

# Transiente Untersuchungen mechanischer Schwingungen an Rotoren

Diplomarbeit

Michael KERSCHBAUMER, BSc

Studiumrichtung Maschinenbau

eingereicht an der  
Technischen Universität Graz

Beurteilerin:

Univ.-Prof. Dr.-Ing. habil. Katrin Ellermann

Betreuer:

DI Stefan Haas

Institut für Mechanik

Graz, Oktober 2016



## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen / Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am .....

.....



## Danksagung

Ich möchte mich bei all jenen Personen bedanken, die mir während der Verwirklichung meiner Diplomarbeit behilflich waren und auch jenen, die mir während meines Studiums zur Seite gestanden sind.

Besonderer Dank gebührt den Mitarbeitern der Firma ELIN Motoren GmbH, allen voran Bernhard Weilharter und Hermann Lang. Es war von Anfang an eine kompetente, angenehme Zusammenarbeit.

Ebenfalls möchte ich mich bei den Mitarbeitern des Institutes für Mechanik bedanken, speziell bei Stefan Haas, Christoph Zahalka und Mathias Mair, für die vielen guten Anregungen und für den zur Verfügung gestellten Arbeitsplatz.

Der größte Dank gilt jedoch meinen Eltern, die mir mein Studium erst ermöglicht haben, mich stets unterstützt haben und immer für mich da waren.

Zum Schluss möchte ich mich vor allem aber bei meiner besseren Hälfte Lisa bedanken. Die gemeinsame Zeit war immer die schönste Ablenkung vom Studium.



## **Kurzfassung**

Ziel meiner Diplomarbeit ist es, ein Modell zu entwickeln, das zur Berechnung transienter Vorgänge von Rotoren verwendet werden kann. Es soll der gyroscopische Einfluss der Rotoren berücksichtigt werden und, bei Vorhandensein, Nichtlinearitäten abgebildet werden. Des Weiteren soll der stationäre Zustand bei konstanter Drehzahl eines Rotors eine schnelle Möglichkeit der Berechnung geben, um einen Überblick über das Verhalten des jeweiligen Rotors zu bekommen.

Um die Berechnungszeit zu verkürzen, muss eine Freiheitsgradreduktion stattfinden. Dazu soll eine modale Reduktion und eine Mischung aus der statischen und modalen Kondensation implementiert werden und diese beiden mit der unreduzierten Berechnung verglichen werden.

## **Abstract**

The goal of this thesis is to develop a computational model for transient processes of rotors. The gyroscopic effect should be considered and the possibility of non linear behaviour should be implemented.

Also, calculating the steady-state dynamics of a rotor at constant speed should give a quick overview of the rotor's dynamic behaviour.

In order to perform the calculations efficiently, a reduction of the number of degrees of freedom is provided. Two reduction techniques are used: the modal reduction and the component mode synthesis. These techniques are compared with the unreduced calculation.



# Inhaltsverzeichnis

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Einleitung</b>                                | <b>1</b>  |
| 1.1      | Aufgabenstellung . . . . .                       | 2         |
| 1.2      | Stand der Technik . . . . .                      | 3         |
| 1.3      | Gliederung . . . . .                             | 3         |
| <b>2</b> | <b>Theoretische Grundlagen</b>                   | <b>5</b>  |
| 2.1      | Schwinger mit einem Freiheitsgrad . . . . .      | 5         |
| 2.1.1    | Eigenschwingung ohne Dämpfung . . . . .          | 7         |
| 2.1.2    | Eigenschwingung mit Dämpfung . . . . .           | 8         |
| 2.1.3    | Angeregte Schwingung . . . . .                   | 12        |
| 2.2      | Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden . . . . . | 14        |
| 2.3      | Rotordynamik . . . . .                           | 15        |
| 2.3.1    | Rotormodell mit Punktmasse . . . . .             | 15        |
| 2.3.2    | Rotor mit vier Freiheitsgraden . . . . .         | 19        |
| 2.4      | Balkentheorie . . . . .                          | 21        |
| 2.4.1    | Theorie nach Euler-Bernoulli . . . . .           | 22        |
| 2.4.2    | Theorie nach Timoshenko . . . . .                | 23        |
| 2.5      | Strukturdynamik . . . . .                        | 25        |
| 2.5.1    | Aufstellen der Bewegungsgleichungen . . . . .    | 26        |
| 2.5.2    | Timoshenko Elemente für Rotordynamik . . . . .   | 31        |
| 2.5.3    | Lösen der Bewegungsgleichungen . . . . .         | 36        |
| <b>3</b> | <b>Berechnungsmethoden</b>                       | <b>41</b> |
| 3.1      | Quasi-stationäre Berechnung . . . . .            | 42        |
| 3.2      | Transiente Berechnung . . . . .                  | 45        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Freiheitsgradreduktion</b>  | <b>49</b>  |
| 4.1      | Prinzip der Reduktion . . . . .  | 51         |
| 4.2      | Statische Kondensation . . . . .                                       | 53         |
| 4.3      | Modale Kondensation . . . . .  | 55         |
| 4.4      | Component Mode Synthesis . . . . .                                     | 58         |
| 4.5      | Vergleich der Reduktionsverfahren . . . . .                            | 63         |
| <b>5</b> | <b>Aufbau und Bedienung des Programms</b>                              | <b>65</b>  |
| 5.1      | Matlab Programm . . . . .  | 66         |
| 5.1.1    | Quasi-stationäre Ermittlung . . . . .                                  | 67         |
| 5.1.2    | Transiente Ermittlung . . . . .  | 67         |
| 5.2      | Anwendung . . . . .  | 68         |
| 5.2.1    | Quasi-stationäre Lösung . . . . .                                      | 70         |
| 5.2.2    | Transiente Lösung . . . . .  | 73         |
| 5.3      | Validierung . . . . .  | 82         |
| 5.3.1    | Vergleich mit Ansys . . . . .  | 83         |
| 5.3.2    | Quasi-stationäre Lösung . . . . .                                      | 84         |
| 5.3.3    | Vergleich Gesamtberechnung und modale Reduktion                        | 85         |
| 5.3.4    | Vergleich unreduzierte Berechnung und gemischte<br>Reduktion . . . . . | 87         |
| <b>6</b> | <b>Zusammenfassung und Ausblick</b>                                    | <b>91</b>  |
|          | <b>Nomenklatur</b>   | <b>i</b>   |
|          | <b>Abbildungsverzeichnis</b>   | <b>vii</b> |
|          | <b>Literaturverzeichnis</b>  | <b>ix</b>  |

# 1 Einleitung

Unter Schwingungen wird meist die wiederholende Bewegung eines Bauteils, bei dem eine Zustandsgröße kontinuierlich größer und kleiner wird, verstanden. Diese Zustandsgröße könnte der Weg oder der Winkel sein. Bauteile haben gewisse Systemparameter: die Masse als Trägheit, Federn als Rückstellkraft und Dämpfer als Dämpferkraft. Somit ist schnell klar, dass Schwingungen in nahezu jedem Gebiet der Technik, speziell im Maschinenbau, auftreten und die sichere Auslegung von schwingenden Bauteilen daher von großer Bedeutung ist. Schwingungen sind meistens unerwünscht, da sie die Lebensdauer des Bauteils verkürzen und oft zu lauten, unangenehmen Vibrationen führen.

