

Andreas Dutzler, BSc

Berechnungsgrundlage für Gummi-Metall - Bauteile

Masterarbeit

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer: Dipl.-Ing. Markus Götz

Institut für Leichtbau

Graz, Juni 2015

in Kooperation mit

SIEMENS

Siemens AG

Eidesstattliche Erklärung

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Affidavit

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Graz, am _____

Datum / Date

Unterschrift / Signature

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist aus dem Forschungs- und Entwicklungsprojekt Berechnungsgrundlage für Zusatzfedern der Siemens AG Graz entstanden, welches wie folgt zustande kam: Im August 2013 absolvierte ich ein Praktikum im Advanced Development der Siemens AG Graz und beschäftigte mich damals mit einer konstruktiven Einbauuntersuchung von innenbelüfteten Bremscheiben an Drehgestellen. Während des Praktikums lernte ich einiges über die Grundlagen von Schienenfahrzeugen kennen, die mir bis dahin ein völlig unbekanntes Themengebiet waren. An dieser Stelle möchte ich mich bei Dipl.-Ing. Christian Küter und allen Personen aus dem Advanced Development für die Unterstützung und das entgegengebrachte Vertrauen während meines Praktikums bedanken. Ein Jahr später kontaktierte mich Dipl.-Ing. Christian Küter, ob ich Interesse an einem neuerlichen Praktikum hätte. Aus dieser Anfrage ging zwar kein erneutes Praktikum, dafür aber die Themensuche für meine Masterarbeit hervor, um die sich Dipl.-Ing. Christian Küter intensiv bemühte. Ich hatte dankenswerterweise eine Reihe von Themen zur Auswahl, die mir ausführlich vorgestellt wurden. Nach einer Abschätzung über den internen Nutzen und der Komplexität jedes einzelnen Themas kristallisierten sich einige Favoriten heraus, aus denen das Thema Berechnung von Gummi-Metall-Bauteilen mittels Finite Elemente Methodik mein Interesse weckte. In diesem Zuge lernte ich Dipl.-Ing. Axel Fechner und Dipl.-Ing. Tobias Faethe aus der Suspensions Abteilung kennen, in der diese Thematik ihren Ursprung hatte. Auf der Suche nach einem betreuenden Institut an der Technischen Universität Graz trat ich mit Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Moser vom Institut für Leichtbau in Kontakt, der die nötigen Rahmenbedingungen für das Forschungs- und Entwicklungsprojekt Berechnungsgrundlage für Zusatzfedern schaffte und mir einen Arbeitsplatz am Institut als studentischer Projektmitarbeiter ermöglichte. Durch die Erfahrung mit der Simulation von Luftfedersystemen meines Betreuers Dipl.-Ing. Markus Götz hatte ich

speziell in der Anfangsphase jederzeit einen hilfreichen Ansprechpartner, der mir einen raschen Start in die Simulation ermöglichte. Da während der Simulation mittels nichtlinearer Finite Elemente Methode unzählige Fehlermeldungen auftraten, konnten viele Probleme durch die tatkräftige Unterstützung von Dipl.-Ing. Christian Buzzi sofort gelöst werden. Die Ergebnisse meiner Tätigkeit als studentischer Projektmitarbeiter am Institut für Leichtbau resultieren in dieser Arbeit.

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich mich bei jenen Personen bedanken, die mich durch mein Studium begleitet haben und mir während der Verfassung meiner Masterarbeit stets bemüht und hilfreich zur Seite standen.

Für die Unterstützung im Laufe meiner Tätigkeit als studentischer Projektmitarbeiter am Institut für Leichtbau möchte ich mich bei Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Christian Moser bedanken, da er bei meinem ersten Besuch sofort die Parallelen zum Luftfederprojekt sah und mir einen tollen Arbeitsplatz am Institut für Leichtbau ermöglichte. Besonderer Dank gilt meinem Betreuer Dipl.-Ing. Markus Götz. Er hatte immer ein offenes Ohr für meine Probleme und brachte nahezu aus jeder Diskussion neue Ideen hervor. Dipl.-Ing. Christian Buzzi und Dipl.-Ing. Markus Götz standen mir in jenen Momenten mit Rat und Tat zu Seite, in denen die Simulationssoftware es nicht sonderlich gut mit mir meinte. Durch die gute Unterstützung ließen sich die auftretenden Hürden rasch bewältigen. Seitens der Siemens AG Graz danke ich Dipl.-Ing. Christian Küter, der sich um die Themenfindung meiner Masterarbeit bemühte. Dipl.-Ing. Tobias Faethe nahm sich nach Schilderung meiner Anliegen jedem Thema an und lieferte immer konstruktive Vorschläge, um einen Lösungsweg zu finden.

Meinen Eltern möchte ich für die Unterstützung während des Studiums danken. Ganz besonderer Dank gilt meiner Freundin Kathrin, die mich im Laufe des gesamten Studiums und während der Erarbeitung der Masterarbeit in allen Situationen unterstützte, die ein Studienalltag mit sich bringt. Sei es das Verständnis für Lernzeiten an Wochenenden, Abenden oder die Aufregung vor Prüfungen, mit ihrer Unterstützung schaffte ich es Ruhe zu bewahren und die gestellten Herausforderungen erfolgreich zu absolvieren.

Kurzfassung

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit der statischen Steifigkeitsberechnung von Gummi-Metall-Bauteilen unter mehraxialen Lastfällen. Beispielfhaft werden Bauteile der Sekundärfederstufe von Drehgestellen aus der Schienenfahrzeugindustrie betrachtet. Die vorgestellten Gummi-Metall-Bauteile werden als Zusatzfeder in Kombination mit einer Luftfeder gemeinsam zu einem Sekundärfedersystem kombiniert. Die Belastungskombination aus statischer Gewichtslast sowie lateralen Verschiebungen und torsionalen Verdrehungen führen zu mehraxialen Spannungszuständen in der Zusatzfeder. Ziel dieser Arbeit ist es, das statische Steifigkeitsverhalten von Gummi-Metall-Bauteilen mit analytischen und numerischen Methoden beschreiben zu können. Zunächst werden Grundbegriffe bezüglich Werkstoff und mathematischen Formulierungen vorgestellt, darauf aufbauend folgt ein Überblick über den Herstellungsprozess und dessen Auswirkungen auf das Bauteilverhalten. Steifigkeitsberechnungen werden analytisch und numerisch durchgeführt: Analytisch werden Grenzen der Gültigkeitsbereiche und Auswirkungen der Vereinfachungen aufgezeigt, numerisch findet die nichtlineare Finite-Elemente-Methode mit hyperelastischen Materialmodellen Anwendung. Abschließend werden die Simulationen den Herstellermessungen gegenübergestellt.

Abstract

The present work deals with static rigidity calculation of rubber-metal components under multiaxial loading conditions. As an example, components of the secondary spring stage of bogies in the railway industry are considered. The featured rubber-metal components are used as a combination of an additional spring and an air spring in a secondary spring system. The load combination of static weight load, lateral displacement and torsional rotations leads to multiaxial stress states in the auxiliary spring. The aim of this work is to be able to describe the static stiffness behavior of rubber-metal components with analytical and numerical methods. First, basic concepts with respect to material and mathematical formulations are presented, followed by an overview of the manufacturing process and its impact on device behaviour. Stiffness calculations are performed analytically and numerically: analytical, limits of scopes and effects of simplifications are discussed whereas numerically the nonlinear finite element method with hyperelastic material models is used. Finally, simulations are compared with measurements done by the manufacturer.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Aktueller Stand der Technik	1
1.2	Ziele	2
2	Grundlagen	4
2.1	Elastomer	4
2.2	Hyperelastizität	5
2.2.1	Verstreckgrad λ	7
2.2.2	Cauchy-Green Verzerrungstensoren C und b	8
2.2.3	Invarianten eines Tensors	8
2.2.4	Formänderungsenergiedichte W	12
2.2.5	Invariantenbasierte Materialmodelle	12
2.3	Verzerrung	16
2.3.1	Technische und wahre Dehnung	16
2.3.2	Technische und wahre Spannung	18
2.4	Statische Steifigkeit	20
2.5	Dynamische Steifigkeit	22
3	Gummi-Metall - Bauteile	23
3.1	Herstellung	23
3.1.1	Kautschuk	23
3.1.2	Mischung	25
3.1.3	Verarbeitung und Vulkanisation	26
3.2	Materialeigenschaften von Gummi	28
3.2.1	Mullins-Effekt	29
3.2.2	Viskoelastizität und weitere Effekte	31
3.3	Anwendungsgebiete in Schienenfahrzeugen	31
3.3.1	Konusfeder	32
3.3.2	Federscheibe	33
3.3.3	Tonnenfeder	33

Inhaltsverzeichnis

4	Analytische Berechnung	35
4.1	Teilsystem Federscheibe	36
4.1.1	Axialsteifigkeit	36
4.1.2	Lateralsteifigkeit	39
4.1.3	Torsionsteifigkeit	40
4.2	Teilsystem Konusfeder	42
4.2.1	Axialsteifigkeit	42
4.2.2	Lateralsteifigkeit	51
4.2.3	Torsionsteifigkeit	53
4.3	Ergebnisse	54
5	Modellaufbau mit FEM	56
5.1	Benötigte Modelle in Abhängigkeit des Lastfalls	56
5.2	Axialsymmetrisches Modell	58
5.2.1	Vernetzung	59
5.2.2	Ungeordnete oder geordnete Vernetzung	59
5.2.3	Lösungskonvergenz	60
5.2.4	Randbedingungen	63
5.3	3D-Modell	65
5.3.1	Erweiterung des axialsymmetrischen Modells	66
5.3.2	Direkte Übergabe mit axialen Vorlasten	66
5.4	Sektormodell	67
5.5	Aufbau von Zusatzfedermodellen	69
5.5.1	Zusatzfedersysteme GMT	69
5.5.2	Zusatzfedersystem Paulstra	72
5.6	Ergebnisse	74
5.6.1	Vergleich mit Hersteller-Messungen	74
5.6.2	Vergleich analytischer Ergebnisse mit FE-Rechnung	85
6	Optimierung des FEM-Modells	88
6.1	Inhomogener Belastungszustand	88
6.2	Volumenschwund	89
7	Fazit und Ausblick	91
	Literatur	94

Abbildungsverzeichnis

2.1	Klassifizierung von Elastomeren	5
2.2	Be- und Entlastungspfad von Gummi	6
2.3	Verstreckgrad als Vergrößerung der Kantenlänge	7
2.4	Randbedingungen für Uniaxial Zug, Biaxial und Planar Shear	10
2.5	Spannung und Dehnung nach James-Green-Simpson	16
2.6	Wahre und technische Dehnung	18
2.7	Federkennlinie und Steifigkeit	21
3.1	Kautschukplantage und -gewinnung	24
3.2	Bestandteile einer Gummimischung	25
3.3	Molekularer Aufbau von Elastomeren	27
3.4	Schubmodul in Abhängigkeit der Shore-Härte	29
3.5	Spannungs-Dehnungskurven von Gummi	30
3.6	Sekundärfederstufe eines Drehgestells	32
3.7	Beispiele für Gummi-Metall - Bauteile (Halbschnitt)	33
3.8	Federscheibe (Schnittansicht)	34
4.1	Geometrie einer runden Scheibengummifeder	36
4.2	Schubmodul in Abhängigkeit der Härte	37
4.3	Ermittlung des Formfaktors	37
4.4	Lateralverschiebung an einer Scheibengummifeder	39
4.5	Torsion an einer Scheibengummifeder	39
4.6	Parametrisierung der Konusfeder	43
4.7	Geometrische Zusammenhänge	43
4.8	Schnittansicht der querbelasteten Hülsengummifeder	52
4.9	Ermittlung des Formfaktors k_1	52
5.1	Systematik der FE-Modellierung	57
5.2	Vernetzung einer axialsymmetrischen Geometrie	60

Abbildungsverzeichnis

5.3	manuelle Vernetzung	61
5.4	Vereinfachte Geometrie - unbelastet	62
5.5	Vereinfachte Geometrie - belastet	62
5.6	Axialkraftverlauf	63
5.7	Axialkraft bei 50mm	63
5.8	Kontaktdefinition eines Konusfedermodells	65
5.9	Direkte Übergabe mit axialer Vorlast	68
5.10	Modellierung System KF und FS	70
5.11	Wahre Hauptnormaldehnung bei 200kN Axiallast (KF und FS)	71
5.12	Wahre Hauptnormaldehnung bei 200kN Axiallast (TF)	71
5.13	Modellierung System Tonnenfeder	72
5.14	Modellierung System KF	73
5.15	Wahre Hauptnormaldehnung bei 140kN Axiallast (KF)	73
5.16	Axialkraft und Axialsteifigkeit (KF und FS)	75
5.17	Torsionssteifigkeit (KF und FS)	77
5.18	Lateral- und Biegesteifigkeit (KF und FS)	78
5.19	Axialkraft und Axialsteifigkeit (TF)	79
5.20	Lateral- und Torsionssteifigkeit (TF)	80
5.21	Axialkraft und Sekantensteifigkeit bei 76 ± 10 kN (KF)	82
5.22	Axial- und Lateralsteifigkeit (KF)	83
5.23	Torsionssteifigkeit (KF)	84
5.24	Analytische Steifigkeiten	86
6.1	Volumenschwindung rückrechnen	90

Tabellenverzeichnis

2.1	Verstreckgrad, Deformationsgradient und Verzerrungstensor	10
2.2	Invarianten des Cauchy-Green - Tensors	11
2.3	Formulierung von W	15
3.1	Einfluss der Vernetzungsdichte	27
4.1	Geomtriedaten einer idealisierten Konusfeder	42
4.2	Axialsteifigkeiten der Konusfeder	51
4.3	Geomtriedaten einer Hülsengummifeder	52
4.4	Steifigkeiten der Konusfeder	53
4.5	Steifigkeiten der Federscheibe	54
4.6	Steifigkeiten der Konusfeder	54
5.1	Lastfall-Modell-Matrix	58

Symbolverzeichnis

Tensoren	
\mathbf{b}	linker Cauchy-Green Verzerrungstensor
\mathbf{C}	rechter Cauchy-Green Verzerrungstensor
\mathbf{F}	Deformationsgradient
\mathbf{P}	erster Piola-Kirchhoff-Spannungstensor
$\boldsymbol{\sigma}$	Cauchy-Spannungstensor
Vektoren	
λ	Verstreckgrad
Skalare Größen	
a	Zwischenblechdicke
A_g	gebundene Oberfläche
A_f	freie Oberfläche
c	Federsteifigkeit
E_r	rechnerischer Elastizitätsmodul
F_d	Druckkraft (Axialkraft)
F_q	Querkraft (Lateralkraft)
G, G^{sh}	Schubmodul (in Abhängigkeit der Shorehärte)
h	Federhöhe
H_A	Shorehärte A
k	Formfaktor
k_1	Formfaktor
k_f	Formkennwert
L	Länge in der Ausgangskonfiguration
l	Länge in der Momentankonfiguration
M_t	Torsionsmoment

m, m_f	Mantellinie der (freien) Oberfläche
p	beliebiger skalarer Parameter
S	Schwund
s_x	Axialverschiebung
s_y	Lateralverschiebung
s_r	Radialverschiebung
v	Versatz parallel zur Rotationsachse
v'	Versatz in Schubrichtung
W	Formänderungsenergiedichte
α	Konuswinkel
$\alpha_{G,St}$	Wärmeausdehnungskoeffizient für Gummi und Stahl
γ	Scherwinkel
ε_t	technische Dehnung
ε_w	wahre Dehnung
φ	Verdrehungswinkel
λ	Verstreckgrad
σ_t	technische Spannung
σ_w	wahre Spannung
τ	Torsionsspannung

Abkürzungsverzeichnis

3D	dreidimensional
CM	Compression Molding
FE	Finite-Elemente
FEM	Finite-Elemente-Methode
FS	Federscheibe
IM	Injection Molding
KF	Konusfeder
NR	Naturkautschuk
TM	Transfer Molding

1 Einleitung

In der Schienenfahrzeugindustrie finden Gummi-Metall-Bauteile als Feder-elemente von Drehgestellen eine breite Anwendung. Beispielhaft sind sie in der Sekundärfederstufe, die zwischen Wagenkasten und Drehgestell wirkt, als Zusatzfeder in Kombination mit einer Luftfeder ausgeführt. Gummifedern weisen in deren federnden Eigenschaften hochgradig nichtlinearen Charakter auf, man gelangt demzufolge mit konventionellen linearen analytischen Methoden rasch an die Grenzen der Beschreibung von Federeigenschaften. Die Bauteile erfahren im realen Betrieb sowohl statische als auch dynamische Belastungen und sind schwankenden Umgebungseinflüssen ausgesetzt. Die genaue Kenntnis über die Bauteile birgt Vorteile sowohl für den Auftraggeber als auch für den Hersteller. Aus Sicht des Auftraggebers liegen diese in der Neugestaltung einer Gummi-Metall-Feder, da an den Hersteller mit genauen Angaben zur Gummimischungshärte und der Geometrie der Vulkanisationsform herangegangen werden kann. Aus Sicht des Herstellers bestehen die Vorteile im Wesentlichen in einer Verkürzung der Vorlaufzeit, da durch exaktere Geometrie- und Materialdefinitionen Iterationsschritte während der Bauteilentwicklung eingespart werden können. Ein weiterer Vorteil besteht darin, auch über bereits im Einsatz befindliche Komponenten Kenntnisse zu gewinnen, um zukünftige Steifigkeitsvorgaben realistischer oder mit geringeren Toleranzen definieren zu können.

1.1 Aktueller Stand der Technik

Grundlegend können Gummifedern mit analytischen Methoden vereinfacht betrachtet vorausgelegt werden. Um genauere Aussagen über das Bauteilverhalten zu treffen, ist es notwendig, von numerischen Simulationsverfahren Gebrauch zu machen. Der Einsatz der nichtlinearen Finite-Elemente-

1 Einleitung

Methode zur Simulation von Gummi-Metall-Bauteilen ist vermeintlich Stand der Technik, denn obwohl sie laufend angewandt wird, bestehen Differenzen zwischen Realität und mathematischen Materialmodellen. Gängige Modelle für Gummi basieren auf einer Änderung der Formänderungsenergiedichte, man spricht dabei von hyperelastischen, meist inkompressiblen, Materialmodellen. Es existiert eine Vielzahl von unterschiedlichen Materialmodellen, jedes mit eigenen geeigneten Einsatzgebieten, Stärken und Schwächen. Die eingesetzten Werkstoffmodelle und deren Materialparameter basieren auf den Erkenntnissen und Ergebnissen nach Madritsch (2009). Die immer wieder neuen wissenschaftlichen Veröffentlichungen zum Materialmodellansatz zeigen klar die bestehende Problematik der optimalen Abbildung des Werkstoffverhaltens von Gummi in einem mathematischen Modell.

1.2 Ziele

Ziel dieser Arbeit ist es, das statische Steifigkeitsverhalten von Gummi-Metall-Bauteilen mit der Finite-Elemente-Methode unter gewissen Vereinfachungen, wie beispielsweise konstanter Temperatur, zu simulieren. Die Vorgangsweise in dieser Arbeit gliedert sich in mehrere Teilbereiche: Zu Beginn werden werkstoffspezifische und mathematische Grundlagen behandelt. Werkstoffseitig ist die Abgrenzung der Begriffe Elastomer und Gummi von Bedeutung, wohingegen aus mathematischer Sicht die Grundlagen der Hyperelastizität beschrieben werden. Letztgenannte sind besonders im Bereich der nichtlinearen Finite-Elemente-Methode essentiell, da die Kenntnis über die Bezugsgröße von Spannung und Dehnung bei der Ergebnisinterpretation von entscheidender Bedeutung ist. Darauf aufbauend wird die Herstellung von Gummi, ausgehend vom Rohstoff Kautschuk, beschrieben und Beispiele für Gummi-Metall-Bauteile von Sekundärfederstufen vorgestellt.

Mit analytischen Methoden werden nach gängigen Vorauslegungsformeln der Literatur Berechnungsvorgaben für die typischen Axial-, Lateral- und Torsionsbelastungen von rotationssymmetrischen Gummi-Metall-Bauteilen vorgestellt und deren Grenzen aufgezeigt. Es gilt zu überprüfen, welche

1 Einleitung

Art von Lastfällen unter welchen Vereinfachungen mit analytischem Ansatz berechnet werden können. Anschließend werden mit der nichtlinearen Finite-Elemente-Methode die Bauteile simuliert und mit statischen Herstellermesswerten verglichen. Das reale Bauteil ist laufend einer statischen Gewichtslast der tragenden Struktur unterworfen, zu denen Lateral- und Torsionsauslenkungen hinzukommen. Diese kombinierten Lastfälle resultieren in mehraxialen dreidimensionalen Spannungszuständen im Bauteil, die eine Simulation mit der Finite-Element-Methode unumgänglich machen.

2 Grundlagen

Für die Betrachtung von Elastomerbauteilen und die Auswertung charakteristischer Kennwerte von Federn sind zunächst einige Begriffe zu definieren, um eine Basis für die Modellierung und Berechnung von Gummi-Metall-Bauteilen zu schaffen. Die in diesem Kapitel vorgestellten Grundlagen beschreiben einerseits den Begriff *Elastomer* und andererseits mathematische Kenngrößen, welche für die Beurteilung des Bauteilzustands unter großen Verformungen von Bedeutung sind. Bezüglich der Elastomere behandelt dieses Kapitel lediglich grundlegende Begriffsabgrenzungen, Herstellungsprozess und Materialeigenschaften werden in Kapitel 3 gesondert ausgeführt.

2.1 Elastomer

Elastomere definieren innerhalb der Polymere eine Untergruppe, welche im Gegensatz zu Thermoplasten und Duroplasten weitgehend reversibel dehnbar sind. Die Abgrenzung der Begriffe *Elastomer* - *Kautschuk* - *Gummi* ist in der Literatur nicht durchgängig einheitlich, da der Begriff *Elastomer* sowohl als Oberbegriff für unbehandelte und vulkansierte Bauteile als auch für vulkanisierte Endprodukte parallel zu *Gummi* verwendet wird. (Koltzenburg, Maskos und Nuyken, 2014, S. 498)

Nach Stommel, Stojek und Korte (2011) wird der Begriff *Elastomer* vorwiegend als Oberbegriff und *Gummi* als technisches Endmaterial verwendet. Dieser Konvention folgt auch die schematische Darstellung der Klassifizierung von *Elastomeren* in Abbildung 2.1. Das unbehandelte Ausgangsmaterial wird als *Kautschuk* bezeichnet, wobei zwischen Naturkautschuk und Synthesekautschuk zu unterscheiden ist. Der Aufbau von *Elastomeren* ist durch

2 Grundlagen

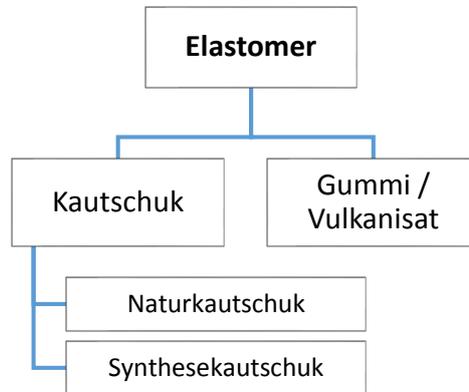


Abbildung 2.1: Klassifizierung von Elastomeren

weitmaschig vernetzte langkettige Makromoleküle charakterisiert (Röthemeyer und Sommer, 2006, S. 13).

Durch Energieeintrag in Form von Wärme wird eine Vernetzungsreaktion hervorgerufen, die solange abläuft bis keine aktiven Substanzen mehr vorhanden sind. Bei vollständig vernetzten *Elastomeren*, mit anderen Worten bei einem Vernetzungsgrad von $\phi = 100\%$, spricht man von *Gummi*. Dieser ist gegenüber *Kautschuk* nicht mehr schmelzbar und mit zusätzlichen Füllstoffen versehen, welche die Materialeigenschaften in technischen Einsatzgebieten verbessern. (Stommel, Stojek und Korte, 2011, S. 35 f.)

2.2 Hyperelastizität

Vulkanisierter Gummi reagiert im Gegensatz zu Stahl auf Belastungen bis zu mehreren hundert Prozent technischer Dehnung mit elastischen Verformungen (Treloar, 1975, S. 2). Unter elastischem Materialverhalten versteht man in der Regel ein linear elastisches Verhalten bei kleinen Dehnungen, wie es bei Stahl im Gültigkeitsbereich des Hook'schen Gesetzes der Fall ist. Erstreckt sich der elastische Bereich wie bei Gummi über große Bereiche auf das gesamte Materialverhalten, so spricht man nach Stommel, Stojek und Korte

2 Grundlagen

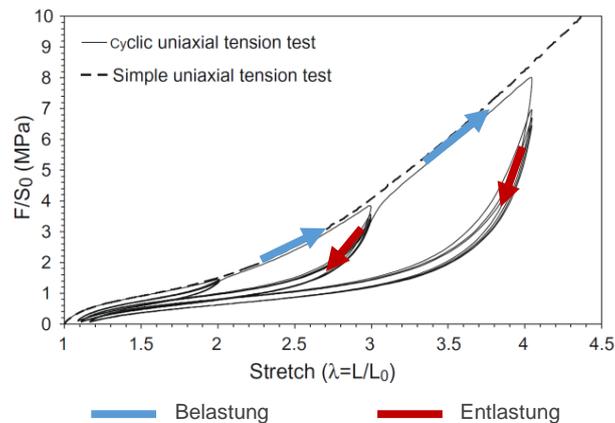


Abbildung 2.2: Be- und Entlastungspfad von Gummi (Vgl. Diani, Fayolle und Gilormini, 2009, S. 602)

(2011) von Hyperelastizität. Jedem Belastungszustand ist eine eindeutige Deformation zugeordnet, unabhängig davon ob es sich um eine Belastung oder um eine Entlastung von zuvor eingebrachter Energie handelt (Eyerer, Hirth und Elsner, 2008, S. 77). Letztgenannte Eigenschaft ist eine nicht unwesentliche Vereinfachung des realen Materialverhaltens von Gummi, da der Belastungspfad und der Entlastungspfad deutlich voneinander abweichen (siehe Abbildung 2.2). Für die Anpassung der Spannungs-Dehnungskurve des Materialmodells kann der Belastungspfad, der Entlastungspfad oder ein Mittelwert beider verwendet werden (Jakel, 2010, S. 19 und Domininghaus, 2012, S. 49).

Um diese großen Verformungen korrekt berechnen und auswerten zu können ist ein Verständnis über die Verzerrung und Spannung, insbesondere über deren Bezugsgrößen, essentiell. In diesem Teil der Arbeit werden daher systematisch, ausgehend von der Verformung eines Körpers, die resultierenden Spannungen je Lastfall nach den Vorgaben von Stommel, Stojek und Korte (2011), Bonet und Wood (2008) und Treloar (1975) hergeleitet.

2 Grundlagen

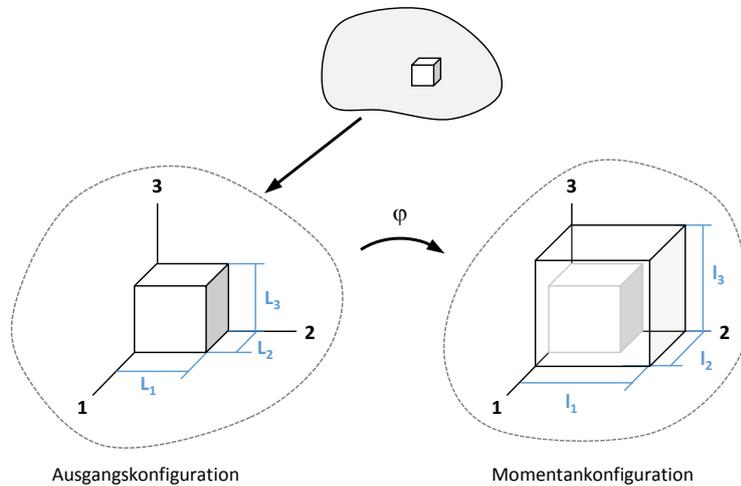


Abbildung 2.3: Verstreckgrad als Vergrößerung der Kantenlänge
(Vgl. Bonet und Wood, 2008, S.108 und Stommel, Stojek und Korte, 2011, S.13)

2.2.1 Verstreckgrad λ

Der Verstreckgrad λ beschreibt, wie in Abbildung 2.3 dargestellt, die Änderung der Kantenlängen eines exemplarisch aus einem Körper herausgeschnittenen Würfels, dessen Kanten entlang der Hauptachsen liegen.

$$\lambda = \frac{d\mathbf{l}}{d\mathbf{L}} \quad (2.1)$$

$$\lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Der Deformationsgradient \mathbf{F} bildet die Basis für die Beschreibung der Verformung und Verzerrung in der Finite-Elemente-Analyse. Er beschreibt das Verhältnis des Abstands von benachbarten Punkten in einem Körper nach und vor der Deformation. Die Änderung der Strecke zwischen den Punkten im Körper entspricht der Bedeutung des Deformationsgradienten \mathbf{F} . (Bonet und Wood, 2008, S. 97 f.)

