{S_{N_{pwü}}}^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \rho_s \cdot c_{W_s} \frac{T_{S_{N_{pwü}}}^{j+1} - T_{S_{N_{pwü}}}^j}{\Delta t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{W_s}}{A_r} \frac{T_{S_{ein}}^{j+1} - T_{S_{N_{pwü}-1}}^{j+1}}{\Delta z} \\ + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{S_{N_{pwü}}}^{j+1} - T_{P_{N_{pwü}}}^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.46)$$

Somit erhält man vier weitere Gleichungen mit keinen neuen Unbekannten. Im nächsten Schritt werden die Differentialgleichungen des Plattenwärmeübertragers (4.35) und (4.36), die mit den Differenzenquotienten beim örtlichen Stützpunkt  $l$  zum zeitlichen Stützpunkt  $j + 1$  approximiert wurden, je auf die bekannte Temperatur ( $T_{P_l}^j$ ,  $T_{S_l}^j$ ) beim vorherigen Ort zum bekannten Zeitpunkt  $j$  umgeformt:

$$T_{P_l}^j = T_{P_l}^{j+1} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{\rho_p \cdot A_r} \frac{T_{P_{l+1}}^{j+1} - T_{P_{l-1}}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W_p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{P_l}^{j+1} - T_{S_l}^{j+1}) \quad (4.47)$$

$$T_{S_l}^j = T_{S_l}^{j+1} - \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{\rho_s \cdot A_r} \frac{T_{S_{l+1}}^{j+1} - T_{S_{l-1}}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W_s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_{S_l}^{j+1} - T_{P_l}^{j+1}) \quad (4.48)$$

Setzt man die zeitliche (4.4) und die aufgestellten örtlichen Approximationen bei den örtlichen Stützpunkten ( $l = 0 \dots N_{pwü}$ ) zum gleichen Zeitschritt ( $j + 1$ ) in die partielle Differentialgleichung (4.29), (4.30) passend für jeden örtlichen Stützpunkt ein, erhält man ein lineares Gleichungssystem mit  $2 \cdot (N_{pwü} + 1)$  Gleichungen für  $2 \cdot (N_{pwü} + 1)$  Unbekannte:

$$\begin{aligned}
T_{P0}^j &= \left(1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{P0}^{j+1} + \left(\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P1}^{j+1} \\
&+ \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{S0}^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{\rho_p \cdot A_r \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P,ein}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.49}$$

$$\begin{aligned}
T_{S0}^j &= \left(1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{\rho_s \cdot A_r}\right) \cdot T_{S0}^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{S1}^{j+1} \\
&+ \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{P0}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
T_{P1}^j &= \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P0}^{j+1} \left(1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{P1}^{j+1} \\
&+ \left(\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P2}^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{S1}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned}
T_{S1}^j &= \left(\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{S0}^{j+1} \left(1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{S1}^{j+1} \\
&+ \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{S2}^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{P1}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

⋮

$$\begin{aligned}
T_{P_{N_{pw\ddot{u}}-1}}^j &= \left(-\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P_{N_{pw\ddot{u}}-2}}^{j+1} \left(1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{P_{N_{pw\ddot{u}}-1}}^{j+1} \\
&+ \left(\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot 2 \cdot \Delta z}\right) \cdot T_{P_{N_{pw\ddot{u}}}}^{j+1} + \left(-\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r}\right) \cdot T_{S_{N_{pw\ddot{u}}-1}}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.53}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_{N_{pwü}-1}}^j &= \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{S_{N_{pwü}-2}}^{j+1} \left( 1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \cdot T_{S_{N_{pwü}-1}}^{j+1} \\
&+ \left( -\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{S_{N_{pwü}}}^{j+1} + \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \cdot T_{P_{N_{pwü}-1}}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

$$\begin{aligned}
T_{P_{N_{pwü}}}^j &= \left( -\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{P_{N_{pwü}-1}}^{j+1} \\
&+ \left( 1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{P_{N_{pwü}}}^{j+1} \\
&+ \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \cdot T_{S_{pwü}}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.55}$$

$$\begin{aligned}
T_{S_{N_{pwü}}}^j &= \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{S_{N_{pwü}-1}}^{j+1} \\
&+ \left( 1 + \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \cdot T_{S_{N_{pwü}}}^{j+1} \\
&+ \left( -\frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \cdot T_{P_{pwü}}^{j+1} + \left( -\frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) \cdot T_{s,ein}^{j+1}
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Als nächstes werden die  $2 \cdot (N_{pwü} + 1)$  Gleichungen zum Zeitpunkt  $j + 1$  in der Matrixschreibweise kompakt zusammengefasst:

$$\mathbf{T}_{PS}^j = \mathbf{A}_{PS} \cdot \mathbf{T}_{PS}^{j+1} + \mathbf{B}_{PS} \tag{4.57}$$

$\mathbf{T}_{PS}^j$  kennzeichnet den Temperaturvektor des vorhergehenden Zeitpunktes  $j$  und  $\mathbf{T}_{PS}^{j+1}$  den Temperaturvektor mit den für den Zeitpunkt  $j + 1$  zu berechnenden Temperaturen der Primär- und Sekundärseite der Medien im Plattenwärmeübertrager. Die Vektoren  $(\mathbf{T}_{PS}^j, \mathbf{T}_{PS}^{j+1}, \mathbf{B}_{PS})$  und die Matrix  $\mathbf{A}_{PS}$  werden in der Folge beispielhaft für die örtlichen Stützpunkte bei  $(l = 0 \dots 2)$  aufgestellt. Die beiden Temperaturvektoren werden wie folgt dargestellt:

$$\mathbf{T}_{PS}^{j+1} = \begin{bmatrix} T_{P0}^{j+1} \\ T_{P1}^{j+1} \\ T_{P2}^{j+1} \\ T_{S0}^{j+1} \\ T_{S1}^{j+1} \\ T_{S2}^{j+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{PS}^j = \begin{bmatrix} T_{P0}^j \\ T_{P1}^j \\ T_{P2}^j \\ T_{S0}^j \\ T_{S1}^j \\ T_{S2}^j \end{bmatrix}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}_{PS}$  stellt die Abhängigkeiten der Temperaturen der Medien bei den örtlichen Stützpunkten der Primär- und Sekundärseite im Plattenwärmeübertrager sowie die der Temperaturen der Primär- zur Sekundärseite und umgekehrt dar. Die Parameter aus den Approximationen für den Plattenwärmeübertrager werden für eine bessere Übersichtlichkeit zu den Größen für die Primärseite  $C_{2p}$  und  $C_{3p}$  und für die Sekundärseite  $C_{2s}$  und  $C_{3s}$  zusammengefasst:

$$C_{2p} = \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_p}{A_r \cdot \rho_p \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \quad C_{3p} = \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \quad (4.58)$$

$$C_{2s} = \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_s}{A_r \cdot \rho_s \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) \quad C_{3s} = \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{\rho_s \cdot c_{W,s} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \quad (4.59)$$

Somit erhält man folgende Matrix  $\mathbf{A}_{PS}$ :

$$\mathbf{A}_{PS} = \begin{bmatrix} (1 + C_{3p}) & (2 \cdot C_{2p}) & 0 & (-C_{3p}) & 0 & 0 \\ (-C_{2p}) & (1 + C_{3p}) & (C_{2p}) & 0 & (-C_{3p}) & 0 \\ 0 & (-2 \cdot C_{2p}) & (1 + C_{3p} + 2 \cdot C_{2p}) & 0 & 0 & (-C_{3p}) \\ (-C_{3s}) & 0 & 0 & (1 + C_{3s} + 2 \cdot C_{2s}) & (-2 \cdot C_{2s}) & 0 \\ 0 & (-C_{3s}) & 0 & (C_{2s}) & (1 + C_{3s}) & (-C_{2s}) \\ 0 & 0 & (-C_{3s}) & 0 & (2 \cdot C_{2s}) & (1 + C_{3s}) \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Im Vektor  $\mathbf{B}_{PS}$  werden die Eintrittstemperaturen ( $T_{P,ein}$ ,  $T_{S,ein}$ ) in die Primär- und Sekundärseite bei den örtlichen Randstützpunkten berücksichtigt:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2 \cdot C_{2p} \cdot T_{P,ein}^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \cdot C_{2s} \cdot T_{S,ein}^{j+1} \end{bmatrix} \quad (4.61)$$

## 4.4 Implizite Lösung des Modells des Pufferspeichers

Zunächst wird das Modell des Pufferspeichers (3.17) auf den zeitlichen Differentialquotienten umgeformt:

$$\underbrace{\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\dot{m}_{Ges}}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z}}_{\text{Vereinfachter Pufferspeicher}} - \underbrace{\frac{1}{\rho \cdot c_W} \frac{U_A \cdot (T - T_{WÜ})}{A \cdot H_{WÜ}}}_{\text{Solarregister}} - \underbrace{\frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg})}_{\text{Umgebungsverluste}} \quad (4.62)$$

In weiterer Folge werden die Terme *Vereinfachter Pufferspeicher*, *Solarregister* und *Umgebungsverluste* einzeln betrachtet. Dabei wird jeder Term numerisch approximiert und anschließend bei jedem örtlichen Stützpunkt zum gleichen Zeitpunkt zu einer Gleichung zusammengefasst. Zum Schluss werden die  $N$  erhaltenen Gleichungen für  $N$  Unbekannte zum gleichen Zeitpunkt in der kompakten Matrizenform zusammengefasst. Die in der Folge aufgestellten Differenzenquotienten werden beispielhaft für die zu bestimmende Temperatur des Wassers  $T_l^{j+1}$  beim örtlichen Stützpunkt  $l$  zum zeitlichen Stützpunkt  $j + 1$  beschrieben.

Der Term *Vereinfachter Pufferspeicher* aus (4.62) ähnelt dem vereinfachten Pufferspeichermodell aus Abschnitt 4.1. Der Unterschied ist, dass nun anstatt des Massenstroms der Beladung  $\dot{m}_W$  der resultierende Massenstrom  $\dot{m}_{ges}$  Einfluss nimmt. Dadurch müssen die örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung, bei denen der resultierende Massenstrom Einfluss nimmt, entsprechend adaptiert werden. Die restliche Vorgehensweise zur numerischen Lösung entspricht der für das Modell des vereinfachten Pufferspeichers (siehe Abschnitt 4.1).

Der resultierende Massenstrom  $\dot{m}_{Ges}$  setzt sich aus dem Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$  sowie dem Massenstrom durch den Heizkreis  $\dot{m}_{Hk}$  zusammen und besitzt über die Höhe des Pufferspeichers folgende Verteilung (siehe Abschnitt 3.1.7):

$$\dot{m}_{Ges} = \begin{cases} 0 & \text{für } z < H_{Be,E} \\ \dot{m}_W & \text{für } H_{Be,E} \leq z < H_{Hk,A} \\ (\dot{m}_W - \dot{m}_{Hk}) & \text{für } H_{Hk,A} \leq z \leq H_{Hk,E} \\ \dot{m}_W & \text{für } H_{Hk,E} < z \leq H_{Be,A} \\ 0 & \text{für } z > H_{Be,A} \end{cases} \quad (4.63)$$

In weiterer Folge werden die Massenströme  $\dot{m}_W$  und  $\dot{m}_{Hk}$  in der partiellen Differentialgleichung des Pufferspeichers (4.62) getrennt betrachtet:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \overbrace{\frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \left( \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \right)}^{\text{Vereinfachter Pufferspeicher}} - \frac{1}{\rho \cdot c_W} \frac{U_A \cdot (T - T_{W\ddot{U}})}{A \cdot H_{W\ddot{U}}} - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) \quad (4.64)$$

Der Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$  strömt zwischen den Höhen  $H_{Be,E}$  und  $H_{Be,A}$  von oben nach unten (siehe Abbildung 4.2). Dadurch wird der örtliche Differentialquotient erster Ordnung über den Bereich, in dem der Massenstrom der Beladung Einfluss nimmt, bei allen örtlichen Stützpunkten mit Ausnahme des örtlichen Randstützpunktes, der der Höhe  $H_{Be,E}$  entspricht, zum Zeitpunkt  $j + 1$  als rückwärtiger Differenzenquotient approximiert:

$$\left. \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{l,j+1} \approx \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_l^{j+1} - T_{l-1}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.65)$$

Bei der Höhe  $H_{Be,E}$  tritt Wasser mit dem Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$  mit der Temperatur  $T_{Be,E}$  aus dem Erzeuger in den Pufferspeicher ein:

$$T_{Be,E} = T_{Be,E}(t) \rightarrow T_{Be,E}^j = T_{Be,E}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.66)$$

Infolgedessen wird der örtliche Differentialquotient erster Ordnung beim örtlichen Stützpunkt  $l = N_{Be,E}$ , der der Höhe  $H_{Be,E}$  entspricht, mit einer vorwärtigen Randbedingung berücksichtigt:

$$\left. \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{N_{Be,E},j+1} \approx \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - T_{Be,E}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.67)$$

Der Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{Hk}$  strömt im Pufferspeicher zwischen den Höhen  $H_{Hk,E}$  und  $H_{Hk,A}$  von unten nach oben und verursacht eine konvektive Strömung, die entgegengesetzt der des Massenstroms der Beladung  $\dot{m}_{Be}$  ist (siehe Abbildung 4.2). Der örtliche Differentialquotient erster Ordnung wird über den Bereich, in dem der Massenstrom des Heizkreises Einfluss nimmt, bei allen örtlichen Stützpunkten mit Ausnahme des örtlichen Randstützpunktes, der der Höhe  $H_{Hk,E}$  entspricht, zum Zeitpunkt  $j + 1$  als vorwärtiger Differenzenquotient approximiert:

$$\left. \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{l,j+1} \approx \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{l+1}^{j+1} - T_l^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.68)$$

Bei der Höhe  $H_{\text{Hk},E}$  strömt Wasser mit der Temperatur  $T_{\text{Hk},E}$  mit dem Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{\text{Hk}}$  in den Pufferspeicher ein:

$$T_{\text{Hk},E} = T_{\text{Hk},E}(t) \rightarrow T_{\text{Hk},E}^j = T_{\text{Hk},E}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.69)$$

Somit wird der örtliche Differentialquotient erster Ordnung beim örtlichen Stützpunkt  $l = N_{\text{Hk},E}$ , der der Höhe  $H_{\text{Hk},E}$  entspricht, mit einer rückwärtigen Randbedingung berücksichtigt:

$$\dot{m}_{\text{Hk}} \left. \frac{\partial T}{\partial z} \right|_{N_{\text{Hk},E},j+1} \approx \dot{m}_{\text{Hk}} \frac{T_{\text{Hk},E}^{j+1} - T_{N_{\text{Hk},E-1}}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.70)$$

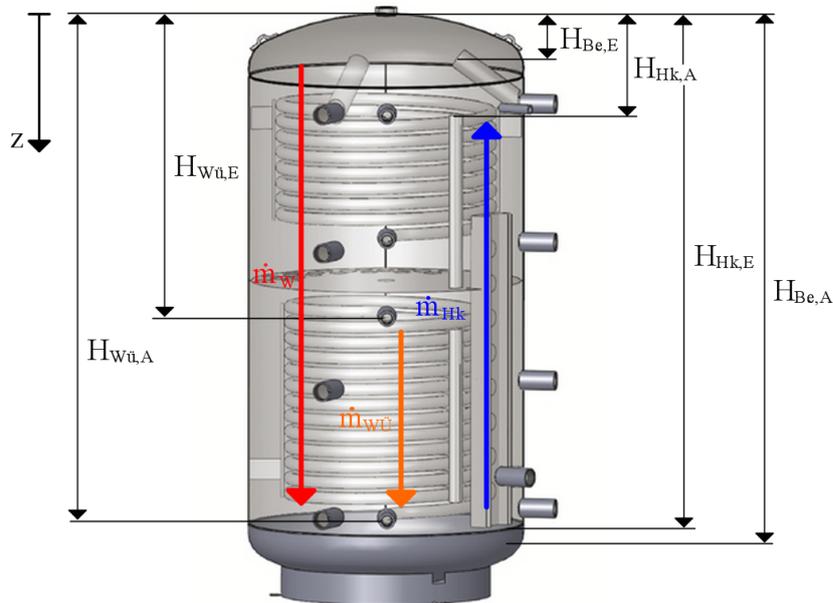


Abbildung 4.2: Innenaufbau des untersuchten Pufferspeichers mit den Massenströmen sowie Höhen der Beladung, des Heizkreises und des betrachteten Solarregisters [11]

Es ist ersichtlich, dass im Term *Umgebungsverluste* aus der mathematischen Beschreibung des Pufferspeichermodells (4.71) keine Differentialquotienten vorkommen, deswegen muss dieser nur diskretisiert werden.

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\dot{m}_{Ges}}{A \cdot \rho} \frac{\partial T}{\partial z} - \frac{1}{\rho \cdot c_W} \frac{U_A \cdot (T_{W\ddot{U}} - T)}{A \cdot H_{W\ddot{U}}} - \underbrace{\frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg})}_{\text{Umgebungsverluste}} \quad (4.71)$$

Die Temperatur des Wassers  $T$  hängt vom Ort  $z$  und der Zeit  $t$  ab, die Diskretisierung erfolgt gleich wie in (4.2). Die Temperatur der Umgebung  $T_{umg}$  ist nur von der Zeit  $t$  abhängig und wird an den diskretisierten Zeiten betrachtet:

$$T_{umg} = T_{umg}(t) \rightarrow T_{umg}^j = T_{umg}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.72)$$

Der effektive Wert für die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{iso,eff}$  wird experimentell ermittelt (siehe Kapitel 5). Die restlichen Parameter des Terms *Umgebungsverluste* aus (4.62) werden aus dem Datenblatt des untersuchten Pufferspeichers entnommen.

Bei den örtlichen Randstützpunkten muss die Deckfläche  $A_D$  des zylindrischen Pufferspeichers mit berücksichtigt werden, da auch durch die Deckflächen Wärme an die Umgebung abgegeben wird. Somit wird der Term *Umgebungsverluste* bei den örtlichen Randstützpunkten ( $l = 0, l = N_z$ ), wie in Gleichung (4.73) und (4.74), berücksichtigt:

$$\frac{\lambda_{iso} \cdot (A_m + A_D)}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_0^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad \text{bei } l = 0 \quad (4.73)$$

$$\frac{\lambda_{iso} \cdot (A_m + A_D)}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_z}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad \text{bei } l = N_z \quad (4.74)$$

Um den Term *Solarregister* im Pufferspeichermodell (4.62) numerisch zu approximieren, benötigt man eine zusätzliche partielle Differentialgleichung für das Solarregister. Dabei wird die partielle Differentialgleichung des Solarregisters, basierend auf den Annahmen zur Modellierung des Plattenwärmeübertragers aus Abschnitt 3.2.1 und der partiellen Differentialgleichung (2.12) zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten Rohr, aufgestellt:

$$\rho_{sr} \cdot c_{sr} \frac{\partial T_{W\ddot{U}}}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{W\ddot{U}} \cdot c_{sr}}{A_{sr}} \frac{\partial T_{W\ddot{U}}}{\partial z} + \frac{\overbrace{U_A \cdot (T_{W\ddot{U}} - T)}^{\text{Wärmeübertragung des Solarregisters}}}{A_{sr} \cdot H_{W\ddot{U}}} = 0 \quad (4.75)$$

Der Term *Wärmeübertragung des Solarregisters* kennzeichnet dabei die Übertragung der Wärme über das Solarregister in den Pufferspeicher. Alle in der partiellen Diffe-

rentialgleichung des Solarregisters (4.75) vorkommenden Größen sind in Tabelle 4.1 zusammengefasst.

Abkürzungen	Beschreibung	Einheit
$\rho_{\text{sr}}$	Dichte des Wasser-Frostschutzgemisches	$[kg/m^3]$
$c_{\text{sr}}$	spezifische Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$T_{\text{WÜ}}$	Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches	$[K]$
$t$	Zeit	$[s]$
$\dot{m}_{\text{WÜ}}$	Massenstrom durch das Solarregister	$[kg/s]$
$A_{\text{sr}}$	Querschnittsfläche des Rohres	$[m^2]$
$z$	axiale Ortskomponente	$[m]$
$U_{\text{A}}$	Wärmeübertragungsvermögen des Solarregisters	$[W/K]$
$H_{\text{WÜ}}$	Höhe des Solarregisters	$[m]$

Tabelle 4.1: Größen zur Modellierung des Solarregisters

Für die numerische Approximation des Pufferspeichermodells werden in weiterer Folge die partiellen Differentialgleichungen des Pufferspeichers sowie des Solarregisters gemeinsam gelöst.

Die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarregister  $T_{\text{WÜ}}$  und die Temperatur des Wassers  $T$  im Pufferspeicher hängen von Zeit  $t$  und Ort  $z$  ab. Der Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches  $\dot{m}_{\text{WÜ}}$  durch das Solarregister hängt nur von der Zeit  $t$  ab. Die Dichte  $\rho_{\text{sr}}$  sowie die spezifische Wärmekapazität  $c_{\text{sr}}$  hängen von der Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{\text{WÜ}}$  ab. Die Querschnittsfläche  $A_{\text{sr}}$  des Rohres wird aus den bekannten Größen aus dem Datenblatt des untersuchten Pufferspeichers bestimmt.

Das integrierte Solarregister wird bei der Höhe  $H_{\text{Wü,E}}$  beladen und bei der Höhe  $H_{\text{Wü,A}}$  tritt das Wasser-Frostschutzgemisch aus dem Solarregister wieder aus (siehe Abbildung 4.2). Somit nimmt das Solarregister nur über die Höhe  $H_{\text{WÜ}}$  Einfluss, die sich aus der Differenz der beiden Höhen  $H_{\text{Wü,A}}$  und  $H_{\text{Wü,E}}$  zusammen setzt:

$$H_{\text{WÜ}} = H_{\text{Wü,A}} - H_{\text{Wü,E}} \quad (4.76)$$

Die Temperatur des Wassers  $T$  wird wie in Abschnitt 4.1, an den einzelnen örtlichen Stützpunkten  $l$  ( $l = 0 \dots N_z$ ) zu jedem zeitlichen Stützpunkt  $j$  ( $j = 0 \dots N_t$ ) beschrieben. Die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarregister  $T_{\text{WÜ}}$  wird an den einzelnen örtlichen Stützpunkten  $l$  ( $l = N_{\text{Wü,E}} \dots N_{\text{Wü,A}}$ ) über die Höhe  $H_{\text{WÜ}}$  zu jedem zeitlichen Stützpunkt  $j$  ( $j = 0 \dots N_t$ ) dargestellt:

$$T_{\text{WÜ}} = T_{\text{WÜ}}(z, t) \rightarrow T_{\text{WÜ}}^j \text{ für } (N_{\text{Wü,A}} \cdot \Delta z) \leq z \leq (N_{\text{Wü,E}} \cdot \Delta z) \quad (4.77)$$

$N_{W\ddot{u},E}$  kennzeichnet den örtlichen Randstützpunkt bei der Höhe  $H_{W\ddot{u},E}$ , an dem das Wasser-Frostschutzgemisch mit der Temperatur  $T_{sr,vl}$  durch das Solarregister in den Pufferspeicher eintritt, und  $N_{W\ddot{u},A}$  den örtlichen Randstützpunkt bei der Höhe  $H_{W\ddot{u},A}$ , an dem es wieder austritt. Die zeitliche  $\Delta t$  und örtliche Schrittweite  $\Delta z$  sind bei den Temperaturen des Wassers  $T$  und des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{W\ddot{U}}$  identisch. Somit werden die örtlichen Randstützpunkte des Solarregisters ( $N_{W\ddot{u},E}$ ,  $N_{W\ddot{u},A}$ ) wie folgt bestimmt:

$$N_{W\ddot{u},E} = \frac{H_{W\ddot{u},E}}{\Delta z} \quad N_{W\ddot{u},A} = \frac{H_{W\ddot{u},A}}{\Delta z} \quad (4.78)$$

Die Dichte  $\rho_{W\ddot{U}}$  und spezifische Wärmekapazität  $c_{W,W\ddot{U}}$  sind von der Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{W\ddot{U}}$  abhängig und werden somit bei jedem örtlichen Stützpunkt ( $l = N_{W\ddot{u},E} \dots N_{W\ddot{u},A}$ ) aus den entsprechenden Temperaturen des vorhergehenden Zeitpunktes bestimmt.