Der Zwang zu leichter Bauweise macht es oft schwer Schwingungen zu verhindern. Dies führt wiederum zu weichen, schwingungsempfindlichen Konzepten. Zusätzlich sind die Anregungen betriebsbedingt oft nicht vermeidbar.

Gerade deswegen wird während der Konstruktion der Schwingungsanalyse durch Berechnungen und Simulationen entsprechend Zeit gewidmet, um ein Bauteilversagen zu verhindern.

Durch Schwingungsanalysen können auch jegliche Arten von Geräusch- und Lärmemissionen entsprechend analysiert werden, deren Ursache die Schwingung des Bauteils ist. Die Kenntnis über das exakte Schwingungsverhalten der Bauteile ist also eine sehr wichtige Information, die sich mittels Rechenmodelle schon im Vorhinein erkennen lässt. [1]

## 1.1 Aufgabenstellung

Die Firma ELIN Motoren GmbH mit Sitz in Weiz hat bereits ein *Finite Elemente* Programm mit dem Rechenprogramm *MATLAB*® entwickelt. Dieses wird im Konstruktionsprozess für die Auslegung der konstruierten elektrischen Maschinen eingebunden. Es werden die Rotoren der elektrischen Maschinen untersucht, um die Eigenfrequenzen mittels Modalanalyse zu ermitteln, sowie die Bestimmung der kritischen Drehzahlen in einem Campbelldiagramm. Somit kann schon im Vorhinein sichergestellt werden, dass die Betriebsdrehzahl des Rotors nicht zu nahe an den Eigenfrequenzen liegt. Auch die Berücksichtigung von hydrodynamischen Gleitlagern ist gewährleistet. Es wurde ein Programm entwickelt, dass eine vorgegebene Geometrie einliest, diese in einzelne Elemente unterteilt und deren lokale Systemmatrizen ermittelt um folglich die Gesamtsystemmatrizen zu bekommen. Ausgehend von diesem werden Modalanalysen und kritische Drehzahlbestimmung in einem Campbelldiagramm durchgeführt.

Nun wird dieses Programm weiterentwickelt. Es soll die Unwuchtanregung des Rotors bei konstanter Drehzahl über der Zeit (stationär), sowie sich ändernder Drehzahl über der Zeit (transient) berücksichtigt werden. Somit werden detailliertere Aussagen bei der Auslegung möglich, speziell beim Hochlauf auf Betriebsdrehzahl und des Auslaufs auf Stillstand.

Bei einer detaillierten Abbildung des Rotors ist der transiente Hochlauf sehr zeitaufwendig. Damit dies in einer vernünftigen Zeit gelingt, soll mit Hilfe von einer Freiheitsgradreduktion die Berechnung beschleunigt werden.

Ausgehend von diesen Methoden soll die Einbindung von nichtlinearen Lagermodellen möglich sein.

## 1.2 Stand der Technik

Das Übertragungsmatrizenverfahren von Prohl [3] war lange Zeit das meistgenutzte Lösungsverfahren für die Euler-Bernoulli- oder Timoshenko Balkenformulierung für Rotoren [4, 5]. Die Finite Elemente Methode gibt es nun seit 1970 und wird seither für immer unterschiedlichere Probleme in der Strukturmechanik verwendet, dazu gehört auch die Rotordynamik. Bathe [6] hat grundlegende Beiträge in der Finite Elemente Methode für Strukturen gemacht. Speziellen Fokus auf die Rotordynamik haben sich u.a. Gasch [7] und Genta [8] gelegt. Auch Friswell [9] hat sich sehr umfangreich mit den einzelnen Effekten der Rotordynamik beschäftigt.

Für die Freiheitsgradreduktion liefert Gasch in [10] einen guten Überblick und zeigt auch anhand einfachen Beispielen wie die einzelnen Methoden funktionieren.

Als Einstieg in die Thematik der Schwingungslehre seien die Autoren Jäger [1] und Krämer [11] erwähnt.

## 1.3 Gliederung

Die vorliegende Arbeit ist in sieben Unterkapitel eingeteilt.

Nach der Einführung, wird in Kapitel 2 *Theoretische Grundlagen* die relevanten Grundlagen für die Aufgabenstellung erklärt. Dazu gehören eine Einführung in die Schwingungen von Rotoren, die Erstellung der Bewegungsgleichung mit der Finite Elemente Methode als Timoshenko Balken modelliert und die Lösung der Bewegungsgleichung.

Kapitel 3 befasst sich mit den Berechnungsmethoden und gliedert sich in die Abschnitte *Quasi-stationären Berechnung* und *Transiente Berechnung*. Wie bei Problemstellungen im stationären Bereich mit konstanter Drehzahl unter Unwuchtanregung vorgegangen wird, wird im Kapitel

3.1 beschrieben. Im Kapitel 3.2 wird die Thematik der transienten Berechnung angeführt. Eine solche ist notwendig, wenn eine nichtlineare Lagerung vorliegt.

Das Kapitel 4 *Freiheitsgradreduktion* zeigt, wie sich durch Minimierung der Freiheitsgrade eine reduzierte Bewegungsgleichung ergibt und somit Rechenzeit eingespart wird.

Die Möglichkeiten des entwickelten Programms wird im Kapitel 5 *Aufbau und Bedienung des Programms* erläutert und anhand einzelner Plots aufgezeigt. Abschließend wird der Vergleich der drei transienten Berechnungen (Gesamtmodell, modal reduziert, gemischt reduziert) aufgezeigt.

## 2 Theoretische Grundlagen

In diesem Kapitel soll ein Überblick über die Theorien gegeben werden, mit denen sich die vorliegende Arbeit beschäftigt. Der erste Teil ist allgemeine Schwingungen gewidmet. Dazu wird, ausgegangen vom einfachsten Modell, dem Einmassenschwinger, bis zu Körpern mit mehreren Freiheitsgraden vorangegangen.

Der zweite Teil beschäftigt sich mit der Strukturdynamik. Hier wird beschrieben, wie zuerst aus dem geometrischen Modell mit Hilfe der Finite Elemente Methode ein diskretes System wird und anschließend die Bewegungsgleichung für das gesamte System aufgestellt wird.