2 Grundlagen

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} \quad (2.2)$$

Mit dem Verstreckgrad λ im Hauptachsensystem ergibt sich für den Deformationsgradienten \mathbf{F} :

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

2.2.2 Cauchy-Green Verzerrungstensoren \mathbf{C} und \mathbf{b}

Der rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor \mathbf{C} besitzt im Hauptachsensystem lediglich Einträge entlang der Hauptdiagonale und ist nur von den Verstreckgraden λ_1 , λ_2 und λ_3 abhängig.

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.3)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \lambda_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^2 \end{bmatrix}$$

Aufgrund der Symmetrie des linken und rechten Cauchy-Green Verzerrungstensors im Hauptachsensystem gilt $\mathbf{F} = \mathbf{F}^T$:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \mathbf{F} = \mathbf{F} \mathbf{F}^T = \mathbf{b} \quad (2.4)$$

2.2.3 Invarianten eines Tensors

Allgemein bedeutet Invarianz die Unveränderlichkeit einer Größe, im mathematischen Sinne versteht man darunter die Unabhängigkeit von der Wahl des Koordinatensystems. Invarianten sind demzufolge jene Größen eines Tensors, welche sich unter Koordinatentransformationen nicht ändern.

2 Grundlagen

Im Hauptachsensystem sind der linke und rechte Cauchy-Green Verzerrungstensor und folglich deren drei Invarianten identisch. Letztgenannte werden im weiteren Verlauf allgemein mit I_1 , I_2 und I_3 bezeichnet.

$$I_1 = I_C = I_b \quad (2.5)$$

$$I_2 = II_C = II_b$$

$$I_3 = III_C = III_b$$

Die drei Invarianten des Cauchy-Green Verzerrungstensors beschreiben die Änderung der Raumdiagonale, der Oberfläche und des Volumens. (Bonet und Wood, 2008, S. 38 ff.)

$$I_1 = \text{tr}(\mathbf{C}) \quad (2.6)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} (\text{tr}(\mathbf{C})^2 - \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C})) \quad (2.7)$$

$$I_3 = \det(\mathbf{C}) \quad (2.8)$$

Für die zweite Invariante ist nach Bonet und Wood (2008, S. 39) auch folgende, aber im weiteren Verlauf nicht verwendete, kürzere Form üblich:

$$I_2 = \text{tr}(\mathbf{C}^T \mathbf{C}) = \mathbf{C} : \mathbf{C} \quad (2.9)$$

Formuliert man die Invarianten mit den Verstreckgraden im Hauptachsensystem, so ergeben sich folgende Ausdrücke:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 \quad (2.10)$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2 \quad (2.11)$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 \quad (2.12)$$

Unter der Annahme der Inkompressibilität gilt:

$$L_1 L_2 L_3 = l_1 l_2 l_3 \quad (2.13)$$

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$$

2 Grundlagen

Tabelle 2.1: Verstreckgrad, Deformationsgradient und Cauchy-Green-Verzerrungstensor je Lastfall

λ, \mathbf{F} und \mathbf{C} für Uniaxial, Biaxial und Planar Shear			
<i>Kenngrößen</i>	<i>Uniaxial</i>	<i>Biaxial</i>	<i>Planar Shear</i>
$\lambda =$	$\begin{bmatrix} \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \\ \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$
$\mathbf{F} =$	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$
$\mathbf{C} =$	$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^4} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda^2} \end{bmatrix}$

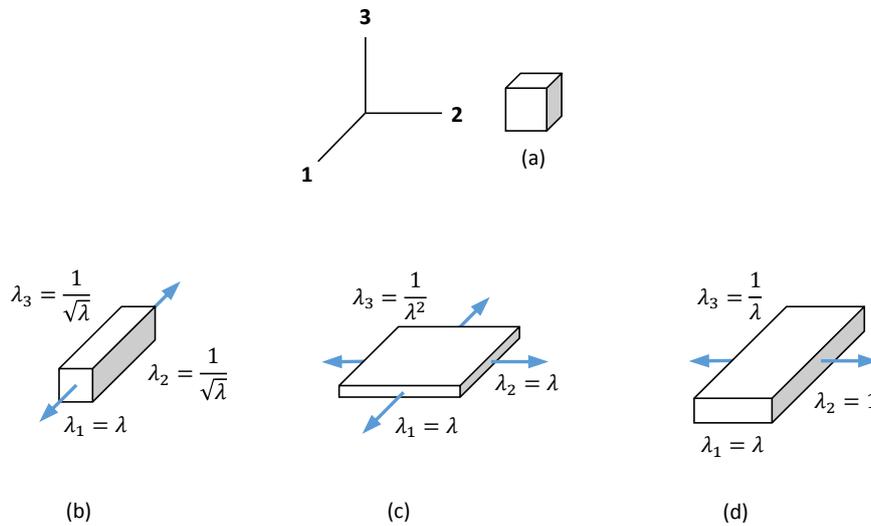


Abbildung 2.4: Randbedingungen für (b) Uniaxial Zug, (c) Biaxial und (d) Planar Shear
(Vgl. Treloar, 1975, S. 81-84)

2 Grundlagen

Tabelle 2.2: Invarianten des Cauchy-Green - Tensors und deren Ableitungen

Invarianten des Cauchy-Green - Tensors			
<i>Invarianten</i>	<i>Uniaxial</i>	<i>Biaxial</i> ¹	<i>Planar Shear</i>
$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2$	$\lambda^2 + \frac{2}{\lambda}$	$\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2 \lambda_2^2}$	$\lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2}$
$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2$	$2\lambda + \frac{1}{\lambda^2}$	$\lambda_1^2 \lambda_2^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}$	$\lambda^2 + 1 + \frac{1}{\lambda^2}$
$\frac{\partial I_1}{\partial \lambda}$	$2(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})$	$2(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2})$	$2(\lambda - \frac{1}{\lambda^3})$
$\frac{\partial I_2}{\partial \lambda}$	$2\frac{1}{\lambda}(\lambda - \frac{1}{\lambda^2})$	$2\lambda_2^2(\lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2})$	$2(\lambda - \frac{1}{\lambda^3})$

¹ Ableitung nach λ_1 , für λ_2 die Indizes 1 und 2 vertauschen

Die Verformung eines bestimmten Verzerrungszustands definiert konkrete Randbedingungen. In Abbildung 2.4 werden ausgehend von einem undeformierten Würfel (a) für die Lastfälle Uniaxial Zug (b), Biaxial Zug (c) und Planar Shear (d) diese Randbedingungen anhand der Verstreckgrade dargestellt. Damit können der Deformationsgradient und der Cauchy - Green Verzerrungstensor für den jeweiligen Lastfall berechnet werden (siehe Tabelle 2.1). In Tabelle 2.2 werden die ersten beiden Invarianten und deren Ableitungen nach dem Verstreckgrad für die behandelten Lastfälle Uniaxial Zug, Biaxial und Planar Shear gegenübergestellt.

Hinweis für den biaxialen Lastfall

Für den biaxialen Fall sind λ_1 und λ_2 getrennt voneinander anzuführen, da nur nach dem Verstreckgrad in einer Hauptachsenrichtung partiell abgeleitet werden darf! Erst nach Ableitung der Invarianten nach dem Verstreckgrad ist die Beziehung $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ einzusetzen. Hält man sich nicht an diese Vorgehensweise, so berechnet man eine technische Spannung in Belastungsrichtung, welche **fälschlicherweise** um den Faktor zwei größer ist.

2 Grundlagen

2.2.4 Formänderungsenergiedichte W

Durch die Unabhängigkeit der Invarianten vom Koordinatensystem eignen sich diese für die Beschreibung der Formänderungsenergiedichte W , welche als Funktion der in Gleichung 2.5 genannten Invarianten definiert ist:

$$W = W(I_1, I_2, I_3) \quad (2.14)$$

Durch Ableitung von W nach dem Verstreckgrad λ erhält man die technische Spannung P_i (siehe Kapitel 2.3.2) in Verstreckrichtung i bezogen auf die unverformte Ausgangsfläche (Treloar, 1975, S. 81).

$$P_i = \frac{dW}{d\lambda_i} \quad (2.15)$$

$$P_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial W}{\partial I_j} \frac{\partial I_j}{\partial \lambda_i}$$

$$P_i = \frac{\partial W}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \frac{\partial I_2}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial W}{\partial I_3} \frac{\partial I_3}{\partial \lambda_i}$$

2.2.5 Invariantenbasierte Materialmodelle

Der erste Piola-Kirchhoff Spannungstensor \mathbf{P} (siehe Kapitel 2.3.2) beschreibt die technische Spannung und lässt sich aus der Formänderungsenergiedichte W mit Gleichung 2.16 nach Markmann und Verron (2006, S. 837) ableiten. Die skalare Größe p kann durch Gleichgewichtsbeziehungen der Hauptspannungskomponenten ermittelt werden.

$$\mathbf{P} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{F}} - p\mathbf{F}^{-t} \quad (2.16)$$

Unter der Annahme isotropen und inkompressiblen Materialverhaltens reduziert sich die Abhängigkeit der Formänderungsenergiedichte W auf die ersten beiden Invarianten und wird allgemein als Tensorschreibweise

2 Grundlagen

oder in Hauptverstreckgradrichtung nach Holzapfel (2000) folgendermaßen formuliert:

$$\mathbf{P} = 2\mathbf{F} \left(\left[\frac{\partial W}{\partial I_1} + I_1 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right] \mathbf{I} - \frac{\partial W}{\partial I_2} \mathbf{C} \right) - p\mathbf{F}^{-t} \quad (2.17)$$

$$P_{ii} = 2 \left(\lambda_i \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda_i^3} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - p \frac{1}{\lambda_i} \quad (2.18)$$

Die Ermittlung der 11-Komponente des ersten Piola-Kirchhoff Spannungstensors in Abhängigkeit des Verstreckgrads λ ist exemplarisch für den uniaxialen Lastfall angeführt.

$$P_{11-uni} = 2 \left(\lambda \frac{\partial W}{\partial I_1} - \frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - p \frac{1}{\lambda} \quad (2.19)$$

Den skalaren Parameter p erhält man durch Ausnutzung des eindimensionalen Spannungszustands, die Hauptspannungskomponenten reduzieren sich in diesem Fall zu $P_{22} = P_{33} = 0$.

$$P_{22-uni} = 2 \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \sqrt{\lambda}^3 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) - p\sqrt{\lambda} \stackrel{!}{=} 0 \quad (2.20)$$

$$p = 2 \left(\frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_1} - \lambda \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.21)$$

Die Spannungskomponente P_{11} in Zugrichtung ist durch die Ermittlung von p vollständig definiert und nimmt nach Einsetzen von Gleichung 2.21 in 2.19 folgende Form an.

$$P_{11-uni} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.22)$$

Die Spannungen für die beiden anderen Lastfälle, deren Berechnung analog zum uniaxialen Fall erfolgt, sind in Gleichung 2.23-2.25 für Biaxial Zug und in Gleichung 2.26 für Planar Shear angeführt.

2 Grundlagen

$$P_{11-bx} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_1^3 \lambda_2^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.23)$$

$$P_{22-bx} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda_2^3 \lambda_1^2} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.24)$$

Werden beim biaxialen Zugversuch die Verstreckgrade mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ gekoppelt, dann ergibt sich:

$$P_{11,22-bx} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^5} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \lambda^2 \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.25)$$

$$P_{11-ps} = 2 \left(\lambda - \frac{1}{\lambda^3} \right) \left(\frac{\partial W}{\partial I_1} + \frac{\partial W}{\partial I_2} \right) \quad (2.26)$$

In Tabelle 2.3 wird W und dessen Ableitungen nach der ersten und zweiten Invariante für die Modelle nach Mooney-Rivlin, Yeoh und James-Green-Simpson zusammengefasst. Die Ableitungen von W nach I_1 und I_2 werden zur Berechnung der Spannung für das gewählte Materialmodell nach Gleichung 2.22-2.26 eingesetzt. Alternativ können auch die partiellen Ableitungen der Invarianten nach dem Verstreckgrad aus Tabelle 2.2 und die partiellen Ableitungen von W nach I_1 und I_2 aus Tabelle 2.3 kombiniert werden. Letztgenannte Methode ist zwar vom Verständnis her deutlich einfacher, beinhaltet aber eine bereits angesprochene potentielle Fehlerquelle: Die Verstreckgrade λ_1 und λ_2 in biaxialer Richtung dürfen erst nach Ableitung der Invarianten gleichgesetzt werden. Diese Fehlerquelle besteht für die erstgenannte Methode nicht, da hier auf eine allgemeine Ableitung in Tensorformulierung zurückgegriffen wird.

Beispielhaft ist in Abbildung 2.5 ein Spannungs- Dehnungsdiagramm eines fünfparametrischen Third-Order-Deformation-Modells nach James-Green-Simpson für die Lastfälle Biaxial Zug, Planar Shear und Uniaxial Zug dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass der biaxiale Versuch deutlich höhere Spannungen als der uniaxiale Zugversuch bei gleichen Dehnungen liefert. Dieser Sachverhalt muss nach Madritsch (2009) bei der Konditionierungsgradkorrelation der Lastfälle berücksichtigt werden.

2 Grundlagen

Tabelle 2.3: Formulierung von W
 (Vgl. Bhowmick, Hall und Benarey, 1994, S. 504 und *Experimental Elastomer Analysis* 2010, S. 44)

Formulierung von W für invariantenbasierte Materialmodelle		
	<i>Mooney-Rivlin</i>	<i>Yeoh</i>
W	$C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3)$	$C_{10} (I_1 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$
$\frac{\partial W}{\partial I_1}$	C_{10}	$C_{10} + 2 C_{20} (I_1 - 3) + 3 C_{30} (I_1 - 3)^2$
$\frac{\partial W}{\partial I_2}$	C_{01}	0
<i>Third Order Deformation - Model (James-Green-Simpson)</i>		
W	$C_{10} (I_1 - 3) + C_{01} (I_2 - 3) + C_{11} (I_1 - 3) (I_2 - 3) + C_{20} (I_1 - 3)^2 + C_{30} (I_1 - 3)^3$	
$\frac{\partial W}{\partial I_1}$	$C_{10} + C_{11} (I_2 - 3) + 2 C_{20} (I_1 - 3) + 3 C_{30} (I_1 - 3)^2$	
$\frac{\partial W}{\partial I_2}$	$C_{01} + C_{11} (I_1 - 3)$	

2 Grundlagen

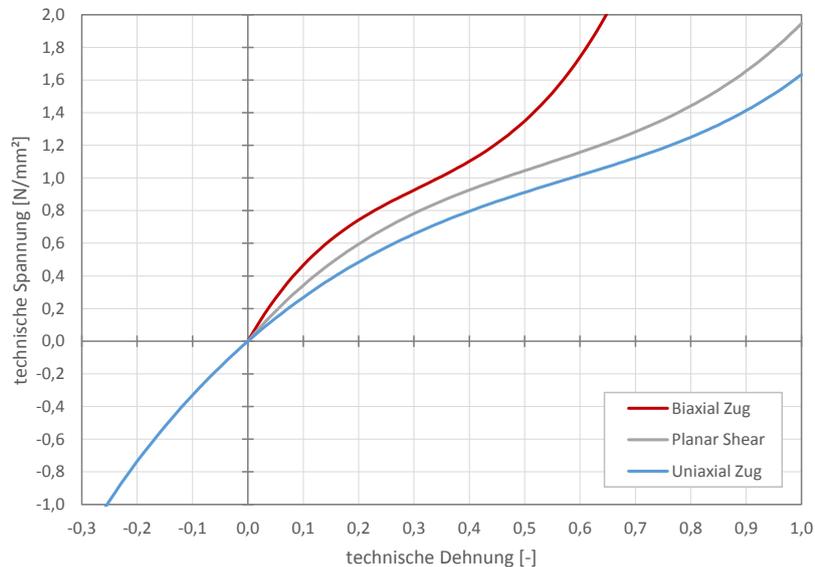


Abbildung 2.5: techn. Spannung und Dehnung nach James-Green-Simpson

2.3 Verzerrung

Wird ein Körper mit äußeren Kräften und Momenten belastet, dann reagiert dieser mit Verformungen, deren Messgröße die Verzerrung ist. Sie wird als eine relative, bezogene Größe betrachtet und gliedert sich in Dehnungen ε und Gleitungen γ . Dehnungen werden durch Normalspannungen verursacht und resultieren in Längenänderungen, wohingegen Gleitungen durch Schubspannungen auftreten und sich in Winkeländerungen auswirken. (Grote und Feldhusen, 2007, S. C3 und Stommel, Stojek und Korte, 2011, S. 10)

2.3.1 Technische und wahre Dehnung

In Abhängigkeit der Bezugsgröße wird zwischen wahrer und technischer Dehnung unterschieden, die Unterschiede sind speziell bei großen Dehnungen nicht vernachlässigbar.

2 Grundlagen

Technische Dehnung Die technische Dehnung, auch ingenieurmäßige Dehnung oder *Engineering Strain* genannt, ist als Verhältnis zwischen Längenänderung und Ausgangslänge definiert. (Rust, 2011, S. 49)

$$\varepsilon_t = \frac{\Delta l}{l} \quad (2.27)$$

Wahre Dehnung

Die wahre Dehnung, auch logarithmische Dehnung oder *True Strain*, bezieht sich im Gegensatz zur technischen Dehnung auf die aktuelle Länge der laufenden Konfiguration des Bauteils und eignet sich für die Beschreibung großer Verformungen, wie in Gleichung 2.28 formuliert (Rust, 2011, S. 50). Als weitere bedeutende Verzerrungsmaße seien noch die Euler-Almansi und die Green-Lagrange - Verzerrungen anzuführen, im späteren Verlauf dieser Arbeit werden aber lediglich wahre Verzerrungen betrachtet und an dieser Stelle auf die weiterführende Literatur der Elastizitätstheorie verwiesen (Bonet und Wood, 2008, S. 27).

$$\varepsilon_w = \int_L^l \frac{dl}{l} = \ln\left(\frac{l}{L}\right) = \ln\left(\frac{L + \Delta l}{L}\right) = \ln(1 + \varepsilon_t) \quad (2.28)$$

Formuliert man den Ausdruck der wahren Dehnung mit den Verstreckungen in den Hauptachsen unter Einführung des Verstreckgrads nach Gleichung 2.1 mit $\lambda = \frac{l}{L}$, so ergibt sich:

$$\varepsilon_w = \ln(1 + \varepsilon_t) = \ln(\lambda) \quad (2.29)$$

Im Bereich kleiner Verzerrungen ist die Abweichung der unterschiedlichen Verzerrungsmaße vernachlässigbar klein, betrachtet man aber größere Verzerrungen sind diese Vereinfachungen ungültig. Der Unterschied zwischen wahrer und technischer Dehnung bei großen Dehnungen ist in Abbildung 2.6 deutlich zu erkennen.

2 Grundlagen

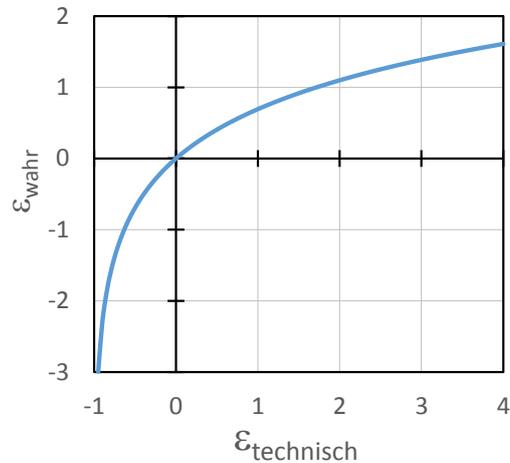


Abbildung 2.6: Wahre und technische Dehnung

2.3.2 Technische und wahre Spannung

Unter der Annahme inkompressiblen Materialverhaltens existiert analog zur Dehnung ein Zusammenhang zwischen technischer und wahrer Spannung in Richtung des Verstreckgrads λ . Die wahre Spannung wird auch als Cauchy-Spannung bezeichnet. (Stommel, Stojek und Korte, 2011, S. 13 und Treloar, 1975, S. 67)

$$\sigma_w = (1 + \varepsilon_t) \sigma_t = \lambda \sigma_t \quad (2.30)$$

Die Herkunft der in Gleichung 2.30 angeführten Beziehung wird in der Gummiliteratur häufig nicht angeführt, kann aber ausgehend von der allgemeinen Beziehung über die virtuelle interne Arbeit δW_{int} zwischen dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor und dem Cauchy-Spannungstensor mit Gleichung 2.31 nach Bonet und Wood (2008, S. 145) und Markmann und Verron (2006, S. 837) hergeleitet werden.

$$\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T} \quad \text{mit} \quad (2.31)$$

$$J = \det(\mathbf{F})$$

2 Grundlagen

Der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{P} steht nach Parisch (2003, S. 112) mit einem Bein in der Ausgangs- und mit dem anderen Bein in der Momentankonfiguration: Er misst zwar im undeformierten Flächenelement, sein Kraftvektor wirkt hingegen in der Momentankonfiguration. Der wahre Cauchy-Spannungstensor σ operiert ausschließlich in der Momentankonfiguration und hängt über den Deformationsgradienten \mathbf{F} mit dem ersten Piola-Kirchhoff-Spannungstensor \mathbf{P} zusammen. Im Hauptachsensystem ist die Determinante des Deformationsgradienten bei inkompressiblem Materialverhalten nach Gleichung 2.13 definitionsgemäß immer 1.

$$J = \det(\mathbf{F}) = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (2.32)$$

Die transponierte Inverse von \mathbf{F} ergibt sich im Hauptachsensystem zu:

$$\mathbf{F}^{-T} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \begin{bmatrix} \lambda_2 \lambda_3 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Unter der Annahme eines uniaxialen Zugversuchs mit den zugehörigen Verstreckgraden nach Tabelle 2.1 wird die Spannung in Zugrichtung 11 ermittelt. Der Deformationsgradient \mathbf{F} und dessen transponierte Inverse erhalten nach Einsetzen der Verstreckgrade folgende Form:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \end{bmatrix}$$
$$\mathbf{F}^{-T} = \frac{1}{\det(\mathbf{F})} \begin{bmatrix} \frac{1}{\lambda} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{\lambda} \end{bmatrix}$$

Die Beziehung zwischen den 11-Komponenten der ersten Piola-Kirchhoff-Spannung P_{11} mit der Cauchy-Spannung σ_{11} berechnet sich, wie bereits in

2 Grundlagen

Gleichung 2.30 angeführt, zu:

$$P_{11} = 1 \sigma_{11} \frac{1}{\lambda} \quad (2.34)$$

$$\sigma_{11} = \lambda P_{11}$$

Da dies der Umrechnung von wahrer in technischer Spannung entspricht, wird der erste Piola-Kirchhoff-Spannungstensor in der Literatur häufig als Nominaler Spannungstensor bezeichnet (Parisich, 2003, S. 112). Dieser Zusammenhang gilt analog für alle Belastungsfälle in jener Richtung i , in welcher der Verstreckgrad mit $\lambda_i = \lambda$ definiert ist.

2.4 Statische Steifigkeit

Die statische Steifigkeit entspricht bei translatorischer Belastung einer unendlich langsam aufzubringenden Kraft je Verschiebungsweg in Belastungsrichtung, bei rotatorischer Belastung entsprechend Moment je Verdrehung. In einem Diagramm der Federkennlinie, wie in Abbildung 2.7a dargestellt, wird die Kraft oder das Moment über den Federweg oder den Drehwinkel aufgetragen (Göbel, 1969, S. 23). Federkennlinien können qualitativ in progressive, lineare und degressive Verläufe klassifiziert werden. Ein progressiver Verlauf wird beispielsweise nach Niemann, Winter und Höhn (2005, S. 483) bei Fahrzeugtragfedern gefordert, um das Eigenschwingverhalten über den Betriebsbereich, respektive Leerlast und Volllast, nahezu gleich zu halten. Die Federrate oder Federsteifigkeit wird in der Federkennlinie als Steigung der Kurve abgelesen, bei linearer Kennlinie ist die Steifigkeit konstant (Niemann, Winter und Höhn, 2005, S. 484).

$$c_{trans} = \frac{F}{s} \text{ N/mm} \quad (2.35)$$

$$c_{rot} = \frac{M}{\varphi} \text{ Nm/deg} \quad (2.36)$$

Man unterscheidet weiters zwischen Tangenten- und Sekantensteifigkeit: Die Sekantensteifigkeit entspricht einem Mittelwert über einen definierten

2 Grundlagen

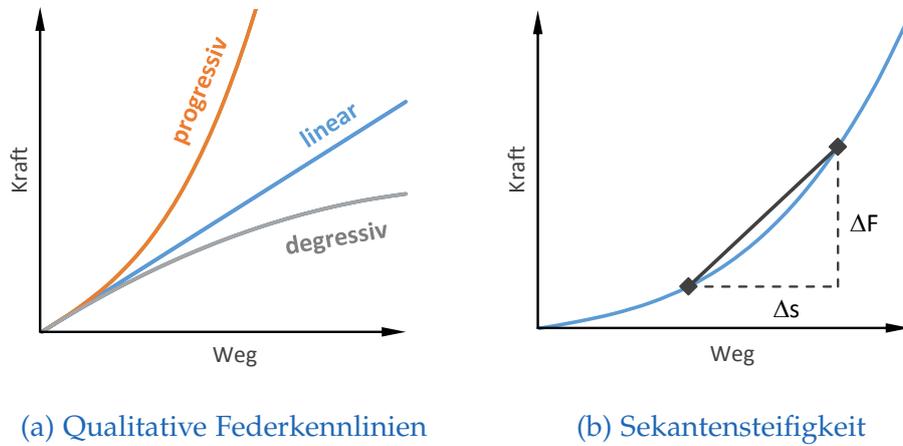


Abbildung 2.7: Federkennlinie und Steifigkeit

Bereich, indem man zwei Punkte auf der Federkennlinie mit einer Geraden verbindet und deren Steigung bestimmt (siehe Abbildung 2.7b).

Sekantensteifigkeit

$$c_{trans} = \frac{\Delta F}{\Delta s} \text{ N/mm} \quad (2.37)$$

$$c_{rot} = \frac{\Delta M}{\Delta \varphi} \text{ Nm/deg} \quad (2.38)$$

Bei Verkleinerung des zu betrachtenden Wegbereichs mit Hilfe einer Grenzwertbetrachtung nach Gleichung 2.39 gelangt man auf die Formulierung der Tangentensteifigkeit, welche die Steigung der Federkennlinie im jeweils aktuell betrachteten Verschiebungs- bzw. Verdrehungszustand beschreibt.

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta s} = \frac{dF}{ds} \quad (2.39)$$

Tangentensteifigkeit

$$c_{trans} = \frac{dF}{ds} \text{ N/mm} \quad (2.40)$$

$$c_{rot} = \frac{dM}{d\varphi} \text{ Nm/deg} \quad (2.41)$$

2.5 Dynamische Steifigkeit

Obwohl diese Arbeit auf der Simulation von statischen Steifigkeiten fokussiert, sind nachfolgend zur Ergänzung der Vollständigkeit Unterschiede zwischen statischer und dynamischer Belastung angeführt. Bei Gummi ist nach Niemann, Winter und Höhn (2005, S. 484) vor allem bei Gummifedern zwischen statischer Steifigkeit c_{stat} und dynamischer Steifigkeit c_{dyn} zu unterscheiden, da Gummi aufgrund von innerer Reibung bei steigender Verformungsgeschwindigkeit höhere Elastizitäts- und Schubmoduln aufweist. Es ist zu beachten, dass zusätzlich zu den bereits in Kapitel 3.2.2 erwähnten Materialeigenschaften der Payne-Effekt von großer Bedeutung ist. Belastet man mit Ruß gefüllte vernetzte Gummibauteile dynamisch mit kleinen Amplituden, so kann nach Böhm (2001, S. 6) eine Erweichung des dynamischen Schubmoduls bei Vergrößerung der Amplitude festgestellt werden. Der Payne-Effekt tritt bei ungefüllten vernetzten Gummibauteilen nicht auf, er ist demzufolge auf Interaktionen innerhalb der Füllstoffpartikel zurückzuführen (Böhm, 2001, S. 10).

3 Gummi-Metall - Bauteile

Gummi-Metall-Bauteile finden in der Industrie eine breite Verwendung als federnde Elemente. Sie zeichnen sich durch eine hohe Variabilität in puncto geometrischer und materieller Eigenschaften aus. Geometrisch kann der Federweg des Gummis unter anderem durch Veränderung der Gummiaußenkontur, Anschläge oder Einbauwinkel gegenüber der Belastungsrichtung beeinflusst werden, wohingegen die Materialeigenschaften des vernetzten Gummis mit den zusätzlichen Füllstoffen bei der Herstellung maßgeblich variiert werden können. In Abhängigkeit des Einsatzgebiets müssen Gummi-Metall-Bauteile sowohl statische als auch dynamische Kräfte übertragen. Aufbauend auf die Begriffsabgrenzungen aus Kapitel 2.1 behandelt dieser Abschnitt die Herstellung und Materialeigenschaften von Gummibauteilen. Als exemplarisches Anwendungsgebiet werden Gummi-Metall-Bauteile aus der Schienenfahrzeugindustrie vorgestellt, wie sie in Sekundärfederstufen von Drehgestellen Anwendung finden.