Der Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches durch das Solarregister  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$ , der in die selbe Richtung wie der Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_{Be}$  fließt, wird in weiterer Folge nur an den diskreten Zeiten, mit den zeitlichen Stützpunkten ( $j = 0 \dots N_t$ ), betrachtet:

$$\dot{m}_{W\ddot{U}} = \dot{m}_{W\ddot{U}}(t) \rightarrow \dot{m}_{W\ddot{U}}^j = \dot{m}_{W\ddot{U}}|_{t=j \cdot \Delta t} \quad (4.79)$$

Das Wärmeübertragungsvermögen  $U_A$  des Solarregisters wird durch die diskretisierten Temperaturen des Wassers  $T$  und des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{W\ddot{U}}$ , an den entsprechenden örtlichen Stützpunkten des vorhergehenden Zeitpunktes, den diskretisierten Massenstrom  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$ , sowie aus den experimentell ermittelten Parametern ( $K_{W\ddot{U}}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ), die im Kapitel 5 festgelegt werden, bestimmt:

$$U_A^{j+1} = K_{W\ddot{U}} \cdot (\dot{m}_{W\ddot{U}}^j)^{b_1} \cdot |T_{W\ddot{U}}^j - T_l^j|^{b_2} \cdot \left( \frac{T_{W\ddot{U}}^j + T_l^j}{2} \right)^{b_3} \quad (4.80)$$

Im nächsten Schritt werden die zeitlichen und örtlichen Differentialquotienten erster Ordnung aus der partiellen Differentialgleichung des Solarregisters (4.75) durch Differenzenquotienten approximiert. Das Aufstellen der zeitlichen und der örtlichen Approximationen bei  $l = (N_{W\ddot{u},E} + 1) \dots (N_{W\ddot{u},A} - 1)$  entspricht denen aus Abschnitt 4.1 für den vereinfachten Pufferspeicher:

$$\begin{aligned} \rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot \frac{T_{W\ddot{U}l}^{j+1} - T_{W\ddot{U}l}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_{W\ddot{U}} \cdot c_{sr}}{A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}l+1}^{j+1} - T_{W\ddot{U}l-1}^{j+1}}{2 \cdot \Delta z} \\ + \frac{U_A}{H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}l}^{j+1} - T_l^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.81)$$

An den örtlichen Randstützpunkten ( $l = N_{W\ddot{U},E}$ ,  $l = N_{W\ddot{U},A}$ ) müssen die Approximationen angepasst werden. Somit erhält man für den Differentialquotienten erster Ordnung beim örtlichen Randstützpunkt  $l = N_{W\ddot{U},E}$ , bei dem das Wasser-Frostschutzgemisch mit der Temperatur  $T_{sr,vl}$  einströmt, einen vorwärtigen Differenzenquotienten:

$$\left. \frac{\partial T_{W\ddot{U}}}{\partial z} \right|_{N_{W\ddot{U},E,j+1}} \approx \frac{T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},E+1}}^{j+1} - T_{sr,vl}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.82)$$

Beim örtlichen Randstützpunkt  $l = N_{W\ddot{U},A}$  erhält man für den Differentialquotienten erster Ordnung einen rückwärtigen Differenzenquotienten:

$$\left. \frac{\partial T_{W\ddot{U}}}{\partial z} \right|_{N_{W\ddot{U},A,j+1}} \approx \frac{T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},A}}^{j+1} - T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},A-1}}^{j+1}}{\Delta z} \quad (4.83)$$

Setzt man nun die aufgestellten örtlichen Approximationen aus 4.82 und 4.83 und die zeitliche Approximation aus Abschnitt 4.1 passend für die örtlichen Randstützpunkte ( $l = N_{W\ddot{U},E}$ ,  $l = N_{W\ddot{U},A}$ ) in die partielle Differentialgleichung des Solarregisters (4.75) ein, erhält man folgende Gleichungen:

Für  $l = N_{W\ddot{U},E}$ :

$$\begin{aligned} \rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot \frac{T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},E}}^{j+1} - T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},E}}^j}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_{W\ddot{U}} \cdot c_{sr}}{A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},E+1}}^{j+1} - T_{sr,vl}^{j+1}}{\Delta z} \\ + \frac{U_A}{H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}N_{W\ddot{U},E}}^{j+1} - T_{N_{W\ddot{U},E}}^{j+1}) = 0 \end{aligned} \quad (4.84)$$

Für  $l = N_{W\ddot{U},A}$ :

$$\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{W\ddot{U}}^j{}_{N_{W\ddot{u},A}}}{\Delta t} + \frac{\dot{m}_{W\ddot{U}} \cdot c_{sr}}{A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}-1}}{\Delta z} + \frac{U_A}{H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{N_{W\ddot{u},A}}^{j+1}) = 0 \quad (4.85)$$

Im nächsten Schritt wird auf die bekannte Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{W\ddot{U}}^j$  umgeformt und für jeden örtlichen Stützpunkt  $l = N_{W\ddot{u},E} \dots N_{W\ddot{u},A}$  eine Gleichung aufgestellt. Somit erhält man  $(N_{W\ddot{u},A} - N_{W\ddot{u},E} + 1)$  Gleichungen für  $2 \cdot (N_{W\ddot{u},A} - N_{W\ddot{u},E} + 1)$  Unbekannte:

$$T_{W\ddot{U}}^j{}_{N_{W\ddot{u},E}} = T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E}} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{W\ddot{U}}}{\rho_{sr} \cdot A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E+1}} - T_{sr,vl}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E}} - T_{N_{W\ddot{u},E}}^{j+1}) \quad (4.86)$$

$$T_{W\ddot{U}}^j{}_{N_{W\ddot{u},E+1}} = T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E+1}} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{W\ddot{U}}}{\rho_{sr} \cdot A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E+1}} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E-1}}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},E+1}} - T_{N_{W\ddot{u},E+1}}^{j+1}) \quad (4.87)$$

⋮

$$T_{W\ddot{U}}^j{}_{N_{W\ddot{u},A-1}} = T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A-1}} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{W\ddot{U}}}{\rho_{sr} \cdot A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A-2}}}{2 \cdot \Delta z} + \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A-1}} - T_{N_{W\ddot{u},A-1}}^{j+1}) \quad (4.88)$$

$$T_{W\ddot{U}}^j{}_{N_{W\ddot{u},A}} = T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} + \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{W\ddot{U}}}{\rho_{sr} \cdot A_{sr}} \frac{T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A-1}}}{\Delta z} + \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot H_{W\ddot{U}} \cdot A_{sr}} \cdot (T_{W\ddot{U}}^{j+1}{}_{N_{W\ddot{u},A}} - T_{N_{W\ddot{u},A}}^{j+1}) \quad (4.89)$$

Parallel dazu werden die zeitlichen und örtlichen Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung aus der partiellen Differentialgleichung des Pufferspeichers (4.62) durch Differenzenquotienten approximiert. Die Approximationen des zeitlichen sowie des örtlichen Differentialquotienten zweiter Ordnung entsprechen denen aus Abschnitt 4.1 für den vereinfachten Pufferspeicher. Der örtliche Differentialquotient erster Ordnung wird, wie in den Gleichungen von (4.65) bis (4.70) dargestellt ist, entsprechend angepasst.

Setzt man nun die aufgestellten örtlichen und zeitlichen Approximationen passend für jeden örtlichen Stützpunkt ( $l=0 \dots N_z$ ), die sich über den Ort  $z$  von  $z=0$  bis zum Boden bei  $z=N_z \cdot \Delta z$  erstrecken, was der Höhe  $H$  des Pufferspeichers entspricht, in die partielle Differentialgleichung des Pufferspeichers (4.62) beim Zeitpunkt  $(j+1)$  ein, erhält man weitere  $(N_z+1)$  Gleichungen für  $(N_{Wü,A} - N_{Wü,E} + N_z + 2)$  Unbekannte. Da einige der im Pufferspeicher auftretenden Phänomene örtlich begrenzt sind, werden die folgenden aufgestellten approximierten Gleichungen über bestimmte Höhen betrachtet (siehe Abbildung 4.2).

Bei der Höhe  $(0 \leq z < H_{Be,E})$ , die den örtlichen Stützpunkten  $l=0 \dots (N_{Be,E} - 1)$  entspricht, treten nur axiale Wärmeleitung und Verluste an die Umgebung auf:

$$\frac{T_0^{j+1} - T_0^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_2^{j+1} - 2 \cdot T_1^{j+1} + T_0^{j+1}}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{iso} \cdot (A_m + A_D)}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_0^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad (4.90)$$

$$\frac{T_1^{j+1} - T_1^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_2^{j+1} - 2 \cdot T_1^{j+1} + T_0^{j+1}}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_1^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad (4.91)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Be,E}-1}^{j+1} - T_{N_{Be,E}-1}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Be,E}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Be,E}-1}^{j+1} + T_{N_{Be,E}-2}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ &\quad - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Be,E}-1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.92)$$

Beim Ort  $z$ , der der Höhe  $H_{Be,E}$  und dem örtlichen Stützpunkt  $l=N_{Be,E}$  entspricht, strömt Wasser mit der Temperatur  $T_{Be,E}$  und dem Massenstrom der Beladung  $\dot{m}_W$  in

den Pufferspeicher ein. Somit erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Be,E}}^{j+1} - T_{N_{Be,E}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Be,E}}^{j+1} + T_{N_{Be,E}-1}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - T_{Be,E}^{j+1}}{\Delta z} &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Be,E}-1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.93)$$

Bei der Höhe ( $H_{Be,E} < z < H_{Hk,A}$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{Be,E} + 1) \dots (N_{Hk,A} - 1)$  entspricht, wird nun auch die konvektive Strömung durch die Beladung eines Erzeugers im Pufferspeicher berücksichtigt:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - T_{N_{Be,E}+1}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Be,E}+2}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} + T_{N_{Be,E}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - T_{N_{Be,E}}^{j+1}}{\Delta z} &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Be,E}+1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.94)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1} - T_{N_{Hk,A}-1}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Hk,A}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1} + T_{N_{Hk,A}-2}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1} - T_{N_{Hk,A}-2}^{j+1}}{\Delta z} &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.95)$$

Bei der Höhe ( $H_{Hk,A} \leq z < H_{Wü,E}$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{Hk,A}) \dots (N_{Wü,E} - 1)$  entspricht, tritt nun auch die konvektive Strömung des Heizkreises, die im Pufferspeicher von unten nach oben strömt, auf:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Hk,A}}^{j+1} - T_{N_{Hk,A}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Hk,A}+1}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Hk,A}}^{j+1} + T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1}}{\Delta z^2} - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,A}}^{j+1} - T_{N_{Hk,A}-1}^{j+1}}{\Delta z} \\ &+ \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,A}+1}^{j+1} - T_{N_{Hk,A}}^{j+1}}{\Delta z} - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Hk,A}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.96)$$

⋮

$$\begin{aligned}
\frac{T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E-1}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - 2 \cdot T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1} + T_{NW\ddot{u},E-2}^{j+1}}{\Delta z^2} \\
&\quad - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E-2}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1}}{\Delta z} \\
&\quad - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1})
\end{aligned} \tag{4.97}$$

Bei der Höhe ( $H_{W\ddot{u},E} \leq z < H_{W\ddot{u},A}$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{W\ddot{u},E}) \dots (N_{W\ddot{u},A})$  entspricht, nimmt nun auch die Wärmeübertragung über das integrierte Solarregister in den Pufferspeicher Einfluss:

$$\begin{aligned}
\frac{T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{NW\ddot{u},E+1}^{j+1} - 2 \cdot T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} + T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1}}{\Delta z^2} \\
&\quad - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E-1}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},E+1}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},E}^{j+1}}{\Delta z} \\
&\quad - \frac{1}{\rho \cdot c_W} \frac{U_A \cdot (T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}_{NW\ddot{u},E})}{A \cdot H_{W\ddot{U}}} \\
&\quad - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{NW\ddot{u},E}^{j+1} - T_{umg}^{j+1})
\end{aligned} \tag{4.98}$$

⋮

$$\begin{aligned}
\frac{T_{NW\ddot{u},A}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},A}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{NW\ddot{u},A+1}^{j+1} - 2 \cdot T_{NW\ddot{u},A}^{j+1} + T_{NW\ddot{u},A-1}^{j+1}}{\Delta z^2} \\
&\quad - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},A}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},A-1}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{NW\ddot{u},A+1}^{j+1} - T_{NW\ddot{u},A}^{j+1}}{\Delta z} \\
&\quad - \frac{1}{\rho \cdot c_W} \frac{U_A \cdot (T_{NW\ddot{u},A}^{j+1} - T_{W\ddot{U}}^{j+1}_{NW\ddot{u},A})}{A \cdot H_{W\ddot{U}}} \\
&\quad - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{NW\ddot{u},A}^{j+1} - T_{umg}^{j+1})
\end{aligned} \tag{4.99}$$

Bei der Höhe ( $H_{W\ddot{u},A} < z < H_{Hk,E}$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{W\ddot{u},A} + 1) \dots (N_{Hk,E} - 1)$  entspricht, tritt keine Wärmeübertragung durch das Solarregister mehr auf. Somit nehmen nur die konvektiven Strömungen der Beladung und des Heizkreises sowie die axiale Wärmeleitung und die Verluste an die Umgebung Einfluss:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^{j+1} - T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{W\ddot{u},A+2}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^{j+1} + T_{N_{W\ddot{u},A}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ &- \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^{j+1} - T_{N_{W\ddot{u},A}}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{W\ddot{u},A+2}}^{j+1} - T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^{j+1}}{\Delta z} \\ &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{W\ddot{u},A+1}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \\ &\vdots \end{aligned} \quad (4.100)$$

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E-1}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Hk,E}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1} + T_{N_{Hk,E-2}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ &- \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E-2}}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,E}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1}}{\Delta z} \\ &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.101)$$

Beim Ort  $z$ , der der Höhe  $H_{Hk,E}$  und dem örtlichen Stützpunkt  $l = N_{Hk,E}$  entspricht, strömt Wasser mit der Temperatur  $T_{Hk,E}$  und dem Massenstrom des Heizkreises  $\dot{m}_{Hk}$  vom Heizkreis in den Pufferspeicher ein. Somit erhält man folgende Gleichung:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Hk,E}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Hk,E+1}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Hk,E}}^{j+1} + T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ &- \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,E}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1}}{\Delta z} + \frac{\dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho} \frac{T_{Hk,E}^{j+1} - T_{N_{Hk,E-1}}^{j+1}}{\Delta z} \\ &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Hk,E}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.102)$$

Bei der Höhe ( $H_{Hk,E} < z \leq H_{Be,A}$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{Hk,E} + 1) \dots (N_{Be,A})$  entspricht, tritt keine konvektive Strömung des Heizkreises mehr auf. Es

nehmen nur die konvektive Strömung der Beladung, die axiale Wärmeleitung und die Verluste an die Umgebung Einfluss:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Hk,E+1}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E+1}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Hk,E+2}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Hk,E+1}}^{j+1} + T_{N_{Hk,E}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Hk,E+1}}^{j+1} - T_{N_{Hk,E}}^{j+1}}{\Delta z} &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Hk,E+1}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.103)$$

⋮

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Be,A}}^{j+1} - T_{N_{Be,A}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Be,A+1}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Be,A}}^{j+1} + T_{N_{Be,A-1}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ - \frac{\dot{m}_W}{A \cdot \rho} \frac{T_{N_{Be,A}}^{j+1} - T_{N_{Be,A-1}}^{j+1}}{\Delta z} &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Be,A}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.104)$$

Bei der Höhe ( $H_{Be,A} < z \leq (N_z \cdot \Delta z)$ ), die den örtlichen Stützpunkten  $l = (N_{Be,A+1}) \dots (N_z)$  entspricht, treten keine konvektiven Strömungen mehr auf. Es nehmen nur die axiale Wärmeleitung und die Verluste an die Umgebung Einfluss:

$$\begin{aligned} \frac{T_{N_{Be,A+1}}^{j+1} - T_{N_{Be,A+1}}^j}{\Delta t} &= \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_{Be,A+2}}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_{Be,A+1}}^{j+1} + T_{N_{Be,A}}^{j+1}}{\Delta z^2} \\ &- \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_{Be,A+1}}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \end{aligned} \quad (4.105)$$

⋮

$$\frac{T_{N_z-1}^{j+1} - T_{N_z-1}^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_z}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_z-1}^{j+1} + T_{N_z-2}^{j+1}}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_z-1}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad (4.106)$$

$$\frac{T_{N_z}^{j+1} - T_{N_z}^j}{\Delta t} = \frac{\lambda}{\rho \cdot c_W} \frac{T_{N_z}^{j+1} - 2 \cdot T_{N_z-1}^{j+1} + T_{N_z-2}^{j+1}}{\Delta z^2} - \frac{\lambda_{iso} \cdot (A_m + A_D)}{\rho \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \cdot (T_{N_z}^{j+1} - T_{umg}^{j+1}) \quad (4.107)$$

Schlussendlich müssen die partiellen Differentialgleichungen des Pufferspeichers sowie die des Solarregisters bei den entsprechenden örtlichen Stützpunkten gemeinsam gelöst werden, wodurch ein lineares Gleichungssystem bestehend aus  $(N_{Wü,A} - N_{Wü,E} + N_z + 2)$  Gleichungen für  $(N_{Wü,A} - N_{Wü,E} + N_z + 2)$  Unbekannte resultiert.

Im nächsten Schritt werden die  $(N_{Wü,A} - N_{Wü,E} + N_z + 2)$  Gleichungen zum Zeitpunkt  $j + 1$  in der Matrixschreibweise kompakt zusammengefasst:

$$\mathbf{T}_{WSr}^j = \mathbf{A}_{WSr} \cdot \mathbf{T}_{WSr}^{j+1} + \mathbf{B}_{WSr} + \mathbf{U}_{WSr} \quad (4.108)$$

$\mathbf{T}_{WSr}^j$  kennzeichnet den Temperaturvektor des vorhergehenden Zeitpunktes ( $j$ ) und  $\mathbf{T}_{WSr}^{j+1}$  den Temperaturvektor mit den für den Zeitpunkt ( $j + 1$ ) zu berechnenden Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher und des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarregister. Die Vektoren  $(\mathbf{T}_{WSr}^j, \mathbf{T}_{WSr}^{j+1}, \mathbf{B}_{WSr})$  und die Matrix  $\mathbf{A}_{WSr}$  werden in der Folge beispielhaft für die örtlichen Stützpunkte bei  $(l = 0 \dots 3)$  aufgestellt.

Bei den örtlichen Stützpunkten  $l = 1$  und  $l = 2$  wird angenommen, dass das Solarregister Einfluss nimmt. Weiters wird auch angenommen, dass der Pufferspeicher beim örtlichen Randstützpunkt  $l = 0$  mit der Wassertemperatur  $T_{Be,E}$  beladen wird sowie der Heizkreis Wasser aus dem Pufferspeicher entnimmt. Beim örtlichen Randstützpunkt  $l = 3$  wird angenommen, dass der Heizkreis Wasser mit der Temperatur  $T_{Hk,E}$  in den Pufferspeicher einspeist sowie Wasser für die Erwärmung durch den Erzeuger aus dem Pufferspeicher entnommen wird. Die beiden Temperaturvektoren werden wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{T}_{WSr}^{j+1} = \begin{bmatrix} T_0^{j+1} \\ T_1^{j+1} \\ T_2^{j+1} \\ T_3^{j+1} \\ T_{WÜ_1}^{j+1} \\ T_{Wü_2}^{j+1} \end{bmatrix} \quad \mathbf{T}_{WSr}^j = \begin{bmatrix} T_0^j \\ T_1^j \\ T_2^{j+1} \\ T_3^j \\ T_{WÜ_1}^j \\ T_{Wü_2}^j \end{bmatrix}$$

Die Matrix  $\mathbf{A}_{WSr}$  stellt die Abhängigkeiten der Temperatur des Wassers im Pufferspeicher, der Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarregister sowie der Temperatur des Wassers von den Temperaturen des Wasser-Frostschutzgemisches und umgekehrt dar. Die Parameter aus den Approximationen für das Modell des Pufferspeichers und des Solarregisters werden für eine bessere Übersichtlichkeit zu den Größen

$C_1$ ,  $C_{2Hk}$ ,  $C_{2Be}$ ,  $C_3$ ,  $C_{3Rand}$  und  $C_4$  für den Pufferspeicher und  $C_{2WÜ}$  und  $C_{4WÜ}$  für das Solarregister zusammengefasst:

$$\begin{aligned}
C_1 &= \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda}{\rho_p \cdot c_W \cdot \Delta z^2} \right) & C_3 &= \left( \frac{\Delta t \cdot \lambda_{iso} \cdot A_m}{\rho_p \cdot c_W \cdot \delta \cdot H \cdot A} \right) \\
C_{2Hk} &= \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{Hk}}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) & C_{3Rand} &= \left( \frac{\lambda_{platte} \cdot (A_m + A_D)}{\rho_p \cdot c_{W,p} \cdot d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \right) \\
C_{2Be} &= \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_W}{A \cdot \rho \cdot \Delta z} \right) & C_4 &= \left( \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho \cdot c_W \cdot H_{WÜ} \cdot A} \right) \\
C_{2WÜ} &= \left( \frac{\Delta t \cdot \dot{m}_{WÜ}}{A_{sr} \cdot \rho_{sr} \cdot 2 \cdot \Delta z} \right) & C_{4WÜ} &= \left( \frac{\Delta t \cdot U_A}{\rho_{sr} \cdot c_{sr} \cdot H_{WÜ} \cdot A_{sr}} \right)
\end{aligned} \tag{4.109}$$

Somit erhält man folgende allgemeine Matrix  $\mathbf{A}_{WSr}$ :

$$\mathbf{A}_{WSr} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{21} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \tag{4.110}$$

Die Matrizen  $\mathbf{A}_{11}$ ,  $\mathbf{A}_{12}$ ,  $\mathbf{A}_{21}$  und  $\mathbf{A}_{22}$  werden wie folgt beschrieben:

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} (1 - C_1 + C_{2Hk} + C_{3Rand}) & (2 \cdot C_1 + C_{2Be} - C_{2Hk}) & (-C_1) & 0 \\ (-C_1 - C_{2Be}) & (1 - 2 \cdot C_1 + C_{2Hk} + C_{2Be} + C_4 + C_3) & (-C_1 - C_{2Hk}) & 0 \\ 0 & (-C_1 - C_{2Be}) & (1 - 2 \cdot C_1 + C_{2Hk} + C_{2Be} + C_4 + C_3) & (-C_1 - C_{2Hk}) \\ 0 & (-C_1) & (-2 \cdot C_1 + C_{2Hk} - C_{2Be}) & (1 - C_1 + C_{2Be} + C_3) \end{bmatrix} \quad (4.111)$$

$$\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -C_4 & 0 \\ 0 & -C_4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.112)$$

$$\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -C_{4W\ddot{u}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_{4W\ddot{u}} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.113)$$

$$\mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} (1 + C_{4W\ddot{u}}) & (2 \cdot C_{2W\ddot{u}}) \\ (-2 \cdot C_{2W\ddot{u}}) & (1 + C_{4W\ddot{u}} + 2 \cdot C_{2W\ddot{u}}) \end{bmatrix} \quad (4.114)$$

Im Vektor  $\mathbf{B}_{WSr}$  werden die Eintrittstemperaturen ( $T_{Be,E}$ ,  $T_{Hk,E}$ ) in den Pufferspeicher sowie die Eintrittstemperatur ( $T_{sr,vl}$ ) in das Solarregister bei den entsprechenden örtlichen Stützpunkten berücksichtigt:

$$\mathbf{B}_{WSr} = \begin{bmatrix} -C_{2Be} \cdot T_{Be,E}^{j+1} \\ 0 \\ 0 \\ -C_{2Hk} \cdot T_{Hk,E}^{j+1} \\ -2 \cdot C_{2WÜ} \cdot T_{sr,vl}^{j+1} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.115)$$

Im Vektor  $\mathbf{U}_{WSr}$  werden die Verluste an die Umgebung bei den örtlichen Stützpunkten des Pufferspeichers berücksichtigt:

$$\mathbf{U}_{WSr} = \begin{bmatrix} -C_{3Rand} \cdot T_{umg}^{j+1} \\ -C_3 \cdot T_{umg}^{j+1} \\ -C_3 \cdot T_{umg}^{j+1} \\ -C_{3Rand} \cdot T_{umg}^{j+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.116)$$

Das Phänomen der freien Konvektion, welche sich aus Strömungsvorgängen aufgrund schwerkraftbedingter Auf- und Abtriebskräfte zusammensetzt, muss im Modell des Pufferspeichers berücksichtigt werden. Die Annäherung der freien Konvektion für die numerische Approximation des Pufferspeichers wird durch Mischung bestimmter Bereiche im folgenden Abschnitt beschrieben.