Die Lösung dieser Bewegungsgleichung wird im Anschluss beschrieben.

### 2.1 Schwinger mit einem Freiheitsgrad

Allgemein hat ein Modell mit  $o$  Massen  $6o$  Koordinaten, in diesen es sich bewegen kann. Dabei handelt es sich um die drei Verschiebungsrichtungen und die drei Drehrichtungen. Diese werden Freiheitsgrade genannt.

Für ein besseres Verständnis wird zuerst das einfachste Modell gezeigt: ein Schwinger mit einem Freiheitsgrad.

Der Schwinger besteht aus den Elementen Feder mit der Federsteifigkeit  $k$ , Dämpfer mit der Dämpfungskonstante  $d$  und die Masse  $m$ . Um

linear zu bleiben, wird davon ausgegangen, dass die Feder- bzw. Dämpfungskraft von der Verschiebung bzw. Verschiebungsgeschwindigkeit abhängen. Zusätzlich wirkt eine zeitabhängige externe Anregung  $F(t)$  am Schwinger. In Abbildung 2.1 ist ein solches Modell ersichtlich.

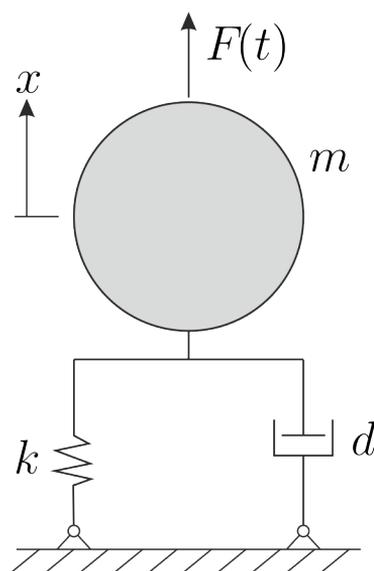


Abbildung 2.1: Einmassenschwinger

Aus dem Kräftegleichgewicht ergibt sich

$$m\ddot{x} = F(t) - mg - d\dot{x} - kx \quad (2.1)$$

Bei der statischen Gleichgewichtslage  $x = x_s$ ,  $\dot{x} = 0$ ,  $\ddot{x} = 0$  und ohne externe Kraft ergibt sich Gleichung 2.1 zu

$$kx_s = -mg \quad (2.2)$$

Mit der Transformation

$$\begin{aligned} x &= \bar{x} + x_s \\ \dot{x} &= \dot{\bar{x}} \\ \ddot{x} &= \ddot{\bar{x}} \end{aligned} \quad (2.3)$$

wird der Freiheitsgrad  $x$  in die statische Verschiebung  $x_s$  und die Auslenkung um die statische Ruhelage  $\bar{x}$  aufgeteilt. Die Gleichung 2.1 wird zu

$$m\ddot{\bar{x}} + d\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = F(t) \quad (2.4)$$

und sagt aus, dass die Masse jetzt nur mehr um die statische Ruhelage schwingt.

### 2.1.1 Eigenschwingung ohne Dämpfung

Bei der freien ungedämpften Schwingung wird die Bewegungsgleichung 2.4 zu

$$m\ddot{\bar{x}} + k\bar{x} = 0 \quad (2.5)$$

Diese Gleichung lässt sich mit der homogenen Lösung vollständig lösen, da keine Anregung stattfindet. Für solche Schwingungsgleichungen ist die allgemeine Lösung

$$\bar{x} = A \cos(\omega_k t) + B \sin(\omega_k t) \quad (2.6)$$

eine Harmonische mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.7)$$

und den Konstanten  $A$  und  $B$ , die durch die Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x(t=0) &= x_0 \\ \dot{x}(t=0) &= \dot{x}_0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

bestimmt werden. Abbildung 2.2 zeigt eine Lösung der freien ungedämpften Schwingung.

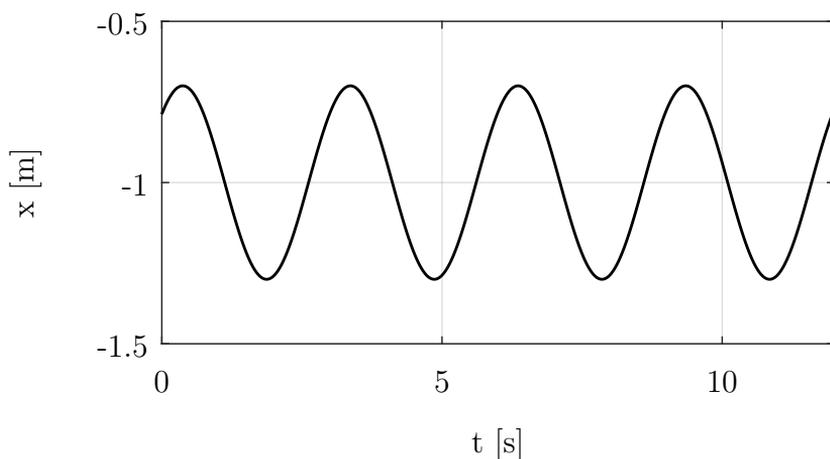


Abbildung 2.2: Zeitlicher Verlauf der Verschiebung

### 2.1.2 Eigenschwingung mit Dämpfung

Die Bewegungsgleichung der Eigenschwingung mit Dämpfung ist

$$m\ddot{\bar{x}} + d\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = 0. \quad (2.9)$$

Für diese Gleichung wird der Exponentialansatz

$$\bar{x}(t) = C e^{\lambda t} \quad (2.10)$$

eingesetzt und 2.9 lautet bei  $\bar{x} \neq 0$

$$m\lambda^2 + d\lambda + k = 0. \quad (2.11)$$

Dann werden die Eigenwerte  $\lambda_{1,2}$  zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_k^2} \quad (2.12)$$

mit der Abklingkonstante

$$\delta = \frac{d}{2m} \quad (2.13)$$

und der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.14)$$

Es muss unterschieden werden zwischen  $\delta < \omega_k$ , was eine schwache Dämpfung genannt wird, oder  $\delta > \omega_k$  mit dem Namen starke Dämpfung.

### Schwache Dämpfung

Bei schwacher Dämpfung wird 2.12 zu

$$\lambda_{1,2} = -\delta \pm j\sqrt{\omega_k^2 - \delta^2} = -\delta \pm j\omega_d, \quad (2.15)$$

wobei die gedämpfte Eigenkreisfrequenz

$$\omega_d = \sqrt{\omega_k^2 - \delta^2} \quad (2.16)$$

ist. Die Schwingungsgleichung ergibt für solche Fälle

$$\bar{x} = e^{-\delta t} (C_1 \cos(\omega_d t) + C_2 \sin(\omega_d t)). \quad (2.17)$$

Der Unterschied zwischen dieser Lösung und der Lösung vom ungedämpften Fall 2.6 zeigt, dass der Faktor  $e^{-\delta t}$  und die Eigenfrequenz mit Dämpfung auftritt. Der Faktor  $e^{-\delta t}$  sagt aus, dass die Schwingung mit der Zeit abklingt. Die Konstanten  $C_1$  und  $C_2$  werden aus den Anfangsbedingungen ermittelt.