3.1 Herstellung

Der Herstellungsprozess von Gummi-Metall-Bauteilen mit der Fokussierung auf die Gummikomponente beginnt bei der Gewinnung des Rohmaterials Kautschuk und endet mit der Vulkanisation der Bauteilgeometrie. Im Folgenden werden diese Teilprozesse genauer betrachtet.

3.1.1 Kautschuk

Als Ausgangsmaterial von Gummibauteilen dient wie bereits in Kapitel 2.1 besprochen Kautschuk. Dieser wird entweder als Naturkautschuk (NR) aus

3 Gummi-Metall - Bauteile



(a) Plantage



(b) Gewinnung

Abbildung 3.1: Kautschukplantage und -gewinnung
(Abbildung (a) aus: Haefner, 2003 und (b) aus: PRA, 2010)

dem Pflanzensaft der *Hevea Brasiliensis* gewonnen oder als Synthekautschuk durch Polymerisation von Erdöl hergestellt. Der Milchsaft (Latex) des Kautschukbaums besteht aus ca. 30-40% Kautschuk und wird durch einen nach unten gerichteten Schnitt in die Baumrinde freigesetzt (siehe Abbildung 3.1). Naturkautschuk wird flüssig, fest oder als Pulver gehandelt. Durch Zusatz von Ammoniak wird der Naturkautschuk konserviert oder als Latexkonzentration für spezielle Zwecke in flüssiger Form transportiert. Üblicher ist die Form als Koagulat: Der Milchsaft wird filtriert, mit Wasser verdünnt und mit Ameisensäure zum Gerinnen gebracht. Dadurch trennt sich die feste Masse, das Koagulat, vom Wasser ab und durch Walzen wird der verdickte Kautschuk zu *Sheets* und *Crepes* verarbeitet. Diese werden in unterschiedlichen Güteklassen hinsichtlich Verunreinigungen oder konstantes Vulkanisationsverhalten klassifiziert. Naturkautschuk weist im Gegensatz zum Endprodukt Gummi kein dauerelastisches Verhalten auf, sondern verhält sich viskoelastisch. (Röthemeyer und Sommer, 2006, S. 4 ff. und TIS, 2015)

3 Gummi-Metall - Bauteile

Bestandteil	Menge	Einfluß auf
Polymer(e)	100	Verarbeitung*, Chemisches und physikalisches Grundverhalten des Werkstoffs
Vulkanisationssystem Vernetzer Beschleuniger Beschleunigeraktivator	<1 - 12	Verarbeitung*, Hitze- und Medienbeständigkeit, "Gummicharakter"
Alterungsschutzmittel	1 - 6	Beständigkeit gegen Ermüdung und Umgebungseinflüsse (Hitze, Licht, Ozon)
Füllstoffe	20 - 200	Festigkeit, Härte, Abriebfestigkeit, Verformungswiderstand, bleibende Verformung, Hitzealterung
Weichmacher	5 - 100	Verarbeitung*, Festigkeit, Härte, Kälteflexibilität, Quellung, Hitzebeständigkeit,
Verarbeitungshilfen	1 - 20	Verarbeitung*, Homogenität des Werkstoffs, Porenbild bei zelligem Material
Innere Haftmittel		Haftung zu Metallen, Kunststoffen und Textilien
Treibmittel	1 - 15	Porenbildung

* einschließlich Formverschmutzungsverhalten

Abbildung 3.2: Bestandteile einer Gummimischung und deren Einfluss
(Abbildung aus: Eyerer, Hirth und Elsner, 2008, S. 189)

3.1.2 Mischung

Der Natur- und Synthesekautschuk wird im nächsten Herstellungsschritt zu einer Kautschukmischung verarbeitet. In Abbildung 3.2 ist der Einfluss von Bestandteilen einer Gummimischung dargestellt, die Menge eines Bestandteils bezieht sich jeweils auf 100 Teile Kautschuk. Dabei wird deutlich, dass zwar der Kautschuk maßgebenden Einfluss auf das spätere Grundverhalten nimmt, neben ihm aber eine Reihe weiterer Bestandteile in die Betrachtung miteinbezogen werden müssen. Als Vernetzer kommen Schwefel oder alternativ Peroxide zum Einsatz. Da Elastomerbauteile im Laufe ihrer Lebensdauer mit Licht und Sauerstoff reagieren, nutzt man Antioxidanzien und Lichtschutzmittel zur Verlangsamung des chemischen Alterungsprozesses. Füllstoffe und Weichmacher verwendet man, um unter anderem die Härte und Festigkeit des Endprodukts zu erhöhen. Beispiele für Füllstoffe sind Ruß, Kreide, Kieselsäure, Silicate und Kaolin. Die Belastbarkeit der Kontaktfläche zwischen Gummi und Metall wird mit Haftvermittlern verbessert. (Koltzenburg, Maskos und Nuyken, 2014, S. 504)

3.1.3 Verarbeitung und Vulkanisation

Die Kautschukmischung wird nach Eyerer, Hirth und Elsner (2008, S. 355) durch folgende Methoden vorgeformt:

- Pressverfahren (Kompressionsverfahren, CM)
- Transferpressverfahren, TM
- Spritzgießverfahren, IM
- Kontinuierliche Vulkanisation

Die dauerelastischen Eigenschaften von Gummi werden erst durch Vernetzung ermöglicht, wie sie nach Eyerer, Hirth und Elsner (2008, S. 191) erstmals durch Charles Goodyear im Jahr 1839 gelang. Durch das Beimengen von Schwefel und Erhitzen der Kautschukmischung werden die Kautschukketten, die Polyisoprene, durch kovalente Brückenbindungen verknüpft. Der Vulkanisationsvorgang wird nach Feßmann und Orth (2002, S. 139) bei erhöhter Temperatur von 170-220°C und erhöhtem Druck unter geschlossenen vorgewärmten Formen durchgeführt, wobei gleichzeitig die Formgebung erfolgt. Die Vulkanisationstemperatur ist abhängig vom eingesetzten Verfahren, nach Röthemeyer und Sommer (2006) finden bei CM, TM und IM Temperaturen bis 160°C Anwendung. Dieser Vorgang der Vulkanisation beeinflusst die Elastomereigenschaften dahingehend, dass mit zunehmender Vulkanisationszeit und -temperatur die Vernetzungsdichte zunimmt. Ein Überblick auf den Einfluss der Vernetzungsdichte auf die späteren Eigenschaften ist in Tabelle 3.1 dargestellt. (Röthemeyer und Sommer, 2006, S. 276 f.)

Die so hergestellten Elastomere weisen auf molekularer Basis weitmaschig verschlaufte Polymerketten auf, die an einigen Stellen vernetzt sind (siehe Abbildung 3.3). Nach Koltzenburg, Maskos und Nuyken (2014, S. 498) verhindern diese Vernetzungsstellen einerseits das Fließen, also das Abgleiten der Molekülstruktur, andererseits würden zu viele Vernetzungsstellen die Mobilität der Polymerketten und infolgedessen das elastische Verhalten beeinträchtigen.

Bedingt durch den thermischen Wärmeausdehnungskoeffizienten von Gummi tritt während der Abkühlung des Endprodukts eine Volumenkontraktion

3 Gummi-Metall - Bauteile

Tabelle 3.1: Einfluss der Vernetzungsdichte auf ausgewählte Elastomereigenschaften
(Vgl. Röthemeyer und Sommer, 2006, S. 278)

Einfluss der Vernetzungsdichte	
starke Abhängigkeit	geringe Abhängigkeit
Härte Spannungs-Verformungs-Verhalten Weiterreißwiderstand dynamische Eigenschaften (Hysteresis) dynamische Ermüdung bleibende Verformung Quellung	Gasdurchlässigkeit Abriebswiderstand Kälteverhalten thermische Stabilität Witterungsbeständigkeit chemische Beständigkeit elektrische Leitfähigkeit



(a) ungefüllt



(b) gefüllt

Abbildung 3.3: Molekularer Aufbau von Elastomeren
(Abbildungen aus: Gambrow, 2002, S. 4 ff.)

3 Gummi-Metall - Bauteile

auf. Der lineare Wärmeausdehnungskoeffizient α besitzt für Gummi und Stahl folgende Größenordnung:

$$\alpha_G \sim 100 \dots 200 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} \quad (3.1)$$

$$\alpha_{St} \sim 10 \cdot 10^{-6} \text{ 1/K} \quad (3.2)$$

Mit zunehmender Vulkanisationstemperatur nimmt auch die Schwindung des Volumens zu. Will man den Volumenschwund gering halten, so gilt es die Temperatur während der Vulkanisation möglichst niedrig zu wählen. Der resultierende Volumenschwund S liegt je nach Mischung bei 1-3% und lässt sich mit Gleichung 3.3 berechnen. (Röthemeyer und Sommer, 2006, S. 731)

$$S = 3(\alpha_G - \alpha_{St}) \cdot \Delta T \cdot 100 \% \quad (3.3)$$

3.2 Materialeigenschaften von Gummi

Gummi weist, im Gegensatz zu Stahl, bei gleichem Material nicht automatisch gleiche Eigenschaften auf, da eine Reihe von äußeren Einflüssen das Materialverhalten verändern können. Bei Stahl definieren umfangreiche Normen Materialbezeichnungen mit eindeutigen Kennwerten, beispielsweise garantiert ein Stahl nach S235 eine Mindeststreckgrenze von 235 N/mm^2 , bis zu derer der elastische Bereich gültig ist. Da sich Gummi grundsätzlich über den gesamten Dehnungsbereich elastisch verhält, müssen andere Materialeigenschaften zur Klassifizierung gefunden werden. Gängige Praxis ist die Einteilung nach der Shore-Härte A, aus derer der Schubmodul des Gummis beispielsweise nach Battermann und Köhler (1982) mit Gleichung 3.4, nach Lutz (1990) mit Gleichung 3.5 oder experimentiell nach Göbel (1969) abgeleitet werden kann. Zu beachten gilt, dass diese Vorgangsweise einige Ungenauigkeiten aufweist, da einerseits die Shore-Härte produktionstechnisch Streuungen von typischerweise $\pm 5 \text{ ShA}$ unterliegt und andererseits die genannten Ansätze zur Berechnung des Schubmoduls unterschiedliche Werte bei gleicher Shore-Härte liefern (siehe Abbildung 3.4).

$$G^{sh} = 0,086 \cdot 1,045^{H_A} \quad (3.4)$$

3 Gummi-Metall - Bauteile

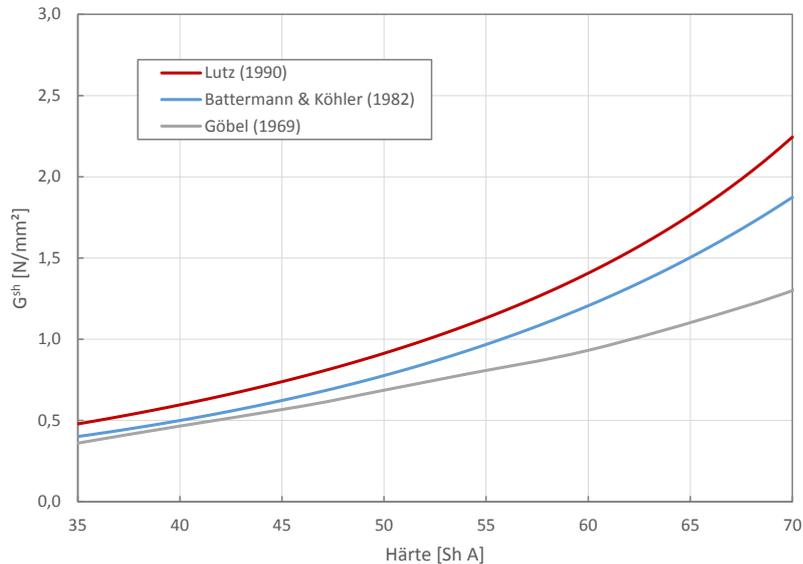


Abbildung 3.4: Schubmodul in Abhängigkeit der Shore-Härte

$$G^{sh} = \frac{0,07515 H_A + 0,549}{(4,1 + 3,9 \cdot e^{-1,397 \cdot h}) \cdot (0,395 h + 0,315 h^2)} \quad (3.5)$$

$$h = 0,025 \cdot (100 - H_A)$$

3.2.1 Mullins-Effekt

Ungefüllte Elastomere folgen bei mehrmaliger Be- und Entlastung immer der gleichen Spannungs-Dehnungs-Hysterese. Bei Gummi, also gefüllten Elastomeren, tritt bei aufeinanderfolgenden Belastungszyklen eine Spannungserweichung gegenüber dem ersten Belastungszyklus auf. Nach mehreren Zyklen und gleichbleibender Maximalbelastung stellt sich eine Konvergenz der Spannungs-Dehnungs-Kurve ein. Die Erweichung der Spannung wird als Mullins-Effekt bezeichnet (Eyerer, Hirth und Elsner, 2008, S. 78). Bei Erhöhung des Maximalniveaus der Belastung tritt der Effekt der Spannungserweichung erneut auf, erst nach mehreren Belastungszyklen stellt sich erneut eine konvergierende Spannungs-Dehnungs-Kurve ein. Dies ist

3 Gummi-Metall - Bauteile

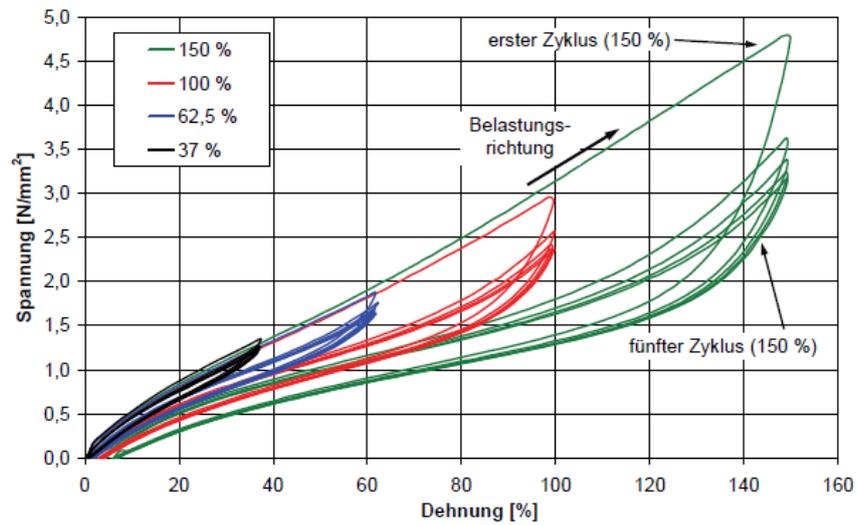


Abbildung 3.5: Spannungs-Dehnungskurven von Gummi bei uniaxialem Zugversuch
(Abbildung aus: Molls, 2013, S. 109)

damit zu begründen, dass bei erstmaliger Belastung maximal gespannte Polymerketten brechen und Verbindungen zwischen Polymerketten und Füllstoffen vollständig abgleiten. Eine Restdehnung nach vollständiger Entlastung symbolisiert die eingebrachte Werkstoffschädigung. (Gambrow, 2002, S. 10)

3 Gummi-Metall - Bauteile

Die Höhe der Vorbelastung beeinflusst daher maßgebend das Materialverhalten, man spricht in diesem Zusammenhang auch von einer Vorkonditionierung des Bauteils. Die Auswirkungen des Mullins-Effekts sind in Abbildung 3.5 anhand uniaxialen Zugversuchen anschaulich dargestellt. Der Mullins-Effekt tritt nach Beatty (2000) und Beatty und Krishnaswamy (2000) nicht nur bei uniaxialer, sondern ebenfalls bei Schub- und biaxialer Beanspruchung auf.

3.2.2 Viskoelastizität und weitere Effekte

Eine Reihe von weiteren Effekten charakterisieren das Verhalten von Gummibauteilen. Nach Madritsch (2009) zählen hierzu Viskoelastizität, Mullins-Effekt, Kriechen, Relaxation, Druckverformungsrest, Temperatureinfluss und Medieneinfluss. Neben dem bereits vorgestellten Mullins-Effekt ist die Viskoelastizität nach Gambrow (2002, S. 9) für die Abweichung von Be- und Entlastungspfad in Form einer Hysterese verantwortlich (siehe Abbildung 3.5). Typischerweise versteht man bei zugbelasteten Federn nach Gross, Hauger und Wriggers (2014, S. 328) unter Kriechen eine Verlängerung der Feder über die Zeit bei konstanter Zugkraft, bei statisch auf Druck beanspruchten Bauteilen analog eine Abnahme der Federhöhe.

3.3 Anwendungsgebiete in Schienenfahrzeugen

Im Anwendungsbereich der Schienenfahrzeugindustrie wird in Drehgestellen die Federung meist zweistufig ausgeführt. Der Aufgabenbereich der Federung teilt sich folglich in zwei Bereiche: Die Primärfederstufe wirkt zwischen Schiene und Drehgestell, während die Sekundärfederstufe zur Entkoppelung von Wagenkasten und Drehgestell zum Einsatz kommt. In der Sekundärfederstufe werden aus Komfortgründen bei Personenzügen vermehrt Luftfedern eingesetzt. Als zusätzliches Federelement verwendet man unterschiedlichste Ausführungen von Gummi-Metall-Bauteilen, um bei Druckabfall oder Undichtheit Notlaufeigenschaften zu gewährleisten. Da die Zusatzfeder der Luftfeder in Serie geschaltet ist, beeinflusst sie das Steifigkeitsverhalten der Sekundärfederstufe auch während des regulären

3 Gummi-Metall - Bauteile

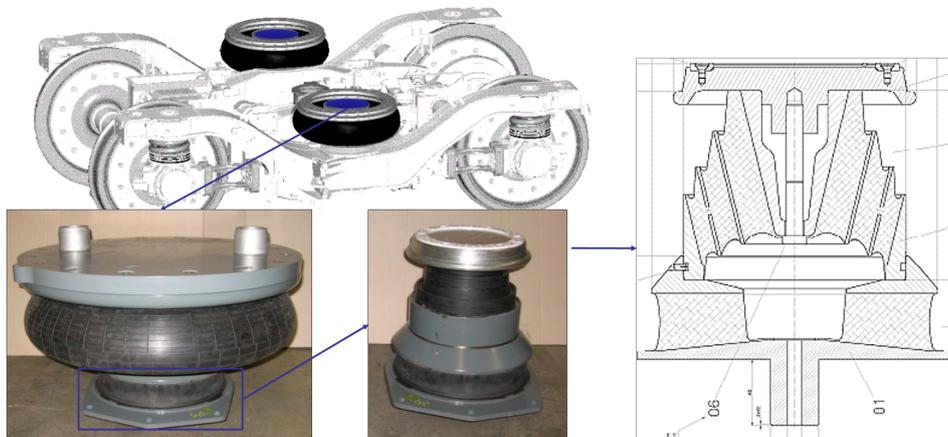


Abbildung 3.6: Sekundärfederstufe eines Drehgestells
(Vgl. Haigermoser, 2002, S. 183 und GMT, 2010a, S. 3)

Betriebs maßgebend. Eine exemplarische Ausführung eines Drehgestells mit zugehöriger Sekundärfederstufe und Zusatzfeder ist in Abbildung 3.6 dargestellt. (Haigermoser, 2002, S. 199 f.)

Ein Auszug einer Übersicht von Zusatzfederausführungen wird in Abbildung 3.7 gegeben. Dabei wird deutlich, dass sowohl Bauteile mit einem einzigen großen Gummivolumen, wie die Tonnenfeder in Abbildung 3.7a, eingesetzt werden als auch mehrstufige Bauteile, in denen durch aufvulkanisierte Metallbauteile die Teilstufen in Serie geschaltet sind (siehe Abbildung 3.7b und 3.7c).

3.3.1 Konusfeder

Eine Konusfeder basiert bei Axialbeanspruchung auf dem Reibkeileffekt und ist typischerweise mehrstufig ausgeführt. Belastet man diese mit einer Axialkraft, so stellt sich eine Verschiebung ein, die großteils in einer Schubbeanspruchung im Gummivolumen resultiert. Durch den Konuswinkel baut sich bei größeren Verzerrungen nach und nach eine Normalkraft im Gummi auf und das Volumen drängt in Richtung der freien Oberflächen. Dadurch entsteht die für Konusfedern typische progressive Axialkennlinie.

3 Gummi-Metall - Bauteile

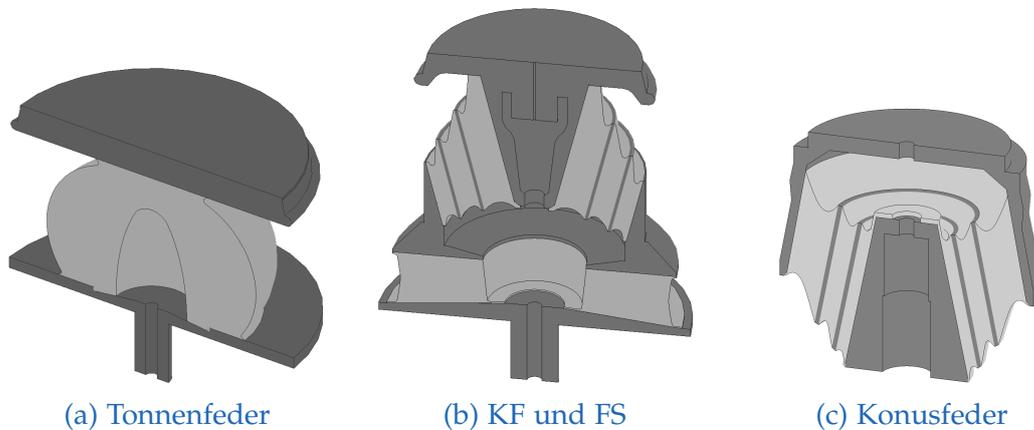


Abbildung 3.7: Beispiele für Gummi-Metall - Bauteile (Halbschnitt)

In Querrichtung verhalten sich Konusfedern im Gegensatz zu Axialbelastungen deutlich steifer. Torsional weisen Konusfedern gegenüber den beiden anderen betrachteten Bauteilen das weichste Verhalten auf.

3.3.2 Federscheibe

Um die Lateralsteifigkeit zu senken kombiniert man Federscheiben häufig mit Konusfedern. Nahezu den gesamten Querverschiebungsweg der Zusatzfeder übernimmt die Federscheibe, da die laterale Steifigkeit der Konusfeder typischerweise um einen Faktor > 10 größer ist als die der Federscheibe. Die Steifigkeiten können durch Variation der Gummihöhe und durch Veränderung des inneren und äußeren Radius beeinflusst werden.

3.3.3 Tonnenfeder

Im Vergleich zur Konusfeder und Federscheibe besitzt die Tonnenfeder ein deutlich größeres Gummivolumen und zeichnet sich im unbelasteten Zustand durch eine große freie Oberfläche aus. Durch Aufbringen einer Axialkraft bilden sich große Kontaktzonen, welche erheblichen Einfluss auf die Steifigkeiten unter der jeweiligen Axialbelastung nehmen. Nachteilig

3 Gummi-Metall - Bauteile

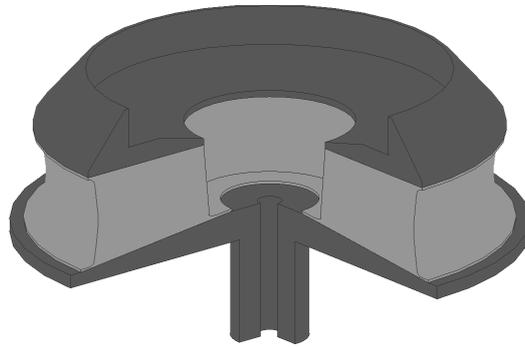


Abbildung 3.8: Federscheibe (Schnittansicht)

ist die verhältnismäßig lange Vulkanisationszeit bedingt durch das große Gummivolumen.

4 Analytische Berechnung

Dieser Abschnitt betrachtet analytische Lösungsmöglichkeiten für die in Kapitel 3 vorgestellten Gummi-Metall-Bauteile. Die Berechnungen basieren auf Näherungen für kleine Verzerrungen und experimentell ermittelten Zusammenhängen, sie können daher nur für kleine Verformungen der Bauteile verwendet werden. Da Gummi Nichtlinearitäten aufgrund von Geometrie und Material aufweist, deckt dieser Bereich nur kleine Verformungen ab. Mehraxiale Lastfälle überlagern Spannungszustände im Bauteil und verändern das Bauteilverhalten und die Steifigkeitskennlinien. Analytische Methoden berücksichtigen nur in sehr begrenztem Umfang mehraxiale Einflüsse, wie sie beispielsweise aus einer axialen Vorspannung entstehen. Mit Ausnahme der Überlagerung von Schub und Druck in der gleichen Ebene im linearen Bereich können analytische Methoden lediglich für Einzellastfälle verwendet werden.

Der Einsatz von analytischen Berechnungen beschränkt sich in dieser Arbeit auf eine idealisierte Bauteilgeometrie und in weiterer Folge auf die Validierung des FE-Modells innerhalb der Gültigkeitsgrenzen der analytischen Berechnung. Der Betriebspunkt des betrachteten Bauteils liegt zwar meist außerhalb dieser Grenzen im nichtlinearen Bereich, als eine zusätzliche grundlegende Validierung des FE-Modells ist die analytische Vorgangsweise dennoch sinnvoll. Da analytisch lediglich idealisierte Geometrien betrachtet werden, muss als Vergleich auch ein zusätzliches FE-Modell mit dieser vereinfachten Kontur erstellt und die analytische Rechnung mit diesem Modell verglichen werden, um weitere Abweichungen aufgrund von Geometrieunterschieden ausschließen zu können.

Die analytischen Berechnungsvorgaben für Gummifedern stützen in der gesichteten Literatur auf die gleichen Grundlagen und beschränken sich auf den linearen Bereich. In dieser Arbeit wird deshalb exemplarisch die

4 Analytische Berechnung

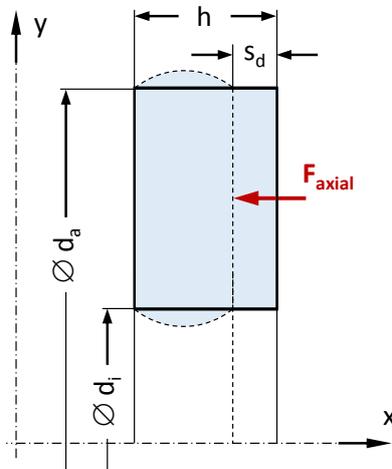


Abbildung 4.1: Geometrie einer runden Scheibengummifeder bei axialer Belastung

Vorgangsweise nach Göbel (1969) gewählt, auf Basis derer die Berechnung der analytischen statischen Steifigkeiten in diesem Kapitel erfolgt.

4.1 Teilsystem Federscheibe

Idealisierung der Geometrie

Die idealisierte Betrachtung der Federscheibe, wie in Abbildung 4.1 dargestellt, führt auf eine Scheibengummifeder mit folgenden Geometriedaten:

- Außendurchmesser $d_a = 170 \text{ mm}$
- Innendurchmesser $d_i = 60 \text{ mm}$
- Federhöhe $h = 65 \text{ mm}$

4.1.1 Axialsteifigkeit

Die Auswertung der Axialsteifigkeit erfolgt mithilfe des Quotienten aus aufgebrachter Normalkraft und Axialverschiebung im linearen Kennlinienbereich, welcher nach Göbel (1969, S. 34) in etwa bei einer Axialverschiebung

4 Analytische Berechnung

von 20% der Gummihöhe endet. Der Gültigkeitsbereich der analytischen Berechnung beträgt für die betrachtete Geometrie:

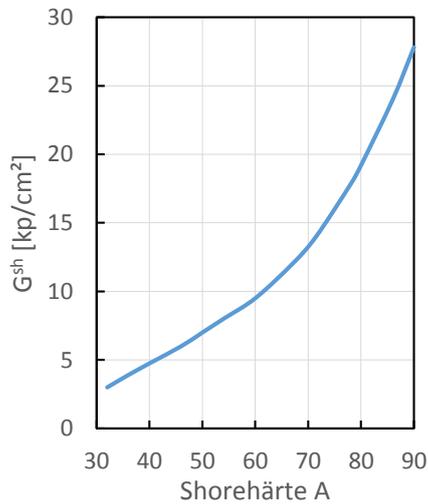


Abbildung 4.2: Schubmodul
(Vgl. Göbel, 1969, S. 19)

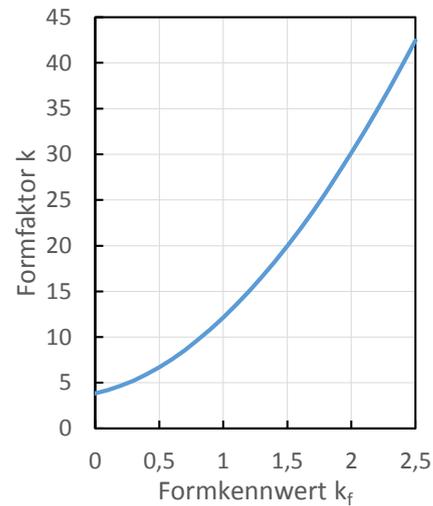


Abbildung 4.3: Ermittlung des
Formfaktors (Vgl. Göbel, 1969, S. 20)

$$s_{max} = 0,2 h \quad (4.1)$$

$$s_{max} = 13 \text{ mm}$$

Die gebundene Oberfläche an der Krafteinleitung lässt sich wie folgt berechnen:

$$A_g = \pi (r_a^2 - r_i^2) \quad (4.2)$$

$$A_g = \pi (170^2 - 60^2)$$

$$A_g = 79482 \text{ mm}^2$$

Die freie Oberfläche ergibt sich zu:

$$A_f = 2 \pi h (r_a + r_i) \quad (4.3)$$

$$A_f = 2 \pi 65 (170 + 60)$$

4 Analytische Berechnung

$$A_f = 93934 \text{ mm}^2$$

Der Schubmodul bei Shorehärte 45A kann in Abbildung 4.2 abgelesen werden:

$$\begin{aligned} G^{sh} &= 5,5 \text{ kp/cm}^2 \\ G^{sh} &= 0,54 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad (4.4)$$

Der Formkennwert wird als Verhältnis von gebundener zu freier Oberfläche definiert und bestimmt die Steigung der Federkennlinie maßgebend mit:

$$\begin{aligned} k_f &= \frac{A_g}{A_f} \\ k_f &= 0,85 \end{aligned} \quad (4.5)$$

Aus dem Formkennwert k_f wird nun in Abbildung 4.3 der Formfaktor k abgelesen.

$$k = 9,5 \quad (4.6)$$

Für runde Gummifedern ergibt sich im linearen Bereich der Kennlinie der rechnerische E-Modul zu:

$$\begin{aligned} E_r &= k G^{sh} \\ E_r &= 5,13 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad (4.7)$$

Die Axialkraft berechnet man für den Axialweg $s_x = s_{max} = 13 \text{ mm}$ mit:

$$\begin{aligned} F_d &= s_x \frac{E_r A_g}{h} \\ F_d &= 13 \frac{5,13 \cdot 79482}{65} \\ F_d &= 81549 \text{ N} \end{aligned} \quad (4.8)$$

Die Axialsteifigkeit bei Druckbelastung wird wie folgt ermittelt:

$$\begin{aligned} c_d &= \frac{F_d}{s_x} = \frac{E_r A_g}{h} \\ c_d &= 6273 \text{ N/mm}^2 \end{aligned} \quad (4.9)$$

4 Analytische Berechnung

4.1.2 Lateralsteifigkeit

Die Lateralbelastung einer Scheibengummifeder entspricht, wie in Abbildung 4.4 dargestellt, einem Parallelschublastfall. Für die Berechnung der Lateralsteifigkeit werden wieder die gebundene Oberfläche aus Formel 4.2 und der Schubmodul in Abhängigkeit der Shorehärte aus Abbildung 4.2 benötigt. Der Gültigkeitsbereich liegt bei 35% der Gummischichtdicke.