## 4.5 Annäherung der freien Konvektion durch Mischung

Durch die vertikalen Temperaturunterschiede des Wassers und den daraus folgenden Dichteunterschieden tritt, wenn sich unterhalb einer kälteren Temperatur des Wassers eine wärmere befindet ( $T_{\text{unterhalb}} > T_{\text{oberhalb}}$ ), aufgrund der geringeren Dichte des wärmeren Wassers ( $\rho_{\text{unterhalb}} < \rho_{\text{oberhalb}}$ ), freie Konvektion auf. Dieser Vorgang der freien Konvektion sollte durch Mischung der vertikalen Temperaturen des Wassers angenähert werden.

Es wird angenommen, dass das Wasser im oberen Bereich eine kältere  $T_1$  und im unteren Bereich eine wärmere Temperatur  $T_2$  besitzt, dadurch vermischen sich diese beiden Temperaturen aufgrund des Dichteunterschiedes und man erhält eine mittlere Temperatur  $T_{\text{mix}}$  (siehe Abbildung 4.3).

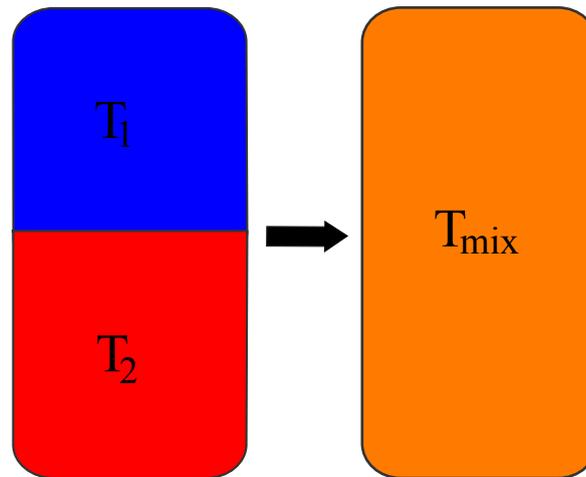


Abbildung 4.3: Mischen der beiden Temperaturen

Mathematisch wird die Mischung der Temperaturen des Wassers an den örtlichen Stützpunkten mit dem arithmetischen Mittelwert beschrieben:

$$T_{mix} = \frac{T_1 + T_2}{2} \quad (4.117)$$

Tritt im Pufferspeichermodell nun die freie Konvektion aufgrund des Dichteunterschieds auf, werden bei der numerischen Approximation die Wassertemperaturen  $\mathbf{T}^{j+1}$  bei den örtlichen Stützpunkten von unten beginnend mit der jeweils darüber liegenden Temperatur des Wassers solange gemischt, bis diese von unten nach oben monoton steigend sind.

Durch diese Methode wird die freie Konvektion in der Simulation angenähert. Dies ist nur zulässig, da das reale Mischen des Wassers durch die freie Konvektion viel schneller abläuft, als die anderen bis jetzt betrachteten Vorgänge im Pufferspeicher.

# 5 Experimentelle Ermittlung der Parameter und Verifikation des Pufferspeichermodells

In diesem Kapitel werden die experimentell zu ermittelnden Parameter des Pufferspeichermodells so bestimmt, dass die simulierten Wassertemperaturen möglichst gut den im untersuchten Pufferspeicher gemessenen Wassertemperaturen entsprechen. Dabei werden die effektive vertikale Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$ , die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{iso}}$  sowie die Parameter ( $K_{WT}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ) des Wärmeübertragungsvermögens  $U_A$  ermittelt.

Dazu werden zunächst gezielte Versuche am untersuchten Pufferspeicher durchgeführt. Die Datenerfassung der durchgeführten Versuche am untersuchten Pufferspeicher erfolgt über 14 montierte Temperatursensoren, die die Temperatur des Wassers bei bestimmten Höhen des Pufferspeichers messen.

Als erster Versuch wird der untersuchte Pufferspeicher mittels Biomassekessel (Erzeuger) im oberen Bereich mit warmem Wasser beladen. Das Wasser im unteren Bereich befindet sich auf Umgebungstemperatur. Danach werden alle hydraulischen Öffnungen geschlossen und die Temperatur des Wassers beim Abkühlvorgang über 90 Stunden wird von den Temperatursensoren aufgenommen. Anschließend werden die effektiven Wärmeleitfähigkeiten ( $\lambda$ ,  $\lambda_{\text{iso}}$ ) unter Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums mittels numerischer Optimierungsalgorithmen bei wiederholtem Simulieren des durchgeführten Versuches ermittelt.

Beim zweiten Versuch werden die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens  $U_A$  bestimmt. Dabei wird der untersuchte Pufferspeicher zunächst auf die Umgebungstemperatur abgekühlt. Anschließend wird der Biomassekessel an die Anschlussvorrichtungen des unteren Solarregisters am Pufferspeicher befestigt. Dabei speist der Biomassekessel Wasser mit einer konstanten Temperatur und einem konstanten Massenstrom über eine Zeit von 1,3 Stunden ein. Neben der Einspeisung des warmen Wassers in das Solarregister wird das Temperaturverhalten des Wassers im Pufferspeicher anhand der angebrachten Temperatursensoren aufgenommen. Anschließend werden die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens, mit der selben Vorgehensweise wie bei der

Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeiten, unter Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums mittels numerischer Optimierungsalgorithmen bei wiederholtem Simulieren des durchgeführten Versuches bestimmt.

Um die Richtigkeit der bestimmten Modellparameter zu bestätigen, wird das Modell des Pufferspeichers mit einem dritten Versuch verifiziert. Bei diesem Versuch wird der untersuchte Pufferspeicher zunächst mittels Biomassekessel im oberen Bereich mit warmem Wasser beladen während sich das Wasser im unteren Bereich auf Umgebungstemperatur befindet. Nach dieser Beladung werden alle hydraulischen Öffnungen geschlossen und der Biomassekessel an die Anschlussvorrichtungen des unteren Solarregisters befestigt. Anschließend speist der Biomassekessel Wasser mit einer konstanten Temperatur und einem konstanten Massenstrom über eine Zeit von 2 Stunden in das Solarregister ein. Dabei wird erneut das Temperaturverhalten des Wassers an den befestigten Temperatursensoren aufgenommen.

Im Abschnitt 5.1 werden die verwendeten Temperatursensoren und deren Positionierung am untersuchten Pufferspeicher erläutert. Anschließend wird im Abschnitt 5.2 die Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeiten und in Abschnitt 5.3 die Ermittlung der Parameter für das Übertragungsvermögen beschrieben. Dabei werden die durchgeführten Versuche erläutert. In Abschnitt 5.4 werden die experimentell ermittelten Parameter in das Modell des Pufferspeichers und des Solarregisters eingesetzt und anschließend mit dem anspruchsvollen dritten Versuch verifiziert.

## 5.1 Positionierung der Temperatursensoren am untersuchten Pufferspeicher

Bevor die Positionierung der Temperatursensoren erläutert wird, werden zunächst die verwendeten Temperatursensoren beschrieben. Für die Messung der Temperaturen werden Pt100 - Widerstandsthermometer [13] der Genauigkeitsklasse A verwendet. Abbildung 5.1 stellt den Aufbau des verwendeten Temperatursensors dar. Der Temperatursensor hat eine Länge  $L$  von 250 mm und einen Durchmesser  $d$  von 3 mm, als Anschluss dient eine Standard-M12-Steckverbindung.

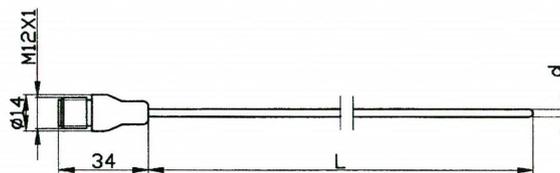


Abbildung 5.1: Aufbau des Widerstandsthermometers PT100 [13]

Neben den 14 entlang einer vertikalen Linie an unterschiedlichen Höhen des Pufferspeichers positionierten Temperatursensoren werden drei weitere Temperatursensoren auf gleicher Höhe verteilt, um horizontale Temperaturunterschiede zu untersuchen. Abbildung 5.2 stellt den untersuchten Pufferspeicher mit den 14 der Länge nach angebrachten Temperatursensoren dar. Die 3 horizontal angebrachten Temperatursensoren befinden sich auf der Höhe des Temperatursensors  $T_3$ , jeweils um  $90^\circ$  um den Umfang des Pufferspeichers versetzt.

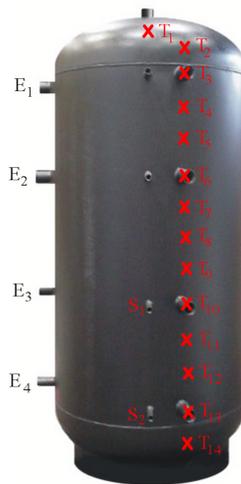


Abbildung 5.2: Der untersuchte Pufferspeicher mit den 14 vertikal angebrachten Temperatursensoren ( $T_1$  bis  $T_{14}$ ) sowie mit den Beladungsmöglichkeiten des Erzeugers ( $E_1$ ,  $E_2$ ,  $E_3$ ,  $E_4$ ) und den Anschlüssen des Solarregisters ( $S_1$ ,  $S_2$ )

Um die horizontale Temperaturverteilung des Pufferspeichers zu untersuchen wird der Pufferspeicher mittels Biomassekessel beim Anschluss  $E_1$  beladen und Wasser beim Anschluss  $E_4$  aus dem Pufferspeicher entnommen (siehe Abbildung 5.2). Dabei wird der Pufferspeicher mit einer Wassertemperatur von  $70^\circ\text{C}$  beladen. Danach werden alle Öffnungen des Pufferspeichers geschlossen und ein Abkühlvorgang von ungefähr 150 Stunden aufgenommen. Bei der Auswertung des Temperaturverhaltens der horizontal angebrachten Temperatursensoren bei der Höhe  $T_3$  stellt man fest, dass der Pufferspeicher durch seine spezielle Bauform (siehe Abschnitt 3.1) eine ausgezeichnete horizontale Temperaturverteilung aufweist, wie es in der Abbildung 5.3 ersichtlich ist.

Da die horizontal angebrachten Temperatursensoren immer nahezu identische Temperaturwerte aufweisen, wird im Weiteren angenommen, dass die Temperatur des Wassers in horizontaler Ebene konstant ist. Somit wird in weiterer Folge nur die vertikale Temperaturverteilung betrachtet.

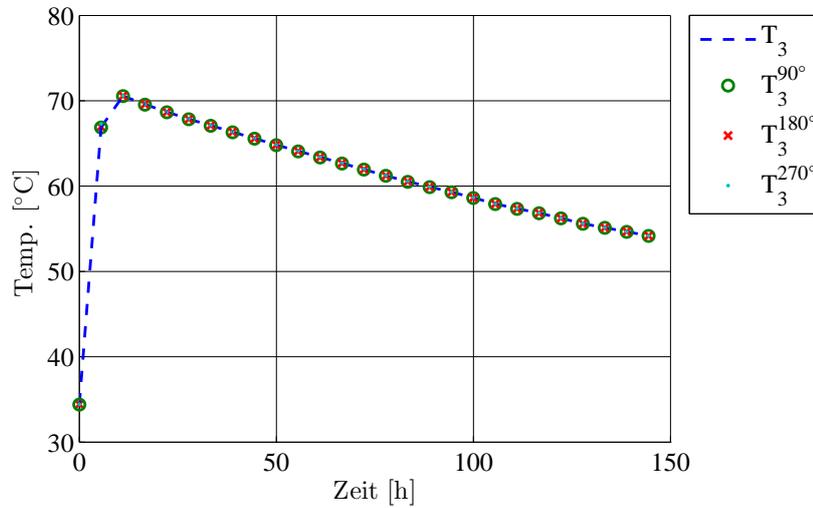


Abbildung 5.3: Gemessenes Temperaturverhalten der horizontal angebrachten Temperatursensoren

## 5.2 Experimentelle Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeiten

Das mathematische Modell des Pufferspeichers (3.1.8) wird wie folgt angeschrieben:

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{Ges} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{U_A \cdot (T_{WÜ} - T)}{A \cdot H_{WÜ}} + \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (5.1)$$

In diesem Abschnitt werden die experimentell ermittelbaren Parameter, die effektive vertikale Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  und die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{iso}$  des mathematischen Modells (5.1) bestimmt. Da auch die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens experimentell ermittelbar sind wird zunächst der Term *Solarregister* vernachlässigt. Die restlichen Parameter des Modells des Pufferspeichers (5.1) sind bekannt.

Um nun die effektiven Wärmeleitfähigkeiten zu bestimmen wurde ein gezielter Versuch am untersuchten Pufferspeicher durchgeführt. Abbildung 5.4 stellt den Versuchsaufbau für die Bestimmung der Wärmeleitfähigkeiten dar. Dabei wird der Pufferspeicher mittels Biomassekessel beim Anschluss  $E_1$  mit der Wassertemperatur von  $70^\circ\text{C}$  beladen. Die Rückführung des Wassers aus dem Pufferspeicher in den Biomassekessel erfolgt beim

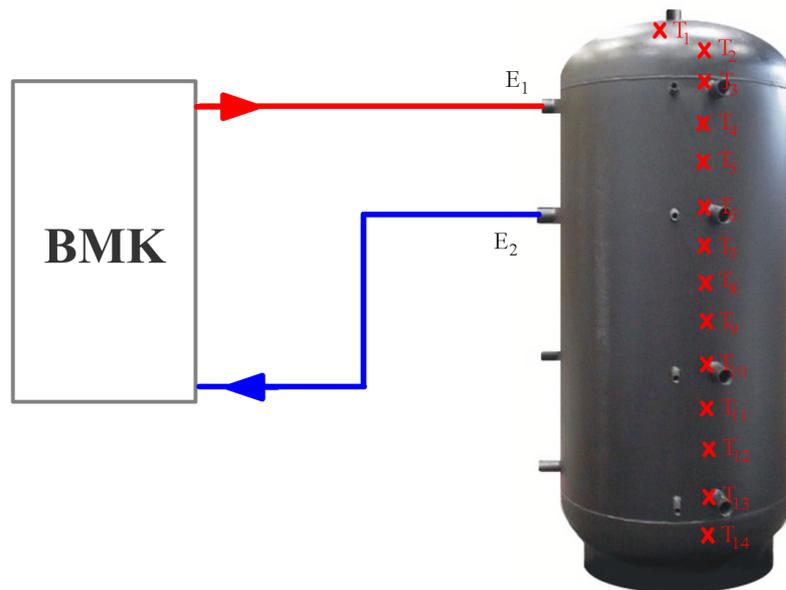


Abbildung 5.4: Aufbau des Versuchs für die Bestimmung der effektiven vertikalen Wärmeleitfähigkeit und der effektiven Wärmeleitfähigkeit der Isolierung

Anschluss  $E_2$ . Durch das Wählen dieser Anschlüsse stellt sich eine Temperaturverteilung im Pufferspeicher ein, die oben warm, mit einer Wassertemperatur von  $70^\circ\text{C}$ , und unten kalt, mit einer Wassertemperatur von  $20^\circ\text{C}$ , ist. Nach der Beladung des Pufferspeichers werden alle hydraulischen Öffnungen geschlossen und der Abkühl- sowie der Ausgleichsvorgang über 90 Stunden aufgenommen. Abbildung 5.5 stellt den von den Sensoren gemessenen Temperaturverlauf, ohne die Werte des nicht angeschlossenen Temperatursensors  $T_{12}$ , dar.

Aus Abbildung 5.5 ist ersichtlich, dass das Wasser bei den Temperatursensoren  $T_1$  bis  $T_7$  im Laufe des Abkühlvorgangs Wärme an die Umgebung abgibt und sich somit abkühlt. Aufgrund der axialen Wärmeleitung gibt das Wasser bei den Temperatursensoren  $T_3$  bis  $T_6$  am Anfang des Versuchs mehr Wärme ab, wodurch sich das Wasser bei den Temperatursensoren von  $T_7$  bis  $T_{11}$  erwärmt. Die unterste Schicht im Pufferspeicher bei den Temperatursensoren von  $T_{13}$  bis  $T_{14}$ , die sich auf Umgebungstemperatur befindet, erwärmt sich über die Versuchszeit jedoch kaum.

Da bei der numerischen Lösung des Pufferspeichers die Temperatur des Wassers an  $N_z + 1$  örtlichen Positionen simuliert wird, benötigt man  $N_z + 1$  passende Startwerte dafür. Dazu werden die Startwerte der gemessenen Temperaturverläufe für die entsprechenden Höhen kubisch interpoliert (siehe Abbildung 5.6). Die mit einem x markierten Punkte kennzeichnen die Startwerte der gemessenen Temperaturverläufe und die grüne Linie die Startwerte für die Simulation.

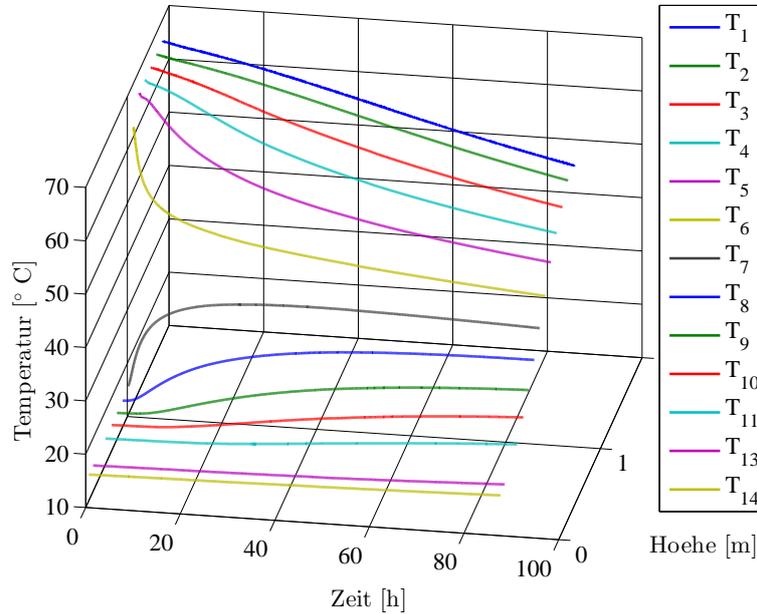


Abbildung 5.5: Temperaturverlauf bei einem Abkühlvorgang des oben warm und unten kalt beladenen Pufferspeichers über 90 Stunden

Als nächstes werden die effektiven Wärmeleitfähigkeiten ( $\lambda_{\text{eff}}$ ,  $\lambda_{\text{iso,eff}}$ ) durch Vergleichen der gemessenen Temperaturverläufe mit den simulierten Temperaturen des Wassers bei den entsprechenden Höhen, mittels numerischer Optimierungsalgorithmen bei wiederholtem Simulieren unter Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums des durchgeführten Versuches, ermittelt. Dabei wurde jeweils die effektive vertikale Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  aus den Verläufen der Temperatursensoren  $T_4$  bis  $T_9$  und die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung aus den Verläufen der Temperatursensoren  $T_1$  bis  $T_3$  sowie  $T_{10}$  bis  $T_{14}$  bestimmt. Schließlich erhält man für die effektiven Wärmeleitfähigkeiten die in Tabelle 5.2 zusammengefassten Werte.