In Abbildung 2.3 ist ein Beispiel einer solchen Schwingung dargestellt. Die Einhüllende der Amplituden  $Ce^{-\delta t}$  wird als Abklingkurve bezeichnet.

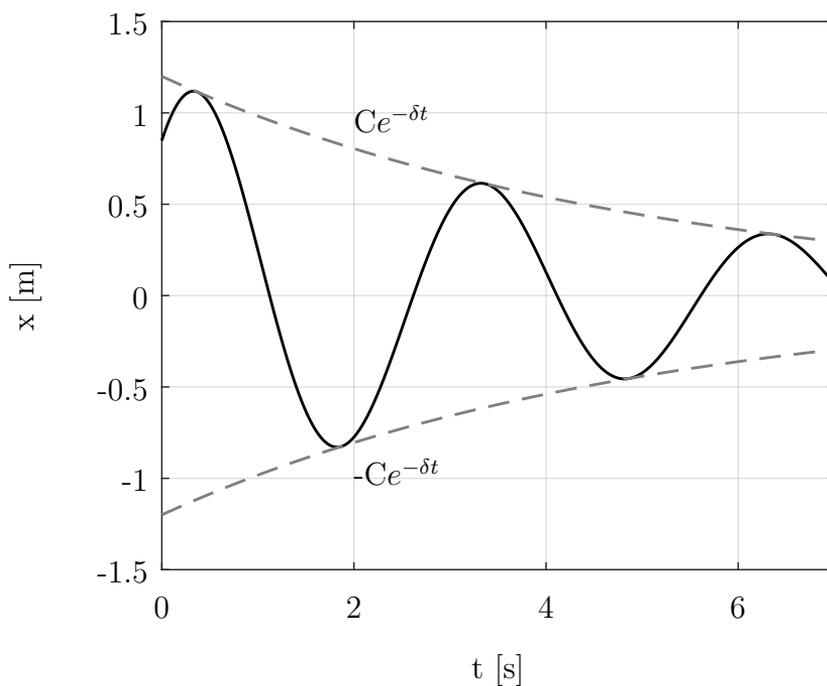


Abbildung 2.3: Schwach gedämpfte Schwingung

### Starke Dämpfung

Bei starker Dämpfung ist die Abklingkonstante größer als die Eigenkreisfrequenz  $\delta > \omega_k$ . Daraus folgt, dass die Eigenwerte  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  negativ und reell werden und die allgemeine Lösung mit den Werten 2.12 ergibt

$$\bar{x} = C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \lambda_1, \lambda_2 < 0 \quad (2.18)$$

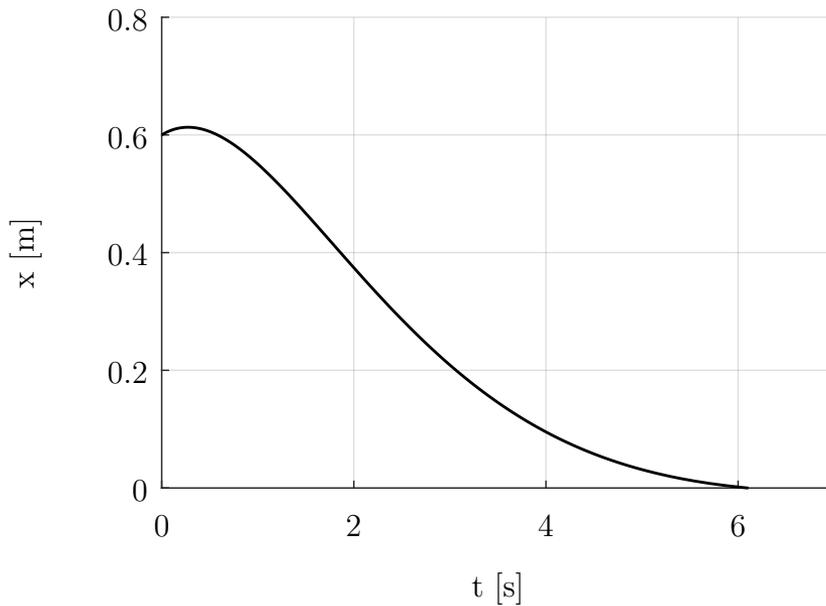


Abbildung 2.4: Stark gedämpfte Schwingung

### Aperiodischer Grenzfall

Wenn die Eigenkreisfrequenz  $\omega_k$  gleich der Abklingkonstante  $\delta$  ist, wird vom aperiodischen Grenzfall gesprochen. Die Eigenwerte  $\lambda$  ergeben sich aus 2.12 zu

$$\lambda_1 = \lambda_2 = -\delta = -\omega_k. \quad (2.19)$$

Die Lösung dazu ist

$$\bar{x} = e^{-\delta t}(C_1 + C_2 t) \quad (2.20)$$

### 2.1.3 Angeregte Schwingung

Es gibt mehrere Arten von Anregungen, die ein Bauteil in Schwingung versetzt. Der einfachste Fall ist die Anregung durch eine externe Kraft  $F(t)$ , wie in Abbildung 2.1 ersichtlich ist. Die externe Kraft lässt sich unter der Annahme einer harmonischen Anregung mit der Kreisfrequenz der Anregung  $\Omega$  und der Amplitude  $\hat{F}$  darstellen, so dass sich Gleichung 2.4 zu

$$m\ddot{\bar{x}} + d\dot{\bar{x}} + k\bar{x} = \hat{F} \cos(\Omega t) \quad (2.21)$$

ergibt. Die homogene Lösung dieser Gleichung ist im vorherigen Kapitel beschrieben worden und klingt nach der Zeit aufgrund der Dämpfung ab - diese beschreibt den Einschwingvorgang unter dem Namen Transiente. Deswegen wird die homogene Lösung oft vernachlässigt. Für die partikuläre Lösung wird ein Ansatz für die rechte Seite gefunden. Diese sagt aus, wie sich der Schwinger aufgrund der Anregung verhält. Die externe Kraft kann als komplexe Funktion erweitert werden, wenn nur der Realteil berücksichtigt wird und ergibt so

$$F(t) = \hat{F} \cos(\Omega t) = \hat{F} \Re(e^{j\Omega t}). \quad (2.22)$$

Dies ist aufgrund des Superpositionsprinzips der linearen Differentialgleichungen erlaubt, da von der speziellen Lösung nur der reelle Anteil der Kraft berücksichtigt wird. Somit verschwindet der imaginäre Anteil wieder. Für den Ansatz wird mit komplexen Größen gearbeitet, wobei

$$\bar{x} = \Re(s(t)) \quad (2.23)$$

gilt. [12] Somit ist der komplexe Ansatz für die Schwingungsantwort

$$\begin{aligned} s(t) &= \hat{x} e^{j(\Omega t - \zeta)} \\ \dot{s}(t) &= \hat{x} j\Omega e^{j(\Omega t - \zeta)} \\ \ddot{s}(t) &= -\hat{x}\Omega^2 e^{j(\Omega t - \zeta)} \end{aligned} \quad (2.24)$$

mit dem Phasenwinkel  $\zeta$  und der reellen Amplitude  $\hat{x}$ . Eingesetzt in die Ausgangsgleichung 2.21 folgt daraus

$$\left[ -\Omega^2 m + j\Omega d + k \right] \hat{x} e^{-j\zeta} = \hat{F}. \quad (2.25)$$