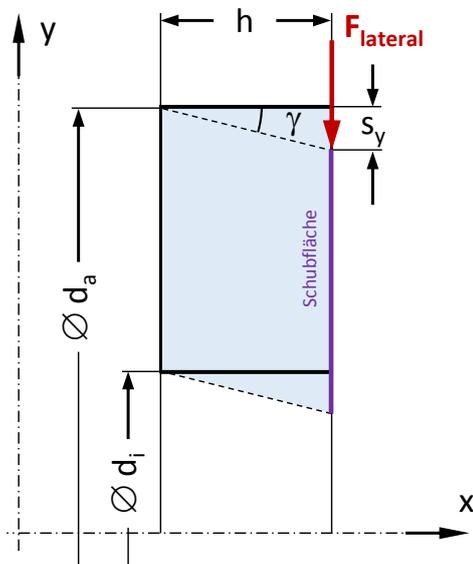


Abbildung 4.4: Lateralverschiebung an einer Scheibengummifeder (Vgl. Göbel, 1969, S. 25)

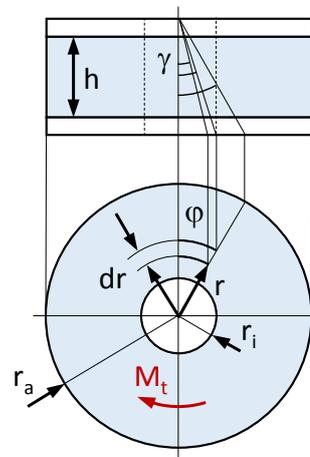


Abbildung 4.5: Torsion an einer Scheibengummifeder (Vgl. Göbel, 1969, S. 31)

$$s_{max} = 0,35 h \quad (4.10)$$

$$s_{max} = 23 \text{ mm}$$

Die Lateralkraft bei $s_y = 10 \text{ mm}$ Verformung beträgt:

$$F_q = \frac{s_y A_g G^{sh}}{h} \quad (4.11)$$

4 Analytische Berechnung

$$F_q = \frac{10\,79482\,0,54}{65}$$
$$F_q = 6603\text{ N}$$

Die Axialsteifigkeit wird wie folgt ermittelt:

$$c_q = \frac{F_q}{s_y} = \frac{A_g G^{sh}}{h} \quad (4.12)$$
$$c_q = 660\text{ N/mm}$$

4.1.3 Torsionsteifigkeit

Belastet man die Scheibengummifeder an einem Scheibenende mit einem Drehmoment M_t und spannt das andere Metallstück fest ein, dann spricht man von einer Torsionsbelastung. Der Drehwinkel φ kann auch über den Scherwinkel γ näherungsweise mit Gleichung 4.13 beschrieben werden, wie dies in Abbildung 4.5 anhand einer tordierten Scheibengummifeder dargestellt ist. Der lineare Gültigkeitsbereich erstreckt sich nach Göbel (1969) bei torsionsbelasteten Scheibengummifedern bis $\varphi = 20^\circ$.

$$h \tan \gamma = \varphi r \quad (4.13)$$

Formuliert man die Torsionsspannung mit dem Schubmodul und setzt Gleichung 4.13 in diese Beziehung ein, ergibt sich folgender Ausdruck für die Spannung:

$$\tan \gamma = \frac{\tau}{G} \quad (4.14)$$

$$\tau = \frac{\varphi r G}{h} \quad (4.15)$$

Die möglicherweise ungewohnte Formulierung mit dem Tangens des Scherwinkels γ in Gleichung 4.14 wird in der Literatur der Festigkeitslehre meist direkt mit der Linearisierung $\tan \gamma \approx \gamma$ angeführt, da dies für kleine Scherwinkel und unter der Annahme einer konstanten Gummihöhe h eine ausreichend genaue Näherung darstellt. (Böge, 2013, S.298)

4 Analytische Berechnung

Das elementare Torsionsmoment lässt sich anhand eines ringförmigen Flächenelements beschreiben:

$$dM_t = \tau dA r \quad (4.16)$$

$$dM_t = \tau 2 r \pi dr r$$

$$dM_t = \frac{\varphi r G}{h} 2 \pi r^2 dr$$

Um das über den gesamten Querschnitt wirkende Drehmoment M_t zu erhalten, integriert man das elementare Drehmoment in den Grenzen r_1 bis r_2 .

$$M_t = \frac{2 \pi \varphi G}{h} \int_{r_1}^{r_2} r^3 dr \quad (4.17)$$

$$M_t = \frac{2 \pi \varphi G}{4h} (r_2^4 - r_1^4)$$

Formuliert man den Ausdruck mit dem Drehwinkel in $^\circ$, so führt dies auf folgende Gleichung:

$$M_t = \varphi^\circ \frac{\pi^2 G (r_2^4 - r_1^4)}{360^\circ h} \quad (4.18)$$

Die Berechnung des Drehmoments für die idealisierte Federscheibengeometrie ergibt sich mit dem Schubmodul aus Gleichung 4.4 und einer Verdrehung von 10° zu:

$$M_t = 10^\circ \frac{\pi^2 0,54 (170^4 - 60^4)}{360^\circ 65}$$

$$M_t = 187276 \text{ Nm}$$

Die Torsionssteifigkeit wird wie folgt ermittelt:

$$c_\varphi = \frac{M_t}{\varphi^\circ} \quad (4.19)$$

$$c_\varphi = 187 \text{ Nm}/^\circ$$

4.2 Teilsystem Konusfeder

Die Konusfeder weist eine komplexe Außenkontur an den freien Gummioberflächen auf, welche bei exakter mathematischer Abbildung nur unter Verwendung vieler Parameter zu beschreiben wäre. Da die analytische Berechnung ohnehin nur zur Abschätzung des linearen Bereichs dient, werden aufgrund dessen im weiteren Verlauf einige, nach Belastungsrichtungen abhängige, Vereinfachungen getroffen.

4.2.1 Axialsteifigkeit

Idealisierung der Geometrie bei Axialbeanspruchung

Für die analytische Berechnung der Axialbeanspruchung beschreibt man die Gummikontur durch Geraden, dadurch ergeben sich, wie in Abbildung 4.6 dargestellt, sieben einfache Geometrieparameter für die Ermittlung der Federsteifigkeit einer einstufigen Konusfeder. Um mehrstufige Federn zu berechnen, kombiniert man die Steifigkeiten gemäß einer Serienschaltung von Federstufen. Die Berechnung wird exemplarisch mit Geometrieparametern einer dreistufigen Konusfeder aus Tabelle 4.1 durchgeführt, die Nummerierung der Federstufen erfolgt von eins innen nach drei außen:

Tabelle 4.1: Geometrieparameter einer idealisierten Konusfeder

Geometrieparameter einer idealisierten Konusfeder		
Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3
$R_1 = 66 \text{ mm}$	$h = 26,5 \text{ mm}$	$h = 21 \text{ mm}$
$r_1 = 25 \text{ mm}$	$v = 43 \text{ mm}$	$v = 34 \text{ mm}$
$h = 39 \text{ mm}$	$l_2 = 108 \text{ mm}$	$l_2 = 86 \text{ mm}$
$v = 50,5 \text{ mm}$		
$l_1 = 171 \text{ mm}$		
$l_2 = 137 \text{ mm}$		
$a = 4 \text{ mm}$		

4 Analytische Berechnung

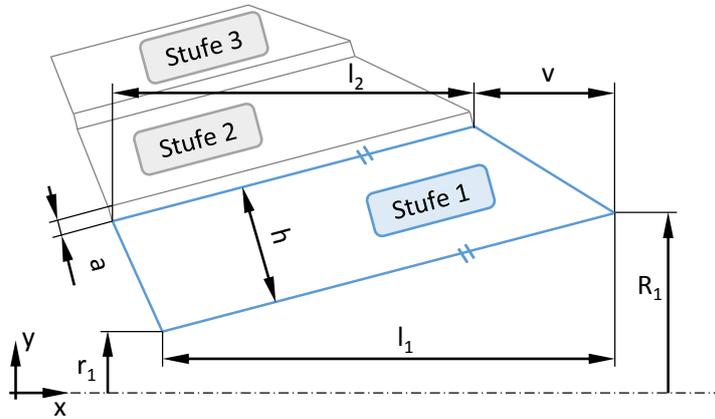


Abbildung 4.6: Parametrisierung der Konusfeder

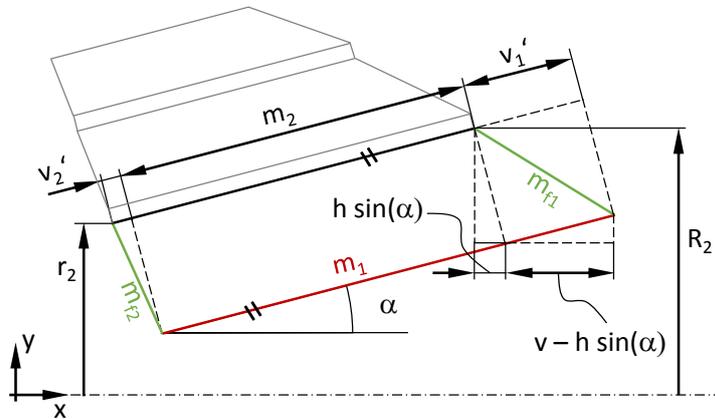


Abbildung 4.7: Geometrische Zusammenhänge

4 Analytische Berechnung

Die Axialbelastung einer Konusfeder resultiert aufgrund des Konuswinkels in einer kombinierten Druck-Schub Beanspruchung im Bauteil, wobei die Berechnung für eine mehrstufige Feder für jede Stufe dem gleichen Schema folgt. Die Vorgangsweise gliedert sich in eine Berechnung einer einzelnen Stufe und einer anschließenden Kombination durch Serienschaltung. Nach Göbel (1969, S. 38-41) kann die Überlagerung beider Beanspruchungsarten in Abhängigkeit des Einbauwinkels α bei einer Scheibengummifeder wie folgt berechnet werden:

$$F_x = \frac{s_x A_g}{h} (G \cos^2 \alpha + E_r \sin^2 \alpha) \quad (4.20)$$

Aus Verständnisgründen wurde der Winkel α in Gleichung 4.20 um 90° gedreht, sodass dieser bei der Konusfeder dem Winkel zwischen Schubbelastung und Rotationsachse entspricht (siehe Abbildung 4.7). Die Grenzfälle $\alpha = 0^\circ$ und $\alpha = 90^\circ$ repräsentieren bei steigendem α und axialer Belastung den Verlauf einer reinen Schubfeder über eine Konusfeder bis hin zur druckbelasteten Federscheibe. Die Überlagerung von Schub und Druck geschieht durch eine geometrische Aufteilung von Kraft und Weg in den jeweiligen Anteil, deren getrennter Berechnung und anschließender Kombination zur Gesamtbelastung. Druck- und Schubanteil entsprechen der in Kapitel 4.1.1 und Kapitel 4.1.2 genannten Vorgangsweise nach Göbel (1969). Diese Basis wird für die axialsymmetrische Konusfeder um eine eigene Berechnung der freien und gebundenen Oberflächen mittels Mantelflächen von Kegelstümpfen für rotationssymmetrische Bauteile erweitert.

Der Konuswinkel α bestimmt die Lage der Federstufen und das Progressionsverhalten der Federkennlinie.

$$\begin{aligned} \tan \alpha &= \frac{R_1 - r_1}{l_1} & (4.21) \\ \alpha &= \arctan \frac{66 - 25}{171} \\ \alpha &= 13,5^\circ \end{aligned}$$

Gebundene Oberfläche

Die zwischen Gummi und Metall gebundene Oberfläche A_g an der Kräfteinleitung wird mit den Parametern R_1 , r_1 und l_1 ermittelt. Mithilfe eines

4 Analytische Berechnung

Kegelstumpfs und dessen Mantellinie m_1 berechnet man die Mantelfläche, welche der gebundenen Oberfläche A_g entspricht.

$$m_1 = \sqrt{l_1^2 + (R_1 - r_1)^2} \quad (4.22)$$

$$m_1 = \sqrt{171^2 + (66 - 25)^2}$$

$$m_1 = 176 \text{ mm}$$

$$A_g = m_1 \pi (r_1 + R_1) \quad (4.23)$$

$$A_g = 176 \pi (25 + 66)$$

$$A_g = 50272 \text{ mm}^2$$

Freie Oberfläche

Die freie Oberfläche des Gummis besteht aus einem Oberflächenteil A_{f1} am rechten und einem Teil A_{f2} am linken Rand. Bei beiden Teiloberflächen handelt es sich in der idealisierten Betrachtung, ebenso wie bei der gebundenen Oberfläche, um Mantelflächen von Kegelstümpfen. Zur Berechnung von A_{f1} sind vorab einige geometrische Zusammenhänge zu definieren, um die Länge m_{f1} zu ermitteln. Der Versatz in Schubrichtung v'_1 lässt sich, wie in Abbildung 4.7 dargestellt, mit dem Konuswinkel α berechnen:

$$v'_1 = \frac{v - h \sin \alpha}{\cos \alpha} \quad (4.24)$$

$$v'_1 = \frac{50,5 - 39 \sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$v'_1 = 42,3 \text{ mm}$$

Weiters wird der Radius R_2 an der rechten oberen Ecke benötigt:

$$R_2 = R_1 - v'_1 \sin \alpha + h \cos \alpha \quad (4.25)$$

$$R_2 = 66 - 42,3 \sin \alpha + 39 \cos \alpha$$

$$R_2 = 93,6 \text{ mm}$$

4 Analytische Berechnung

Die Mantellinie an der rechten freien Oberfläche m_{f1} und daraus resultierend die freie Oberfläche A_{f1} ergeben sich zu:

$$m_{f1} = \sqrt{h^2 + v_1'^2} \quad (4.26)$$

$$m_{f1} = \sqrt{39^2 + 42,3^2}$$

$$m_{f1} = 57,5 \text{ mm}$$

$$A_{f1} = m_{f1} \pi (R_1 + R_2) \quad (4.27)$$

$$A_{f1} = 176 \pi (66 + 96,6)$$

$$A_{f1} = 28854 \text{ mm}^2$$

Für die linke freie Oberfläche A_{f2} müssen zunächst die Mantellinie an der oberen gebundenen Oberfläche m_2 , der Versatz in Schubrichtung v_2' , der Radius r_2 an der linken oberen Ecke und die Mantellinie der linken freien Oberfläche m_{f2} berechnet werden:

$$m_2 = \frac{l_2}{\cos \alpha} \quad (4.28)$$

$$m_2 = \frac{137}{\cos \alpha}$$

$$m_2 = 141,2 \text{ mm}$$

$$v_2' = m_2 - (m_1 - v_1') \quad (4.29)$$

$$v_2' = 141,2 - (176 - 42,3)$$

$$v_2' = 7,7 \text{ mm}$$

$$r_2 = r_1 - v_2' \sin \alpha + h \cos \alpha \quad (4.30)$$

$$r_2 = 25 - \frac{7,7}{\sin \alpha} + 39 \cos \alpha$$

4 Analytische Berechnung

$$r_2 = 61 \text{ mm}$$

$$\begin{aligned} m_{f2} &= \sqrt{h^2 + v_2'^2} & (4.31) \\ m_{f2} &= \sqrt{39^2 + 7,7^2} \\ m_{f2} &= 39,7 \text{ mm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{f2} &= m_{f2} \pi (r_1 + r_2) & (4.32) \\ A_{f2} &= 141,2 \pi (25 + 61) \\ A_{f2} &= 10737 \text{ mm}^2 \end{aligned}$$

Die gesamte freie Oberfläche A_f beträgt nach Addition beider Teilflächen:

$$\begin{aligned} A_f &= A_{f1} + A_{f2} & (4.33) \\ A_f &= 28855 + 10737 \\ A_f &= 39591 \text{ mm} \end{aligned}$$

Aus dem Quotienten gebundene Oberfläche A_g und freie Oberfläche A_f wird nach Gleichung 4.5 der Formkennwert k_f berechnet:

$$\begin{aligned} k_f &= \frac{A_g}{A_f} \\ k_f &= \frac{50272}{39591} \\ k_f &= 1,27 \end{aligned}$$

Nach Abbildung 4.3 beträgt der Formfaktor k :

$$k = 16 \quad (4.34)$$

Der Schubmodul für eine geforderte Shorehärte von 55A wird in Abbildung 4.2 abgelesen:

$$G^{sh} = 8,4 \text{ kp/cm}^2 \quad (4.35)$$

4 Analytische Berechnung

$$G^{sh} = 0,824 \text{ N/mm}^2$$

Der rechnerische E-Modul ergibt sich aus dem in Gleichung 4.7 genannten Zusammenhang:

$$E_r = k G^{sh}$$

$$E_r = 16 \cdot 0,824$$

$$E_r = 13,2 \text{ N/mm}^2$$

Linearitätsgrenzen

Die linearen Gültigkeitsbereiche für Druck und Schub sind nach Gleichung 4.1 und 4.10 je Belastungsrichtung unterschiedlich definiert, es besteht aber ein Zusammenhang der Begrenzungsvariablen nach Gleichung 4.36. Bei einem kombinierten Lastfall aus Schub und Druck muss die Gesamtkraft einerseits in Abhängigkeit von γ für Schub und andererseits in Abhängigkeit von ε für Druck formuliert werden. In beiden Formeln setzt man die maximal zulässigen Grenzen ein und durch Vergleich beider Kräfte erhält man die maximal zulässige Kraft des linearen Bereichs. (Göbel, 1969, S. 41)

$$\tan \gamma = \varepsilon \frac{1}{\tan \alpha} \quad (4.36)$$

$$F_{x-max-schub} = 0,35 A_g \left(G \cos \alpha + E_r \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right) \quad (4.37)$$

$$F_{x-max-schub} = 0,35 \cdot 50272 \left(0,824 \cos \alpha + 13,2 \frac{\sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \right)$$

$$F_{x-max-schub} = 28140 \text{ N}$$

$$F_{x-max-druck} = 0,2 A_g \left(G \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + E_r \cos \alpha \right) \quad (4.38)$$

$$F_{x-max-druck} = 0,2 \cdot 50272 \left(0,824 \frac{\cos^2 \alpha}{\sin \alpha} + 13,2 \cos \alpha \right)$$

$$F_{x-max-druck} = 64459 \text{ N}$$

4 Analytische Berechnung

Die maximal zulässige Kraft im linearen Gültigkeitsbereich ist durch das Minimum beider maximal möglicher Axialkräfte definiert.

$$F_{x-max} = \min (F_{x-max-schub}; F_{x-max-druck}) \quad (4.39)$$

$$F_{x-max} = 28140 \text{ N} \quad (4.40)$$

Zur Ermittlung der Axialsteifigkeit wird die in Gleichung 4.39 ermittelte maximal zulässige Kraft in die nach dem Verschiebungsweg s_x umgeformte Gleichung 4.20 eingesetzt und die daraus resultierende Verschiebung berechnet.

$$s_x = \frac{F_{x-max} h}{A_g (G \cos^2 \alpha + E_r \sin^2 \alpha)}$$
$$s_x = \frac{28140 \cdot 39}{50272 (0,824 \cos^2 \alpha + 13,2 \sin^2 \alpha)}$$
$$s_x = 14,1 \text{ mm}$$

Um einen Überblick über die maximal gültigen Verschiebungen in Druck- und Schubrichtung zu erhalten, werden diese nachfolgend angeführt:

$$s_{druck} = s_x \sin \alpha \quad (4.41)$$

$$s_{druck} = 14,1 \sin \alpha$$

$$s_{druck} = 3,4 \text{ mm}$$

$$s_{schub} = s_x \cos \alpha \quad (4.42)$$

$$s_{schub} = 14,1 \cos \alpha$$

$$s_{schub} = 13,7 \text{ mm}$$

4 Analytische Berechnung

Die Axialsteifigkeit innerhalb des linearen Bereichs erhält man mit:

$$c_x = \frac{F_x}{s_x} \quad (4.43)$$

$$c_x = \frac{28140}{14,1}$$

$$c_x = 2000 \text{ N/mm}$$

Erweiterung auf eine mehrstufige Feder

Die bisher angeführte Berechnung der Axialsteifigkeit beschränkt sich auf lediglich eine Konusstufe, eine Erweiterung auf beliebig viele Stufen ist durch eine Serienschaltung der Axialsteifigkeiten problemlos möglich. Zu beachten gilt es, in jeder Stufe den Linearitätsbereich nicht zu überschreiten. Für die Berechnung der größtmöglichen Verschiebung innerhalb des Gültigkeitsbereichs ist die kleinste Kraft für alle Stufen einzusetzen.

Die axiale Gesamtfedersteifigkeit einer Konusfeder mit n Stufen, welche per Definition immer weicher als die weichste Teilstufensteifigkeit ist, berechnet man mit:

$$c_{ges} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{c_i}} \quad (4.44)$$

Die Steifigkeitswerte für die in Tabelle 4.1 angeführten Stufen zwei und drei ermittelt man nach jenem Schema, wie es für Stufe eins in Gleichung 4.20 - 4.43 beschrieben wird. Einige Parameter können für die äußeren Stufen aus geometrischen Abhängigkeiten abgeleitet werden, sodass nicht alle Parameter aus Stufe eins vorgegeben werden müssen. Die abhängigen Parameter R_1, r_1, l_1 und a können mittels Gleichungen 4.45 bis 4.48 berechnet werden. Der Index $(i + 1)$ bezeichnet die jeweils nächste zu betrachtende Stufe. Weiters wird angenommen, dass alle Zwischenbleche die gleiche Dicke a aufweisen (siehe Abbildung 4.7).

$$R_{1(i+1)} = R_{2i} + a \cos \alpha \quad (4.45)$$

$$r_{1(i+1)} = r_{2i} + a \cos \alpha \quad (4.46)$$

$$l_{1(i+1)} = l_{2i} \quad (4.47)$$

4 Analytische Berechnung

$$a = \text{konst.} \quad (4.48)$$

Abschließend werden in Tabelle 4.2 die Ergebnisse zusammengefasst. Spalte zwei mit F_{x-max} beinhaltet die maximale Kraft innerhalb des linearen Bereichs, Spalte drei mit s_{x-max} die pro Stufe maximal zulässige Verschiebung, Spalte vier die auf die maximale Gesamtkraft bezogene zulässige Verschiebung und Spalte fünf die resultierende Axialsteifigkeit.

Tabelle 4.2: Axialsteifigkeiten der Konusfeder

	Axialsteifigkeiten der Konusfeder			
	F_{x-max} [N]	s_{x-max} [mm]	$s_{x-max-ges}$ [mm]	c_x [N/mm]
Stufe 1	28140	14,1	14,1	2000
Stufe 2	58828	9,5	4,9	5749
Stufe 3	54417	7,5	3,9	7215
Gesamt	28139		23	1231

4.2.2 Lateralsteifigkeit

Idealisierung der Geometrie bei Lateralbeanspruchung

Die Lateralsteifigkeit, bei einer Konusfeder auch Quer- oder Radialsteifigkeit genannt, wird näherungsweise mit der Geometrie einer Hülsengummifeder abgeschätzt (siehe Abbildung 4.8). Beispielhaft werden Geometriedaten aus Tabelle 4.3 zur Ermittlung der Steifigkeiten eingesetzt.

Aufgrund der radialen Belastung treten im Bauteil Schub- und Normalbelastungen auf. Nach Göbel (1969, S. 42) berechnet man die gesamte Radialkraft bei einer vorgegebenen Verschiebung wie folgt:

$$F_r = s_r \frac{l \pi}{\ln \frac{r_a}{r_i}} (E + G) \quad (4.49)$$

Der Formfaktor k_1 wird benötigt, um den von der Härte und der Geometrie abhängigen Elastizitätsmodul korrekt zu berücksichtigen. Der Verlauf von k_1

4 Analytische Berechnung

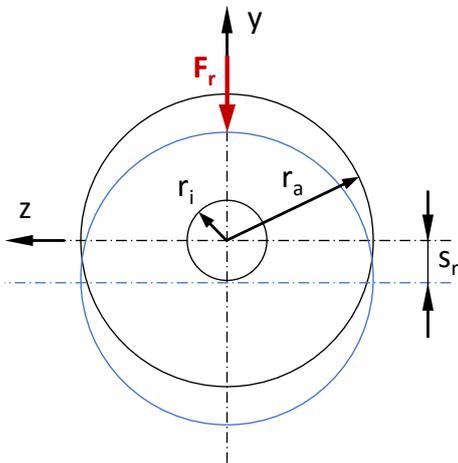


Abbildung 4.8: Schnittansicht der querbelasteten Hülsefeder (Vgl. Göbel, 1969, S. 42)

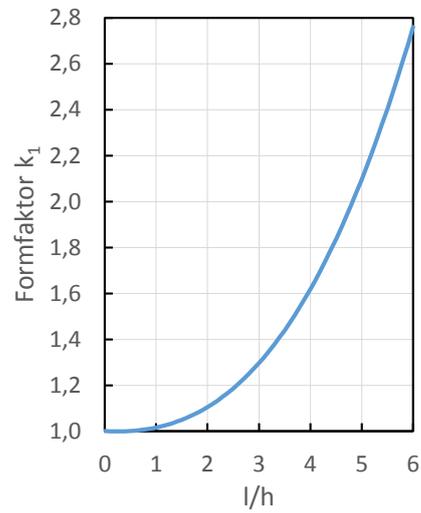


Abbildung 4.9: Ermittlung des Formfaktors k_1 (Vgl. Göbel, 1969, S. 43)

Tabelle 4.3: Geomtriedaten einer Hülsefeder

Geomtriedaten einer idealisierten Hülsefeder		
Stufe 1	Stufe 2	Stufe 3
$r_a = 78 \text{ mm}$	$r_a = 102 \text{ mm}$	$r_a = 121 \text{ mm}$
$r_i = 46 \text{ mm}$	$r_i = 81 \text{ mm}$	$r_i = 106 \text{ mm}$
$l = 154 \text{ mm}$	$l = 123 \text{ mm}$	$l = 97 \text{ mm}$

4 Analytische Berechnung

ist nach Göbel (1969, S. 43) abhängig vom Geometrieverhältnis Bauteillänge zu Gummihöhe $\frac{l}{h}$ und wird in Abbildung 4.9 dargestellt.

$$F_r = s_r \frac{7,5 \pi l G}{\ln \frac{r_a}{r_i}} k_1 \quad (4.50)$$

Die Lateralsteifigkeit ergibt sich zu:

$$c_r = \frac{F_r}{s_r} = \frac{7,5 \pi l G}{\ln \frac{r_a}{r_i}} k_1 \quad (4.51)$$

Die mit den Geometriedaten aus Tabelle 4.3 berechneten Lateralsteifigkeiten der als Hülsengummifeder idealisierten Konusfeder sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Die Ermittlung der Gesamtlateralsteifigkeit folgt dem Schema einer Serienschaltung wie in Gleichung 4.44.