	Theoretische Werte		Effektive Werte
$\lambda_{\text{Wasser}}$	0,6405 W/mK	$\lambda$	1,4794 W/mK
$\lambda_{\text{Isolierung}}$	0,035 W/mK	$\lambda_{\text{iso}}$	0,0757 W/mK

Tabelle 5.1: Theoretische und effektive Wärmeleitfähigkeiten

$\lambda_{\text{Wasser}}$  entspricht dem Wert der Wärmeleitfähigkeit von Wasser bei 50°C [7], der Wert für die Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{Isolierung}}$  wurde aus dem Datenblatt des Pufferspeichers entnommen. Dass der theoretische Wert der Wärmeleitfähigkeit von

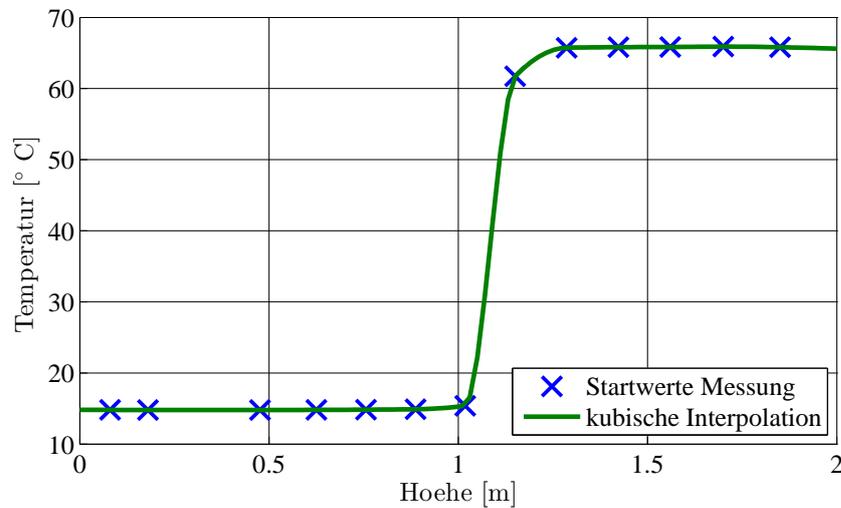


Abbildung 5.6: Kubische Interpolation der Startwerte für die Simulation aus den gemessenen Temperaturen

Wasser  $\lambda_{\text{Wasser}}$  gegenüber der effektiven vertikalen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  ungefähr um die Hälfte abweicht, liegt daran, dass die zwei im Inneren des Pufferspeichers befindlichen Solarregister sowie der Mantel des Pufferspeichers, welche beide aus Metall bestehen, eine wesentlich höhere Wärmeleitfähigkeit als Wasser aufweisen. Auch die effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{iso}}$  ist gegenüber dem theoretischen Wert  $\lambda_{\text{Isolierung}}$  doppelt so groß, da zusätzliche Wärmebrücken vorliegen.

Werden nun die effektiven Wärmeleitfähigkeiten in das Modell des Pufferspeichers (5.1) eingesetzt und die Temperatur des Wassers des Modells mit den Temperaturverläufen der Temperatursensoren bei den entsprechenden Höhen verglichen, erkennt man, dass das Modell dem Versuch ausgezeichnet entspricht (siehe Abbildung 5.7).

Die maximale Abweichung beim Vergleichen der Temperatur des Wassers des Pufferspeichermodells mit den gemessenen Temperaturverläufen beträgt weniger als 2°C über 90 Stunden. Es ist jedoch zu beachten, dass die hier ausgewerteten fiktiven Wärmeleitfähigkeiten nur für den untersuchten Pufferspeicher zutreffen, da die Geometrien je nach Hersteller und Größe unterschiedlich sind.

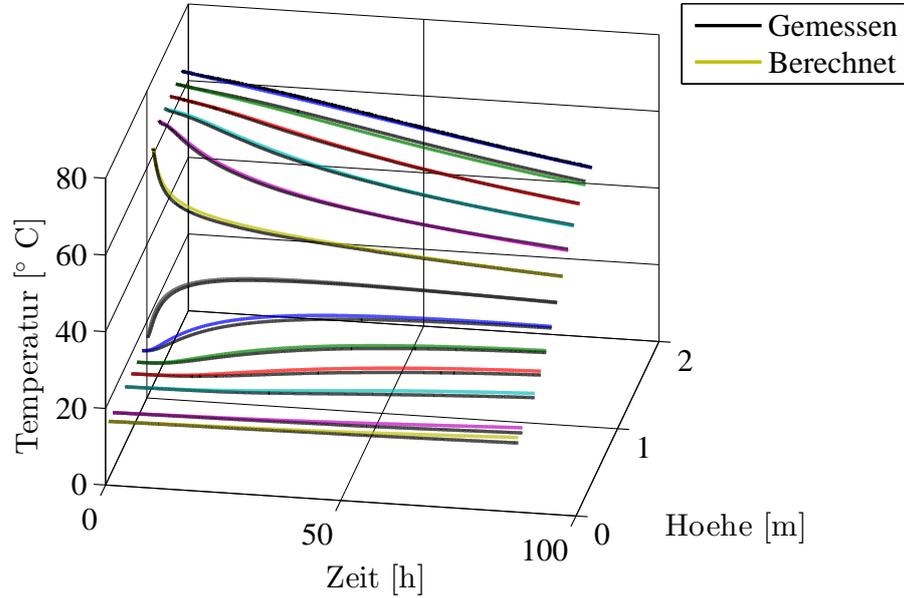


Abbildung 5.7: Vergleich des Modells des Pufferspeichers mit den gemessenen Temperaturverläufen beim Abkühlen des im oberen Bereich mit warmem Wasser beladenen Pufferspeichers

### 5.3 Experimentelle Ermittlung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens

Nach dem Bestimmen der effektiven Wärmeleitfähigkeiten im vorhergehenden Abschnitt werden nun die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens bestimmt. Dazu wird beim mathematischen Modell des Pufferspeichers (5.1) der Term *Solarregister* wieder berücksichtigt. Somit müssen das Modell des Pufferspeichers (3.1.8) und das Modell des Solarregisters (4.75) gemeinsam gelöst werden (siehe Abschnitt 4.4).

$$\rho \cdot c_W \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{Ges} \cdot c_W}{A} \frac{\partial T}{\partial z} + \frac{U_A \cdot (T_{WÜ} - T)}{A \cdot H_{WÜ}} + \frac{\lambda_{iso} \cdot A_m}{\delta \cdot H \cdot A} \cdot (T - T_{umg}) = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (5.2)$$

$$\rho_{sr} \cdot c_{sr} \frac{\partial T_{WÜ}}{\partial t} + \frac{\dot{m}_{WÜ} \cdot c_{sr}}{A_{sr}} \frac{\partial T_{WÜ}}{\partial z} + \frac{U_A \cdot (T_{WÜ} - T)}{A_{sr} \cdot H_{WÜ}} = 0 \quad (5.3)$$

### 5.3. Experimentelle Ermittlung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens 72

Das Wärmeübertragungsvermögen  $U_A$  aus Abschnitt 3.1.8 wird wie folgt angeschrieben:

$$U_A = K_{W\ddot{U}} \cdot (\dot{m}_{W\ddot{U}})^{b_1} \cdot |T_{W\ddot{U}} - T|^{b_2} \cdot \left( \frac{T_{W\ddot{U}} + T}{2} \right)^{b_3} \quad (5.4)$$

Dabei sind die Parameter  $K_{W\ddot{U}}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$  und  $b_3$  zu bestimmen.

Beim zugehörigen Versuch wurde zunächst sicher gestellt, dass das im Pufferspeicher befindliche Wasser auf die Umgebungstemperatur abgekühlt wurde. Anschließend wird der Biomassekessel an den Anschlüssen des unteren Solarregisters befestigt, wobei der Vorlauf des Wassers aus dem Biomassekessel in das Solarregister an den Anschluss  $S_1$  und der Rücklauf des Wassers aus dem Solarregister in den Biomassekessel an den Anschluss  $S_2$  montiert wird. Abbildung 5.8 stellt den Versuchsaufbau für die experimentelle Ermittlung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens dar.

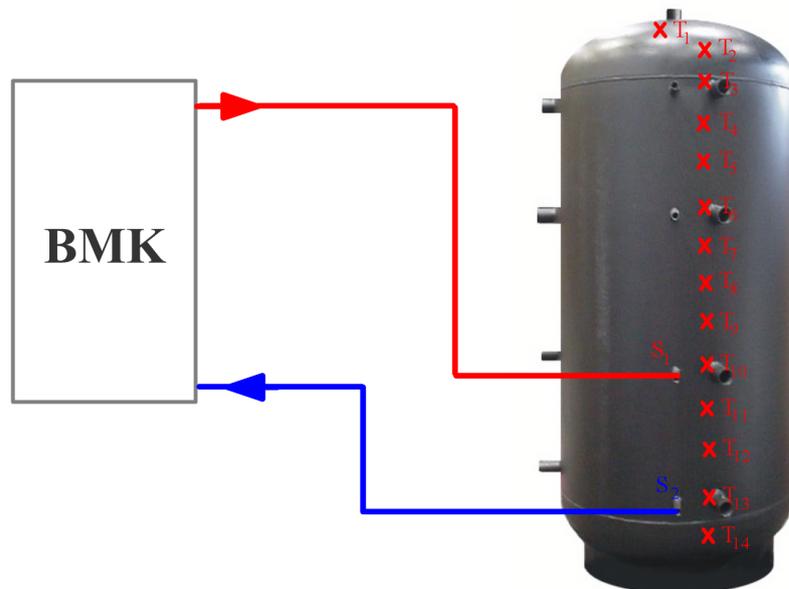


Abbildung 5.8: Versuchsaufbau für die Bestimmung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens

Der Biomassekessel speist nun Wasser mit einer Vorlauftemperatur  $T_{sr,vl}$  von  $50^\circ\text{C}$  mit einem konstanten Massenstrom  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$  in das Solarregister ein. Dabei werden die Vorlauftemperatur  $T_{sr,vl}$  des Wassers sowie der Massenstrom, der durch das Solarregister strömt, über die Versuchszeit aufgenommen, welche für die Bestimmung des Wärmeübertragungsvermögens des Solarregisters (siehe Gleichung (5.4)) benötigt werden. Neben der Vorlauftemperatur und dem Massenstrom durch das Solarregister wird auch das Temperaturverhalten des Wassers im Pufferspeicher über die angebrachten

Temperatursensoren aufgezeichnet. Abbildung 5.9 stellt den Temperaturverlauf des Wassers über die ersten zwei Stunden dar.

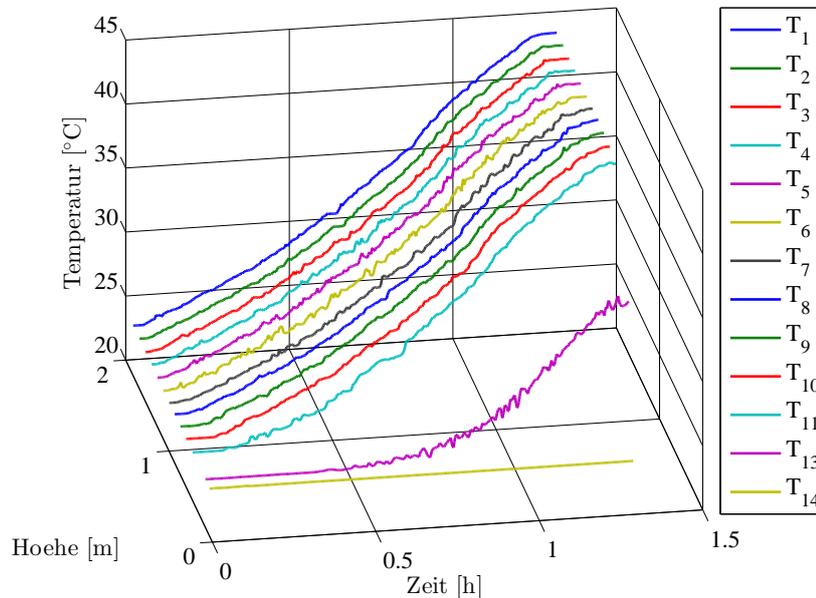


Abbildung 5.9: Temperaturverlauf des Wassers bei Übertragung der Wärme durch das Solarregister in den untersuchten Pufferspeicher

In Abbildung 5.9 ist zu erkennen, dass sich die gemessenen Temperaturverläufe von  $T_1$  bis  $T_{11}$  annähernd gleich erwärmen. Die Übertragung der Wärme erfolgt durch das untere Solarregister, wodurch sich das dort befindliche Wasser im unteren Bereich des Pufferspeichers erwärmt. Wärmeres Wasser besitzt eine geringere Dichte als kälteres Wasser und steigt somit im Pufferspeicher auf. Durch das Aufsteigen des wärmeren Wassers kommt es zu Vermischungen mit dem kälteren Wasser. Der gemessene Temperaturverlauf  $T_{13}$ , der sich im Bereich des Austritts des Solarregisters befindet, erwärmt sich nur langsam durch die axiale Wärmeleitung des Wassers. Der gemessene Temperaturverlauf  $T_{14}$  bleibt über die Versuchszeit, aufgrund der Trägheit der axialen Wärmeleitung des Wassers, nahezu auf der Umgebungstemperatur.

Da sich alle Startwerte der gemessenen Temperaturverläufe auf der selben Temperatur befinden, muss man sie für die Simulation nicht kubisch interpolieren. Somit werden als nächstes die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens, analog zur im vorhergehenden Abschnitt erläuterten Vorgehensweise unter der Berücksichtigung der Verläufe der Temperatursensoren  $T_1$  bis  $T_{11}$ , bestimmt. Dadurch erhält man für die Parameter des Wärmeübertragungsvermögens die in der Tabelle 5.2 zusammengefassten Werte.

$K_{WÜ}$	$b_1$	$b_2$	$b_3$
[W/K]	[-]	[-]	[-]
10,82	0,54	0,62	1,22

Tabelle 5.2: Die Parameter für das Wärmeübertragungsvermögen des Solarregisters

Werden nun die bestimmten Parameter in das Modell des Pufferspeichers (5.2) sowie des Solarregisters (5.3) eingesetzt und die Temperatur des Wassers des Modells mit den Temperaturverläufen der Temperatursensoren bei den entsprechenden Höhen verglichen, erkennt man, dass das Modell (in Farbe) sehr gut dem Versuch (in schwarz) entspricht (siehe Abbildung 5.10). Beim Temperatursensor  $T_{13}$  gibt es am Ende des Versuches eine geringe Abweichung. Das liegt daran, dass der Temperatursensor  $T_{13}$  im Bereich des Austritts des Solarregisters misst.

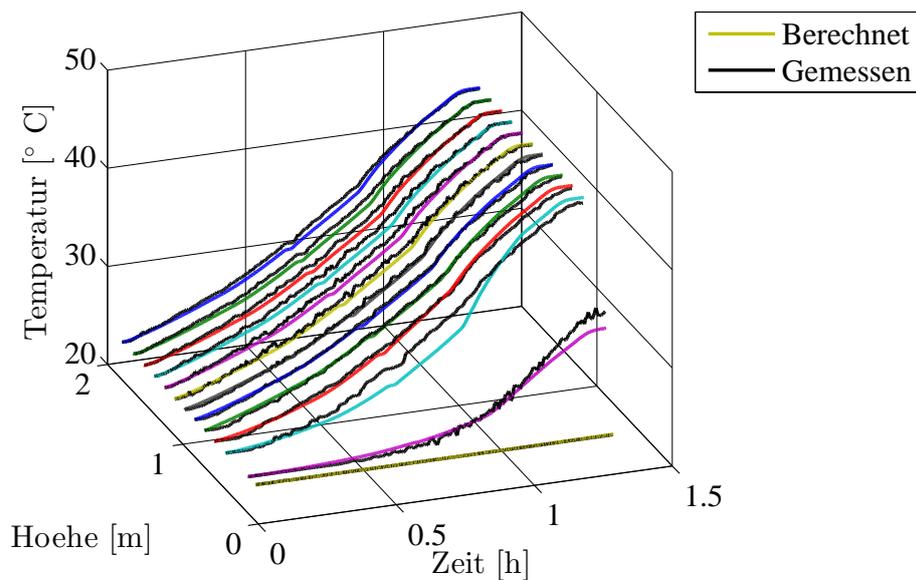


Abbildung 5.10: Vergleich des Modells des Pufferspeichers mit den gemessenen Temperaturverläufen bei dem auf die Umgebungstemperatur abgekühlten Pufferspeicher durch Einbringen der Wärme über das integrierte Solarregister

## 5.4 Verifikation des Pufferspeichermodells

Zur Verifikation des mathematischen Modells für den Pufferspeicher wird ein dritter anspruchsvoller Versuch durchgeführt. Dabei wird der Pufferspeicher zunächst wie beim Versuch zur Ermittlung der effektiven Wärmeleitfähigkeiten mittels Biomassekessel beladen. Als Beladungstemperatur werden  $75^{\circ}\text{C}$  gewählt. Anschließend wird der Biomassekessel wie beim Versuch zur Bestimmung der Parameter des Wärmeübertragungsvermögens an die Anschlüsse des Solarregisters angeschlossen. Danach wird das Solarregister mit einer Vorlauftemperatur von  $60^{\circ}\text{C}$  und einem konstanten Massenstrom durchströmt. Dabei wird das Temperaturverhalten des Wassers im Pufferspeicher mittels der Temperatursensoren aufgenommen. Anstatt des nahezu unveränderten Temperaturverhaltens des Wassers bei der Höhe  $T_{14}$  wird nun das Temperaturverhalten des Wassers bei der Höhe  $T_{12}$  mit dem entsprechenden Sensor aufgenommen. Bevor nun der Versuch mit dem Modell verifiziert werden kann, müssen aus den Startwerten der gemessenen Temperaturverläufe noch  $(N_{\text{Wü,A}} - N_{\text{Wü,E}} + N_z + 2)$  Startwerte für die Simulation durch kubische Interpolation ermittelt werden. Die in Abbildung 5.11 mit einem x markierten Punkte kennzeichnen die gemessenen Startwerte der Temperaturverläufe und die grüne Linie die Startwerte für die Simulation.

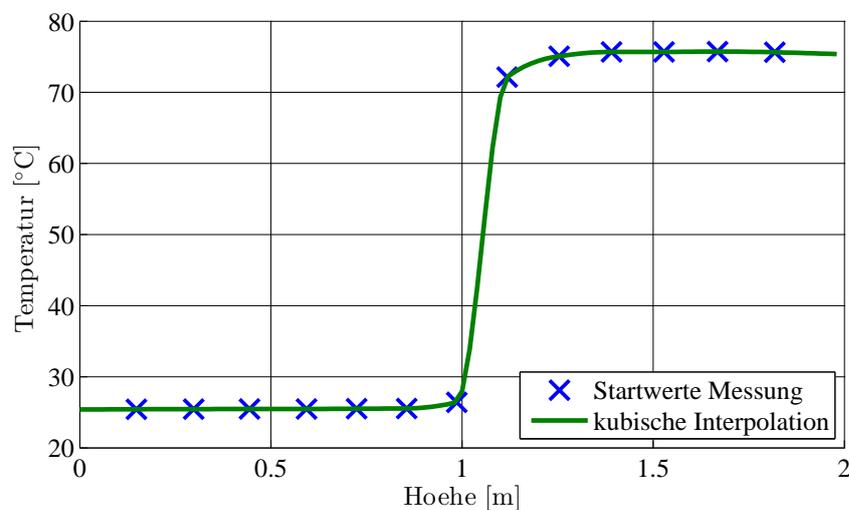


Abbildung 5.11: Kubische Interpolation der Startwerte für die Simulation aus den gemessenen Temperaturen

Dabei entsprechen die Temperaturstartwerte des Mediums im Solarregister den dort befindlichen Startwerten der Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher:

$$T_{w\ddot{u}l}^0 = T_l^0 \quad (5.5)$$

Werden nun wieder die gemessenen Temperaturverläufe mit den Temperaturen des Wassers aus dem Modell mit den experimentell ermittelten Modellparametern bei den entsprechenden Höhen verifiziert, erhält man das in Abbildung 5.12 dargestellte Ergebnis.

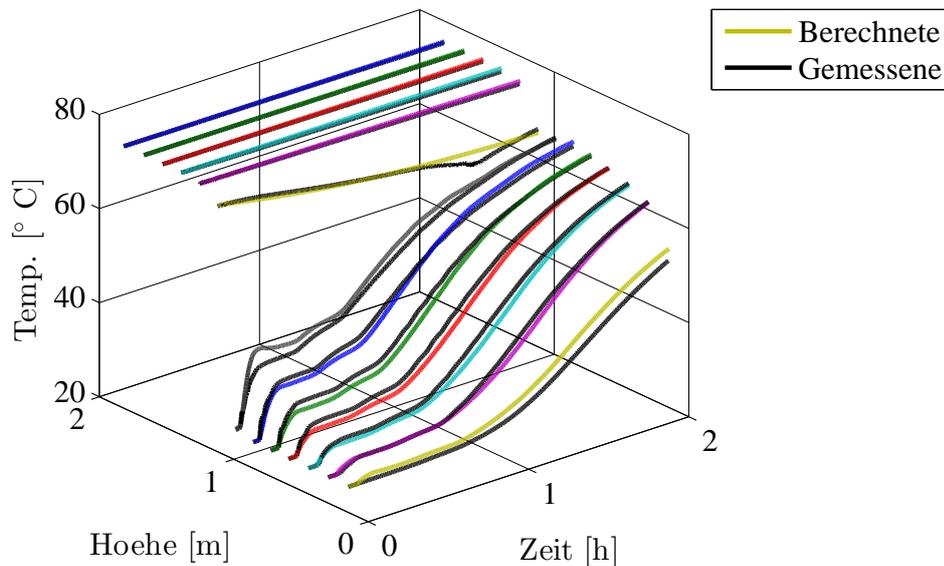


Abbildung 5.12: Verifikation des Modells des Pufferspeichers mit den gemessenen Temperaturverläufen, bei dem am Anfang im oberen Bereich mit warmem und im unteren Bereich mit kälterem Wasser beladen wird und Wärme über das integrierte Solarregister eingebracht wird

In Abbildung 5.12 sieht man, dass die Temperaturverläufe des Modells (in Farbe) die Temperaturverläufe der Sensoren (in Schwarz) des anspruchsvollen Versuches in Summe sehr gut abbilden. Man erkennt auch, dass die oberen Temperaturverläufe im kälteren Bereich am Anfang vom gemessenen Verlauf der Sensoren abweichen, jedoch am Ende des Versuchs wieder gut übereinstimmen. Umgekehrt ist es bei den untersten Temperaturverläufen im kalten Bereich. In Summe bildet das mathematische Modell des Pufferspeichers den untersuchten Pufferspeicher sehr zufriedenstellend ab, womit ein Simulationsmodell vorliegt das gezielt Untersuchungen ohne aufwändige Versuche ermöglicht.

## 6 Entwicklung einer Regelung für den Solarkreis

In diesem Kapitel wird die Entwicklung einer Regelung der Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher beschrieben. Da das durchströmende Medium im Solarkollektor ein Wasser-Frostschutzgemisch ist, erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher durch geeignete Wärmeübertrager.

Für die Übertragung der Wärme aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher werden zwei in der Praxis wesentliche Varianten untersucht. Bei der ersten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher über das im Pufferspeicher integrierte Solarregister. Bei der zweiten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme über einen Plattenwärmeübertrager auf Wasser, welches dann direkt in den Pufferspeicher eingespeist wird. Als Reglerstruktur soll in beiden Fällen ein Standard-Regelkreis mit einer statischen Vorsteuerung verwendet werden.

Im Abschnitt 6.1 werden zunächst der Aufbau der ersten Variante (Solarregister) sowie die für deren Regelung relevanten Größen beschrieben. Anschließend erfolgt das Bestimmen der statischen Vorsteuerung. Danach werden die Parameter des Reglers anhand einer Simulationsstudie bestimmt. Dabei wird angenommen, dass alle Störgrößen bekannt sind. Zum Schluss wird das resultierende Temperaturverhalten des Wassers im Pufferspeicher für einen Aufheizvorgang bei variierendem Strahlungseintrag im Solarkollektor dargestellt. In Abschnitt 6.3 werden die gleichen Vorgänge nochmals für die zweite Variante (Plattenwärmeübertrager) beschrieben.