Die Amplitude  $\hat{x}$  ergibt sich als Betrag des Terms zu

$$\hat{x} = \left[ \frac{1}{\sqrt{(-\Omega^2 m + k)^2 + (d\Omega)^2}} \right] \hat{F} \quad (2.26)$$

und lässt sich mit der Winkelkreisfrequenz  $\omega_k$  und dem Dämpfungsgrad  $\vartheta = \frac{d}{2m\omega_0} = \frac{\delta}{\omega_0}$  ausdrücken zu

$$\hat{x} = \left[ \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2\right)^2 + \left(2\vartheta\frac{\Omega}{\omega_k}\right)^2}} \right] \frac{\hat{F}}{k}. \quad (2.27)$$

Der Term

$$V = \frac{1}{\sqrt{(1 - \mu^2)^2 + (2\vartheta\mu)^2}} \quad (2.28)$$

mit dem Frequenzverhältnis

$$\mu = \frac{\Omega}{\omega_k} \quad (2.29)$$

wird Vergrößerungsfunktion genannt, da er je nach Dämpfungsgrad die Schwingung verstärkt oder abschwächt. Für den Phasenwinkel folgt

$$\zeta = \arctan \left( \frac{2\vartheta\mu}{1 - \mu^2} \right). \quad (2.30)$$

Die Vergrößerungsfunktion über dem Frequenzverhältnis  $\mu$  mit Variation der Dämpfung  $\delta$  zeigt Abbildung 2.5.

Bei keiner Dämpfung wird die Amplitude unendlich groß und bei starker Dämpfung ist die Resonanz nicht ersichtlich.

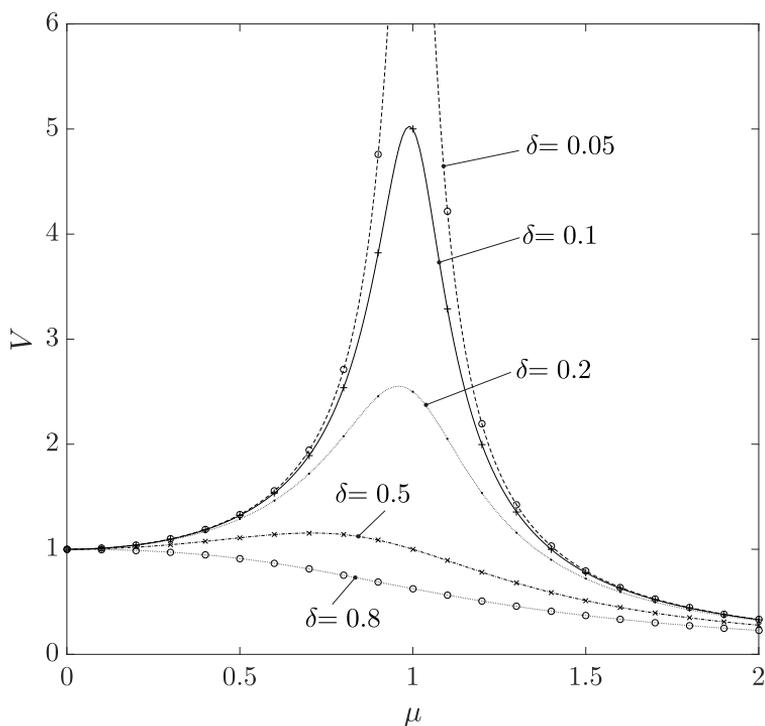


Abbildung 2.5: Vergrößerungsfunktion

## 2.2 Schwinger mit mehreren Freiheitsgraden

Das Model mit nur einem Freiheitsgrad ist für das Verständnis sehr hilfreich, aber in der Realität oft nicht anwendbar. Es werden hier Modelle verwendet mit viel mehr Freiheitsgraden. Massen sind gekoppelt mit Federn oder Dämpfer und die Anzahl der Freiheitsgrade  $b$  resultiert aus den Massenpunkten im Raum und den Bindungen zwischen den einzelnen Knoten. Jede Masse  $m$  kann in drei Verschiebungs- und drei Drehrichtungen bewegt werden, was somit  $6m$  ergibt. Davon müssen die Bindungen  $s$  abgezogen werden um auf die Gesamtfreiheitsgradzahl  $b$  zu schließen -

als Formel ausgedrückt:

$$b = 6 \cdot m - s. \quad (2.31)$$

Für die mathematische Betrachtung hilft die Matrizen- und Vektorschreibweise. Der Vektor

$$\underline{\mathbf{x}} = [x_1 \quad \cdots \quad x_b]^T \quad (2.32)$$

fasst alle Freiheitsgradkoordinaten zusammen. Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitseinträge sind somit Matrizen, da sie die Einträge zu jedem Freiheitsgrad speichern. Die Bewegungsgleichung lautet somit

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{x}}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\dot{\mathbf{x}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{x}}} = \underline{\underline{\mathbf{f}}} \quad (2.33)$$

mit der Massenmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$ , der Dämpfungsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}$ , der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  und dem externen Kraftvektor  $\underline{\underline{\mathbf{f}}}$ .

## 2.3 Rotordynamik

Bei Rotoren tritt aufgrund der Durchbiegung eine zusätzliche Rotation um eine Achse quer zur Mittelachse auf. Daraus ergibt sich ein weiteres Moment, das sogenannte Kreiselmoment oder gyroskopisches Moment. Dies tritt aber nur ein, wenn die Drehfreiheitsgrade berücksichtigt werden. Die Masse stellt sich also im ausgelenkten Zustand schräg. Dies ist im ersten Unterpunkt *Rotormodell mit Punktmasse* nicht der Fall. Im zweiten Unterpunkt *Rotormodell mit vier Freiheitsgraden* wird es allerdings berücksichtigt und die Bewegungsgleichung für Rotoren definiert.