Tabelle 4.4: Steifigkeiten der Konusfeder

Lateral- und Torsionsteifigkeiten der Konusfeder				
	$l \setminus h$	k_{f1}	c_r	c_t
	[–]	[–]	[N/mm]	[Nm/°]
<i>Stufe 1</i>	4,8	2,0	11140	88
<i>Stufe 2</i>	6,1	2,8	30309	411
<i>Stufe 3</i>	6,1	2,8	37862	796
<i>Gesamt</i>			6704	66

4.2.3 Torsionsteifigkeit

Bei Torsionsbeanspruchung wird wieder eine Geometrienäherung mittels Hülsengummifeder wie in Kapitel 4.2.2 gewählt, Konuswinkel und Versätze werden demnach vernachlässigt. Der lineare Gültigkeitsbereich erstreckt sich bei torsionsbelasteten Hülsengummifedern bis $\varphi = 40^\circ$. Der resultierende Zusammenhang zwischen Torsionsmoment M_t und Verdrehwinkel φ ergibt sich zu nachfolgender Gleichung (Göbel, 1969).

4 Analytische Berechnung

$$M_t = \varphi \frac{4 \pi l G}{\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}} \quad (4.52)$$

$$c_t = \frac{M_t}{\varphi} = \frac{4 \pi l G}{\frac{1}{r_i^2} - \frac{1}{r_a^2}} \quad (4.53)$$

Die mit den Geometriedaten aus Tabelle 4.3 berechneten Torsionsteifigkeiten der als Hülsengummifeder idealisierten Konusfeder sind in Tabelle 4.4 zusammengefasst. Die Ermittlung der Gesamtlateralsteifigkeit folgt dem Schema einer Serienschaltung wie in Gleichung 4.44.

4.3 Ergebnisse

Tabelle 4.5: Steifigkeiten der Federscheibe

	Axialsteifigkeit	Lateralsteifigkeit	Torsionsteifigkeit
	c_x [N/mm]	c_r [N/mm]	c_t [Nm/°]
<i>Gesamt</i>	6273	660	187

Tabelle 4.6: Steifigkeiten der Konusfeder

	Axialsteifigkeit	Lateralsteifigkeit	Torsionsteifigkeit
	c_x [N/mm]	c_r [N/mm]	c_t [Nm/°]
<i>Stufe 1</i>	2000	11140	88
<i>Stufe 2</i>	5749	30309	411
<i>Stufe 3</i>	7215	37862	796
<i>Gesamt</i>	1231	6704	66

Abschließend werden die Ergebnisse der analytischen Berechnung in Tabelle 4.5 und 4.6 zusammengefasst. Zu erkennen ist die deutlich höhere,

4 Analytische Berechnung

durch Normalkräfte verursachte, Drucksteifigkeit im Gegensatz zur Schubsteifigkeit. Bei der Federscheibe entspricht eine Axialbelastung einer reinen Druckbeanspruchung, wohingegen die Konusfeder in lateraler Richtung vorwiegend durch Normalkräfte belastet wird. Demnach ist bei der Federscheibe die Axialsteifigkeit höher als die Lateralsteifigkeit, bei der Konusfeder die Lateralsteifigkeit höher als die Axialsteifigkeit. Eine Gegenüberstellung mit Herstellermesswerten ist dahingehend nicht möglich, da diese axial außerhalb des linearen Bereichs und quer unter einer axialen Vorlast durchgeführt werden. Die analytischen Ergebnisse dienen demnach lediglich als Validierung der in Kapitel 5 durchgeführten Finite-Elemente-Simulationen.

5 Modellaufbau mit FEM

Die Simulation von Gummi-Metall-Bauteilen aus Kapitel 3 mittels Finite-Elemente-Methode erfordert einige Vorüberlegungen. Die Grundlagen der Hyperelastizität von Verzerrungs- und Spannungstensoren und deren Bezugsgrößen wurden bereits in Kapitel 2.2 behandelt. Ein Überblick über die Vorgangsweise der Modellierung beginnend bei der Vernetzungsmethodik bis hin zum Modellaufbau ist in Abbildung 5.1 dargestellt. Die einzelnen Schritte dieser Systematik werden in den Teilkapiteln 5.2.1-5.2.4 genauer diskutiert.

5.1 Benötigte Modelle in Abhängigkeit des Lastfalls

In Abhängigkeit des zu simulierenden Lastfalls wird für die Modellbildung bei rotationssymmetrischen Bauteilen ein axialsymmetrisches Modell, ein Sektormodell, ein dreidimensionales Halbmodell oder ein dreidimensionales Vollmodell benötigt. Dabei ist es zweckmäßig, mit dem axialsymmetrischen Modell und axialer Belastung zu beginnen und die weiteren Modelle darauf aufzubauen. Das Ausnutzen von Symmetriebedingungen und der Einsatz von *Pre-State-Analysis*, anders formuliert mit Ergebnissen aus einer axialsymmetrischen in einer dreidimensionalen Rechnung zu starten, kann die Simulationszeit der aufwendigen dreidimensionalen Modelle deutlich verkürzen (siehe Kapitel 5.3.2). In Tabelle 5.1 wird das je Lastfall minimal benötigte Modell mit dem Eintrag *min.* gekennzeichnet. Alle in einer Zeile rechts davon liegenden Modelle sind zwar möglich, die deutlich höhere Knotenanzahl verlängert aber den Berechnungsaufwand.

5 Modellaufbau mit FEM

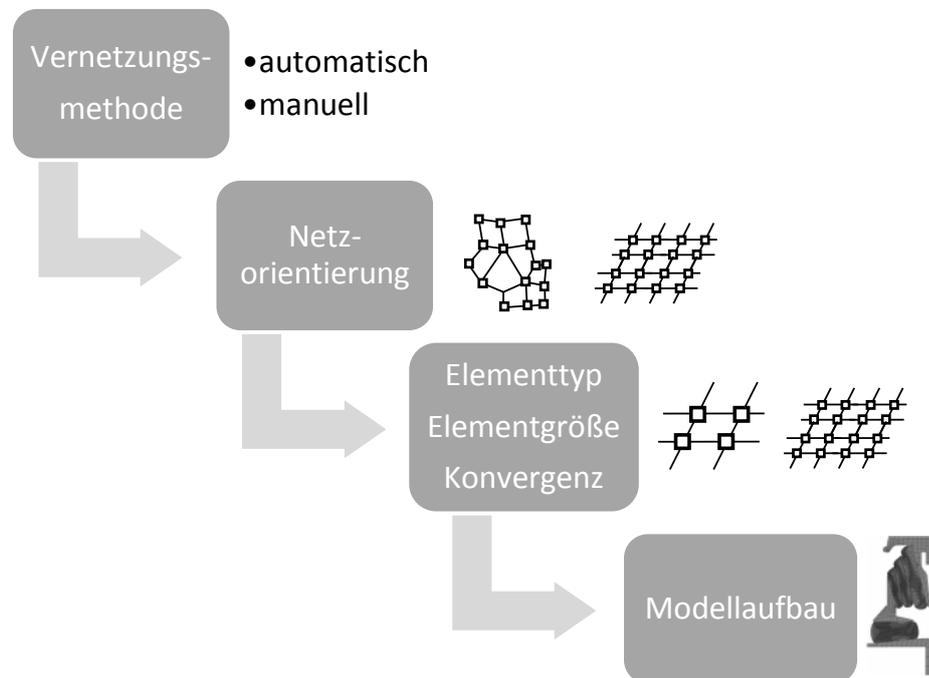


Abbildung 5.1: Systematik der FE-Modellierung

5 Modellaufbau mit FEM

Bei Torsionsbelastung kann grundlegend mit Sektormodellen unter Ausnützung einer Torsionssymmetriebedingung gerechnet werden, allerdings sollte das FE-Programm dafür eine Option bieten. In *MSC.Marc Mentat 2014* ist dazu die Torsionssymmetriebedingung *Cyclic Symmetry* zu aktivieren, jedoch kann mit diesen Sektormodellen nur eine reine Torsionsbelastung berechnet werden. Für eine Überlagerung von mehraxialen Belastungen, wie beispielsweise Axial- und Torsionsbelastung, ist ein dreidimensionales Vollmodell Voraussetzung.

Tabelle 5.1: Lastfall-Modell-Matrix

Lastfall-Modell-Matrix				
	<i>Axialsymmetrisch</i>	<i>3D-Sektor</i>	<i>3D-Halb</i>	<i>3D-Voll</i>
<i>Axial</i>	min.	ja	ja	ja
<i>Lateral</i>			min.	ja
<i>Biegung</i>			min.	ja
<i>Torsion</i>		min. ¹	ja ¹	ja

min.

minimal benötigtes Modell

ja

mögliches Modell

¹

Torsionssymmetriebedingung nötig, keine axiale Vorlast möglich

5.2 Axialsymmetrisches Modell

Ein axial- oder auch rotationssymmetrischer Spannungszustand ist ein häufiger Sonderfall der räumlichen Elastizität, der vielfach bei dickwandigen Rotationskörpern unter rotationssymmetrischer Belastung auftritt. Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen werden typischerweise in einem rotationssymmetrischen Koordinatensystem beschrieben. Da ein rotationssymmetrisches Spannungsproblem keine Winkelabhängigkeit über den Umfang aufweist, kann in einer Schnittebene modelliert werden. (Klein, 2014, S. 174 f.)

5.2.1 Vernetzung

Eine saubere Vernetzung der Bauteilgeometrie beeinflusst maßgebend die Berechnungsstabilität und die Qualität der Simulationsergebnisse. Oftmals ist sie sogar **das entscheidende Kriterium** für eine stabile Finite-Elemente-Rechnung. Bei großen Verformungen ist nicht nur die Vernetzung in der Ausgangskonfiguration entscheidend, viel mehr spiegelt sich die Stabilität der Rechnung im verformten Netz wider. Jede gängige FE-Software bietet Tools für eine automatische Vernetzung, die optimale Vernetzung der Geometrie wird aber in den seltensten Fällen auf Anhieb erreicht. Sollte es die Geometrie erlauben, ist speziell bei Quad-Elementen eine manuelle Vernetzung in Erwägung zu ziehen.

5.2.2 Ungeordnete oder geordnete Vernetzung

Unabhängig von der Methodik der Netzerstellung ist grundsätzlich zwischen geordneten und ungeordneten Netzen zu unterscheiden. Geordnete Netze erkennt man beispielsweise bei Quad-Elementen daran, dass deren Kanten nahezu stromlinienförmig durch das Volumen ausgerichtet sind und von jedem Knoten vier Elementkanten wegführen. Diese Struktur resultiert in einer erhöhten Berechnungsgeschwindigkeit und -stabilität gegenüber willkürlich ausgerichteten Netzelementen. Insbesondere kann die Kontaktstabilität hinsichtlich Durchdringungen mit dieser Art der geordneten Vernetzung, wie sie in Abbildung 5.2 dargestellt ist, positiv beeinflusst werden.

Erstellung eines geordneten Netzes

Die Vorgangsweise der manuellen Vernetzung wird anhand einer Tonnenfedergeometrie erklärt und ist großteils unabhängig von der eingesetzten Software (siehe Abbildung 5.3). Zuerst erstellt man die Geometrie oder importiert diese aus einem CAD-File. Gegebenenfalls sind bereits an dieser Stelle erste Vereinfachungen zu treffen. Anschließend vernetzt man die Stahlkomponenten und fasst diese in einem Set, sofern das FE-Programm dies unterstützt, zusammen. Dadurch ist es später möglich, die Stahlteile bequem auszublenden. Über den Gummibereich legt man ein einzelnes Element und unterteilt dies zuerst in jene Richtung, die vorwiegend normal

5 Modellaufbau mit FEM

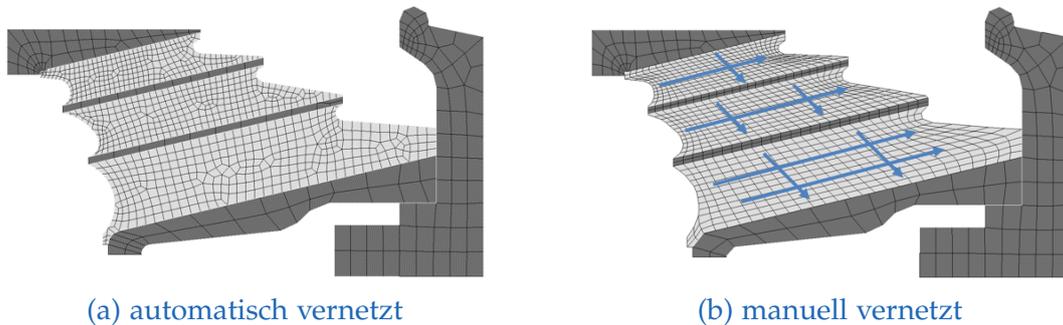


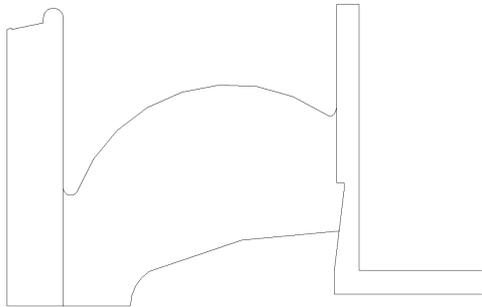
Abbildung 5.2: Vernetzung einer axialsymmetrischen Geometrie

zur freien Oberfläche liegt. Im Beispiel der Tonnenfeder wird folglich zuerst vertikal geteilt, wodurch sich eine erste gute Näherung der Außenkontur ergibt. In horizontaler Richtung bietet es sich an, zuerst in zwei Subbereiche zu gliedern und erst danach horizontal den großen Bereich zu teilen. Abschließend kann durch eine geeignete gleichzeitige Teilung in horizontaler und vertikaler Richtung die Elementgröße beliebig verkleinert werden (siehe Konvergenz in Kapitel 5.2.3). Je nach der zu vernetzenden Geometrie muss man die Positionen einzelner Knoten nachjustieren, um stark verzerrte Elemente zu eliminieren. Die genannte Vorgangsweise stellt **keinesfalls die optimale Lösung** einer Vernetzung dar, ist aber einfach durchzuführen und eine gute Alternative für automatisch erstellte Netze.

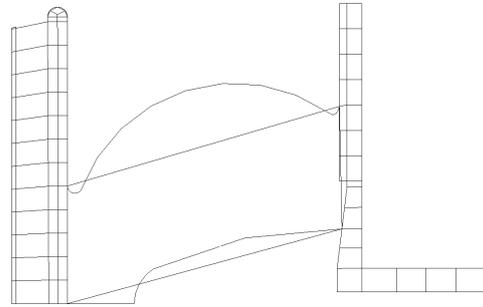
5.2.3 Lösungskonvergenz

Bei der Erstellung eines geeigneten Netzes für den Gummibereich ist es entscheidend, eine optimale Anzahl von Elementen hinsichtlich Berechnungsaufwand und Genauigkeit zu wählen. Eine zu hohe Anzahl von Elementen erhöht unnötig die Rechenzeit, senkt die Stabilität der Rechnung und verursacht Kontaktprobleme, wohingegen zu wenig Elemente tendenziell ein zu steifes Verhalten aufweisen. Bei den Elementtypen ist einerseits zwischen Dreieck- und Viereckelementen und andererseits zwischen Elementen mit linearer und quadratischer Ansatzfunktion zu unterscheiden, wobei letztgenannte Probleme mit Kontaktanalysen verursachen. Dreiecks- sowie Tetraederelemente mit linearer Ansatzfunktion weisen nach Klein

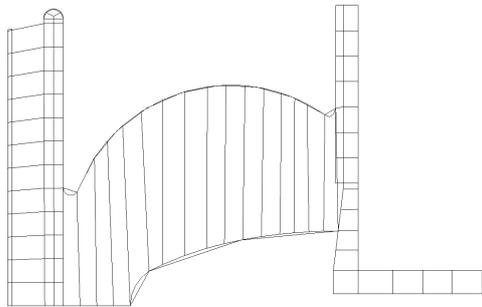
5 Modellaufbau mit FEM



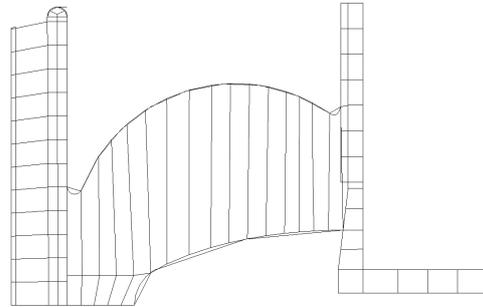
(a) Geometrieimport



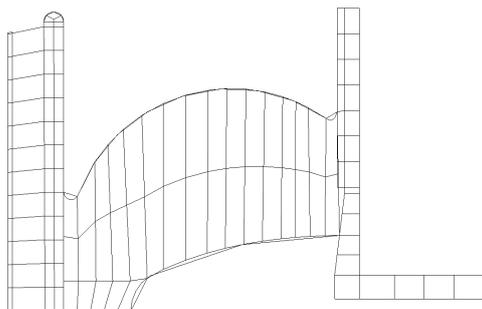
(b) Stahlvernetzung



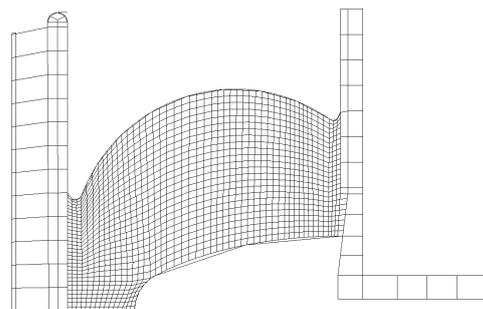
(c) vertikale Teilung



(d) horizontale Gliederung



(e) horizontale Teilung



(f) allgemeine Teilung

Abbildung 5.3: manuelle Vernetzung

5 Modellaufbau mit FEM

(2014, S. 121) bei gleicher Knotenanzahl ein deutlich schlechteres Konvergenzverhalten auf als Viereckelemente, deshalb werden im weiteren Verlauf nur Viereckelemente im axialsymmetrischen und Hexaederelemente im dreidimensionalen Fall verwendet. Bezüglich der Elementformulierung ist zwischen vollintegrierten und reduziert integrierten Elementtypen sowie Hybrid-Elementen zu unterscheiden.

Vollintegrierte Elemente besitzen acht Integrationspunkte und weisen einen vergleichsweise hohen Berechnungsaufwand auf, reduziert integrierte Elementtypen haben dagegen nur einen Integrationspunkt in der Mitte und verkürzen die Rechenzeit. Hybrid-Elemente gibt es voll- oder reduziert integriert und haben den Druck, welcher über das Materialgesetz im Kompressionsmodul definiert ist, als zusätzlichen Freiheitsgrad eingebaut. (Stommel, Stojek und Korte, 2011, S. 241)

Das vollintegrierte Hybridelement ist für den axialsymmetrischen Fall mit linearer Ansatzfunktion in MSC.Marc Mentat 2014 als Typ 82 implementiert und eignet sich für inkompressible Werkstoffe wie z.B. Elastomere (*Marc 2014 Volume B: Element Library 2014*, S. 441).

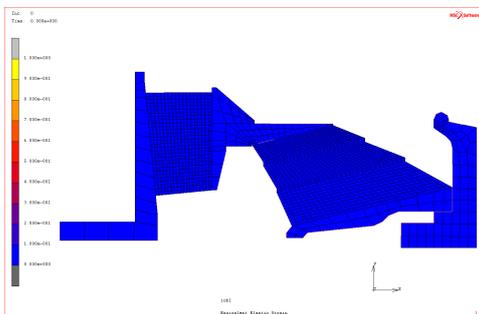


Abbildung 5.4: Vereinfachte Geometrie - unbelastet

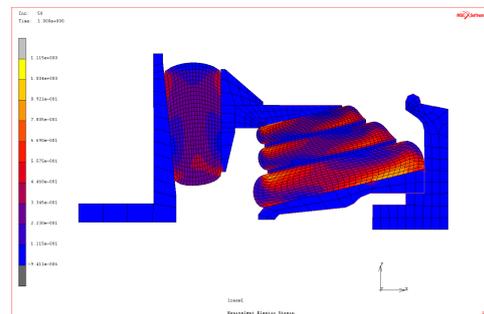


Abbildung 5.5: Vereinfachte Geometrie - belastet

Die Wahl einer geeigneten Elementgröße wird anhand einer vereinfachten Zusatzfedergeometrie ausgewertet (siehe Abbildung 5.4 und 5.5). Abbildung 5.6 stellt den Axialkraftverlauf bei axialsymmetrischer Modellierung und unterschiedlicher Anzahl von Elementen mit linearer Ansatzfunktion dar. Es ist zu erkennen, dass wenige große Elemente ein deutlich zu steifes Verhalten bewirken und sich die Kennlinie ab einer bestimmten Anzahl von Elementen nicht mehr nach unten hin verschiebt.

5 Modellaufbau mit FEM

Die Axialkraft bei 50 mm Verschiebung wird in Abbildung 5.7 sowohl für eine unterschiedliche Elementanzahl als auch für Elemente mit linearer und quadratischer Ansatzfunktion gegenübergestellt. Elemente mit linearer Ansatzfunktion konvergieren ab ca. 2000 Elementen, Elemente mit quadratischen Ansatzfunktionen bereits ab ca. 700 Elementen in ihrem Axialkraftverlauf gegenüber der größten simulierten Elementanzahl von ca. 7000 Elementen. Der Vorteil weniger großer Elemente kann bei genauem Modellaufbau nicht genutzt werden, eine genaue Abbildung der Außenkontur erfordert ohnehin eine feine Vernetzung des Modells. Wegen des deutlich besseren Kontakt- und Stabilitätverhaltens bei gleicher Elementgröße werden im Folgenden Elemente mit linearer Ansatzfunktion eingesetzt. Die hierzu erforderlichen 2000 Elemente entsprechen einer durchschnittlichen Elementkantenlänge von 4 mm. Diese Elementgröße wird als Richtwert für die spätere Vernetzung der exakten Außenkontur verwendet.

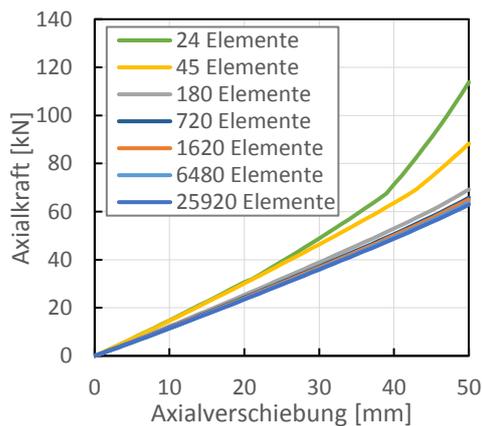


Abbildung 5.6: Axialkraftverlauf

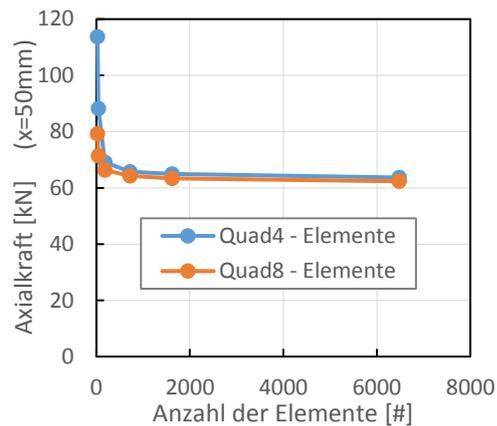


Abbildung 5.7: Axialkraft bei 50mm

5.2.4 Randbedingungen

Nachstehend werden eine Reihe von Randbedingungen definiert, die typisch für Gummi-Metall-Bauteile sind. Dazu zählen Reibung zwischen Gummi und Metall, Kontaktdefinitionen und äußere Lasten. Der Fokus liegt

dabei auf einer möglichst einfachen Definition, ohne aber wichtige Details wegzulassen.

Reibung

Die Reibung von Gummi und Metall hängt maßgebend von der Oberflächenbeschaffenheit und den Umgebungseinflüssen ab, ohne Kenntnis dieser Einflussgrößen ist der Reibkoeffizient einer großen Streuung unterworfen. Als guter Richtwert hat sich ein Reibkoeffizient von $\mu = 0,5$ erwiesen, sowohl für Gummi-Metall-Kontakt als auch für Gummi-Gummi-Kontakt. In *MSC.Marc Mentat 2014* wird das Reibungsmodell *Coulomb Bilinear (Displacement)* ausgewählt, welches auf der relativen Verschiebung zwischen zwei Kontaktkörpern basiert. Obwohl in manchen Simulationen die Reibung einen eher geringen Einfluss auf die Steifigkeitsauswertung aufweist, wirkt sich diese äußerst positiv auf die Stabilität in den Kontaktbereichen aus.

Kontakt

Simuliert man Gummi-Metall-Bauteile mit der Finiten Elemente Methode und will man Durchdringungen vermeiden, so wird man aufgrund angrenzender Metallteile mit der Definition von Kontaktbedingungen konfrontiert sein. Die nachstehenden Erfahrungen basieren auf Simulationen mit *MSC.Marc Mentat 2014*, die zugrundeliegende Vorgangsweise ist aber allgemein gültig. Vor der Kontaktdefinition müssen potentielle Kontaktregionen festgelegt werden. Dabei sind alle erdenklichen Lastfälle mit zu berücksichtigen, bereits im axialsymmetrischen Modell muss demzufolge eine Querverschiebung bedacht werden. Redundante Kontaktkörper sollten nach Möglichkeit zu einem Einigen zusammengefasst werden. Beispielhaft ist dies anhand einer Konusfeder in [Abbildung 5.8](#) dargestellt. Als gute Einteilung erweist sich eine Klassifizierung in vier Teilkontaktkörper:

- Stahl
- Gummi (Touching)
- Gummi (Glue)
- virtueller starrer Prüfkörper

Der Gummi wird dabei in Zonen geteilt, die entlang der freien Oberfläche liegen und in jene, die an das Metall gebunden sind. Bereiche in einem Körper, bei denen ohnehin kein Kontakt auftreten kann, sollten vom Kontaktkörper ausgeschlossen werden, hierzu zählt beispielsweise das Innere

5 Modellaufbau mit FEM

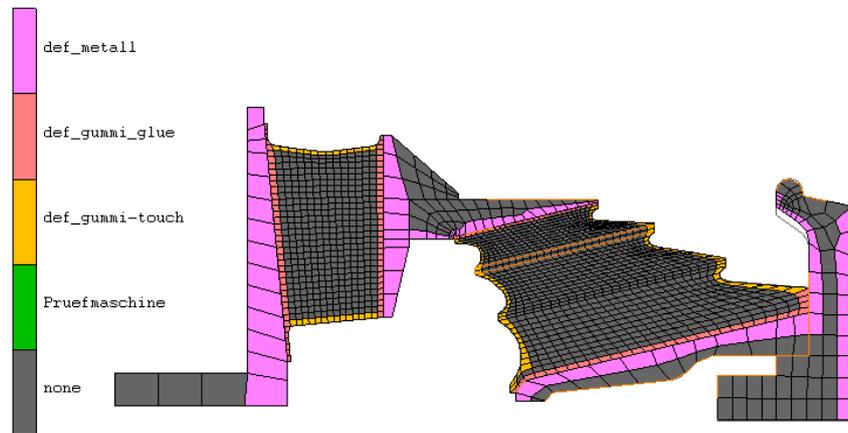


Abbildung 5.8: Kontaktdefinition eines Konusfedermodells

eines Gummivolumens. Jede unnötige Kontaktdefinition erhöht den Rechenaufwand und senkt die Stabilität der Simulation.

Äußere Lasten

Randbedingungen wie Einspannungen, äußere Momente und Kräfte werden über die gängige Methodik in *MSC.Marc Mentat 2014* definiert, wobei zwischen Randbedingungen mit Knoten und Kontaktrandbedingungen zu unterscheiden ist. Die Randbedingung mittels Kontaktkörper ist vor allem dann zu empfehlen, wenn Kraft-Weg-Kennlinien ausgewertet werden sollen, da diese sofort für das gesamte Bauteil im *Result-File* zur Verfügung stehen. Bei einer Einspannung mittels starrem Verbindungselement vom Typ *RBE2* gibt es in *MSC.Marc Mentat 2014* Probleme bei der Erweiterung eines axialsymmetrischen Modells auf ein 3D-Modell.