Um die statische Vorsteuerung für die betrachtete zweite Variante (Plattenwärmeübertrager) in Abschnitt 6.3 bestimmen zu können, wird im Abschnitt 6.2 zunächst das mathematische Modell des Plattenwärmeübertragers näher betrachtet. Im Abschnitt 6.4 werden beiden Varianten zusammengefasst und gegenübergestellt.

## 6.1 Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher über das Solarregister

Abbildung 6.1 stellt den schematischen Aufbau der ersten Variante für die Wärmeübertragung dar. Dabei entspricht  $I_g$  der auf den Solarkollektor eintreffenden Strahlungsstromdichte und  $\dot{Q}_{\text{Koll}}$  dem auf das Wasser-Frostschutzgemisch übertragenen Wärmestrom.  $T_{\text{sr,ein}}$  kennzeichnet die in das Solarregister eintretende Temperatur und  $T_{\text{sr,aus}}$  die aus dem Solarregister austretende Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches.  $\dot{m}_{\text{WÜ}}$  kennzeichnet den Massenstrom, der durch den Solarkollektor und das Solarregister strömt.  $T$  beschreibt die Temperatur des Wassers im Pufferspeicher und  $T_{\text{umg}}$  die Umgebungstemperatur.  $\dot{Q}_{\text{sp}}$  kennzeichnet den in den Pufferspeicher übertragenen Wärmestrom.

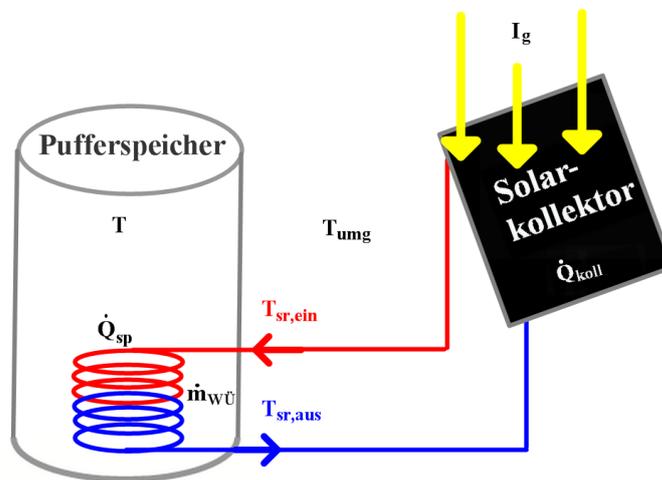


Abbildung 6.1: Wärmeübertragung vom Solarkollektor in den Pufferspeicher

Die Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in das Solarregister  $T_{\text{sr,ein}}$  soll auf die von einer übergeordneten Systemregelung vorgegebene Solltemperatur  $T_{\text{sr,ein,soll}}$  geregelt werden. Als Regelungsstruktur wird dabei ein PI-Regler mit einer statischen Vorsteuerung, wie in Abbildung 6.2 dargestellt, verwendet. Die statische Vorsteuerung basiert auf der Betrachtung des stationären Zustands.

Die Regelgröße  $y(t)$  entspricht der Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches  $T_{\text{sr,ein}}$  in das Solarregister und die Stellgröße  $u(t)$  dem Massenstrom  $\dot{m}_{\text{WÜ}}$ , der durch das Solarregister sowie durch den Solarkollektor strömt. Die Strahlungsstromdichte  $I_g$ , die Umgebungstemperatur  $T_{\text{umg}}$  sowie die Austrittstemperatur  $T_{\text{sr,aus}}$  werden als messbare Störgrößen  $d(t)$  berücksichtigt.

Im nächsten Schritt wird die statische Vorsteuerung hergeleitet. Dabei wird angenommen, dass die Rohrleitungen keine Verluste aufweisen. Somit ist die im Solarkollektor

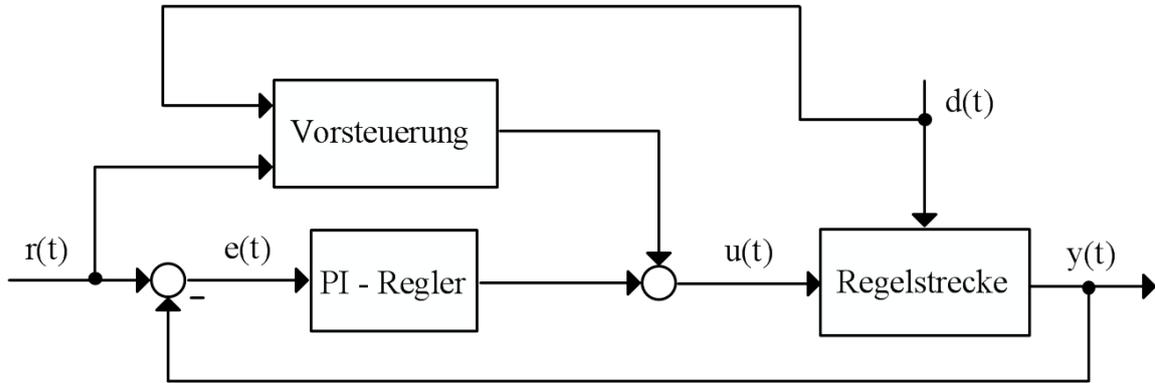


Abbildung 6.2: Standard-Regelkreis mit statischer Vorsteuerung

gewonnene Wärme  $\dot{Q}_{koll}$  identisch mit der Wärme  $\dot{Q}_{sp}$ , die durch das Solarregister in den Pufferspeicher übertragen wird:

$$\dot{Q}_{koll} = \dot{Q}_{sp} \quad (6.1)$$

Dabei werden auch die Durchlaufzeiten (Totzeiten) des Mediums durch die Rohrleitungen vom Solarkollektor zum Solarregister und zurück, vernachlässigt. Somit entspricht die Austrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches aus dem Solarkollektor der Eintrittstemperatur in das Solarregister  $T_{sr,ein}$ . Die Austrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches aus dem Solarregister  $T_{sr,aus}$  entspricht der Eintrittstemperatur in den Solarkollektor.

Der auf das Wasser-Frostschutzgemisch übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{koll}$  wird, wie in Abschnitt 3.3, folgendermaßen beschrieben:

$$\dot{Q}_{koll} = I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{T_m - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{(T_m - T_{umg})^2}{I_g} \right) \quad (6.2)$$

Dabei entspricht die mittlere Absorbtemperatur  $T_m$  dem arithmetischen Mittelwert der Temperaturen des Wasser-Frostschutzgemisches am Eintritt  $T_{sr,ein}$  und am Austritt  $T_{sr,aus}$  des Solarregisters:

$$T_m = \frac{T_{sr,ein} + T_{sr,aus}}{2} \quad (6.3)$$

Die in den Pufferspeicher übertragene Wärme  $\dot{Q}_{sp}$  kann mit Hilfe der gemessenen Austrittstemperatur  $T_{sr,aus}$  des Wasser-Frostschutzgemisches durch folgende Energiebilanz [1] beschrieben werden:

$$\dot{Q}_{sp} = \dot{m}_{W\ddot{U}} \cdot c_W \cdot (T_{sr,ein} - T_{sr,aus}) \quad (6.4)$$

Als nächstes wird der im Solarkollektor übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{koll}$  (6.2) mit dem in den Pufferspeicher übertragenen Wärmestrom (6.4) gleichgesetzt und die Eintrittstemperatur  $T_{sr,ein}$  durch ihre Führungsgröße  $T_{sr,ein,soll}$  ersetzt. Anschließend werden die gleich gesetzten Wärmeströme auf den Massenstrom  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$ , der die statische Vorsteuerung darstellt, umgeformt:

$$\begin{aligned} \dot{m}_{W\ddot{U}} &= \frac{I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{T_m - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{(T_m - T_{umg})^2}{I_g} \right)}{c_W \cdot (T_{sr,vl,soll} - T_{sr,rl})} \\ &= \frac{I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{\frac{T_{sr,ein,soll} + T_{sr,aus}}{2} - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{\left( \frac{T_{sr,ein,soll} + T_{sr,aus}}{2} - T_{umg} \right)^2}{I_g} \right)}{c_W \cdot (T_{sr,ein,soll} - T_{sr,aus})} \end{aligned} \quad (6.5)$$

Nach der statischen Vorsteuerung wurden die Parameter für den PI-Regler anhand der Simulationsstudie festgelegt. Dabei wurde das Simulationsmodell des Solarkollektors aus Abschnitt 4.2 als Strecke verwendet. Die gewünschte Eintrittstemperatur (Solltemperatur) des Wasser-Frostschutzgemisches wurde mit 60°C festgelegt. Über die gesamte Simulationszeit von 4 Stunden wurde eine Umgebungstemperatur  $T_{umg}$  von 20°C gewählt. Die Austrittstemperatur  $T_{sr,aus}$  des Wasser-Frostschutzgemisches resultierte aus dem Simulationsmodell des Pufferspeichers (siehe Abschnitt 4.4). Die Temperatur des Wassers im Pufferspeicher  $T$  wurde zu Beginn mit 40°C gewählt. Für die Strahlungsstromdichte der Solarstrahlung  $I_g$ , die auf die Solarkollektorfläche  $A_{koll}$  trifft, wurde der in Abbildung 6.3 dargestellte Verlauf angenommen.

Abbildung 6.4 stellt den Verlauf des resultierenden Massenstroms  $\dot{m}_{W\ddot{U}}$ , der die Stellgröße kennzeichnet, dar. Zu Beginn ist der Massenstrom relativ niedrig, erst durch die Zunahme der Strahlungsstromdichte  $I_g$  wird er größer. Je mehr Wärme (Strahlungsstromdichte  $I_g$ ) auf die Solarkollektorfläche trifft, desto schneller erwärmt sich das Wasser-Frostschutzgemisch im Solarkollektor und desto zügiger kann es strömen. Nach 3,4 Stunden nimmt der Massenstrom rapide zu. Zum einen nimmt dabei die Strahlungsstromdichte  $I_g$  zu und zum anderen ist die Austrittstemperatur aus dem Solarregister  $T_{sr,aus}$ , welche der Eintrittstemperatur in den Solarkollektor entspricht, relativ hoch, da die Wassertemperatur im Pufferspeicher aufgrund der vorherigen Erwärmung nur mehr wenig unter der Eintrittstemperatur des Solarregisters liegt.

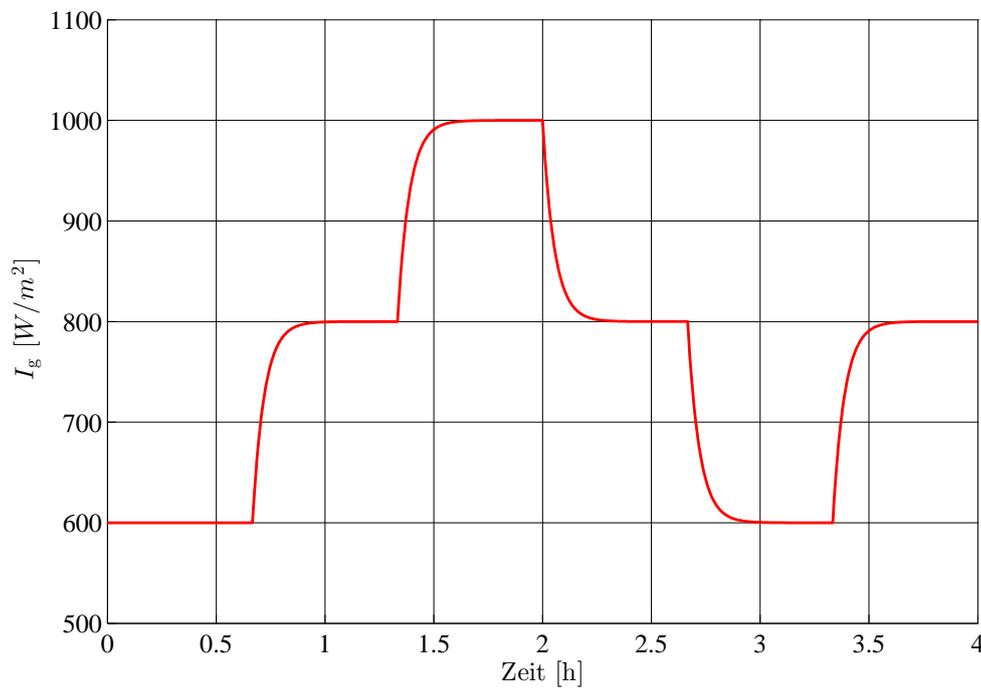


Abbildung 6.3: Auf die Solarkollektorfläche wirkende Strahlungsstromdichte

In Abbildung 6.5 stellt die rote Kurve den Temperaturverlauf der Regelgröße  $T_{sr,ein}$  und die blaue den Temperaturverlauf der Austrittstemperatur des Solarregisters  $T_{sr,aus}$  dar.

Dabei ist zu erkennen, dass die Regelgröße  $T_{sr,ein}$  bei Änderungen der Strahlungsstromdichte  $I_g$  ein wenig vom Sollwert abweicht. Diese kleinen Temperaturschwankungen rühren daher, dass sich im Solarkollektor ein bestimmtes Volumen des Wasser-Frostschutzgemisches befindet und können prinzipbedingt nicht gänzlich vermieden werden. Tritt eine Änderung der Strahlungsstromdichte auf muss der Massenstrom  $\dot{m}_{WÜ}$  geändert werden um die gewünschte Solltemperatur  $T_{sr,ein,soll}$  zu erreichen. Durch die Vorsteuerung kommt es zu einer unmittelbaren Änderung des Massenstroms aber es dauert eine gewisse Zeit bis das im Solarkollektor befindliche Volumen des Wasser-Frostschutzgemisches abtransportiert wird. Dadurch treten bei einer Zunahme der Strahlungsstromdichte kleine Temperaturschwankungen nach unten und bei einer Abnahme der Strahlungsstromdichte Temperaturschwankungen nach oben auf (siehe Abbildung 6.5).

Abbildung 6.6 stellt das Verhalten der erwärmten Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher dar. Es ist zu erkennen, dass sich die kleinen Temperaturschwankungen der Eintrittstemperatur  $T_{sr,ein}$  des Wasser-Frostschutzgemisches kaum auf den Pufferspei-

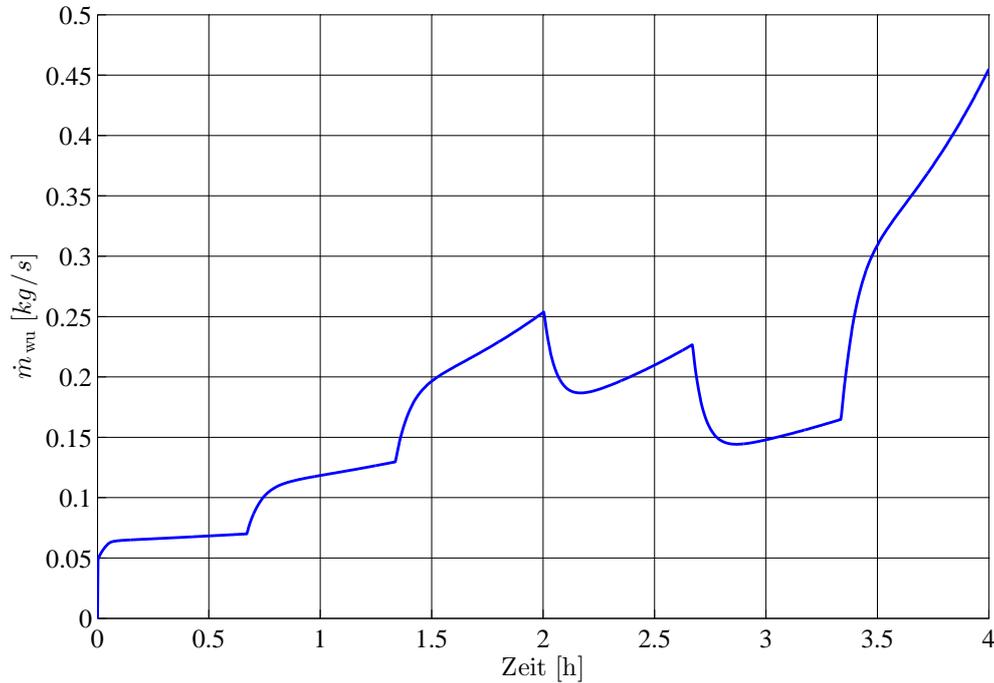


Abbildung 6.4: Verlauf des Massenstroms durch den Solarkollektor

cher auswirken. Das Wasser im Pufferspeicher erwärmt sich gleichmäßig von oben bis zum Rücklauf des Solarregisters. Eine Temperaturschichtung ist bei Beladung über das Solarregister nicht möglich.

## 6.2 Nähere Betrachtung des Plattenwärmeübertragers

Als Basis für den Entwurf der statischen Vorsteuerung soll zunächst der Plattenwärmeübertrager und das zugehörige Simulationsmodell (siehe Abschnitt 4.3) näher betrachtet werden. Das mathematische Modell des Plattenwärmeübertragers setzt sich aus jeweils einer partiellen Differentialgleichung für die Primär- (6.6) und die Sekundärseite (6.7) zusammen:

$$\rho_p \cdot c_{Wp} \frac{\partial T_P}{\partial t} + \frac{\dot{m}_p \cdot c_{Wp}}{A_r} \frac{\partial T_P}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_P - T_S) = 0 \quad (6.6)$$

$$\rho_s \cdot c_{Ws} \frac{\partial T_S}{\partial t} - \frac{\dot{m}_s \cdot c_{Ws}}{A_r} \frac{\partial T_S}{\partial z} + \frac{\lambda_{platte} \cdot A_{mr}}{d_{platte} \cdot H_r \cdot A_r} \cdot (T_S - T_P) = 0 \quad (6.7)$$

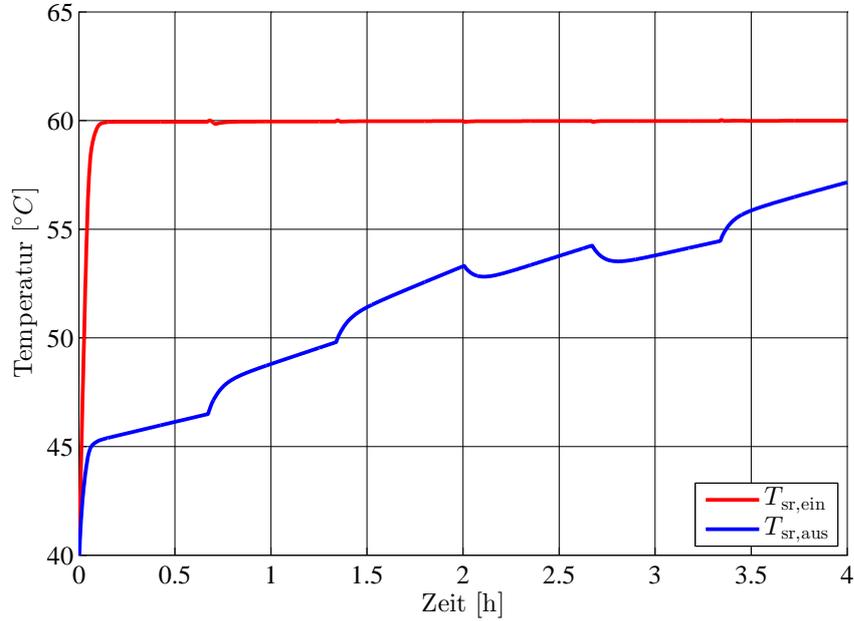


Abbildung 6.5: Temperaturverlauf der geregelten Eintrittstemperatur  $T_{sr, \text{ein}}$  und der gemessenen Austrittstemperatur  $T_{sr, \text{aus}}$  des Wasser-Frostschutzgemisches

Die wesentlichen Größen, die bei einem realen Plattenwärmeübertrager einfach zu ermitteln sind, sind die Eintritts-  $T_{P, \text{ein}}$  und Austrittstemperatur  $T_{P, \text{aus}}$  des Mediums der Primärseite, die Eintritts-  $T_{S, \text{ein}}$  und Austrittstemperatur  $T_{S, \text{aus}}$  des Mediums der Sekundärseite, die Massenströme der Medien durch die Primär-  $\dot{m}_p$  und Sekundärseite  $\dot{m}_s$  sowie die spezifischen Wärmekapazitäten der Primär-  $c_{Wp}$  und Sekundärseite  $c_{Ws}$  (siehe Abschnitt 3.2).

Bei der Wärmeübertragung von der Primär- auf die Sekundärseite durch die Platten tritt bei einem Plattenwärmeübertrager eine Temperaturdifferenz auf, die im Allgemeinen als Grädigkeit bezeichnet wird. An der heißesten Stelle des Plattenwärmeübertragers, bei der die Primärtemperatur des Mediums ein- und die Sekundärtemperatur des Mediums austritt, wird diese als Vorlaufgrädigkeit  $g_{vl}$  bezeichnet und an der kältesten Stelle, wo die Primärtemperatur des Mediums aus- und die Sekundärtemperatur des Mediums eintritt, als Rücklaufgrädigkeit  $g_{rl}$ . Somit erhält man folgende Beschreibungen für die beiden Grädigkeiten:

$$g_{vl} = T_{P, \text{ein}} - T_{S, \text{aus}} \quad (6.8)$$

$$g_{rl} = T_{P, \text{aus}} - T_{S, \text{ein}} \quad (6.9)$$

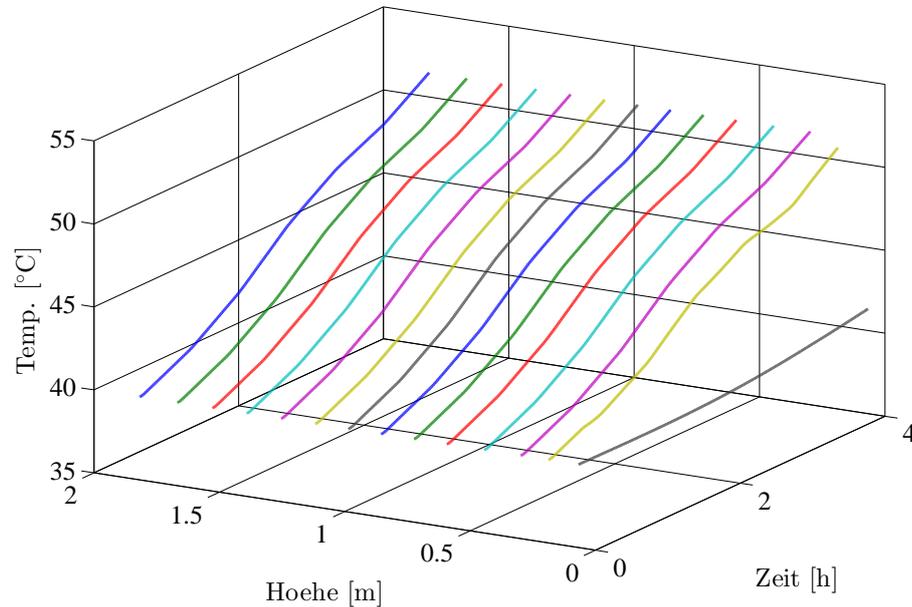


Abbildung 6.6: Temperaturdarstellung des Wassers im Pufferspeicher

Im Weiteren hängen die beiden Grädigkeiten, im eingeschwungenen Zustand, von den Eintrittstemperaturen der Primär-  $T_{P,\text{ein}}$  und Sekundärseite  $T_{S,\text{ein}}$  und vom Produkt des jeweiligen Massenstroms der Medien durch die Primär-  $\dot{m}_p$  bzw. Sekundärseite  $\dot{m}_s$  mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten der Primär-  $c_{Wp}$  und Sekundärseite  $c_{Ws}$  ab:

$$g_{vl} = f(T_{P,\text{ein}}, \dot{m}_p \cdot c_{Wp}, T_{S,\text{ein}}, \dot{m}_s \cdot c_{Ws}) \quad (6.10)$$

$$g_{rl} = f(T_{P,\text{ein}}, \dot{m}_p \cdot c_{Wp}, T_{S,\text{ein}}, \dot{m}_s \cdot c_{Ws}) \quad (6.11)$$

Simuliert man das mathematische Modell des Plattenwärmeübertragers (6.6) und (6.7) bei sprungförmigen Änderungen der Eintrittstemperaturen aber mit gleichbleibender Temperaturdifferenz der Eintrittstemperaturen der Medien der Primär-  $T_{P,\text{ein}}$  und Sekundärseite  $T_{S,\text{ein}}$  sowie bei einem gleich großen Produkt der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p = c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ), erhält man über die Zeit von 400 Sekunden den in Abbildung 6.7 dargestellten Verlauf für die Grädigkeiten.