### 2.3.1 Rotormodell mit Punktmasse

Rotoren mit Punktmassen liefern oft zuverlässige Ergebnisse wenn Momentenwirkungen von Massen klein sind. Das mathematische Modell ohne Dämpfung wird hier hergeleitet. Für die Kraft  $F(t)$  sind in [7] die

unterschiedlichen Anregungsarten näher erläutert. Graphisch ist dies in Abbildung 2.6 dargestellt.

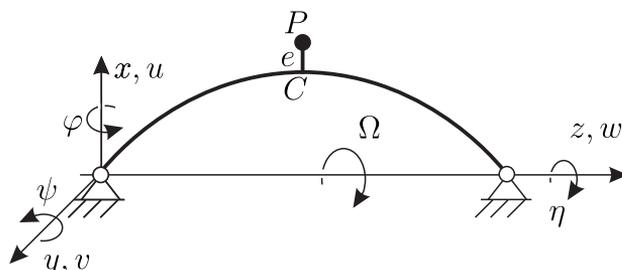


Abbildung 2.6: Rotor mit Unwucht als Punktmasse

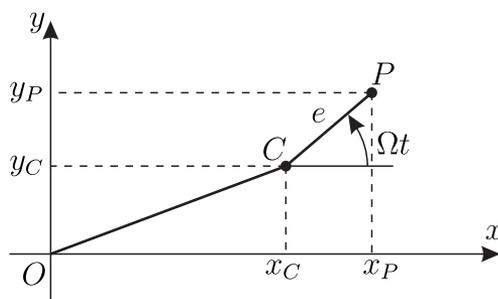


Abbildung 2.7: Querschnitt des Rotors

Die Position und die Geschwindigkeit des Punktes  $P$  setzt sich zusammen aus der Verschiebung des geometrischen Mittelpunktes  $C$  und dem Unwuchtanteil

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{r}}_P(t) &= \begin{bmatrix} x_P(t) \\ y_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_C(t) + e \cos(\Omega t) \\ y_C(t) + e \sin(\Omega t) \end{bmatrix} \\ \underline{\dot{\mathbf{r}}}_P(t) &= \begin{bmatrix} \dot{x}_P(t) \\ \dot{y}_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_C(t) - e\Omega \sin(\Omega t) \\ \dot{y}_C(t) + e\Omega \cos(\Omega t) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Die kinetische Energie  $T$  und die potenzielle Energie  $L$  sind

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m(\dot{x}_P^2 + \dot{y}_P^2) \\ L &= \frac{1}{2}k(x_C^2 + y_C^2). \end{aligned} \quad (2.35)$$

Mit Lagrange 2. Art kann die Bewegungsgleichung bestimmt werden

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial(T - L)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial(T - L)}{\partial q_i} = 0, \quad (2.36)$$

wobei sich die generalisierte Koordinate  $q_i$  aus den Koordinaten  $x_C$  und  $y_C$  zusammensetzt. Mit den Bedingungen aus Gleichung 2.35, ergibt Gleichung 2.36

$$\begin{aligned} m\ddot{x}_C + kx_C &= m\epsilon\Omega^2 \cos(\Omega t) \\ m\ddot{y}_C + ky_C &= m\epsilon\Omega^2 \sin(\Omega t). \end{aligned} \quad (2.37)$$

Die Lösung dieser Gleichung setzt sich aus der harmonischen und der partikulären Lösung zusammen. Die harmonische Lösung ist schon in 2.6 angegeben. Für die partikuläre Lösung wird der Ansatz

$$\begin{aligned} \bar{x}_p(t) &= \hat{x} \cos(\Omega t) \\ \bar{y}_p(t) &= \hat{y} \cos(\Omega t + \pi/2) \end{aligned} \quad (2.38)$$

in Gleichung 2.37 eingesetzt und ergibt

$$\begin{aligned} -\Omega^2 \hat{x} + \omega_k^2 \hat{x} &= \epsilon\Omega^2 \\ -\Omega^2 \hat{y} + \omega_k^2 \hat{y} &= \epsilon\Omega^2 \end{aligned} \quad (2.39)$$

mit der Eigenkreisfrequenz

$$\omega_k = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (2.40)$$

Die Antwortamplitude ergibt sich zu

$$\hat{x} = \hat{y} = e \frac{\Omega^2}{\omega_k^2 - \Omega^2} = e \frac{\mu^2}{1 - \mu^2} \quad (2.41)$$

Die homogene Lösung muss für die allgemeine Lösung auch berücksichtigt werden, da sie aber bei realen Schwingungen wegen der Dämpfung abklingt, ist die partikuläre Lösung von viel größerem Interesse. Sie bildet den *stationären Schwingungszustand* ab und  $\bar{x}_p(t)$  und  $\bar{y}_p(t)$  wird allein als *erzwungene Schwingung* bezeichnet. [1]

Die Lösung aus der Gleichung 2.41 hat die gleiche Frequenz wie die erregende Kraft. Die Amplitude ist proportional zur Erregerkraft. Im Nenner stehen die Quadrate der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  und der Erregerkreisfrequenz  $\Omega$ . Wenn sich diese stark voneinander unterscheiden, so ist die Amplitude der erzwungen Schwingung sehr klein. Unterscheiden sich die beiden Werte jedoch nur wenig, werden die Amplituden schnell sehr groß. Wenn die Erregerkreisfrequenz  $\Omega$  gleich der Eigenkreisfrequenz  $\omega_0$  ist, wird die Amplitude  $\hat{x}$  unendlich groß. Dieser Zustand wird Resonanz genannt. Um die Resonanz ist ein sehr kritischer Bereich für den Betriebszustand von Maschinen, da sehr schnell Schäden passieren können. Dieser Bereich sollte deswegen unbedingt vermieden werden.

Abbildung 2.8 zeigt ein solches Verhalten. Bei der Resonanz  $\Omega = \omega_0$  ist die Amplitude unendlich groß. Der Bereich vor der Resonanz wird *unterkritisch* und der darüber *überkritisch* genannt. Die Resonanz kann bei ausreichend schneller Beschleunigung durchfahren werden. Es gibt deswegen auch eine Unterteilung zwischen *unterkritischen* Läufer - jene Läufer, die unterhalb der kritischen Drehzahl betrieben werden - und *überkritische* Läufer, welche oberhalb der kritischen Drehzahl laufen.

Da sich der Verlauf der Kurve im überkritischen Bereich dem Wert der Exzentrizität  $e$  nähert, wird von der Selbstzentrierung der Rotoren gesprochen.