5.3 3D-Modell

Bei der Analyse von dreidimensionalen Bauteilen und kombinierten mehraxialen Lastfällen kommen Volumenelemente zum Einsatz. Gegenüber planaren oder rotationssymmetrischen Modellen steigt bei dreidimensionaler Modellierung die Knoten- und Elementanzahl stark an. Die resultierenden

großen Gesamtmatrizen erfordern ein Mehr an Rechenleistung und Speicherplatz. Die Zielsetzung nach Klein (2014), möglichst wenig Elemente, dafür aber solche höherer Ordnung zu verwenden, kann bei der Modellierung von Gummi-Metall-Bauteilen und großen Verzerrungen nicht eingehalten werden. Die zugrundeliegende Ursache verhält sich analog zum axialsymmetrischen Problem der Lösungskonvergenz in Kapitel 5.2.3. (Klein, 2014, S.169)

5.3.1 Erweiterung des axialsymmetrischen Modells

Ein vollständig aufgebautes rotationssymmetrisches Modell wird durch Einteilung des Winkels in Umfangsrichtung auf ein dreidimensionales Modell erweitert. Für die Betrachtung von Steifigkeiten zeigt sich eine Einteilung in $10 \times 36^\circ$ als konvergent hinsichtlich Kraft-Weg und Moment-Winkel Beziehungen. Dabei können, je nach FE-Software, in der Regel alle Randbedingungen beibehalten beziehungsweise erweitert werden. Während der Erweiterung von axialsymmetrisch auf dreidimensional finden folgende Konversationen statt:

- Geometriotyp: Kurve \rightarrow Oberfläche
- Elementtyp: axialsymmetrisch \rightarrow dreidimensional

Um einen axialsymmetrischen Lastfall aus einer axialsymmetrischen Simulation nicht im dreidimensionalen Modell wiederholen zu müssen, gibt es in *MSC.Marc Mentat 2014* die Möglichkeit einer *Pre-State-Analysis*. Die zugehörige Vorgangsweise wird im folgenden Teilkapitel erläutert.

5.3.2 Direkte Übergabe mit axialen Vorlasten

Bei der Betrachtung von Federelementen in einem Fahrwerk oder Drehgestell (siehe Kapitel 3.3) ist man häufig mit folgendem Lastfall konfrontiert: Das Gummi-Metall-Bauteil befindet sich in Einbaulage aufgrund der Gewichtslast des tragenden Elements unter axialer Vorspannung. Nun ist man an zusätzlichen Federsteifigkeiten in Querrichtung, Torsion und Biegung exakt in dieser Einbausituation interessiert. Da das Axialverhalten bereits an

5 Modellaufbau mit FEM

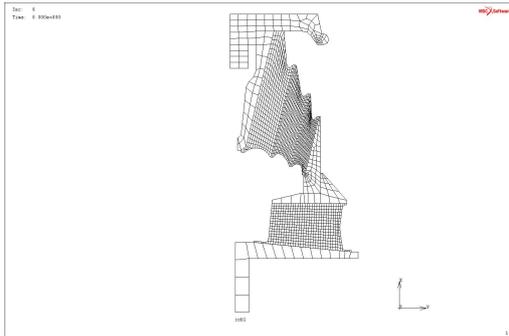
einem axialsymmetrischen Modell simuliert wurde, wäre es doch zweckmäßig, direkt den axialen Spannungs- und Verzerrungszustand als Startpunkt einer weiteren Analyse zu verwenden. In *MSC.Marc Mentat 2014* kommt hierfür eine *Initial Condition* vom Type *General* → *Axisymmetric to 3-D* zum Einsatz, wodurch der vorige axialsymmetrische Spannungszustand auf ein dreidimensionales Modell angewandt wird. Dieses Vorgehen, wie in Abbildung 5.9 dargestellt, beschleunigt die Rechenzeit enorm, als Vergleich sei folgendes Beispiel angeführt: Benötigt die axialsymmetrische Rechnung ca. 60 s, so kann man für eine äquivalente dreidimensionale Simulation in etwa 15 min und mehr einplanen. Bei Berücksichtigung mehrerer Iterationsschritte einer Simulation liegt der Vorteil der Zeitersparnis auf der Hand. Wie bei jeder Vereinfachung üblich empfiehlt es sich auch hier, einmalig die Simulationsergebnisse einer rotationsymmetrischen und einer dreidimensionalen Rechnung gegenüberzustellen.

5.4 Sektormodell

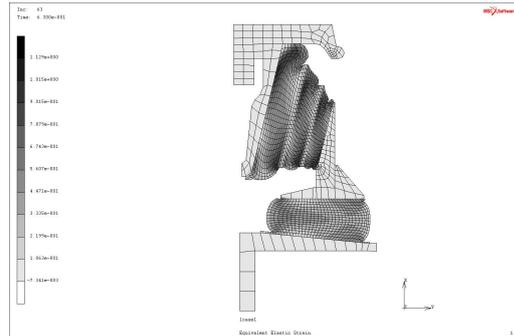
Erweitert man axialsymmetrische Modelle auf einen Rotationswinkel $< 360^\circ$, demzufolge auf einen Kreissektor, so spricht man von einem Sektormodell. Sonderfälle eines Sektormodells sind Viertel-, Halb- und Vollmodelle. Außer den Halbmodellen kommt bei Gummi-Metall-Bauteilen den Sektormodellen keine große Bedeutung zu (siehe Tabelle 5.1), da Torsionsbelastungen in den seltensten Fällen ohne axialer Vorspannung relevant sind. Halbmodelle eignen sich mit einer Symmetriebedingung für Belastungen quer zur Rotationsachse, dazu zählen Lateral- und Biegebeanspruchungen. Die erforderliche Symmetriebedingung ist folgendermaßen als *Fixed Displacement* zu definieren: Einerseits werden translatorisch Knotenverschiebungen normal zur Symmetrieebene und andererseits rotatorisch Verdrehungen aus dieser heraus gesperrt. Ist in einem kartesischen Koordinatensystem die Symmetrieebene beispielsweise z, so sind folgende Symmetriebedingungen zu definieren:

- Verschiebung z gesperrt
- Rotation x und y gesperrt

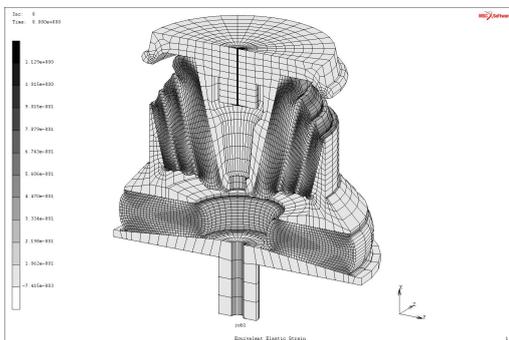
5 Modellaufbau mit FEM



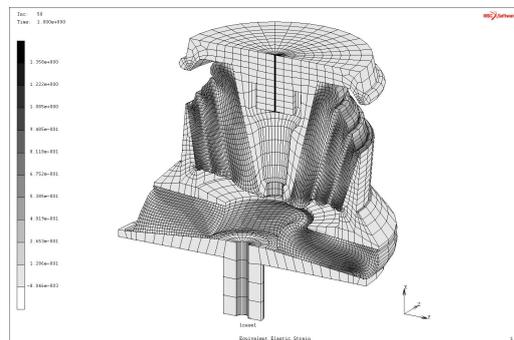
(a) axialsymmetrisch unbelastet



(b) axialsymmetrisch axial belastet



(c) 3D axial belastet



(d) 3D axial und lateral belastet

Abbildung 5.9: Direkte Übergabe mit axialer Vorlast

Die Kombination aus axialer und torsionaler Belastung erfordert zwingend ein dreidimensionales Vollmodell.

5.5 Aufbau von Zusatzfedermodellen

In diesem Teilbereich werden Simulationsmodelle für die in Kapitel 3.3 vorgestellten Gummi-Metall-Bauteile der Sekundärfederstufe erstellt. Neben der Vernetzung der Geometrie wird in einem weiteren Schritt das benötigte Materialmodell in Abhängigkeit der maximalen Belastung ermittelt. Um während des Betriebs ein Auftreten des Mullins-Effekts auszuschließen, werden die Bauteile vorkonditioniert (siehe Kapitel 3.2.1). Diese Konditionierung findet in der Regel in Hauptbelastungsrichtung, bei rotationssymmetrischen Bauteilen demzufolge axial, statt.

5.5.1 Zusatzfedersysteme GMT

System Konusfeder und Federscheibe

Das betrachtete Zusatzfedersystem besteht aus einer Serienschaltung von Federscheibe und Konusfeder, wobei letztere dreistufig ausgeführt ist. In Abbildung 5.10 ist eine Geometrieskizze, ein rotationssymmetrisches Modell unter axialer Belastung und ein dreidimensionales Halbmodell unter lateraler Verschiebung dargestellt. Die Vernetzung der Geometrie erfolgt manuell nach dem Schema aus Kapitel 5.2. Kennzeichnend für dieses System ist die nahezu vollständig durch die Federscheibe ausgeführte Lateralverschiebung. Zusätzlich stellt sich, bedingt durch die Konusfeder, bei Lateralbelastung ein Biegewinkel in der Federscheibe ein. Dadurch erweicht sich das laterale Systemverhalten zusätzlich.

Das Bauteil wird mit einer Axialkraft von 200 kN vorkonditioniert. Die wahren Hauptnormaldehnungen für diesen Belastungszustand sind in Abbildung 5.11 dargestellt. Darin ist zu erkennen, dass große Bereiche deutlich über $> 70\%$ wahre Hauptnormaldehnung aufweisen und ein zweiparametrisches Mooney-Materialmodell hier ungeeignet wäre. Das verwendete

5 Modellaufbau mit FEM

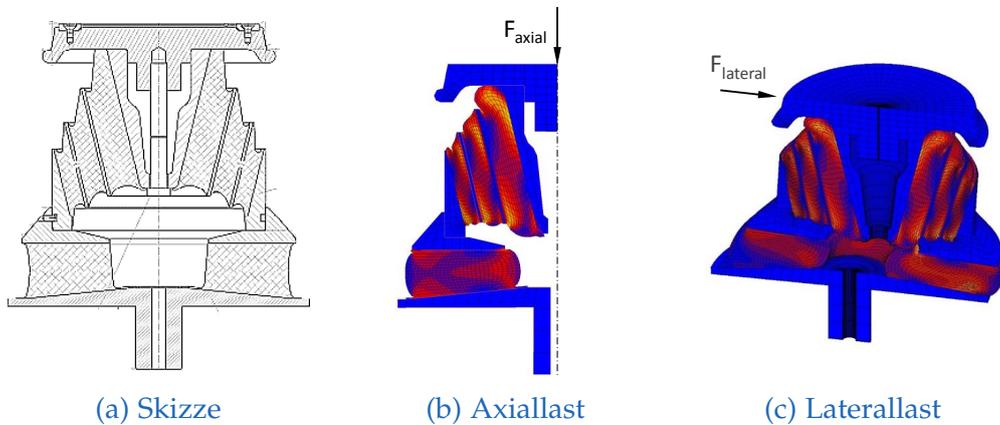


Abbildung 5.10: Modellierung System KF und FS
(Skizze aus: GMT, 2010a, S.3)

Materialmodell ist ein Third-Order-Deformation - Modell nach James-Green-Simpson mit einem uniaxialen Konditionierungsgrad von 150 % technischer Dehnung. Das Third-Ordner-Deformation - Modell kann den Wendepunkt in der Spannungs-Dehnungs-Kurve abbilden und ist demnach für wahre Dehnungen $> 70\%$ geeignet (siehe Kapitel 2.2.5). Die Federscheibe wird mit einer Shorehärte 45 A und die Konusfeder mit Sh55 A gemäß Hersteller-Mischungsdatenblätter modelliert.

System Tonnenfeder

Die Tonnenfeder besitzt nur an der oberen und an der unteren Metallaufnahme gebundene Oberflächen und besteht vollständig aus Gummi. Der Modellierungsaufbau ist in Abbildung 5.13 ausgehend von einer Skizze über ein rotationssymmetrisches Modell bis zu einem dreidimensionalen Halbmodell dargestellt. Die Vernetzung der Geometrie erfolgt manuell nach dem Schema aus Kapitel 5.2.

Die Vorkonditionierung findet bei 200 kN Axialkraft statt. In diesem Zustand übertritt nach Abbildung 5.12 nur ein minimaler Bereich die Grenze 70 % wahre Hauptnormaldehnung, bis zu derer das zweiparametrische Modell gültig ist. Auch in den anderen Lastfällen, die für den Betrieb spezifiziert sind, überschreiten die Dehnungen diese Grenze nicht weiter als in Abbildung 5.12 dargestellt. Aus diesem Grund kommt ein zweiparametrisches Mooney-Modell zum Einsatz. Die Shorehärte beträgt seitens Siemens bei

5 Modellaufbau mit FEM

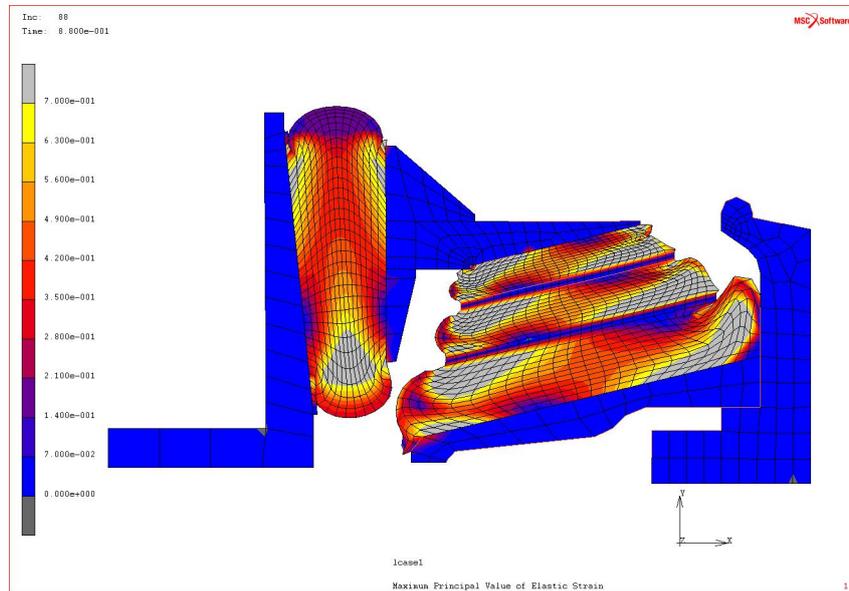


Abbildung 5.11: Wahre Hauptnormaldehnung bei 200kN Axiallast (KF und FS)

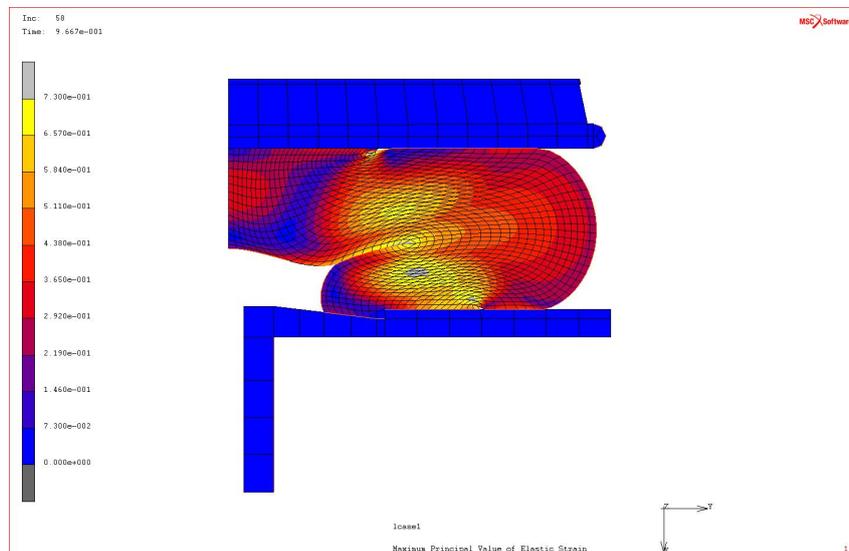


Abbildung 5.12: Wahre Hauptnormaldehnung bei 200kN Axiallast (TF)

5 Modellaufbau mit FEM

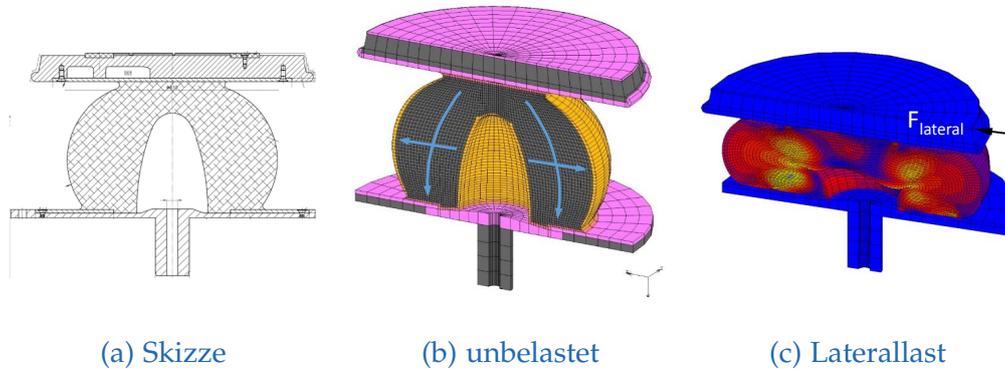


Abbildung 5.13: Modellierung System Tonnenfeder
(Skizze aus: GMT, 2010b, S.17)

der Wareneingangsprüfung Sh54 A und seitens GMT Sh49 A. Für die axiale Kraft-Weg-Kennlinie kann mit einem Modell mit Sh52 A die beste Übereinstimmung zwischen Herstellerprüfung und FE-Simulation gefunden werden, daher wird ein Materialmodell dieser Härte für die Simulation verwendet.

5.5.2 Zusatzfedersystem Paulstra

Diese Zusatzfeder besteht, wie in Abbildung 5.14 dargestellt, aus einer dreistufigen Konusfeder. Das Lateralverhalten der Zusatzfeder ist aufgrund der fehlenden Federscheibe deutlich steifer gegenüber dem System Konusfeder und Federscheibe vom Hersteller GMT. Die Vernetzung der Geometrie erfolgt manuell nach dem Schema aus Kapitel 5.2. Das Bauteil wird mit 140 kN axial konditioniert, die resultierenden wahren Hauptnormaldehnungen sind in Abbildung 5.15 dargestellt. Große Bereiche der äußeren Konusfederstufe weisen deutlich höhere wahre Hauptnormaldehnungen als 70 % auf, daher wird wieder ein Third-Order-Deformation - Modell mit einem uniaxialen Konditionierungsgrad von 150 % uniaxialer technischer Dehnung eingesetzt. Zur Härte der Gummimischung liegen keine Angaben vor, für das Modell wird die Härte Sh55 A eingesetzt, da dieses am ehesten mit der Axialkennlinie übereinstimmt.

5 Modellaufbau mit FEM

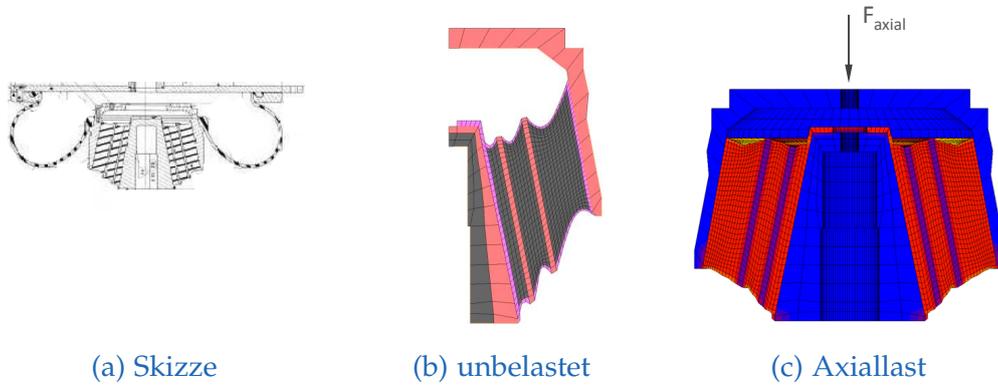


Abbildung 5.14: Modellierung System KF
(Skizze aus: Paulstra, 2007)

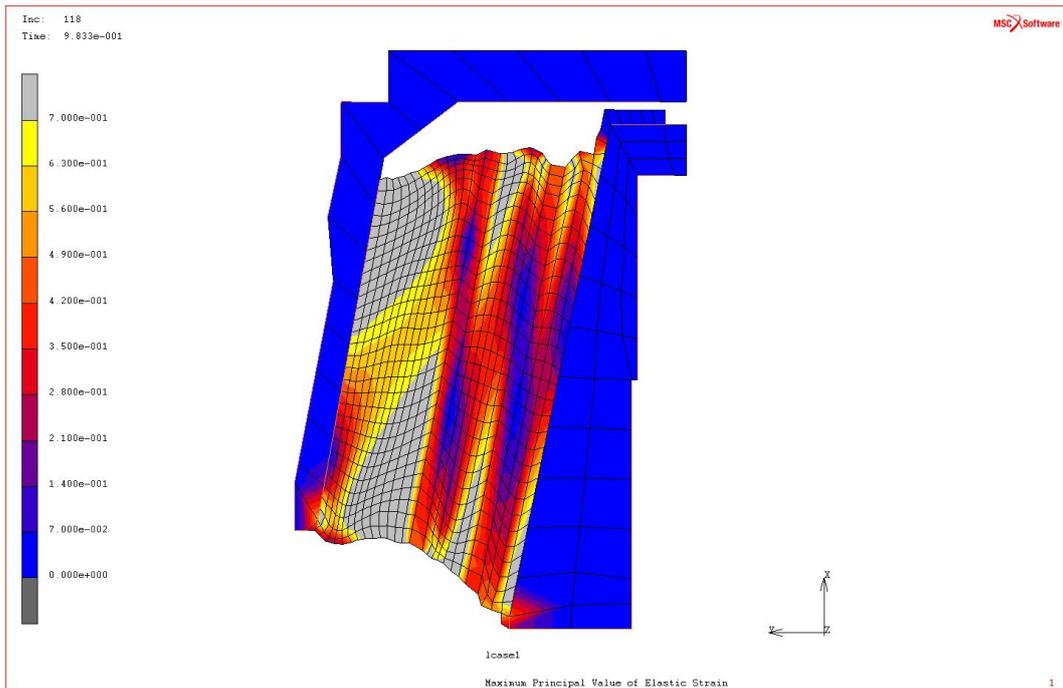


Abbildung 5.15: Wahre Hauptnormaldehnung bei 140kN Axiallast (KF)

5.6 Ergebnisse

Abschließend werden die Ergebnisse der FE-Simulationen den Hersteller-messungen gegenübergestellt. Die in Kapitel 4 ermittelten analytischen Berechnungsergebnisse sind auf den linearen Bereich beschränkt, der meist unterhalb des Betriebsbereichs der Bauteile liegt. Ein Vergleich von Hersteller-messungen und analytischen Ergebnissen kann daher nicht angeführt werden, stattdessen werden die FE-Simulationen im linearen Bereich den analytischen Ergebnissen in einem getrennten Vergleich gegenübergestellt. Die Hersteller-Messergebnisse sind jeweils mit einem Toleranzband von $\pm 12,5\%$ eingetragen, da Streuungen sowohl produktions- als auch messtechnisch berücksichtigt werden müssen.

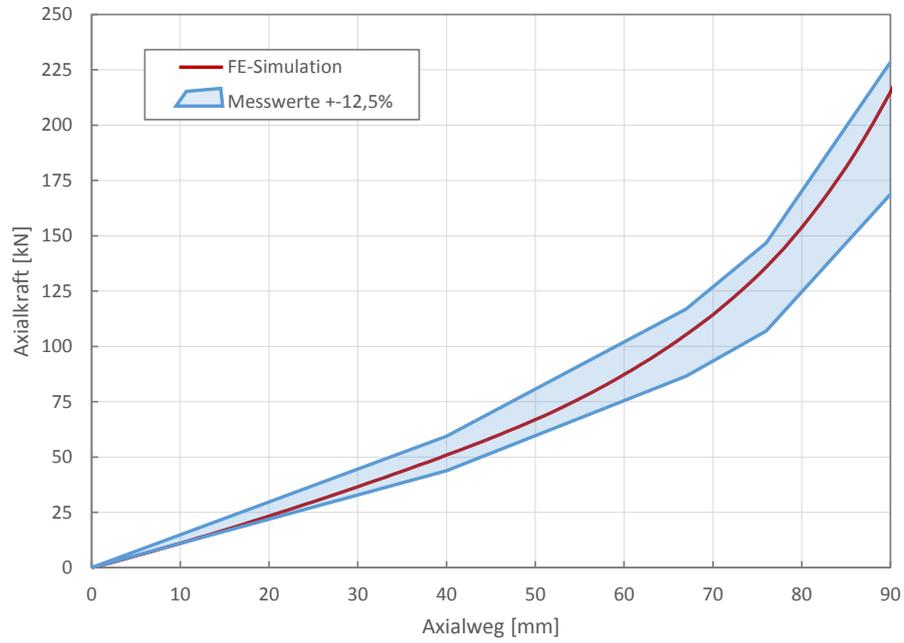
5.6.1 Vergleich mit Hersteller-Messungen

System Konusfeder und Federscheibe (GMT)

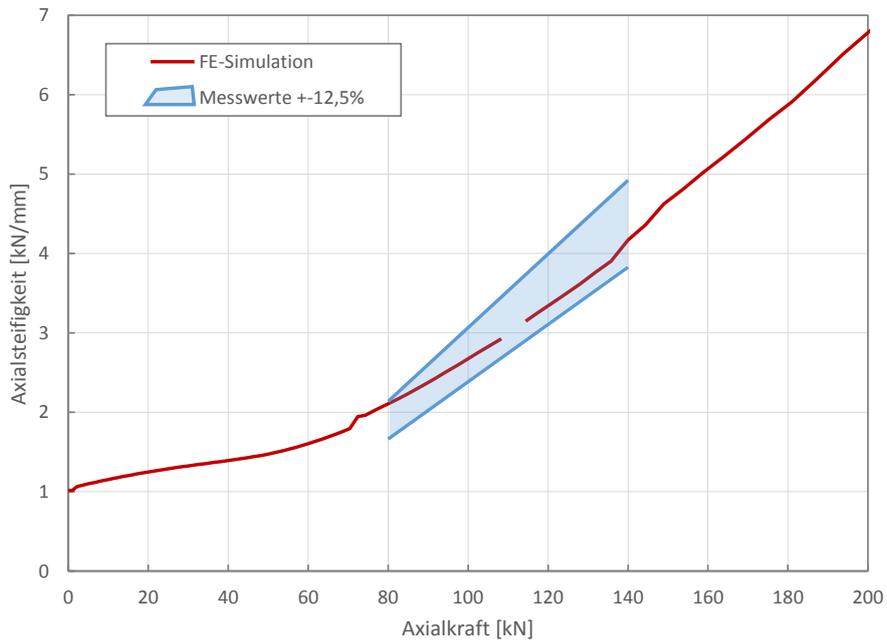
Die FE-Simulation des Zusatzfedersystems Konusfeder und Federscheibe zeigt in axialer Richtung sowohl für die Kraft-Weg- als auch für die Steifigkeits-Kraft-Kennlinie eine sehr gute Übereinstimmung über den gesamten Kennlinienverlauf. Der Axialkraftverlauf weist ein tendenziell zu steifes Verhalten im oberen Betriebsbereich auf, wohingegen sich die Steifigkeit in diesem Bereich im unteren Toleranzband befindet. (siehe Abbildung 5.16)

Betrachtet man die Ergebnisse unter den Schublastfällen Lateral und Torsion, so zeigen sich tendenziell zu weiche Simulationsergebnisse gegenüber den Messwerten. Kennzeichnend für Schublastfälle sind nahezu konstante Kraft-Weg- und Moment-Drehwinkel-Beziehungen, daher werden lediglich Sekantensteifigkeiten (siehe Kapitel 2.4) unter verschiedenen Axiallasten betrachtet. Lateral befindet sich die Größenordnung der Abweichung innerhalb des Toleranzbereichs mit größer werdender Differenz bei höherer Axialvorspannung (siehe Abbildung 5.18a). Torsionsprüfungen liegen lediglich für das gesamte Sekundärfedersystem inklusive Luftfeder vor. Die Messwerte in Abbildung 5.17a basieren auf einer Rückrechnung aus der Serienschaltung von Zusatzfeder und Luftfeder unter der Annahme einer

5 Modellaufbau mit FEM



(a) Axialkraft (KF und FS)



(b) Axialsteifigkeit (KF und FS)

Abbildung 5.16: Axialkraft und Axialsteifigkeit (KF und FS)

5 Modellaufbau mit FEM

Torsionssteifigkeit der Luftfeder von 1000 Nm/deg . Nach einem durchgeführten *Design Review* der Konusfeder wurde das Zusatzfedersystem torsional geprüft. Die Ergebnisse in Abbildung 5.17b, verglichen mit einem angepassten Simulationsmodell an die neue Geometrie und Gummimischung, liegen im unteren Betriebsbereich gerade noch im Toleranzband. Mit größer werdender Axiallast nimmt die Simulationengenauigkeit ab und liefert erneut deutlich zu weiche Ergebnisse. In beiden Schublastfällen nimmt demnach die Genauigkeit der Simulation bei höherer Axiallast ab. (siehe Abbildungen 5.17 und 5.18a)

In Biegerichtung liegen keine Messwerte vor, demzufolge kann kein Vergleich angeführt werden. Die Simulationsergebnisse weisen einen nahezu linearen Anstieg der Biegesteifigkeit in Abhängigkeit der axialen Vorlast auf und sind in Abbildung 5.18b dargestellt.