Die in Abbildung 6.7 vorkommenden transienten Vorgänge bei der Vorlaufgrädigkeit  $g_{vl}$  und der Rücklaufgrädigkeit  $g_{rl}$  kommen durch sprunghafte Änderungen der beiden

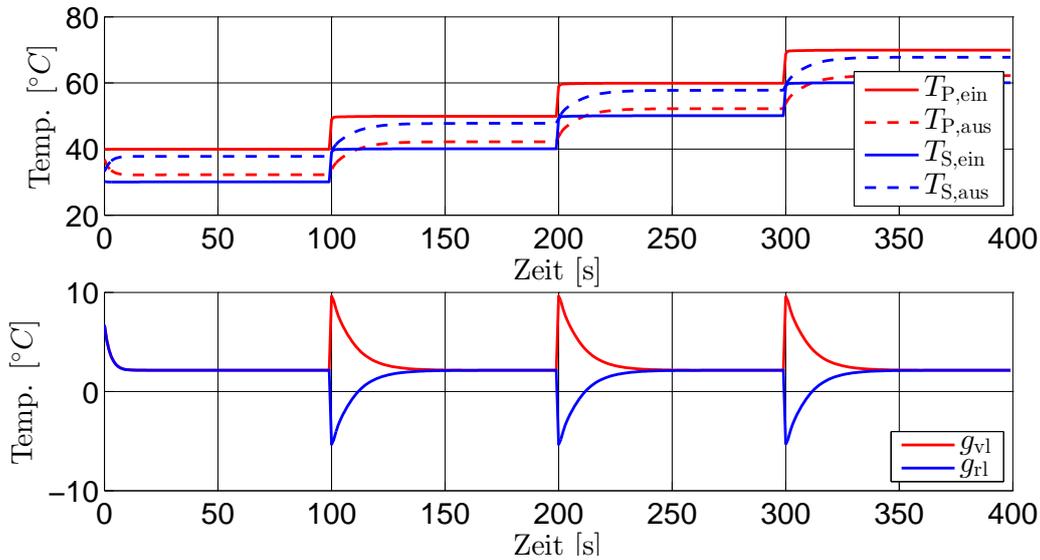


Abbildung 6.7: Darstellung der Vorlaufgrädigkeit  $g_{vl}$  und der Rücklaufgrädigkeit  $g_{rl}$  bei Anhebung des Temperaturniveaus der Eintrittstemperaturen von der Primärseite  $T_{P,ein}$  und der Sekundärseite  $T_{S,ein}$  aber gleich bleibender Eintrittstemperaturdifferenz

Eintrittstemperaturen der Primär-  $T_{P,ein}$  und der Sekundärseite  $T_{S,ein}$  zustande. Da diese transienten Vorgänge im Vergleich zu den dynamischen Eigenschaften der anderen Komponenten (insbesondere denen des Pufferspeichers) sehr kurz andauern, werden sie vernachlässigt. Durch die gleichbleibende Temperaturdifferenz zwischen der Eintritts- und Austrittstemperatur und dem konstanten Produkt der jeweiligen Massenströme und spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p = c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ) sind die Vorlaufgrädigkeit  $g_{vl}$  und die Rücklaufgrädigkeit  $g_{rl}$  im eingeschwungenen Zustand konstant und identisch. Die beiden Grädigkeiten sind somit unabhängig vom steigenden Temperaturniveau, und für den eingeschwungenen Zustand gelten folgende Abhängigkeiten:

$$g_{vl} = f(T_{P,ein} - T_{S,ein}, \dot{m}_p \cdot c_{Wp}, \dot{m}_s \cdot c_{Ws}) \quad (6.12)$$

$$g_{rl} = f(T_{P,ein} - T_{S,ein}, \dot{m}_p \cdot c_{Wp}, \dot{m}_s \cdot c_{Ws}) \quad (6.13)$$

Die in Abbildung 6.7 dargestellte Simulation wird nur dahingehend geändert, dass die sekundäre Eintrittstemperatur konstant  $30^\circ\text{C}$  beträgt und die Temperaturdifferenz somit nicht gleichbleibend ist (siehe Abbildung 6.8). Es ist zu erkennen, dass die eingeschwungenen Grädigkeiten mit der Temperaturdifferenz der primären und der sekundären Eintrittstemperatur ansteigen aber nach wie vor identisch sind.

Würde man nun mit den selben Größen nochmals simulieren, jedoch die beiden Grädig-

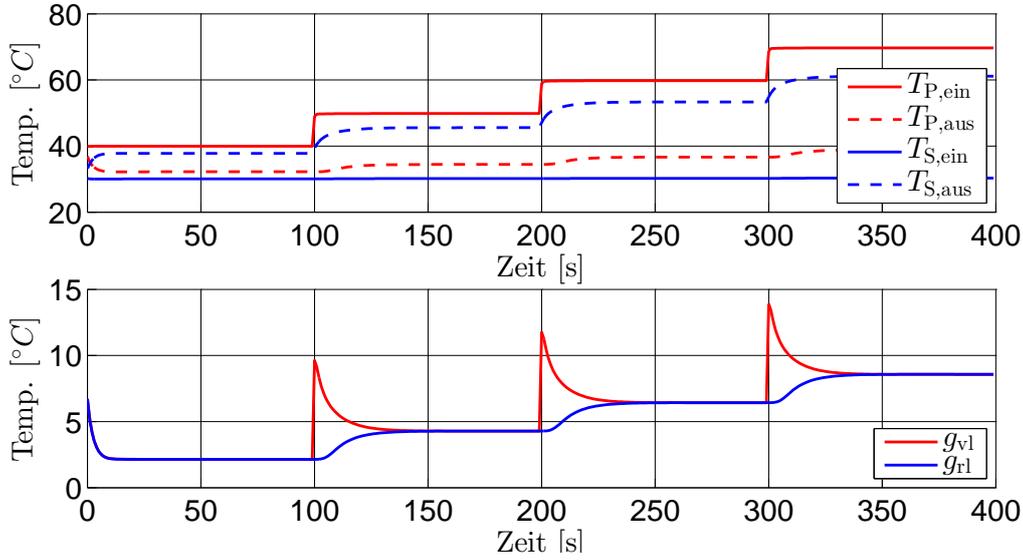


Abbildung 6.8: Darstellung der beiden Grädigkeiten  $g_{vl}$  und  $g_{rl}$  bei variiertem Temperaturdifferenz der Eintrittstemperaturen in den Plattenwärmeübertrager von der Primärseite  $T_{P,ein}$  und der Sekundärseite  $T_{S,ein}$

keiten durch die Temperaturdifferenz der primären und sekundären Eintrittstemperatur ( $T_{P,ein} - T_{S,ein}$ ) dividieren, so ist zu erkennen, dass die beiden gewichteten Grädigkeiten im eingeschwungenen Zustand konstant und gleich groß sind (siehe Abbildung 6.9).

In weiterer Folge werden die beiden Grädigkeiten, durch die Differenz der Eintrittstemperaturen dividiert und als relative Grädigkeiten bezeichnet. Weiters ist auch zu erkennen, dass die relativen Grädigkeiten nur mehr vom Verhältnis der Produkte der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p$  bzw.  $c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ) durch Primär- und Sekundärseite abhängig sind. Man erhält für die relative Vorlauf-  $\tilde{g}_{vl}$  und Rücklaufgrädigkeit  $\tilde{g}_{rl}$  folgende Beschreibung:

$$\tilde{g}_{vl} = \frac{g_{vl}}{T_{P,ein} - T_{S,ein}} \quad (6.14)$$

$$\tilde{g}_{rl} = \frac{g_{rl}}{T_{P,ein} - T_{S,ein}} \quad (6.15)$$

Im Weiteren sind die relative Vorlauf-  $\tilde{g}_{vl}$  und Rücklaufgrädigkeit  $\tilde{g}_{rl}$ , im eingeschwungenen Zustand, nur mehr vom Produkt der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p$  bzw.  $c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ) durch Primär- und Sekundärseite abhängig:

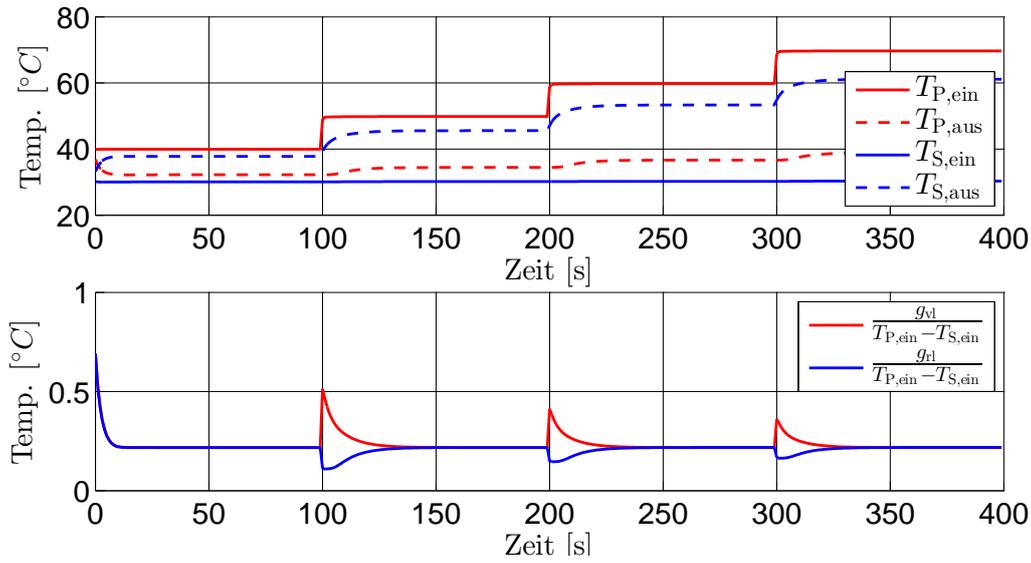


Abbildung 6.9: Darstellung der beiden durch die Eintrittstemperatur dividierten Grädigkeiten  $g_{vl}$  und  $g_{rl}$  bei einer variierten Temperaturdifferenz in den Plattenwärmeübertrager von der Primär-  $T_{P,ein}$  und der Sekundärseite  $T_{S,ein}$

$$\tilde{g}_{vl} = f(c_{Wp} \cdot \dot{m}_p, c_{Ws} \cdot \dot{m}_s) \quad (6.16)$$

$$\tilde{g}_{rl} = f(c_{Wp} \cdot \dot{m}_p, c_{Ws} \cdot \dot{m}_s) \quad (6.17)$$

Im nächsten Schritt soll die bestmögliche Wärmeübertragung von der Primär- zur Sekundärseite ermittelt werden. Dabei werden die relative Vorlauf- und Rücklaufgrädigkeit zunächst einzeln und anschließend gemeinsam betrachtet. Da die beiden relativen Grädigkeiten, im eingeschwungenen Zustand, von den Produkten der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p$  bzw.  $c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ) durch Primär- und Sekundärseite abhängig sind, wird im Weiteren angenommen, dass die spezifischen Wärmekapazitäten gleich groß ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ ) sind und die relativen Grädigkeiten somit nur mehr von den Massenströmen abhängen.

Abbildung 6.10 stellt die relative Vorlaufgrädigkeit und Abbildung 6.11 die relative Rücklaufgrädigkeit mit den Massenströmen durch die Primär- und Sekundärseite von 0 bis 0,5 kg/s bei gleich großen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ ) dar.

In Abbildung 6.10 ist zu erkennen, dass die relative Vorlaufgrädigkeit ein Maximum aufweist, wenn der Massenstrom bei der Wärmeübertragung durch die Sekundärseite

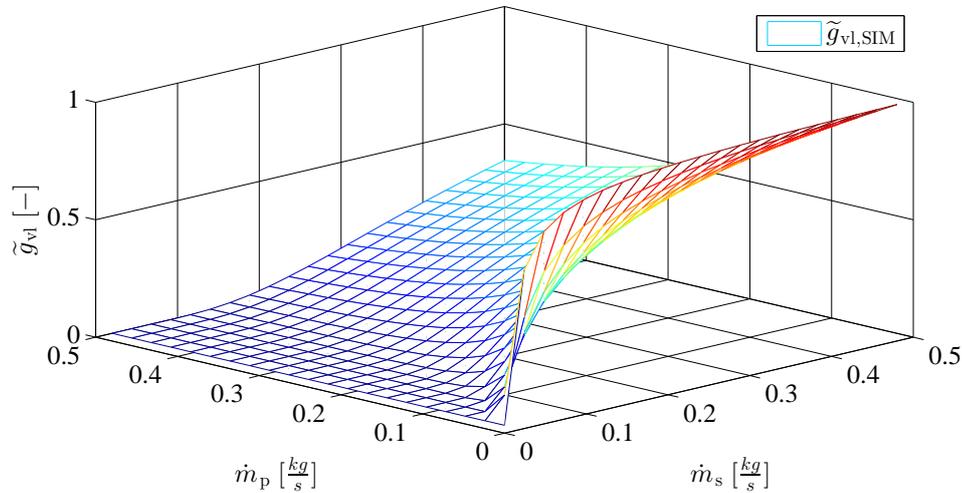


Abbildung 6.10: Relative Vorlaufgrädigkeit  $\tilde{g}_{v1}$  in Abhängigkeit der Massenströme durch die Primär- und Sekundärseite bei gleich großen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ )

relativ hoch und der Massenstrom durch die Primärseite relativ klein ist. Dies würde bedeuten, dass auch die Temperaturdifferenz zwischen Eintrittstemperatur auf der Primär- und Austrittstemperatur auf der Sekundärseite relativ groß und somit die Wärmeübertragung von der Primär- auf die Sekundärseite aus Sicht der Vorlaufemperaturen relativ schlecht ist. Die Wärmeübertragung von der Primär- auf die Sekundärseite ist bei einem Minimum der relativen Vorlaufgrädigkeit, bei kleiner Temperaturdifferenz zwischen Eintrittstemperatur auf der Primär- und der Austrittstemperatur auf der Sekundärseite, aus Sicht der Sekundärseite am besten. Dabei ist der Massenstrom der Primärseite, der die Wärme in den Plattenwärmeübertrager bringt, relativ groß und der Massenstrom durch die Sekundärseite, der die übertragene Wärme aufnimmt, relativ klein.

Umgekehrt ist es bei der relativen Rücklaufgrädigkeit  $\tilde{g}_{r1}$ , deren Simulation über die Massenströme durch die Primär- und Sekundärseite mit gleich großen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ ) in Abbildung 6.11 dargestellt wird.

Die Wärmeübertragung von der Primär- auf die Sekundärseite ist aus Sicht der Primärseite am besten wenn die relative Rücklaufgrädigkeit ein Minimum aufweist. Dies ist der Fall, wenn der Massenstrom durch die Primärseite relativ groß und der Massenstrom durch die Sekundärseite relativ klein ist. Hingegen ist die Wärmeübertragung aus Sicht der Primärseite am schlechtesten wenn die Rücklaufgrädigkeit ein Maximum aufweist und die Werte der Massenströme umgekehrt sind.

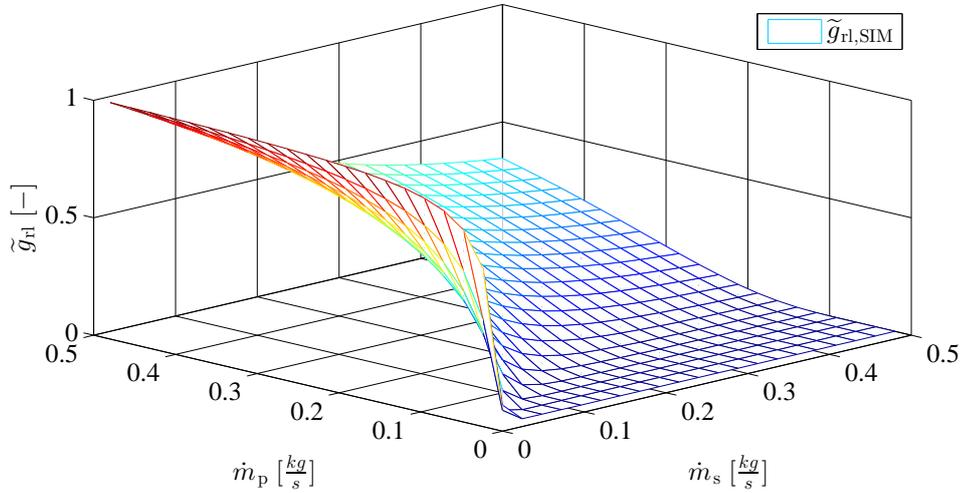


Abbildung 6.11: Relative Rücklaufgrädigkeit  $\tilde{g}_{r1}$  in Abhängigkeit der Massenströme durch die Primär- und Sekundärseite bei gleich großen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ )

Somit wäre die Wärmeübertragung von der Primär- auf die Sekundärseite am effizientesten, wenn die relative Vorlaufgrädigkeit und die relative Rücklaufgrädigkeit ein Minimum aufweisen, was ein Widerspruch in sich ist. Somit soll im nächsten Schritt die Summe der Vorlauf- und der Rücklaufgrädigkeit betrachtet werden (siehe Abbildung 6.12).

Die grüne Linie in Abbildung 6.12 kennzeichnet das Minimum der Summe der relativen Grädigkeiten. Dabei ist ersichtlich, dass beim Minimum der relativen Grädigkeiten die beiden Massenströme, bei gleicher spezifischer Wärmekapazität ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ ), identisch sind

$$\dot{m}_p = \dot{m}_s \quad (6.18)$$

und somit die Wärmeübertragung von der Primär- zur Sekundärseite am effizientesten ist, wenn die Produkte der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten ( $c_{Wp} \cdot \dot{m}_p$  bzw.  $c_{Ws} \cdot \dot{m}_s$ ) durch Primär- und Sekundärseite identisch sind:

$$c_{Wp} \cdot \dot{m}_p = c_{Ws} \cdot \dot{m}_s \quad (6.19)$$

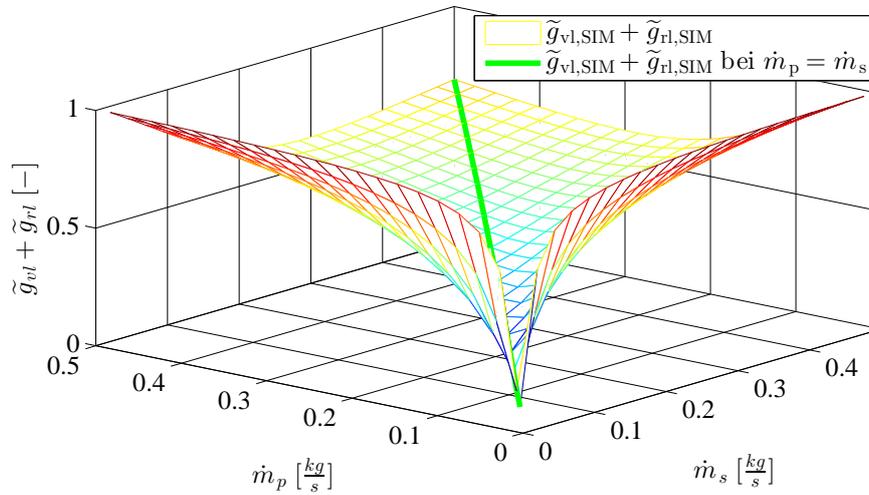


Abbildung 6.12: Summe der relativen Vorlauf- und Rücklaufgrädigkeiten bei gleicher spezifischer Wärmekapazität ( $c_{Wp} = c_{Ws}$ ) der Medien in der Primär- und Sekundärseite

Somit sind auch die beiden relativen Grädigkeiten gleich groß, wenn die beiden Massenströme mit den spezifischen Wärmekapazitäten der Primär- und Sekundärseite identisch sind:

$$\tilde{g}_{vl} = \tilde{g}_{rl} \quad (6.20)$$

Diese Erkenntnis wird beim Entwurf der statischen Vorsteuerung im folgenden Abschnitt aufgegriffen.

### 6.3 Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher über einen Plattenwärmeübertrager

Abbildung 6.13 stellt den schematischen Aufbau der Wärmeübertragung in den Pufferspeicher über den Plattenwärmeübertrager dar. Dabei entspricht  $I_g$  der auf den Solarkollektor eintreffenden Strahlungsstromdichte,  $\dot{Q}_{koll}$  dem im Solarkollektor auf das Wasser-Frostschutzgemisch übertragenen Wärmestrom,  $\dot{Q}_{pwü}$  dem Wärmestrom im Plattenwärmeübertrager und  $\dot{Q}_{sp}$  dem in den Pufferspeicher eingebrachten Wärmestrom.  $T_{sp,vl}$  kennzeichnet die Vorlauftemperatur des Wassers am Eintritt in den Pufferspeicher und  $T_{sp,rl}$  die Rücklauftemperatur des Wassers am Austritt aus dem Pufferspeicher,

$T_{koll,vl}$  die Vorlauftemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches am Austritt aus dem Solarkollektor und  $T_{koll,rl}$  die Rücklauftemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches am Eintritt in den Solarkollektor.  $\dot{m}_s$  beschreibt den Massenstrom des Wassers durch die Sekundärseite des Plattenwärmeübertragers und folglich durch den Pufferspeicher und  $\dot{m}_p$  den Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches durch die Primärseite des Plattenwärmeübertragers sowie durch den Solarkollektor.