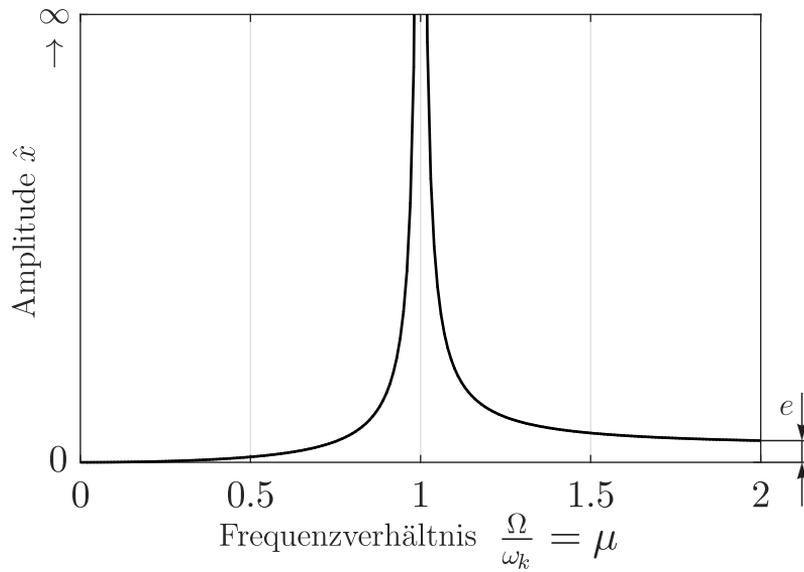


Abbildung 2.8: Verhalten bei Unwuchtanregung

### 2.3.2 Rotor mit vier Freiheitsgraden

Bei großen Scheiben am Rotor kann es sein, dass sich die Scheiben während der Rotation schrägstellen und somit ein zusätzliches Moment einbringen. Die Drehfreiheitsgrade können dann nicht mehr vernachlässigt werden. Abbildung 2.9 bildet dies ab.

Die Bewegungsgleichung für ein solches Modell ist

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{v} \\ \ddot{\psi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Omega J_p \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Omega J_p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{v} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \dots \\
 & \dots + \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & 0 & 0 \\ k_{21} & k_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_{11} & -k_{12} \\ 0 & 0 & -k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \varphi \\ v \\ \psi \end{bmatrix} = \Omega^2 \begin{bmatrix} me \cos(\Omega t + \beta) \\ (J_a - J_p)\alpha \sin(\Omega t + \gamma) \\ me \sin(\Omega t + \beta) \\ (J_a + J_p)\alpha \cos(\Omega t + \gamma) \end{bmatrix} \\
 & \hspace{20em} (2.42)
 \end{aligned}$$

oder zusammengefasst

$$\underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{G}} \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{f}}. \quad (2.43)$$

Der Kräftevektor ergibt sich aus dem Umstand, dass aufgrund der Scheibenexzentrizität und des schrägen Sitzes der Scheibe der Wellenschwerpunkt und der Wellendurchstoßpunkt nicht mehr ident sind. Es kommt folglich zu einer Unwuchtkraft und einem Moment. Diese beiden sind gegeneinander phasenverschoben. Der Einfachheit halber wird hier nur ein Term berechnet, da die kritischen Drehzahlen übereinstimmen und beide mit der gleichen Erregerfrequenz  $\Omega$  auftreten.[7]

Wenn die Verschiebungs- und Verdrehungsanteile zu komplexen Zahlen

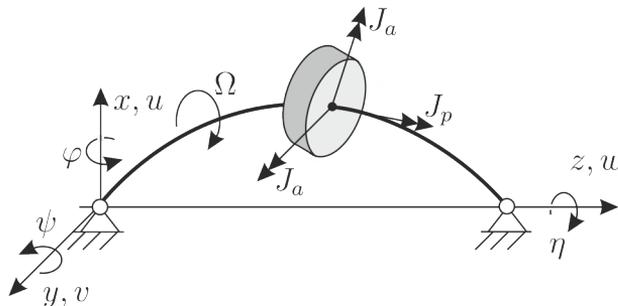


Abbildung 2.9: Ausgebogener Läufer mit Schrägstellung der Scheibe

zusammengefasst werden, halbiert sich das Gleichungssystem. Dazu werden die Ansätze

$$\begin{aligned} r_k &= u + jv \\ \varphi_k &= \varphi + j\psi \end{aligned} \quad (2.44)$$

in die Gleichung 2.43 eingesetzt und ergeben

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{r}_k \\ \ddot{\varphi}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -j\Omega J_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{r}_k \\ \dot{\varphi}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{11} & -jk_{12} \\ jk_{12} & k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_k \\ \varphi_k \end{bmatrix} &= \dots \\ \dots &= \Omega^2 \begin{bmatrix} mee^{j\beta} \\ (J_a - J_p)\alpha e^{j\gamma} \end{bmatrix} e^{j\Omega t} \end{aligned} \quad (2.45)$$

Wie bereits oben erwähnt, wird nun die Schrägstellung der Scheibe unberücksichtigt mit  $\alpha = 0$ , wodurch sich folgender Störterm ergibt

$$\underline{\mathbf{f}} = \Omega^2 \begin{bmatrix} mee^{j\beta} \\ 0 \end{bmatrix} e^{j\Omega t} \quad (2.46)$$

Somit kann mittels dem Ansatz für die rechte Seite gelten

$$\begin{bmatrix} r_e \\ \varphi_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{r}_e \\ \hat{\varphi}_e \end{bmatrix} e^{j(\Omega t + \beta)} \quad (2.47)$$

und zu der Lösung führen

$$\begin{bmatrix} -m\Omega^2 + k_{11} & -jk_{12} \\ jk_{12} & (J_p - J_a)\Omega^2 + k_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{r}_e \\ \hat{\varphi}_e \end{bmatrix} = me\Omega^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

## 2.4 Balkentheorie

Es gibt zwei verschiedene Ansätze die Spannungen eines eindimensionalen Bauteil mathematisch zu beschreiben. Der grundlegende Unterschied zwischen den Ansätzen ist das Weglassen oder die Berücksichtigung der Schubspannung.