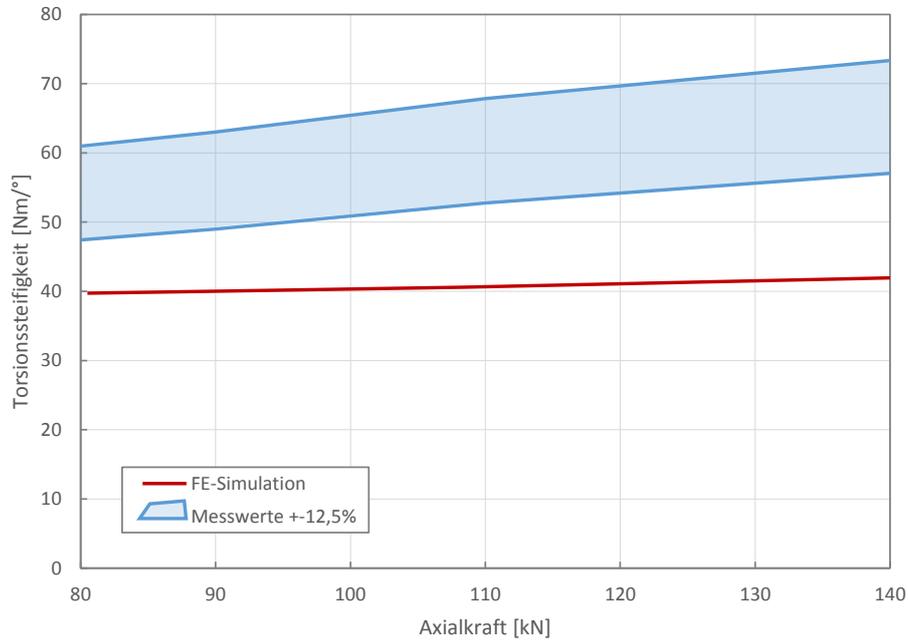
System Tonnenfeder (GMT)

Die Simulation der Tonnenfeder weist unter axialer Belastung sowohl im Kraft-Weg- als auch im Steifigkeits-Kraft-Verlauf nur geringe Abweichungen gegenüber den Messwerten auf (siehe Abbildung 5.19). Lateral und torsional hingegen liefert das Simulationsmodell ein deutlich zu weiches Steifigkeitsverhalten. Lateral beträgt die Differenz durchschnittlich -38% , zusätzlich kann die Abnahme der Sekantensteifigkeit bei Erhöhung der Querauslenkung von $0 \dots 10 \text{ mm}$ auf $0 \dots 40 \text{ mm}$ nur sehr eingeschränkt abgebildet werden (siehe Abbildung 5.20a). Die resultierenden torsionalen Steifigkeiten der FE-Simulation, wie in Abbildung 5.20b dargestellt, liegen durchschnittlich -47% unter den Messwerten. Bei größerem Gummivolumen und größeren Kontaktzonen verstärkt sich offensichtlich die Abweichung bei Schubbelastung. Diese sind zwar beim System KF und FS bereits ersichtlich, treten aber gegenüber der Tonnenfeder lediglich in abgeschwächter Form auf. Demzufolge kann die Tonnenfeder als Extremfall der Bauteile hinsichtlich der Schubproblematik angesehen werden.

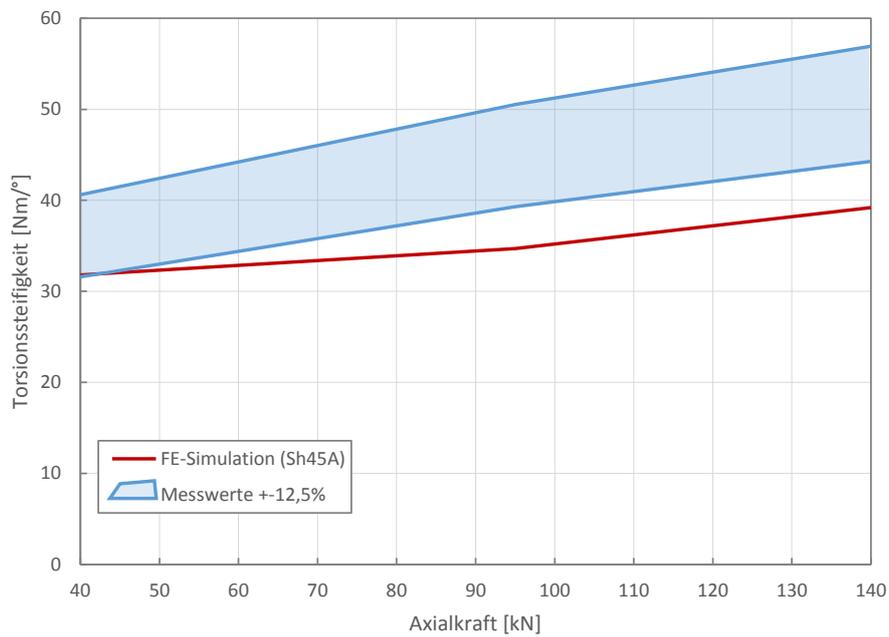
System Konusfeder (Paulstra)

Der axiale Kraft-Weg-Verlauf der FE-Simulation in Abbildung 5.21a liefert etwa -15% weichere Ergebnisse gegenüber dem aufsteigenden Ast der Messreihe. Auffällig ist, dass die Messung ebenso wie die FE-Simulation die Randbedingungen der Zielwerte nur bedingt erfüllt. Die Steifigkeiten in Abbildung 5.21b stimmen im Betriebspunkt 76 kN nahezu überein. Die

5 Modellaufbau mit FEM



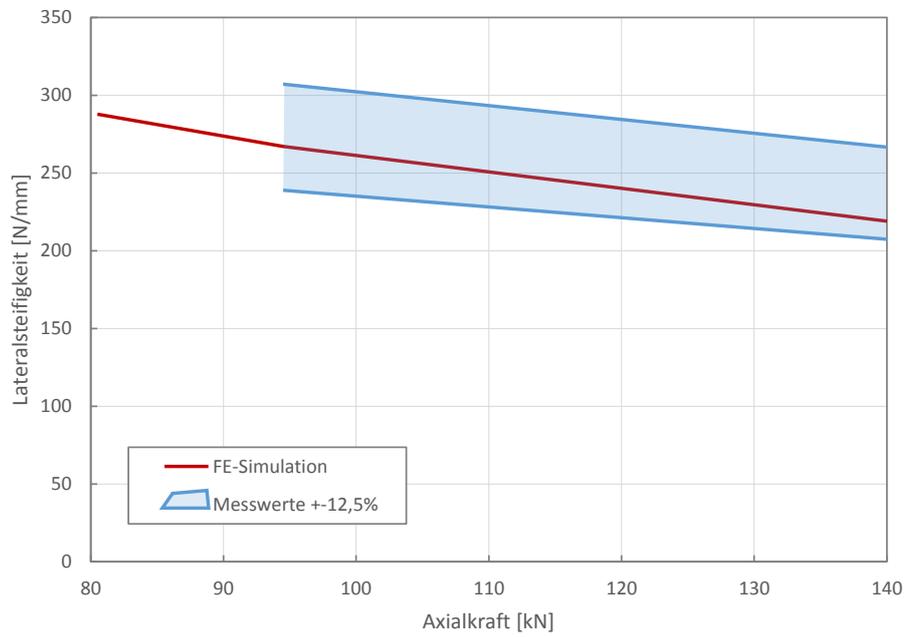
(a) Torsionssteifigkeit vor Design Review



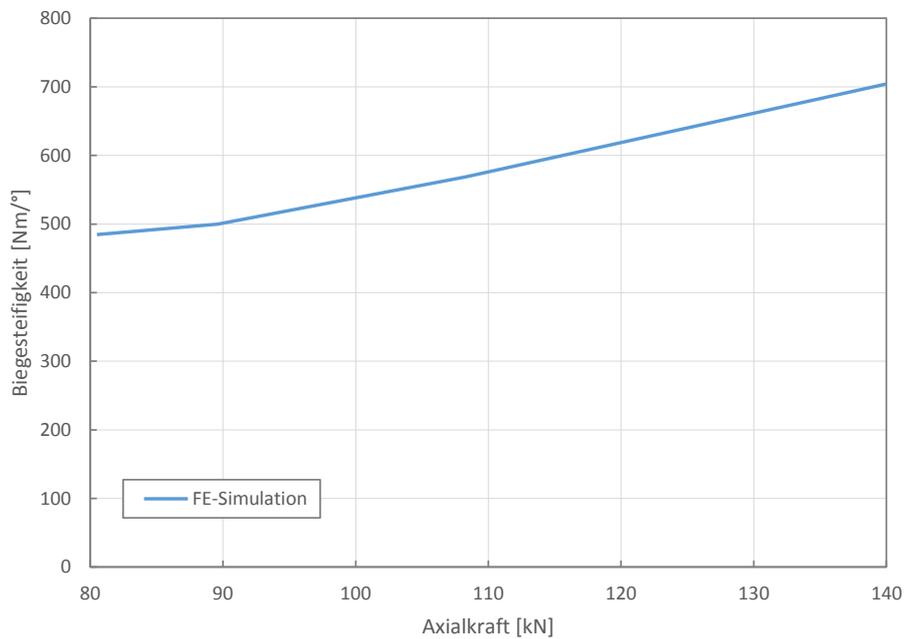
(b) Torsionssteifigkeit nach Design Review

Abbildung 5.17: Torsionssteifigkeit (KF und FS)

5 Modellaufbau mit FEM



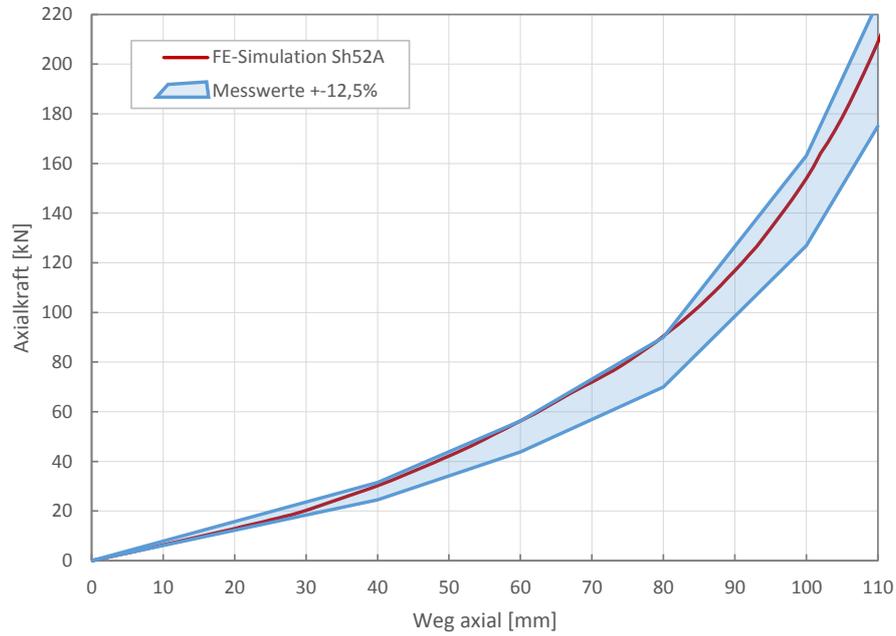
(a) Lateralsteifigkeit (KF und FS)



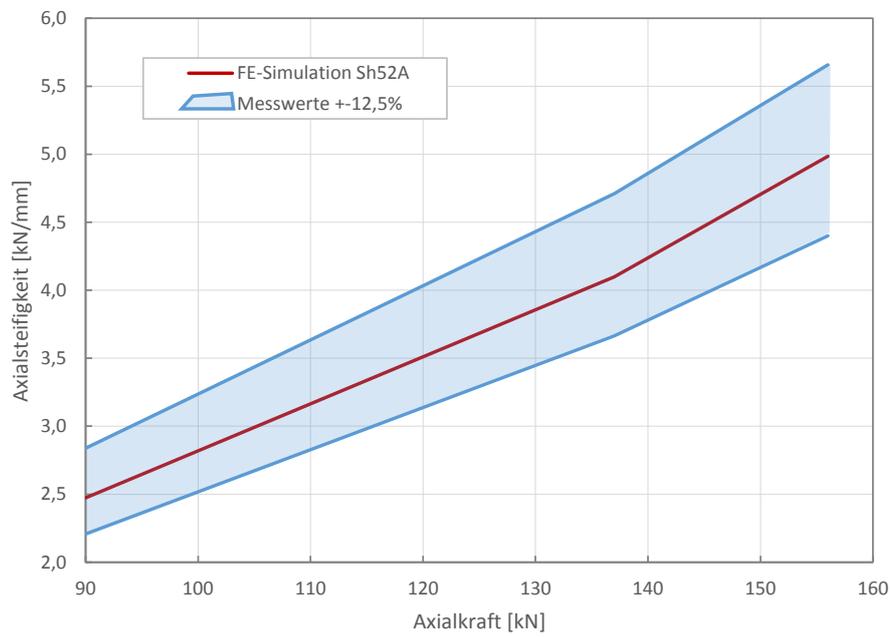
(b) Biegesteifigkeit (KF und FS)

Abbildung 5.18: Lateral- und Biegesteifigkeit (KF und FS)

5 Modellaufbau mit FEM



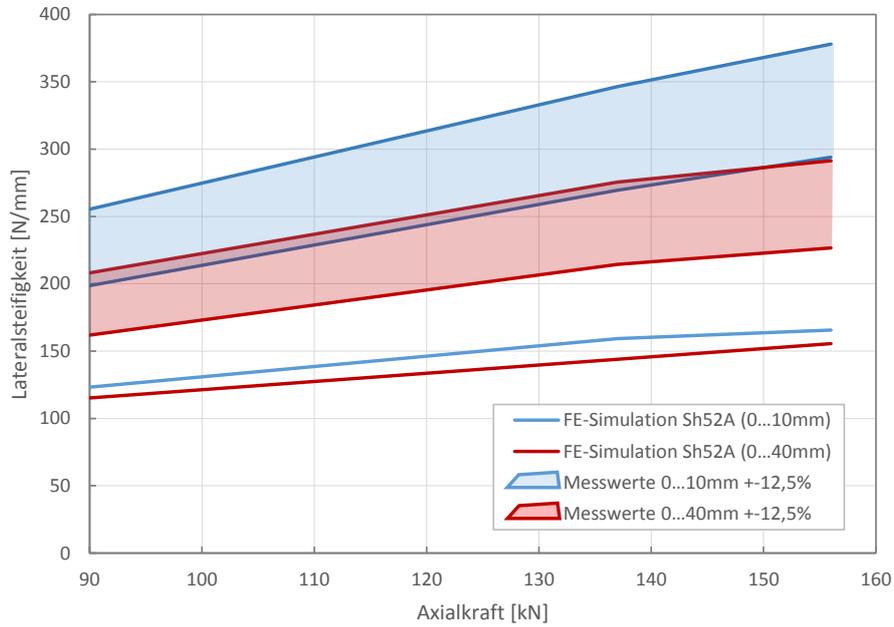
(a) Axialkraft (TF)



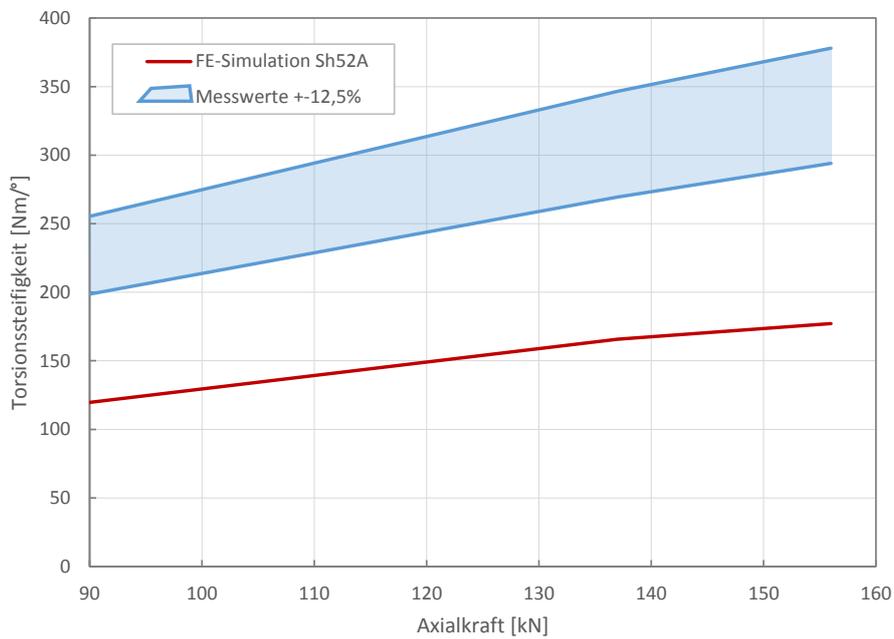
(b) Axialsteifigkeit (TF)

Abbildung 5.19: Axialkraft und Axialsteifigkeit (TF)

5 Modellaufbau mit FEM



(a) Lateralsteifigkeit (TF)



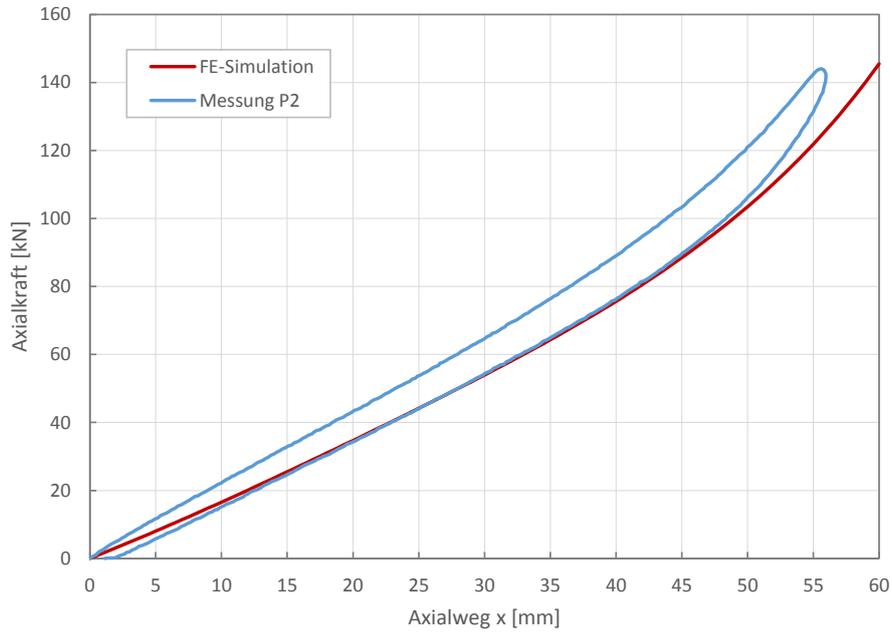
(b) Torsionssteifigkeit (TF)

Abbildung 5.20: Lateral- und Torsionssteifigkeit (TF)

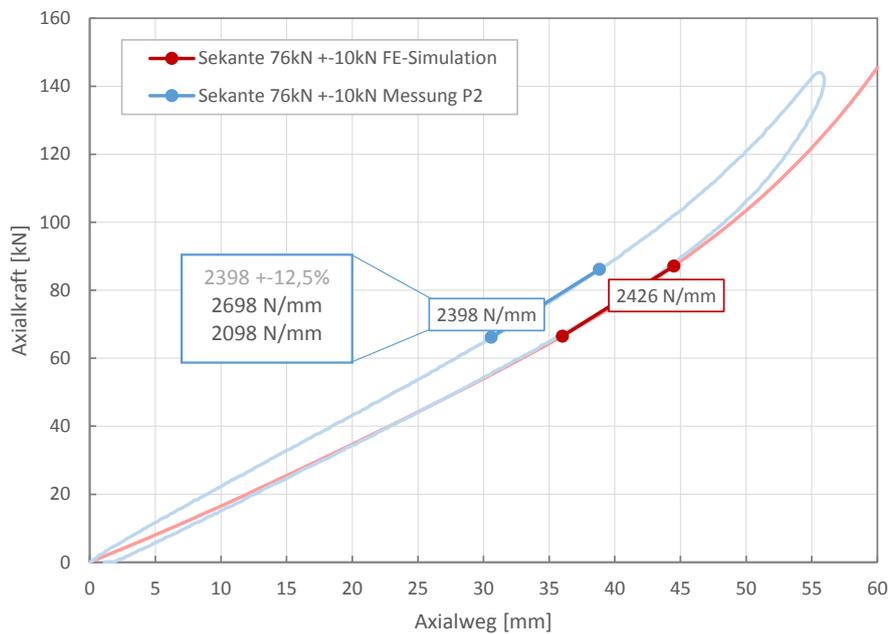
5 Modellaufbau mit FEM

unterschiedlichen Abweichungen können mit Abbildung 5.22a erklärt werden. Die axiale Steifigkeitskennlinie der Konusfeder weist insbesondere im Anfangsbereich 0 – 40kN ein grundlegend anderes Steifigkeitsverhalten als die Messreihe auf, daher entfernen sich in diesem Bereich auch die Kraft-Weg-Kennlinien voneinander. Die Axialsteifigkeit der FE-Simulation nimmt mit höherer Axialkraft über den gesamten Axialkraftbereich zu, wohingegen die Messreihe bis 40kN eine Abnahme der Axialsteifigkeit aufweist. Im Betriebsbereich 50 – 130kN stellt sich eine konstante Abweichung der FE-Simulation von $< -10\%$ ein, dies kann mit einer abweichenden Shorehärte im Modell erklärt werden. Die unterschiedliche Anfangssteigung ist mit einer real abweichenden Gummikontur zu begründen. Lateral liegen keine Messungen vor, die typische Eigenschaft von Konusfedern mit sehr hohen Lateralsteifigkeiten und progressiven Kennlinien bei größerer Auslenkung ist in Abbildung 5.22b ersichtlich. Torsional zeigt sich die gleiche Schubproblematik, die auch im System Konusfeder und Federscheibe sowie im System Tonnenfeder auftreten. Die FE-Simulationsergebnisse in torsionaler Verdrehung sind in einer Größenordnung von -30% im Vergleich zu den Messwerten zu weich.

5 Modellaufbau mit FEM



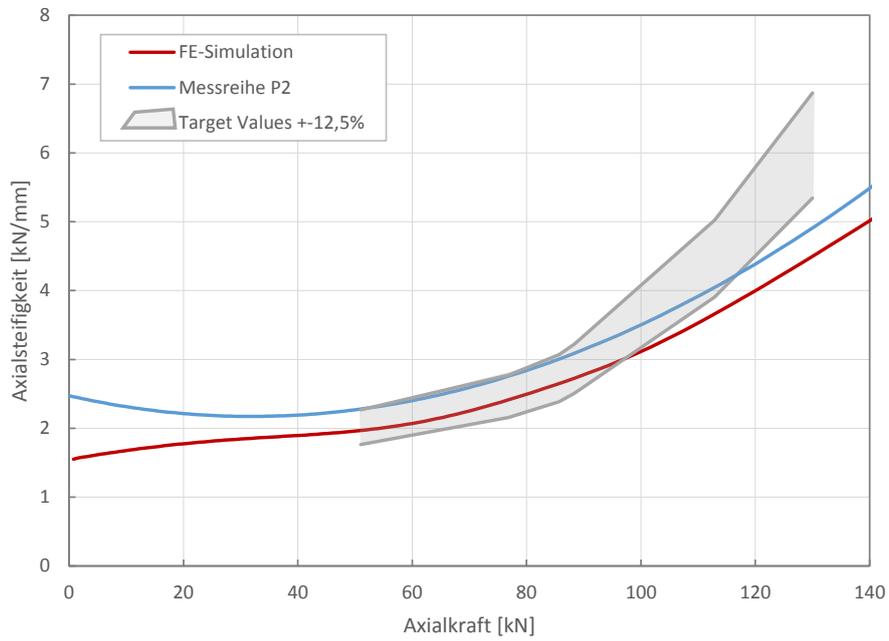
(a) Axialkraft (KF)



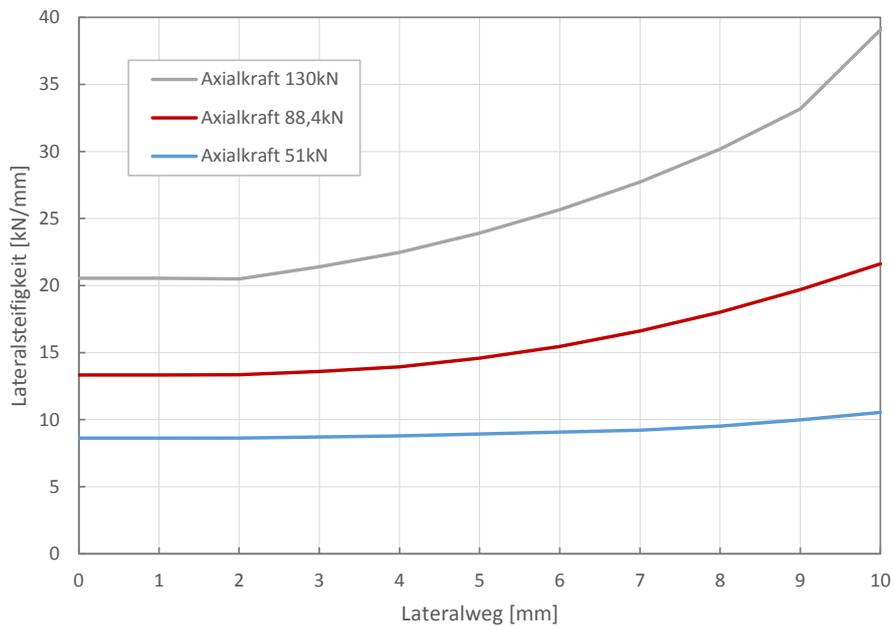
(b) axiale Sekantensteifigkeit bei 76 ± 10 kN

Abbildung 5.21: Axialkraft und Sekantensteifigkeit bei 76 ± 10 kN (KF)

5 Modellaufbau mit FEM



(a) Axialstiffigkeit (KF)



(b) Lateralstiffigkeit (KF)

Abbildung 5.22: Axial- und Lateralstiffigkeit (KF)

5 Modellaufbau mit FEM

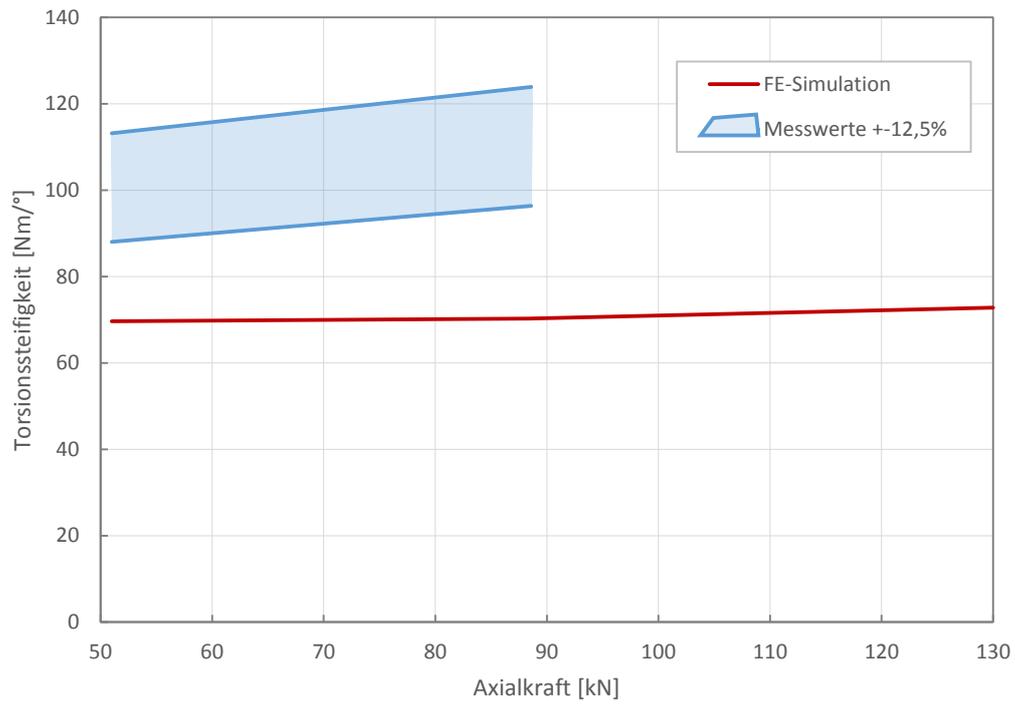


Abbildung 5.23: Torsionssteifigkeit (KF)

5.6.2 Vergleich analytischer Ergebnisse mit FE-Rechnung

Nachfolgend werden die in Kapitel 4 analytisch berechneten Ergebnisse aus dem System Konusfeder und Federscheibe (GMT) mit denen der FE-Simulation gegenübergestellt. Um Geometrieabweichungen zu vermeiden, werden für die FE-Simulation die gleichen Vereinfachungen wie für die analytischen Berechnungen getroffen. Da bei der Konusfeder die Vereinfachungen in lateraler und torsionaler Belastung enorm sind, wird zusätzlich eine FE-Simulationskennlinie mit der exakten Geometrie in die Diagramme eingetragen.