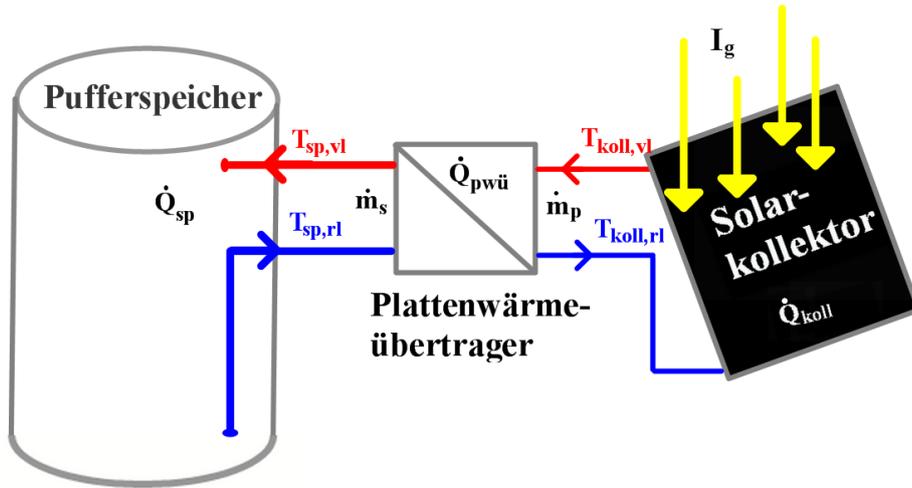


Abbildung 6.13: Übertragung der Wärme aus dem Solarkollektor über einen Plattenwärmeübertrager in den Pufferspeicher

Bei der betrachteten Konfiguration wird die Vorlauftemperatur  $T_{sp,vl}$  des Wassers am Eintritt in den Pufferspeicher geregelt, um eine entsprechende Schichtung im Pufferspeicher gewährleisten zu können. Die gewählte Regelungsstruktur entspricht bei dieser Variante einem PI-Regler mit einer statischen Vorsteuerung (siehe Abbildung 6.2).

Dabei wird die Vorlauftemperatur  $T_{sp,vl}$  des Wassers als Regelgröße und als Stellgrößen  $u(t)$  die Massenströme des Wassers durch die Sekundärseite  $\dot{m}_s$  sowie der Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches durch die Primärseite  $\dot{m}_p$  festgelegt. Als bekannte Störgrößen  $d(t)$  werden die gemessene Strahlungsstromdichte  $I_g$ , die gemessene Umgebungstemperatur  $T_{umg}$  sowie die gemessene Rücklauftemperatur  $T_{sp,rl}$  des Wassers aus dem Pufferspeicher festgelegt. Es wird angenommen, dass der Plattenwärmeübertrager sowie die Rohrleitungen bei der Übertragung der Wärme keine Verluste aufweisen. Somit entspricht der gewonnene Wärmestrom  $\dot{Q}_{koll}$  im Solarkollektor (im eingeschwungenen Zustand) dem übertragenen Wärmestrom  $\dot{Q}_{pwü}$  in den Plattenwärmeübertrager sowie dem übertragenen Wärmestrom in den Pufferspeicher  $\dot{Q}_{sp}$ :

$$\dot{Q}_{koll} = \dot{Q}_{pwü} = \dot{Q}_{sp} \quad (6.21)$$

Auch die Totzeiten, die entstehen, wenn die Medien durch die Rohrleitungen vom Solarkollektor über den Plattenwärmeübertrager in den Pufferspeicher und zurück strömen, werden vernachlässigt. Somit entspricht die Vorlauftemperatur  $T_{\text{koll,vl}}$  aus dem Solarkollektor der Eintrittstemperatur  $T_{\text{p,ein}}$  der Primärseite des Plattenwärmeübertragers. Die Austrittstemperatur der Primärseite  $T_{\text{p,aus}}$  des Plattenwärmeübertragers entspricht der Rücklauftemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in den Solarkollektor. Die Austrittstemperatur  $T_{\text{s,aus}}$  der Sekundärseite des Plattenwärmeübertragers entspricht der Vorlauftemperatur  $T_{\text{sp,vl}}$  des in den Pufferspeicher eintretenden Wassers. Die aus dem Pufferspeicher austretende Rücklauftemperatur  $T_{\text{sp,rl}}$  entspricht der Eintrittstemperatur des Wassers an der Sekundärseite des Plattenwärmeübertragers  $T_{\text{s,ein}}$ .

Im nächsten Schritt wird die statische Vorsteuerung hergeleitet. Bei der statischen Vorsteuerung erfolgt immer die Betrachtung des stationären Zustands. Dazu wird die in den Pufferspeicher eintretende Vorlauftemperatur  $T_{\text{sp,vl}}$  des Wassers durch ihre Führungsgröße  $T_{\text{sp,vl,soll}}$  ersetzt.

Der in den Pufferspeicher zu übertragende Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{sp}}$  wird mit Hilfe der gemessenen Rücklauftemperatur  $T_{\text{sp,rl}}$  des Wassers, dem Massenstrom des Wassers durch die Sekundärseite sowie durch den Pufferspeicher  $\dot{m}_s$ , der spezifischen Wärmekapazität des Wassers an der Sekundärseite  $c_{\text{Ws}}$  und der Führungsgröße  $T_{\text{sp,vl,soll}}$ , durch folgende Energiebilanz [1] beschrieben:

$$\dot{Q}_{\text{sp}} = \dot{m}_s \cdot c_{\text{Ws}} \cdot (T_{\text{sp,vl,soll}} - T_{\text{sp,rl}}) \quad (6.22)$$

Der in den Pufferspeicher übertragene Wärmestrom  $\dot{Q}_{\text{sp}}$  entspricht dem Wärmestrom des Plattenwärmeübertragers an der Sekundärseite  $\dot{Q}_{\text{PWÜ,s}}$ :

$$\dot{Q}_{\text{sp}} = \dot{Q}_{\text{pwü,s}} = \dot{m}_s \cdot c_{\text{Ws}} \cdot (T_{\text{sp,vl,soll}} - T_{\text{sp,rl}}) \quad (6.23)$$

Dadurch, dass die Produkte der Massenströme mit den jeweils dazugehörigen spezifischen Wärmekapazitäten identisch sein sollen,

$$c_{\text{Wp}} \cdot \dot{m}_p = c_{\text{Ws}} \cdot \dot{m}_s \quad (6.24)$$

um die Summe der Grädigkeiten zu minimieren und somit die relative Vorlaufgrädigkeit gleich der relativen Rücklaufgrädigkeit ist,

$$\tilde{g}_{\text{vl}} = \tilde{g}_{\text{rl}} \quad (6.25)$$

ergibt sich, dass die mittlere Temperatur der Sekundärseite  $T_{\text{m,s}}$  der mittleren Temperatur der Primärseite  $T_{\text{m,p}}$  entspricht:

$$T_{m,s} = \frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} = T_{m,p} = \frac{T_{p,cin} + T_{p,aus}}{2} \quad (6.26)$$

Da die mittlere Temperatur der Primärseite der mittleren Absorbtemperatur  $T_m$  entspricht, kann diese wie folgt angeschrieben werden:

$$T_m = \frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} \quad (6.27)$$

Setzt man nun die erhaltene mittlere Absorbtemperatur  $T_m$  (6.27) in die Berechnungsvorschrift für den Wärmestrom des Solarkollektors (siehe Gleichung (6.1)) ein, erhält man den im Solarkollektor übertragenen Wärmestrom  $\dot{Q}_{koll}$ :

$$\dot{Q}_{koll} = I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{\frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{\left( \frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} - T_{umg} \right)^2}{I_g} \right) \quad (6.28)$$

Als nächstes wird der Wärmestrom des Solarkollektors  $\dot{Q}_{koll}$  (6.28) mit dem übertragenen Wärmestrom in den Pufferspeicher (6.22) gleichgesetzt und auf den Massenstrom  $\dot{m}_s$ , der die statische Vorsteuerung darstellt und in weiterer Folge als  $\dot{m}_{soll}$  gekennzeichnet wird, umgeformt:

$$\dot{m}_{soll} = \frac{I_g \cdot A_{Koll} \cdot \left( \eta_0 - a_1 \frac{\frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} - T_{umg}}{I_g} - a_2 \frac{\left( \frac{T_{sp,vl,soll} + T_{sp,rl}}{2} - T_{umg} \right)^2}{I_g} \right)}{c_W \cdot (T_{sp,vl,soll} - T_{sp,rl})} \quad (6.29)$$

Nach dem Erhalt der statischen Vorsteuerung wurden die Parameter für den PI-Regler anhand von Simulationsstudien bestimmt. Dabei wurden die Simulationsmodelle des Pufferspeichers, des Plattenwärmeübertragers und des Solarkollektors (siehe Kapitel 4) als Regelstrecke gewählt. Als gewünschte Vorlauftemperatur des Wassers in den Pufferspeicher wurden 60°C festgelegt. Es wurde in der Simulation angenommen, dass die beiden spezifischen Wärmekapazitäten identisch sind. Somit entspricht der Massenstrom durch die Primärseite stets dem Massenstrom durch die Sekundärseite. Die Strahlungsstromdichte  $I_g$ , die auf die Solarkollektorfläche  $A_{koll}$  trifft, entsprach dem Verlauf aus Abbildung 6.3 (siehe Abschnitt 6.1). Über die komplette Simulationszeit wird die Umgebungstemperatur  $T_{umg}$  von 20°C gewählt.

Abbildung 6.14 stellt den Verlauf des resultierenden Massenstroms  $\dot{m}_{\text{soll}}$ , der die Stellgröße kennzeichnet, dar. Es ist ersichtlich, dass der Massenstrom von der Strahlungsstromdichte  $I_g$  abhängig und wegen dem Verhältnis der Produkte ( $c_{\text{WP}} \cdot \dot{m}_{\text{p}} = c_{\text{WS}} \cdot \dot{m}_{\text{s}}$ ) der jeweiligen Massenströme mit den jeweiligen spezifischen Wärmekapazitäten der Primär- und Sekundärseite, gegenüber der Variante mit der Wärmeübertragung des im Pufferspeicher integrierten Solarregisters, niedriger ist.

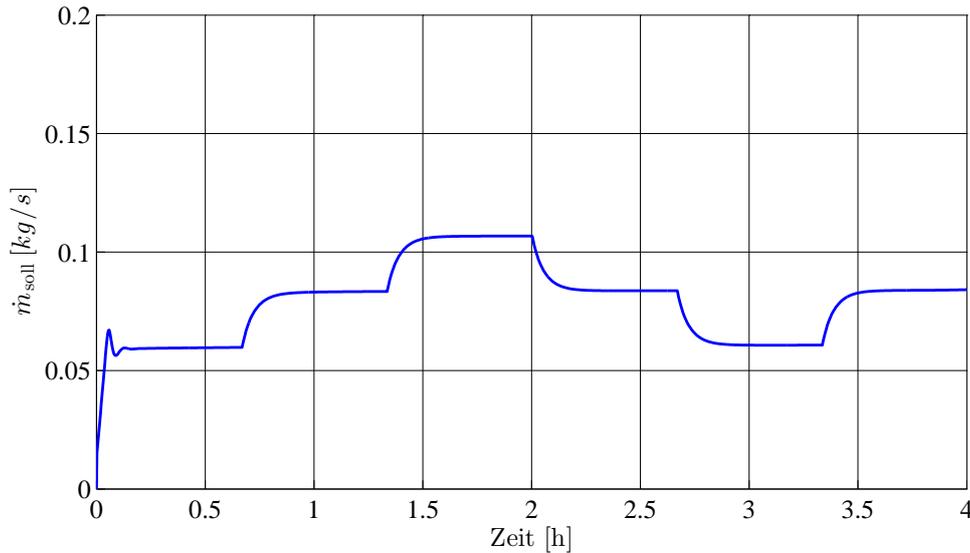


Abbildung 6.14: Verlauf des Massenstroms  $\dot{m}_{\text{soll}}$  durch die Primär- und Sekundärseite des Plattenwärmeübertragers

In Abbildung 6.15 sind in schwarz die Vorlauftemperatur des Wassers am Eintritt in den Pufferspeicher  $T_{\text{sp,vl}}$ , die der Ausgangsgröße  $y(t)$  entspricht, in rot die Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches der Primärseite des Plattenwärmeübertragers  $T_{\text{p,ein}}$  und in blau die Rücklauftemperatur des Wassers am Austritt aus dem Pufferspeicher  $T_{\text{sp,rl}}$  dargestellt.

Es ist zu erkennen, dass die Eintrittstemperatur  $T_{\text{p,ein}}$  am Anfang, wegen der vorgegebenen Anfangsbedingungen und den dazu bestimmten Parametern des PI-Reglers, zu Schwingungen neigt. Nach der Anfangsphase bleibt die Vorlauftemperatur des Wassers  $T_{\text{sp,vl}}$  im Pufferspeicher auf der gewünschten Führungsgröße  $T_{\text{sp,vl,soll}}$ . Die Rücklauftemperatur des Wassers aus dem Pufferspeicher befindet sich über die Simulationszeit konstant auf  $40^\circ\text{C}$ . Das liegt daran, dass der Pufferspeicher von oben mit warmem Wasser und mit dem etwas niedrigeren Massenstrom beladen wird und es einige Zeit dauert bis es bei der Höhe des Rücklaufs ankommt.

Abbildung 6.16 stellt das Verhalten der Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher dar. Dabei wird die Vorlauftemperatur  $T_{\text{sp,vl}}$  des Wassers, die auf die Solltemperatur

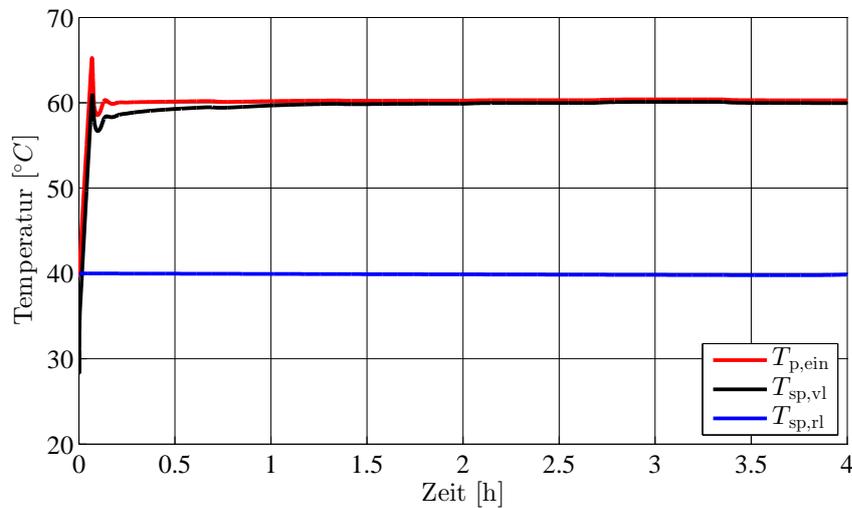


Abbildung 6.15: Verlauf der Vorlauf-  $T_{sp,vl}$  und Rücklauftemperatur  $T_{sp,rl}$  am Pufferspeicher sowie der Eintrittstemperatur der Primärseite des Plattenwärmeübertragers  $T_{p,ein}$

$T_{soll}$  geregelt wird, direkt in den Pufferspeicher eingespeist.

Im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt wird der Pufferspeicher direkt mit der geregelten Vorlauftemperatur des Wassers beladen. Dadurch erreicht die Temperatur des Wassers im Pufferspeicher bei gleich bleibender Strahlungsstromdichte  $I_g$  schneller die gewünschte Solltemperatur als bei der Wärmeübertragung durch das Solarregister.

## 6.4 Zusammenfassen der beiden Varianten

Bei der ersten Variante, Wärmeübertragung durch das in den Pufferspeicher integrierte Solarregister, wurde die Vorlauftemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in das Solarregister und bei der zweiten Variante die Vorlauftemperatur des erwärmten Wassers aus der Sekundärseite in den Pufferspeicher geregelt. Bei der Betrachtung der Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher erkennt man, dass sich bei der Wärmeübertragung durch das Solarregister die Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher gleichmäßig erwärmen und es würde, im Vergleich zur zweiten Variante, der Wärmeübertragung durch den Plattenwärmeübertrager, relativ lange dauern bis man die gewünschte Solltemperatur im Pufferspeicher erreicht. Bei der Wärmeübertragung über den Plattenwärmeübertrager in den Pufferspeicher wird das erwärmte Wasser direkt in

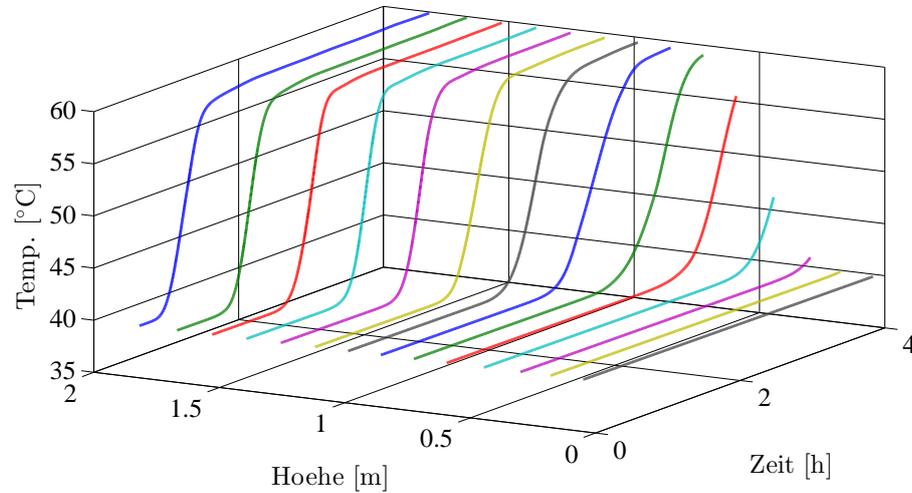


Abbildung 6.16: Verhalten der Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher

den Pufferspeicher eingespeist, somit erwärmt sich der Pufferspeicher von oben beginnend auf die gewünschte Solltemperatur und man erhält eine Temperaturschichtung des Wassers.

Bei beiden Varianten ist zu beachten, dass, wenn die Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in den Solarkollektor gleich der Austrittstemperatur derselbigen aus dem Solarkollektor ist, der Massenstrom, der der entworfenen Vorsteuerung entspricht, durch den mathematischen Zusammenhang unendlich groß und dadurch der Regelkreis instabil wird. Dabei gilt für die Ein- und Austrittstemperaturen bei der ersten Variante (Solarregister)  $T_{sr,aus} = T_{sr,ein}$  und bei der zweiten Variante (Plattenwärmeübertrager)  $T_{sp,rl} = T_{sp,vl}$  bzw.  $T_{p,aus} = T_{p,ein}$ .

Um diese Instabilität zu vermeiden wurde in der Simulation, kurz bevor die Austritts- gleich der Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches des Solarkollektors ist, der Massenstrom auf Null gesetzt. Durch das Nullsetzen des Massenstroms erfolgt keine Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher, somit könnte sich das Wasser-Frostschutzgemisch im Solarkollektor, durch die auf den Solarkollektor eintreffende Strahlungsstromdichte  $I_g$ , in der Simulation auf eine sehr hohe Stillstandstemperatur, die die Temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches im Solarkollektor im Stillstand kennzeichnet, erwärmen.

Je nach Aufbau, Art, Frostschutzmittel und dem Verhältnis von Wasser zu Frostschutzmittel können im Solarkollektor bei Schwimmbadkollektoren Stillstandstemperaturen von  $90^\circ\text{C}$  und bei evakuierten Röhren- und Flachkollektoren bis zu  $300^\circ\text{C}$  erreicht werden [15]. Da in der Simulation ein Wasser-Frostschutzgemisch mit Glykol angenommen

wurde, wurde eine maximal mögliche Stillstandstemperatur von 100°C festgelegt.

Beim Entwurf der Vorsteuerung mit den oben erwähnten Varianten wurde die Durchlaufzeit (Totzeit) der Rohrleitung vernachlässigt. Da die Simulation der Realität entsprechen soll, wurde sie hier jedoch berücksichtigt. Da sich das integrierte Solarregister, für die erste Variante, und der Plattenwärmeübertrager, für die zweite Variante, direkt im bzw. am Pufferspeicher befinden, wurde nur die Durchlaufzeit vom Solarkollektor zum Solarregister bzw. zum Plattenwärmeübertrager berücksichtigt. Es wurde angenommen, dass der Solarkollektor, der sich meistens auf dem Dach des Hauses befindet und üblicherweise mit 1/2 Zoll Rohren angeschlossen ist, 10 Meter vom Pufferspeicher, der sich meistens im Keller befindet, entfernt ist. Dabei wurde bei einem kleinen Massenstrom mit 0,05 kg/s eine Durchlaufzeit von 6,3 Sekunden berechnet, die bei beiden Varianten zur Anwendung kam.

Bei den Parametern des PI-Reglers wird die Durchlaufzeit durch die Rohrleitung vom Solarkollektor bis zum Pufferspeicher berücksichtigt. Da aber die entworfene Vorsteuerung den größten Teil der Regelung übernimmt wurden die Parameter des PI-Reglers so festgelegt, dass der PI-Regler nur langsam Einfluss nimmt und somit mit der Durchlaufzeit der Rohrleitungen gut zurecht kommt.

Die Variante der Wärmeübertragung durch den Plattenwärmeübertrager bietet zusätzlich den Vorteil, dass sich der Wärmeübertrager nicht im Pufferspeicher befindet. Dies ermöglicht eine einfache Temperaturschichtung und somit Exergieerhöhung des auf einem höheren Temperaturniveau gespeicherten Wassers. Darüber hinaus kann zum einen das Puffervolumen durch das Wegfallen des Solarregisters vergrößert werden und zum anderen können die Platten des Plattenwärmeübertragers bei Abnutzungserscheinungen einfach gewechselt werden.

## 7 Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit wurde das Hauptaugenmerk auf die Simulationsmodelle eines Pufferspeichers, eines Plattenwärmeübertragers sowie eines Solarkollektors gelegt. Dabei wurden beim Simulationsmodell des Pufferspeichers die experimentell ermittelbaren Modellparameter, anhand eines am Markt verfügbaren Pufferspeichers und gezielt durchgeführter Versuche, bestimmt. Für die numerische Approximation der Simulationsmodelle wurde das implizite Lösungsverfahren gewählt. Am Schluss wurde eine Regelung für die Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher entwickelt. Dabei wurde die Übertragung der Wärme, aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher, anhand von zwei in der Praxis üblichen Wärmeübertragern betrachtet und verglichen. Bei der ersten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher über das im Pufferspeicher integrierte Solarregister und bei der zweiten Variante über einen Plattenwärmeübertrager auf Wasser, welches dann direkt in den Pufferspeicher eingespeist wird.

Im ersten Teil der vorliegenden Arbeit wurden die Grundlagen der Wärmeübertragung zusammengefasst. Dabei wurde auf die zwei wesentlichen Phänomene, Wärmeleitung und Wärmeströmung, eingegangen. Ausgehend von den Grundlagen der Wärmeübertragung und des ersten Hauptsatzes der Thermodynamik [1], der die Energieerhaltung in einem System beschreibt, wurde eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem durchströmten zylindrischen Rohr für ein Volumenelement aufgestellt. Danach wurden vereinfachende Annahmen für die Modellierung getroffen. Dabei wurde darauf geachtet, dass Pufferspeicher, Solarkollektor und Plattenwärmeübertrager hinreichend genau aber mathematisch möglichst einfach beschrieben werden. Basierend auf den getroffenen Annahmen und der partiellen Differentialgleichung zur Beschreibung der Wärmeübertragung in einem zylindrischen Rohr wurden die mathematischen Modelle aufgestellt. Dabei wurde das Modell des Pufferspeichers an einen am Markt verfügbaren Pufferspeicher mit einem Fassungsvermögen von 1.500 l, zwei Glatrohrregistern zur Einbindung eines Solarkollektors, einem Zentralheizungsanschluss, acht Beladungsanschlüssen und einer Isolierung aus Polyester-Vlies angepasst.

Die erhaltenen partiellen Differentialgleichungen des Pufferspeichers, eines Plattenwärmeübertragers und eines Solarkollektors besitzen zeitliche sowie örtliche Differentialquotienten, die in der numerischen Mathematik üblicherweise mit dem impliziten oder expliziten Lösungsverfahren approximiert werden. Aufgrund des überwiegenden Vorteils der wesentlich besseren Stabilität gegenüber des größeren mathematischen Aufwands,

---

siehe z.B. [14], wurde im Weiteren nur das implizite Lösungsverfahren verwendet. Das implizite Lösungsverfahren wurde zuerst anhand des Modells des vereinfachten Pufferspeichers erläutert. Dabei wurde die partielle Differentialgleichung für diskrete Orts- und Zeitpunkte betrachtet und die Differentialquotienten durch entsprechende Differenzenquotienten approximiert. Es musste beachtet werden, dass an den äußersten örtlichen Randstützpunkten die Approximationen zum Teil anders erfolgen sowie Randbedingungen, bei denen die eintretenden Wassertemperaturen in den Pufferspeicher mit berücksichtigt werden, Einfluss nahmen. Anschließend wurden die aufgestellten Differenzenquotienten für jeden diskreten Ortspunkt zum gleichen Zeitpunkt in die partielle Differentialgleichung eingesetzt und man erhielt ein lineares Gleichungssystem mit  $N$  Gleichungen für  $N$  Unbekannte. Für eine einfachere Bestimmung der Temperaturen des Wassers in einem numerischen Rechenprogramm wurden sie in der Matrixschreibweise angeschrieben. Aufbauend auf der numerischen Approximation des Modells des vereinfachten Pufferspeichers wurden die Modelle des Plattenwärmeübertragers, des Solarkollektors sowie des Pufferspeichers unter Verwendung des impliziten Lösungsverfahrens gelöst.

Weiters musste in der numerischen Approximation der auftretende Dichteunterschied durch die freie Konvektion berücksichtigt werden. Mathematisch kann die freie Konvektion als partielle Differentialgleichung höherer Ordnung beschrieben werden. Da das Lösen partieller Differentialgleichungen höherer Ordnung relativ kompliziert ist, wird die freie Konvektion durch eine vergleichsweise einfache Art, das Mischen der Temperaturen des Wassers, angenähert. Dies war aber nur möglich, da das reale Mischen des Wassers durch die freie Konvektion viel schneller abläuft, als die anderen bis jetzt betrachteten Vorgänge im Pufferspeicher.

Nach der numerischen Approximation wurden die experimentell ermittelbaren Modellparameter des Simulationsmodells des Pufferspeichers so bestimmt, dass das Verhalten der simulierten Wassertemperaturen dem realen Verhalten der Wassertemperaturen im untersuchten Pufferspeicher möglichst gut entspricht. Dafür wurden gezielte Versuche (am untersuchten Pufferspeicher) durchgeführt um das Temperaturverhalten des Wassers im Pufferspeicher zu untersuchen, welches über Temperatursensoren aufgezeichnet wurde. Dabei wurden am untersuchten Pufferspeicher 14 Temperatursensoren nach der vertikalen Länge, also über die Höhe des Pufferspeichers, und 3 weitere horizontal angebracht. Bei der Betrachtung des Temperaturverhaltens des Wassers der horizontal angebrachten Temperatursensoren stellte sich bei einem Versuch des Beladens und Abkühlens des Pufferspeichers heraus, dass alle horizontal angebrachten Temperatursensoren den selben Wert anzeigen. Somit wurden in weiterer Folge nur die vertikal montierten Temperatursensoren betrachtet. Beim Versuch für die Bestimmung der effektiven Wärmeleitfähigkeit der Isolierung  $\lambda_{\text{iso}}$  und der effektiven vertikalen Wärmeleitfähigkeit  $\lambda$  wurde der untersuchte Pufferspeicher mittels Biomassekessel im oberen Bereich mit warmem Wasser beladen und das Wasser im unteren Bereich befand sich auf Umgebungstemperatur. Danach wurden alle hydraulischen Öffnungen geschlossen

---

und die Temperatur des Wassers beim Abkühlvorgang über 90 Stunden wurde von den Temperatursensoren aufgenommen. Beim Versuch für die Bestimmung der Parameter ( $K_{WÜ}$ ,  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ ) zur Beschreibung der Wärmeübertragung des Solarregisters wurde zunächst sichergestellt, dass sich der Pufferspeicher am Anfang auf Umgebungstemperatur befindet. Anschließend wurde Wärme über das im Pufferspeicher befindliche Solarregister übertragen. Die Ermittlung der Parameter erfolgte mittels numerischer Optimierungsalgorithmen unter Minimierung eines quadratischen Gütekriteriums.

Nach der Bestimmung der Modellparameter wurden sie in das Simulationsmodell des Pufferspeichers eingesetzt und mit einem anspruchsvollen Versuch verifiziert. Dabei wurde der untersuchte Pufferspeicher zunächst mittels Biomassekessel im oberen Bereich mit warmem Wasser beladen, während sich das Wasser im unteren Bereich auf Umgebungstemperatur befand. Nach dieser Beladung wurden alle hydraulischen Öffnungen geschlossen und der Biomassekessel an die Anschlussvorrichtungen des unteren Solarregisters befestigt. Anschließend speiste der Biomassekessel Wasser mit einer konstanten Temperatur und einem konstanten Massenstrom in das Solarregister ein. Dabei stellte sich heraus, dass man eine sehr gute Übereinstimmung zwischen dem Simulationsmodell und dem Temperaturverhalten des Wassers im untersuchten Pufferspeicher erhält.

Im letzten Kapitel wurde eine Regelung der Wärmeübertragung aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher beschrieben. Da das durchströmende Medium im Solarkollektor ein Wasser-Frostschutzgemisch ist, erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher durch geeignete Wärmeübertrager. Als Reglerstruktur wurde dabei ein Standard-Regelkreis mit einer statischen Vorsteuerung verwendet. Für die Übertragung der Wärme aus dem Solarkollektor in den Pufferspeicher wurden die zwei in der Praxis wesentlichen Varianten untersucht. Bei der ersten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme in den Pufferspeicher über das im Pufferspeicher integrierte Solarregister. Bei der zweiten Variante erfolgt die Übertragung der Wärme über einen Plattenwärmeübertrager auf Wasser, welches dann direkt in den Pufferspeicher eingespeist wird.

Die statische Vorsteuerung basiert auf der Betrachtung des stationären Zustands. Dazu benötigt man für den Entwurf der Vorsteuerung vereinfachte mathematische Beschreibungen. Bei der Betrachtung des Simulationsmodells des Plattenwärmeübertragers zeigte sich, dass, wenn das Produkt des Massenstroms durch die Primärseite mit der spezifischen Wärmekapazität des Mediums der Primärseite gleich dem Produkt des Massenstroms durch die Sekundärseite mit der spezifischen Wärmekapazität des Mediums der Sekundärseite ist, sind die relative Vorlauf- und Rücklaufgrädigkeit gleich groß. Nach dem Entwurf der statischen Vorsteuerung wurden anhand von Simulationsstudien die Parameter des PI-Reglers bestimmt. Dabei wurde bei der ersten Variante, Wärmeübertragung durch das in den Pufferspeicher integrierte Solarregister, die Vorlauftemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in das Solarregister und bei der zweiten Variante die Vorlauftemperatur des erwärmten Wassers aus der Sekundärseite in den Pufferspeicher geregelt. Bei der Betrachtung der Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher erkennt

man, dass sich bei der Wärmeübertragung durch das Solarregister die Temperaturen des Wassers im Pufferspeicher gleichmäßig erwärmen und es würde, im Vergleich zur zweiten Variante, der Wärmeübertragung durch den Plattenwärmeübertrager, relativ lange dauern bis man die gewünschte Solltemperatur im Pufferspeicher erreicht. Bei der Wärmeübertragung über den Plattenwärmeübertrager in den Pufferspeicher wird das erwärmte Wasser direkt in den Pufferspeicher eingespeist, somit erwärmt sich der Pufferspeicher von oben beginnend auf die gewünschte Solltemperatur und man erhält eine Temperaturschichtung des Wassers.

Die Variante mit der Wärmeübertragung durch den Plattenwärmeübertrager bietet zusätzlich den Vorteil, dass sich der Wärmeübertrager nicht im Pufferspeicher befindet. Dies ermöglicht eine einfache Temperaturschichtung und somit Exergieerhöhung des auf einem höheren Temperaturniveau gespeicherten Wassers. Darüber hinaus kann zum einen das Puffervolumen durch Wegfallen des Solarregisters vergrößert und zum anderen können die Platten des Plattenwärmeübertragers bei Abnutzungserscheinungen einfach gewechselt werden.



# Nomenklatur

## Lateinische Buchstaben:

Symbol	Beschreibung	Einheit
$A$	Querschnittsfläche des Pufferspeichers	$[m^2]$
$A_{koll}$	Querschnittsfläche des Solarkollektors bzw. Solarkollektorfläche	$[m^2]$
$A_m$	mittlere Fläche der Isolierung	$[m^2]$
$A_{mr}$	mittlere Fläche des Rohres	$[m^2]$
$A_r$	Querschnittsfläche des Rohres	$[m^2]$
$a_1$	Wärmeverlustkoeffizient	$[W/m^2K]$
$a_2$	quadratischer Wärmeverlustkoeffizient	$[W/m^2K^2]$
$b_1, b_2, b_3$	Exponenten zu Beschreibung der Abhängigkeit des Wärmeübertragungsvermögens des Solarregister vom Massenstrom, der Temperaturdifferenz und vom Temperaturniveau	–
$c_p$	spezifische isobare Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$c_p, c_{sk}, c_{sp}$	spezifische Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$c_v$	spezifische isochore Wärmekapazität	$[J/kgK]$
$c_W$	spezifische Wärmekapazität des Wassers	$[J/kgK]$
$c_{Wp}, c_{W,p}$	spezifische Wärmekapazität der Primärseite	$[J/kgK]$
$c_{Ws}, c_{W,s}$	spezifische Wärmekapazität der Sekundärseite	$[J/kgK]$
$d$	Durchmesser des Pufferspeichers	$[m]$
$d_{platte}$	Rohrwandstärke	$[m]$
$E_1, E_1, E_3, E_4$	Anschlusshöhen des Erzeugers am Pufferspeicher	$[m]$
$g_{rl}$	Rücklaufgrädigkeit	$[K]$
$g_{vl}$	Vorlaufgrädigkeit	$[K]$
$\tilde{g}_{rl}$	relative Rücklaufgrädigkeit	$[K]$
$\tilde{g}_{vl}$	relative Vorlaufgrädigkeit	$[K]$
$H$	Höhe des Pufferspeichers	$[m]$
$H_{Be,A}$	Entnahmehöhe des Wassers aus dem Pufferspeicher in den Erzeuger	$[m]$

Symbol	Beschreibung	Einheit
$H_{Be,E}$	Beladungshöhe des Wassers aus dem Erzeuger in den Pufferspeicher	[m]
$H_{Hk,A}$	Entnahmehöhe des Wassers aus dem Pufferspeicher in den Heizkreis	[m]
$H_{Hk,E}$	Einspeisungshöhe des Wassers aus dem Heizkreis in den Pufferspeicher	[m]
$H_r$	Höhe bzw. Länge des Rohres	[m]
$H_{WÜ}$	Höhe des im Pufferspeicher integrierten Solarregisters	[m]
$H_{Wü,A}$	Austrittshöhe des Wasser-Frostschutzgemische aus dem Solarregister	[m]
$H_{Wü,E}$	Eintrittshöhe des Wasser-Frostschutzgemische in das Solarregister	[m]
$h$	spezifische Enthalpie	[J/kg]
$I_g$	Strahlungsstromdichte auf den Solarkollektor	[W/m <sup>2</sup> ]
$j$	Anzahl der zeitlichen Stützpunkte	[–]
$K_{WÜ}$	konstanter Parameter zur Beschreibung des Wärmeübertragungsvermögens des Solarregisters	–
$k$	örtliche Stützpunkte	[–]
$L_{sk}$	Länge des Solarkollektors	[m]
$l$	örtliche Stützpunkte	[–]
$\dot{m}$	Massenstrom	[kg/s]
$\dot{m}_{Ges}$	resultierender Massenstrom	[kg/s]
$\dot{m}_{Hk}$	Massenstrom des Wassers durch den Heizkreis	[kg/s]
$\dot{m}_p$	Massenstrom des Mediums durch die Primärseite	[kg/s]
$\dot{m}_s$	Massenstrom des Mediums durch die Sekundärseite	[kg/s]
$\dot{m}_{sk}$	Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches durch den Solarkollektor	[kg/s]
$\dot{m}_W$	Massenstrom des Wasser durch die Beladung des Erzeugers	[kg/s]
$\dot{m}_{WÜ}$	Massenstrom des Wasser-Frostschutzgemisches durch das Solarregister	[kg/s]
$N_{Be,A}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{Be,A}$	[–]
$N_{Be,E}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{Be,E}$	[–]
$N_{Hk,A}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{Hk,A}$	[–]
$N_{Hk,E}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{Hk,E}$	[–]
$N_{pwu}$	Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte beim Plattenwärmeübertrager	[–]
$N_{sk}$	Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte beim Solarkollektor	[–]

Symbol	Beschreibung	Einheit
$N_t$	Gesamtanzahl der zeitlichen Stützpunkte	$[-]$
$N_{W\ddot{u},A}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{W\ddot{u},A}$	$[-]$
$N_{W\ddot{u},E}$	örtliche Randstützpunkte bei der Höhe $H_{W\ddot{u},E}$	$[-]$
$N_z$	Gesamtanzahl der örtlichen Stützpunkte beim Pufferspeicher	$[-]$
$p$	Druck	$[kg/ms^2]$
$\dot{Q}$	Wärmestrom	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{abst}$	Verlustwärmestrom durch Strahlung	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{koll}$	Übertragener Wärmestrom auf das Wasser-Frostschutzgemisch	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{konv}$	Konvektiver Verlustwärmestrom	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{leit}$	Verlustwärmestrom aufgrund der Wärmeleitung	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{solar}$	Wärmestrom des Solarregisters	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{sp}$	Übertragener Wärmestrom in den Pufferspeicher	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{umg}$	Wärmestrom an die Umgebung	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{Q}_{pw\ddot{u}}$	Wärmestrom des Plattenwärmeübertragers	$[kgm^2/s^3]$
$\dot{q}$	Wärmestromdichte	$[kg/s^3]$
$\dot{q}_{koll}$	Wärmestrom je Länge in den Solarkollektor	$[kgm/s^3]$
$\dot{q}_{platten}$	Wärmestrom durch die Platten je Höhe	$[kgm/s^3]$
$\dot{q}_{solar}$	Wärmestrom des Solarregisters je Höhe	$[kgm/s^3]$
$\dot{q}_{umgebung}$	Wärmestrom an die Umgebung je Höhe	$[kgm/s^3]$
$\dot{q}_W$	Wärmestrom bezogen auf den Querschnitt des Wasserstroms	$[kgm^2/s^3]$
$r_1$	innerer Durchmesser des Pufferspeichers	$[m]$
$r_2$	äußerer Durchmesser des Pufferspeichers	$[m]$
$S_1, S_2$	Anschlusshöhen des Solarkollektors am Pufferspeicher	$[m]$
$s_q$	Wärmestromdichte	$[kg/s^3]$
$s_z$	Enthalpiestromdichte	$[kg/s^3]$
$T$	Temperatur des Mediums bzw. des Wassers	$[K]$
$T_0$	Anfangstemperatur des Mediums bzw. des Wassers	$[K]$
$T_{A,koll}$	Austrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches aus dem Solarkollektor	$[K]$
$T_{Be,A}$	Austrittstemperatur des Wasser aus dem Pufferspeicher in den Erzeuger	$[K]$
$T_{Be,E}$	Eintrittstemperatur des Wasser in den Pufferspeicher aus dem Erzeuger	$[K]$
$T_{Hk,A}$	Austrittstemperatur des Wasser aus dem Pufferspeicher in den Heizkreis	$[K]$
$T_{Hk,E}$	Eintrittstemperatur des Wasser in den Pufferspeicher aus dem Heizkreis	$[K]$

Symbol	Beschreibung	Einheit
$T_{koll,rl}$	eintretende Rücklauf­temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches in den Solarkollektor	[K]
$T_{koll,vl}$	austreten Vorlauf­temperatur des Wasser-Frostschutzgemisches aus dem Solarkollektor	[K]
$T_m, T_{m,p}, T_{m,s}$	mittlere Temperatur des Absorbers	[K]
$T_{mix}$	mittlere Temperatur	[K]
$T_P$	Temperatur des Mediums der Primärseite	[K]
$T_{P,aus}, T_{p,aus}$	Austrittstemperatur des Mediums aus der Primärseite	[K]
$T_{P,ein}, T_{p,ein}$	Eintrittstemperatur des Mediums in die Primärseite	[K]
$T_{P,aus}$	Austrittstemperatur des Mediums an der Primärseite	[K]
$T_S$	Temperatur des Mediums der Sekundärseite	[K]
$T_{S,aus}, T_{s,aus}$	Austrittstemperatur des Mediums aus der Sekundärseite	[K]
$T_{S,ein}, T_{s,ein}$	Eintrittstemperatur des Mediums in die Sekundärseite	[K]
$T_{sr,aus}$	Austrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches beim Solarregister	[K]
$T_{sr,ein}$	Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches beim Solarregister	[K]
$T_{sr,ein,soll}$	Führungsgröße der Eintrittstemperatur des Wasser-Frostschutzgemisches	[K]
$T_{sp,aus}$	Austrittstemperatur des Wasser beim Pufferspeicher	[K]
$T_{sp,ein}$	Eintrittstemperatur des Wasser beim Pufferspeicher	[K]
$T_{sp,ein,soll}$	Führungsgröße der Eintrittstemperatur des Wasser	[K]
$T_{umg}$	Umgebungstemperatur	[K]
$T_W$	Wassertemperatur	[K]
$T_{W\ddot{U}}$	Fluidtemperatur im Solarregister	[K]
$t$	Zeit	[s]
$U_A$	Wärmeübertragungsvermögen des Solarregisters	[K]
$u_z$	innere Energiedichte	[J/m <sup>3</sup> ]
$z$	axiale Ortskomponente	[m]

**Griechische Buchstaben:**

Symbol	Beschreibung	Einheit
$\Delta t$	zeitliche Schrittweite	[m]
$\Delta z$	örtliche Schrittweite	[m]
$\delta_{iso}$	Dicke der Isolierung	[m]
$\eta_0$	Konversionsfaktor	–
$\eta_{koll}$	Wirkungsgrad des Solarkollektors	–
$\eta_{koll,Ansatz}$	Wirkungsgrad des Ansatzes des Solarkollektors	–
$\lambda$	effektive vertikale Wärmeleitfähigkeit	[W/mK]
$\lambda_{ios}$	effektive Wärmeleitfähigkeit der Isolierung	[W/mK]
$\lambda_{platte}$	Wärmeleitfähigkeit des Metalls	[W/mK]
$\lambda_W$	Wärmeleitfähigkeit des Wassers	[W/mK]
$\rho$	Dichte des Wassers bzw. Mediums	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_s$	Dichte des Mediums der Primärseite	[kg/m <sup>3</sup> ]
$\rho_p$	Dichte des Mediums der Primärseite	[kg/m <sup>3</sup> ]

# Literaturverzeichnis

- [1] BAEHR, H. D.: *Thermodynamik*. 12. Springer-Verlag, 2005 3, 6, 11, 22, 26, 79, 92, 98
- [2] BAEHR, H. D. ; STEPHAN, K.: *Wärme- und Stoffübertragung*. 5. Springer-Verlag, 2006 3, 14
- [3] BAUER, R.: *Modellbildung und modellbasierte Regelungsstrategien am Beispiel einer Biomasse-Feuerungsanlage*, Technische Universität Graz, Habilitationsschrift, 2008 1
- [4] BAUER, R. ; GOELLES, M. ; BRUNNER, T. ; DOURDOUMAS, N. ; OBERNBERGER, I.: Modelling of grate combustion in a medium scale biomass furnace for control purposes. (2010) 1
- [5] BAUER, R. ; GOELLES, M. ; BRUNNER, T. ; DOURDOUMAS, N. ; OBERNBERGER, I.: Model based control of a biomass grate furnace. In: European Conference on Industrial Furnaces and Boilers. (April 2011) 1
- [6] BAUER, R. ; GOELLES, M. ; BRUNNER, T. ; DOURDOUMAS, N. ; OBERNBERGER, I.: Modellierung des dynamische Verhaltens der Wärmeübertragung in einem Rauchrohrwärmeübertrager. (October 2008) 5
- [7] CHEMIEINGENIEURWESEN, VDI-Gesellschaft V.: *VDI-Wärmeatlas*. 10. Springer, 2006 69
- [8] DRÜCK, H.: *Mathematische Modellierung und experimentellen Prüfung von Warmwassersepeicher für Solaranlagen*, Universität Stuttgart, Habilitationsschrift, 2006 11, 19
- [9] European Commission: Europe 2020 targets. [http://ec.europa.eu/europe2020/pdf/targets\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/europe2020/pdf/targets_en.pdf), Abruf: 03.09.2013 1
- [10] FANINGER, G.: Bewertung der Wärmeversorgung von Gebäuden. <http://www.aee-intec.at/0uploads/dateien644.pdf>, Abruf: 03.09.2013 1
- [11] Technik und Planung, KWB Speichersysteme. <http://www.kwb.at/de/produkte/kwb-speichersysteme.html>, Abruf: 03.09.2013 10, 11, 48
- [12] LJUNG, L. ; GLAD, T.: *Modeling of dynamic systems*. Prentice-Hall, 1994 8

- 
- [13] PT-100, Datenblatt des: R15-4A-M12. <http://docs-europe.electrocomponents.com/webdocs/0b49/0900766b80b49763.pdf>, Abruf: 12.09.2013 65
- [14] SCHWARZ, H. R. ; KÖCKLER, N.: *Numerische Mathematik*. 8. Vieweg+Teubner Verlag, 2011 29, 99
- [15] STREICH, W.: *Sonnenenergie Nutzung*, Technische Universität Graz, Institut für Wärmetechnik, Skriptum, 2005. [www.iwt.tugraz.at](http://www.iwt.tugraz.at) 23, 24, 25, 26, 96
- [16] WARNATZ, J. ; MAAS, U. ; DIBBLE, R.W.: *Verbrennung*. 2. Springer, 1996 30