Teilsystem Federscheibe

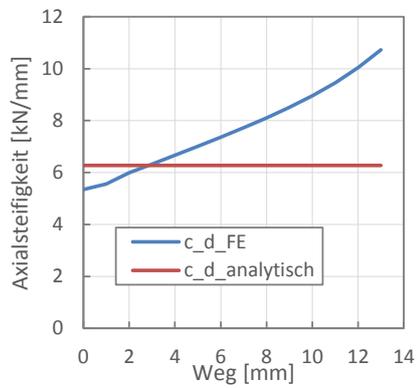
Die Drucksteifigkeit der Federscheibe ist zu Beginn in der FE-Simulation weicher, bei 3 mm Axialverschiebung gleich und danach deutlich steifer als die analytisch ermittelte Steifigkeit. Anhand der Sekantensteifigkeiten der FE-Simulation ist zu erkennen, dass die Progression bereits vor Ende des vermeintlich linearen Gültigkeitsbereichs $s_{max} = 13$ mm der analytischen Berechnung eintritt. Dennoch kann eine gute Aussage über die lineare Anfangssteigung der Drucksteifigkeit einer Federscheibe mittels analytischer Methoden getroffen werden (siehe Abbildung 5.24a). Die Lateral- und Torsionskennlinien der FE-Simulation verlaufen über den gesamten Gültigkeitsbereich nahezu linear. Die Abweichung zwischen analytischer Berechnung und dem Ergebnis der FE-Rechnung ist demnach konstant. (siehe Abbildungen 5.24b und 5.24c)

Teilsystem Konusfeder

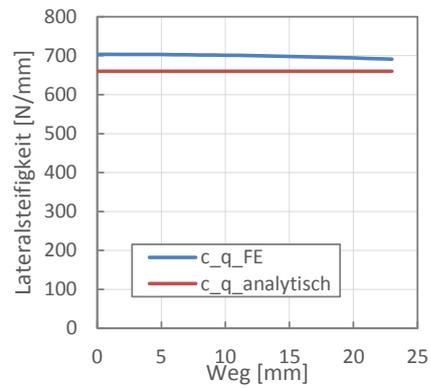
Axial liefert die analytische Berechnung mindestens 13 % weichere Ergebnisse gegenüber der FE-Simulation mit der vereinfachten Kontur. Vergleicht man die FE-Simulationen hinsichtlich Konturvereinfachung untereinander, so zeigt sich, dass diese einen eher geringen Einfluss auf die Axialsteifigkeit hat. (siehe Abbildung 5.24d)

Torsional erhält man mittels analytischer Methode eine um 4 %, lateral eine um 20 % weichere Steifigkeit gegenüber der FE-Simulation mit vereinfachter Kontur. Bei Lateral- und Torsionsbelastung weicht die vereinfachte Geometrie deutlich von der exakten Geometrie ab (siehe Kapitel 4), demnach fallen die Unterschiede in den Steifigkeiten zwischen vereinfachter und exakter Kontur markanter aus. (siehe Abbildung 5.24e und 5.24f)

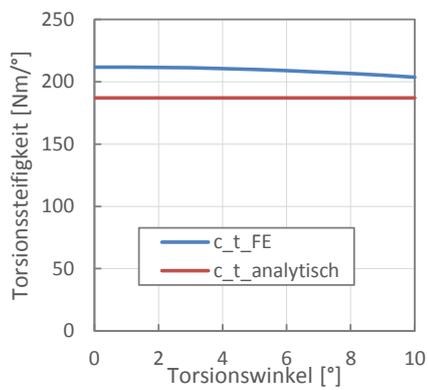
5 Modellaufbau mit FEM



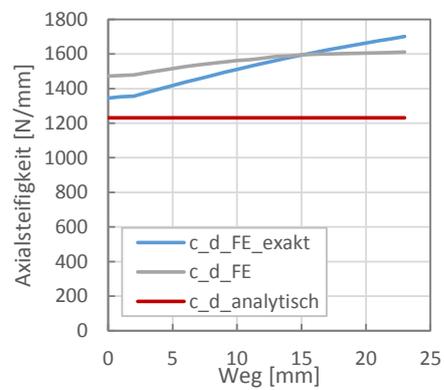
(a) Federscheibe axial



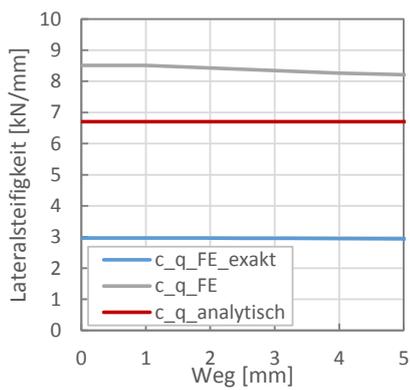
(b) Federscheibe lateral



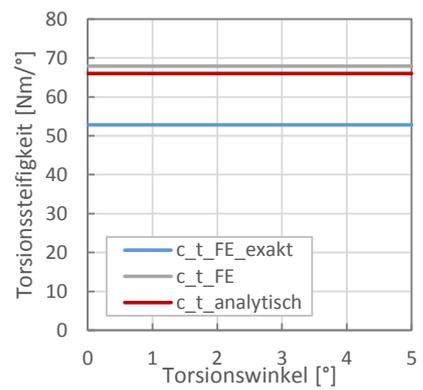
(c) Federscheibe torsional



(d) Konusfeder axial



(e) Konusfeder lateral



(f) Konusfeder torsional

Abbildung 5.24: Axial, Lateral- und Biegesteifigkeit von Federscheibe und Konusfeder

5 Modellaufbau mit FEM

Zusammenfassend kann gesagt werden, dass sich Geometrievereinfachungen der analytischen Berechnung deutlich auf die Steifigkeit auswirken. Je höher der Vereinfachungsgrad, desto größer die Auswirkung. Axial findet nur eine Vereinfachung an den freien Oberflächen der Konusfeder statt, daher ist die Auswirkung der vereinfachten Geometrie deutlich geringer als lateral und torsional. Gegenüber der vereinfachten Geometrie liefern die analytischen Methoden zwar auch lateral und torsional vertretbare Ergebnisse, die zwangsläufig notwendige Geometrievereinfachung vernichtet aber speziell lateral jegliche Aussagekraft der berechneten Steifigkeiten. Daraus kann geschlossen werden, dass die vorgenommene Geometrievereinfachung von einer Konusfeder auf eine Hülsengummifeder lateral und torsional nicht geeignet ist. Die Betriebspunkte der Bauteile liegen weiters außerhalb des linearen Gültigkeitsbereichs und bestehen meist aus kombinierten Lastfällen, die mit analytischen Methoden nicht berechnet werden können. Die Abweichungen zwischen analytischen Ergebnissen und jenen der Finiten-Elemente-Methode sind auf Ungenauigkeiten in den Formfaktoren, -kennwerten und des rechnerischen Elastizitätsmoduls zurückzuführen, da diese Faktoren immer nur eine Näherung der Realität darstellen.

6 Optimierung des FEM-Modells

Bisher betrachtete Simulationsmodelle basieren direkt auf der endgültigen Bauteilgeometrie nach der Vulkanisation. Wie in Kapitel 3.1.3 beschrieben resultiert die Abkühlung nach der Vulkanisation in einer Volumenschwindung. Es handelt sich danach zwar um einen Gleichgewichtszustand, Spannungsfreiheit im gesamten Gummivolumen kann aber aufgrund der gebundenen Oberflächen nicht angenommen werden. Die vorgestellte Optimierung beschäftigt sich mit der Abbildung des Volumenschwunds im Modell.

6.1 Inhomogener Belastungszustand

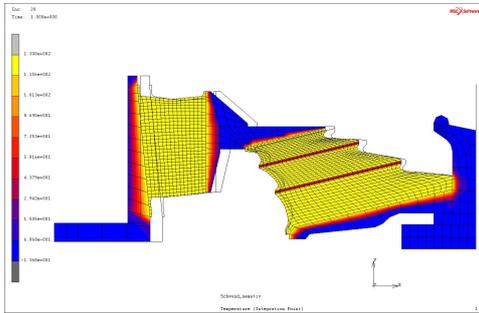
Die eingesetzten Materialmodelle setzen weiters einen homogenen Konditionierungszustand im Bauteil voraus, der zwar bei den Probekörperversuchen Uniaxial Zug, Biaxial Zug und Planar Shear zutrifft, bei Bauteilen wie der Konusfeder unter Betriebsbelastung aber praktisch nie auftritt (siehe Abbildungen 5.11, 5.12 und 5.15). Unter Berücksichtigung des Mullins-Effekts (siehe Kapitel 3.2.1) wird deutlich, dass Bereiche, die eine geringere Hauptnormaldehnung als das Materialmodell aufweisen, deutlich zu weich bewertet werden. Der Konditionierungsgrad des Materialmodells ist demnach gegenüber dem Bauteil zu hoch. Eine Optimierung in Richtung Inhomogenität der maximalen Hauptnormaldehnungen muss in einer derartigen Weise erfolgen, in der die maximalen Hauptnormaldehnungen in allen Lastfällen ermittelt werden und gemäß dem lokalen Konditionierungsgrad ein lokal passendes Modell verwendet wird. Da aber in diesem Ansatz auch der Druckbereich nicht vernachlässigt werden darf, muss ein Materialmodell gefunden werden, welches gegenüber eines Modells mit global gewähltem Konditionierungsgrad lokal sowohl den Druck- als auch den

Zugbereich genauer modelliert. Aufgrund der Unsicherheiten bezüglich korrektem Konditionierungsgrad wird dieser Ansatz nicht weiterverfolgt.

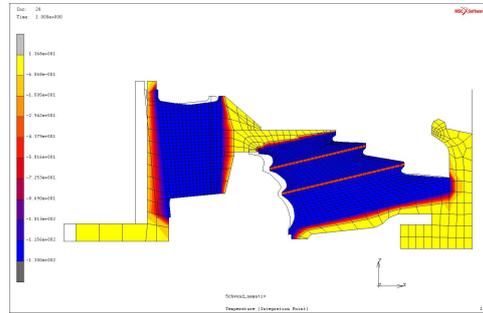
6.2 Volumenschwund

Ist von einem Gummi-Metall-Bauteil nur die endgültige Außenkontur bekannt, so kann auf die Vulkanisationsgeometrie durch ein virtuelles Aufheizen des Bauteils in der Simulation rückgerechnet werden. Dazu muss der in Kapitel 3.1.3 definierte Volumenschwund als Wärmeausdehnungskoeffizient α im FE-Modell eingetragen werden. Das aufgeheizte Bauteil wird exportiert und spannungsfrei in ein neues Modell eingefügt, die Vorgangsweise ist in Abbildung 6.1 dargestellt. Von dort startet man mit der Simulation der Vulkanisationsabkühlung und bringt anschließend bei konstanter abgekühlter Temperatur die Belastungen auf. Zu berücksichtigen gilt es, dass diese Vorgehensweise mit einer Ungenauigkeit behaftet ist. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve von Gummi unterscheidet sich im Druckbereich deutlich von der des Zugbereichs, deshalb bestehen Abweichungen zwischen der rückgerechneten und der realen Vulkanisationsgeometrie. Eine Näherung des Vulkanisationsprozesses kann dennoch in der Simulation erreicht werden. Der Volumenschwund wirkt sich bei einer Konusfeder sowohl als Verkürzung der Länge als auch in den Steifigkeiten aus (siehe Abbildungen 6.1b - 6.1d). Die Axialkraft des Modells mit Schwundmodellierung nimmt gegenüber dem Modell ohne Schwundmodellierung im Betriebsbereich um 7,5% ab. Das gleiche Verhalten zeigt sich bei torsionaler Belastung, auch hier nimmt die Steifigkeitskennlinie um 4% gegenüber dem Modell ohne Schwundmodellierung ab (siehe Abbildungen 6.1e und 6.1f).

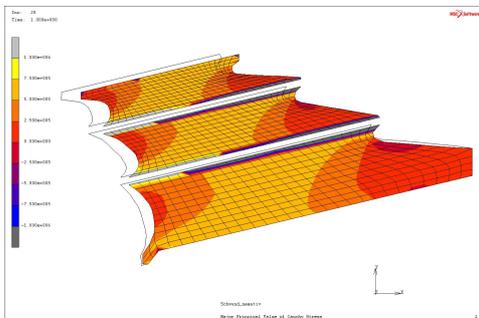
6 Optimierung des FEM-Modells



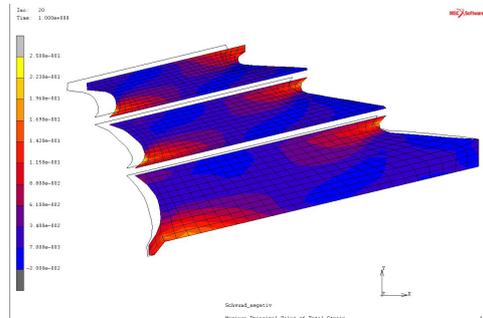
(a) virtuelles Aufheizen des Modells mit $\Delta T = 130 \text{ K}$



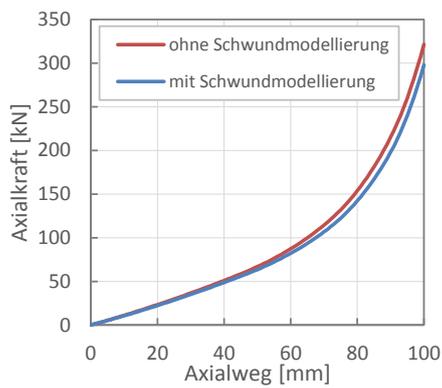
(b) Vulkanisationsabkühlung mit $\Delta T = -130 \text{ K}$



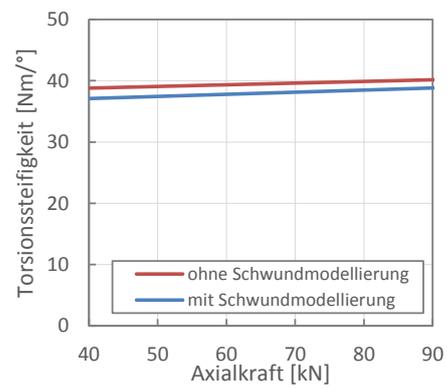
(c) wahre Hauptnormalspannungen $\pm 1 \text{ N/mm}^2$ nach dem Abkühlen



(d) wahre Hauptnormaldehnungen 0 – 25% nach dem Abkühlen



(e) axialer Kraftverlauf mit und ohne Schwundmodellierung



(f) torsionaler Steifigkeitsvergleich mit und ohne Schwundmodellierung

Abbildung 6.1: Volumenschwindung rückrechnen

7 Fazit und Ausblick

Die Berechnung von Gummi-Metall-Bauteilen mittels analytischer Vorgehensweise stößt schnell an ihre Grenzen, da der lineare Bereich in den Betriebspunkten der Bauteile nahezu immer überschritten wird. Zu große Geometrievereinfachungen verfälschen außerdem die Ergebnisse gegenüber den realen Bauteilen. Für eine erste Abschätzung des statischen Steifigkeitsverhaltens im linearen Bereich bei einfachen Geometrien liefert die analytische Vorgehensweise dennoch plausible Ergebnisse. Über lokale Spannungen im Gummivolumen kann kaum eine Aussage getroffen werden. Überlagerte Lastfälle aus statischer Traglast und zusätzlichen Auslenkungen können nicht berechnet werden. Demzufolge kann nur sehr eingeschränkt eine Steifigkeitsberechnung in den Betriebspunkten von Gummi-Metall-Bauteilen der Drehgestellfederstufen erfolgen.

Die mathematische Formulierung der technischen Spannungen in der Theorie der Hyperelastizität erfolgt durch zwei verschiedene Ansätze, einerseits einer allgemeinen Ableitung in Tensorformulierung und andererseits durch partielle Ableitungen nach dem Verstreckgrad. Invariantenbasierte Materialmodelle beschreiben die Änderung der Formänderungsenergiedichte in Abhängigkeit des Verstreckgrads. Diese Annahme trifft jedoch nur bei homogen vernetzten Bauteilen zu, da sich die Formänderungsenergiedichte in jede Richtung bei identischem Verstreckgrad in gleichem Maß verändert. Ob reale Bauteile mit großen gebundenen Oberflächen oder großen Gummivolumina diese Bedingung erfüllen, muss aufgrund der problematischen Simulationsergebnisse der Tonnenfeder in Frage gestellt werden.

Die ermittelten Materialparameter werden anhand einfacher Prüfkörper mit homogenen Spannungszuständen ermittelt. In realen Gummi-Metall-Bauteilen stellt sich eine inhomogene Spannungs- und Dehnungszustandsverteilung ein, deshalb kann nur eine Näherung des Konditionierungsgrads

7 Fazit und Ausblick

erfolgen. Das Materialmodell sollte so gewählt werden, dass ein möglichst großer Bereich im Bauteil mit dem Konditionierungsgrad des Modells übereinstimmt. Bezüglich der Schubproblematik kann in dieser Arbeit auch nach Modellierung des Volumenschwunds keine Lösung gefunden werden. Anzumerken ist, dass von einer existierenden Kontur ausgegangen und auf Basis dieser die Rückrechnung auf die Vulkanisationsgeometrie erfolgt. Durch eine ungenaue Bauteilgeometrie kann ein Fehler in der Ermittlung der Vulkanisationsgeometrie entstehen. Da die Parameter Vulkanisationstemperatur und Wärmeausdehnungskoeffizient geschätzt sind, ergibt sich auch hier eine potentielle Fehlerquelle. Die torsionalen Messdaten basieren bis auf eine Messreihe des Systems Konusfeder und Federscheibe (GMT) immer auf einer Rückrechnung aus dem Sekundärfedersystem, wodurch ebenso eine mögliche Ungenauigkeit entsteht.

Nachfolgend werden einige Möglichkeiten aufgezeigt, die es in Zukunft noch weiter zu verfolgen gilt. Als zukünftige Ziele sollten Torsionsmessungen an verschiedensten Bauteilgeometrien durchgeführt werden, um eine genauere Messdatenbasis zu erhalten. Anhand der experimentellen Daten soll festgestellt werden, bei welcher Art von Geometrie und unter welchen Axiallasten die größten Abweichungen auftreten.

Ein weiterer Ansatz ist die Variation des Kompressionsmoduls im Materialmodell, der zwar um einen Faktor $10^3 - 10^4$ größer ist als der Schubmodul, aber eventuell dennoch Einfluss auf die Steifigkeiten nimmt. Die Annahme eines konstanten Kompressionsmoduls muss ebenfalls genauer untersucht werden. Zusätzlich sind neue Prüfversuche inklusive volumetrischem Versuch sinnvoll, um das Kompressionsverhalten der eingesetzten Gummimischungen abklären zu können. In den hyperelastischen Materialmodellen wird bei Berücksichtigung der Kompressibilität die Formänderungsenergie W in einen isochoren und einen volumetrischen Anteil zerlegt. Der Kompressionsmodul kann demnach unabhängig von den Materialkonstanten C_{ij} als ein weiterer möglicher Freiheitsgrad im Modell betrachtet werden.

Unter der Einwirkung der axialen Traglast stellt sich in den Bauteilen ein gesetzter Zustand ein, der proportional dem Logarithmus der Belastungszeit folgt. Die vereinfachte Berücksichtigung dieses Sachverhalts kann analog zur Modellierung des Volumenschwunds vorgenommen werden. Vereinfacht

7 Fazit und Ausblick

betrachtet stellt sich in jedem Setzzustand ein Gleichgewicht im Gummi ein. Dies erreicht man, indem man das Simulationsmodell axial mit dem gewünschten Setzverlust belastet und den Zustand *speichert*. Der exportierte Belastungszustand wird spannungsfrei als neuer Ausgangspunkt verwendet. Mithilfe dieser Modellierung gilt es zu untersuchen, in welchem Maß die Steifigkeiten in den Belastungsrichtungen axial, lateral und torsional beeinflusst werden. Die Simulation des Setzverhaltens sollte zusätzlich mittels geeigneter mathematischer Modelle mit Versuchsdaten abgeglichen werden.

Die Inhomogenität des Spannungs- und Dehnungszustands im Gummivolumen resultiert in einem lokal stark unterschiedlichen Konditionierungsgrad. Die Schwierigkeit besteht in der Suche geeigneter Zonen unterschiedlichen Dehnungsgrads innerhalb des Volumens, welche die lokalen Beanspruchungen bestmöglich abbilden.

Mit den genannten Vorgehensweisen soll das Steifigkeitsverhalten von Gummi-Metall-Bauteilen weiter untersucht und etwaige Auswirkungen festgehalten werden. Ohne Genauigkeitsverlust in axialer Richtung ist die geforderte Zielsetzung, die Abweichung aus Simulation und Experiment bei torsionaler Belastung zu verringern.

Literatur

- Battermann, Walter und Robert Köhler (1982). *Elastomere Federung, elastische Lagerungen: Grundlagen ingenieurmäßiger Berechnung und Konstruktion*. Berlin: Wilhelm Ernst. ISBN: 9783433009390 (siehe S. 28).
- Beatty, Millard F. (2000). »The Mullins Effect in a Pure Shear«. In: *Journal of Elasticity* 59, S. 369–392 (siehe S. 31).
- Beatty, Millard F. und Shankar Krishnaswamy (2000). »The Mullins effect in equibiaxial deformation«. In: *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik ZAMP* 51 (siehe S. 31).
- Bhowmick, Anil K., Malcom M. Hall und Henry A. Benarey, Hrsg. (1994). *Rubber Products Manufacturing Technology*. New York/Basel: Marcel Dekker. ISBN: 9780824791124 (siehe S. 15).
- Böge, Alfred (2013). *Technische Mechanik: Statik - Reibung - Dynamik - Festigkeitslehre - Fluidmechanik*. 30. Aufl. Lehr- und Lernsystem Technische Mechanik. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. ISBN: 9783658020613 (siehe S. 40).
- Böhm, Johannes (2001). »Der Payneeffekt: Interpretation und Anwendung in einem neuen Materialgesetz für Elastomere«. Dissertation. Universität Regensburg (siehe S. 22).
- Bonet, Javier und Richard D. Wood (2008). *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. 2. Auflage. New York: Cambridge University Press. ISBN: 978-0-511-39468-3 (siehe S. 6, 7, 9, 17, 18).
- Diani, Julie, Bruno Fayolle und Pierre Gilormini (2009). »A review on the Mullins effect«. In: *European Polymer Journal* 45.3, S. 601–612. ISSN: 0014-3057. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.eurpolymj.2008.11.017>. URL: <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0014305708006332> (siehe S. 6).

Literatur

- Dominginghaus, Hans (2012). *Kunststoffe: Eigenschaften und Anwendungen*. Hrsg. von Peter Elsner, Peter Eyerer und Thomas Hirth. 8. Auflage. Heidelberg/Dordrecht/London/New York: Springer. ISBN: 3642161723 (siehe S. 6).
- Experimental Elastomer Analysis* (2010). MAR103. MSC.Software Cooperation (siehe S. 15).
- Eyerer, Peter, Thomas Hirth und Peter Elsner, Hrsg. (2008). *Polymer Engineering: Technologien und Praxis*. Berlin/Heidelberg: Springer. ISBN: 3540724028 (siehe S. 6, 25, 26, 29).
- Feßmann, Jürgen und Helmut Orth (2002). *Angewandte Chemie und Umwelttechnik für Ingenieure: Handbuch für Studium und betriebliche Praxis*. 2. Aufl. ecomed. ISBN: 9783609683522 (siehe S. 26).
- Gambrow, Andreas (2002). »Bestimmung der Materialparameter gefüllter Elastomere in Abhängigkeit von Zeit, Temperatur und Beanspruchungszustand«. Dissertation. Rheinisch-Westfälische Technische Hochschule Aachen (siehe S. 27, 30, 31).
- GMT (2010a). »Sekundärfedersystem Prüfbericht«. Velaro D / 170 064 01EZ. Bühl (siehe S. 32, 70).
- GMT (2010b). »Sekundärfedersystem Prüfbericht«. SF100 / 170 065 01EZ. Bühl (siehe S. 72).
- Göbel, Ernst Friedrich (1969). *Gummifedern. Berechnung und Gestaltung*. 3. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York: Springer-Verlag. ISBN: 9783540045847 (siehe S. 20, 28, 36, 37, 39, 40, 44, 48, 51–53).
- Gross, Dietmar, Werner Hauger und Peter Wriggers (2014). *Technische Mechanik 4: Hydromechanik, Elemente der Höheren Mechanik, Numerische Methoden*. Springer Vieweg. ISBN: 3642409997 (siehe S. 31).
- Grote, Karl-Heinrich und Jörg Feldhusen, Hrsg. (2007). *Dubbel: Taschenbuch für den Maschinenbau*. 22. Auflage. Berlin/Heidelberg/New York: Springer. ISBN: 978-3-540-49714-1 (siehe S. 16).
- Haeßner, Rainer (2003). *Kautschukplantage in Kerala (Indien)*. Foto. Lizenz: CC BY-SA 3.0. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>. Wikimedia Commons. URL: <http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kautschukplantage.JPG> (besucht am 24. 04. 2015) (siehe S. 24).
- Haigermoser, Andreas (2002). »Schienenfahrzeuge«. Vorlesungsskriptum. Technische Universität Graz (siehe S. 32).
- Holzapfel, Gerhard A. (2000). *Nonlinear Solid Mechanics: A Continuum Approach for Engineering*. Wiley. ISBN: 9780471823193 (siehe S. 13).

Literatur

- Jakel, Roland (2010). *Analysis of Hyperelastic Materials with MECHANICA – Theory and Application Examples –*. PTC. Technische Universität Chemnitz (siehe S. 6).
- Klein, Bernd (2014). *FEM. Grundlagen und Anwendungen der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*. 10. Auflage. Wiesbaden: Springer Vieweg. ISBN: 9783658060534 (siehe S. 58, 60, 66).
- Koltzenburg, Sebastian, Michael Maskos und Oskar Nuyken (2014). *Polymere: Synthese, Eigenschaften und Anwendungen*. Berlin/Heidelberg: Springer Spektrum. ISBN: 978-3-642-34772-6 (siehe S. 4, 25, 26).
- Lutz, Thomas (1990). »Ein Beitrag zur Berechnung druckbelasteter Elastomerlager«. Dissertation. Universität Kaiserslautern (siehe S. 28).
- Madritsch, Christian (2009). »Ein Konzept zur Lebensdauerberechnung von Elastomerbauteilen für Fahrwerke von Schienenfahrzeugen unter mehrachsiger dynamischer Belastung«. Diplomarbeit. Technische Universität Graz (siehe S. 2, 14, 31).
- Marc 2014 Volume B: Element Library (2014). MSC.Software Cooperation (siehe S. 62).
- Markmann, Gilles und Erwan Verron (2006). »Comparison of Hyperelastic Models for Rubber-Like Materials«. In: *Rubber Chemistry and Technology* 79.5, S. 835–858 (siehe S. 12, 18).
- Molls, Markus (2013). »Experimentelle und numerische Untersuchung ein- und mehrachsiger belasteter Elastomerbuchsen unter besonderer Berücksichtigung des Reihenfolgeeffektes«. Dissertation. Universität Duisburg-Essen. URL: http://duepublico.uni-duisburg-essen.de/servlets/DocumentServlet/Document/32566/Molls_Markus_Diss.pdf (siehe S. 30).
- Niemann, Gustav, Hans Winter und Bernd-Robert Höhn (2005). *Maschinenelemente: Band 1: Konstruktion und Berechnung von Verbindungen, Lagern, Wellen (v. 1)*. Berlin/Heidelberg: Springer. ISBN: 3540251251 (siehe S. 20, 22).
- Parisch, Horst (2003). *Festkörper-Kontinuumsmechanik: Von den Grundgleichungen zur Lösung mit Finiten Elementen*. Stuttgart/Leipzig/Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. ISBN: 3519004348 (siehe S. 19, 20).
- Paulstra (2007). »Rapport d'essais / Test Report«. SF 6500 / 905 413 00 00 (siehe S. 73).
- PRA (2010). *Récolte du latex sur un hévéa au Cameroun*. Foto. Lizenz: CC BY-SA 3.0. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/3.0/>. Wikimedia

Literatur

- Commons. URL: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Latex_-_Hevea_-_Cameroun.JPG (besucht am 24. 04. 2015) (siehe S. 24).
- Röthemeyer, Fritz und Franz Sommer (2006). *Kautschuktechnologie*. 2. Auflage. München/Wien: Carl Hanser Verlag. ISBN: 3446404805 (siehe S. 5, 24, 26–28).
- Rust, Wilhelm (2011). *Nichtlineare Finite-Elemente-Berechnungen: Kontakt, Geometrie, Material (German Edition)*. 2. Auflage. Wiesbaden: Vieweg+Teubner Verlag. ISBN: 3834814911 (siehe S. 17).
- Stommel, Markus, Marcus Stojek und Wolfgang Korte (2011). *FEM zur Berechnung von Kunststoff- und Elastomerbauteilen*. München: Hanser. ISBN: 3446421246 (siehe S. 4–7, 16, 18, 62).
- TIS, Transport-Information-Service (2015). *Naturkautschuk*. Version 1.0.0.05. Gesamtverband der Deutschen Versicherungswirtschaft e.V. (GDV). URL: <http://www.tis-gdv.de/tis/ware/kautschuk/naturkautschuk/naturkautschuk.htm> (besucht am 24. 04. 2015) (siehe S. 24).
- Treloar, Leslie R. G. (1975). *The Physics of Rubber Elasticity (Monographs on the Physics and Chemistry of Materials)*. 3. Auflage. London: Oxford University Press. ISBN: 0198513550 (siehe S. 5, 6, 10, 12, 18).