### 2.4.1 Theorie nach Euler-Bernoulli

In dieser Theorie wird angenommen, dass die Schubspannungen gering sind und somit vernachlässigt werden können. Der Querschnitt verformt sich nicht unter Belastung, bleibt eben und steht immer noch senkrecht auf die neutrale Faser des Balkens wie in Abbildung 2.10 ersichtlich ist. Der Punkt  $P$  ist nur um den Winkel

$$\phi = -\frac{dv}{dz} = \frac{dw}{dy} \quad (2.49)$$

vom Ausgangszustand verschoben. Der Verschiebungsvektor  $\underline{\mathbf{u}}$  ist somit

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y, z; t) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v(z, t) \\ y\phi(z, t) \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Mit der Differentialoperatormatrix  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_p$  wird von der Verschiebung  $\underline{\mathbf{u}}$  auf die Verzerrung

$$\underline{\underline{\boldsymbol{\varepsilon}}} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}\underline{\mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ v(z, t) \\ y\phi(x, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ y\frac{\partial\phi}{\partial z} \\ 0 \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \phi \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

geschlossen. Somit sind bis auf den Eintrag

$$\varepsilon_{zz} = y\frac{\partial\phi}{\partial z} = y\phi' \quad (2.52)$$

alle Verzerrungen 0, da

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \phi = \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.53)$$

ist. Mit dem Werkstoffgesetz folgt

$$\tau_{zz} = E\varepsilon_{zz} = Ey\phi'. \quad (2.54)$$

Daraus ergibt sich die virtuelle Arbeit der inneren Energie

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta\varepsilon^T \tau dV = - \int_0^l \int_A \delta\phi' Ey^2 \phi' dAdz = - \int_0^l \delta\phi' EI_x \phi' dz \quad (2.55)$$

mit dem Flächenträgheitsmoment  $I_x = \int_A y^2 dA$ .

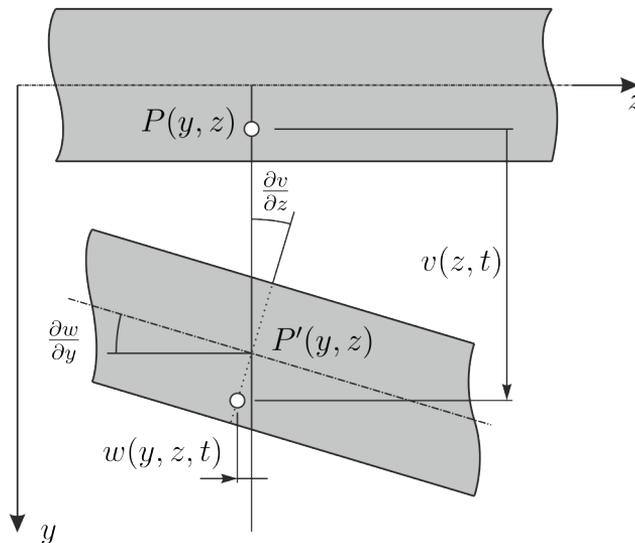


Abbildung 2.10: Euler-Bernoulli Modell

## 2.4.2 Theorie nach Timoshenko

Bei dieser These wird die Schubspannung nicht vernachlässigt. Es wird zur Biegung vom Euler-Bernoulli Balken die reine Schubspannung hinzugezählt. Der Querschnitt liegt nicht mehr senkrecht auf der neutralen

Faser, bleibt aber noch eben und unverformt. Der Verdrehwinkel  $\varphi$  beschreibt dies. Abbildung 2.11 zeigt den unverformten und verformten Zustand.

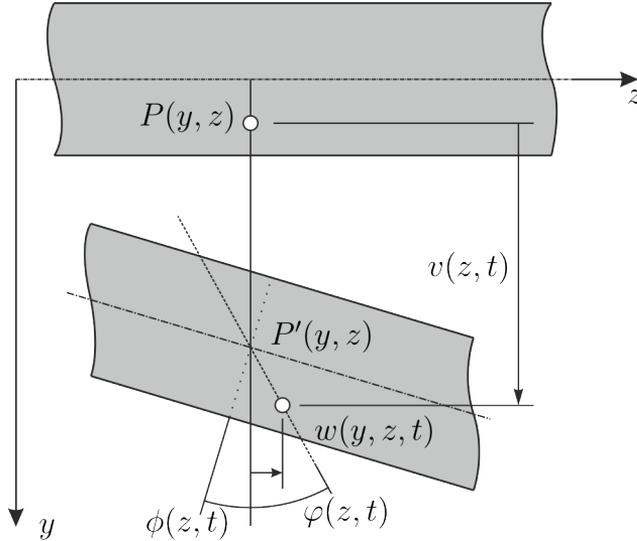


Abbildung 2.11: Timoshenko Modell

$$\underline{\mathbf{u}}(x, y, z; t) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ v(z, t) \\ y \varphi(z, t) \end{bmatrix} \quad \delta \underline{\mathbf{u}}(x, y, z) = \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta v \\ \delta w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \delta v(z, t) \\ y \delta \varphi(z, t) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Der Verzerrungstensor  $\varepsilon$  hat somit zwei Verschiebungseinträge, die ungleich null sind und betragen

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \varphi' \\ v' + \varphi \end{bmatrix} \quad \delta \underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \delta \varepsilon_{zz} \\ \delta \gamma_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \delta \varphi' \\ \delta(v' + \varphi) \end{bmatrix}. \quad (2.57)$$

Mit dem Werkstoffgesetz ergibt sich der Spannungstensor

$$\underline{\underline{\tau}} = \begin{bmatrix} \tau_{zz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

Somit folgt für die virtuelle Arbeit der inneren Kräfte

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\tau}} dV = - \int_0^l \int_A [y \delta \varphi' \quad \delta(v' + \varphi)] \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \varphi' \\ v' + \varphi \end{bmatrix} dA dz \\ &= - \underbrace{\int_0^l \delta \varphi' EI_x \varphi' dz}_{\text{Biegeanteil}} - \underbrace{\int_0^l \delta(v' + \varphi) GA \frac{1}{\chi} (v' + \varphi) dz}_{\text{Schubanteil}} \end{aligned} \quad (2.59)$$

mit  $\chi$  für den Schubkorrekturfaktor und den Integralen  $I_x = \int_A y^2 dA$ ,  $A = \int_A dA$  über die Querschnittsfläche des Balkens. Der Anteil des Schubanteils ist klar ersichtlich.

## 2.5 Strukturdynamik

Um eine Berechnung eines Rotors durchzuführen, sind mathematische Modelle erforderlich, die Materialdaten und Geometrie genau berücksichtigen. Aus der Geometrie des Rotors werden Parameter ausgelesen wie zum Beispiel Durchmesser, Länge und Materialdaten. Dann wird ein Rechenmodell aufgestellt und dies mit unterschiedlichen Lösungsverfahren gelöst. Die genannten Aufgaben lassen sich unterteilen in:

- Aufstellen der Bewegungsgleichungen
- Lösen der Bewegungsgleichungen

Zum Aufstellen der Bewegungsgleichungen wird heutzutage die Methode der finiten Elemente verwendet, dies wird im Abschnitt 2.5.1 näher erläutert. Das Lösen der Bewegungsgleichungen wird mit numerischen Solvern gehandhabt. Dazu gehören zum Beispiel das Newton-Raphson Verfahren

oder das Runge-Kutta Verfahren. Der Rechenaufwand ist je nach Anzahl der Freiheitsgrade enorm. Deswegen gibt es Methoden um diese Freiheitsgrade zu verringern, die im Kapitel 4 *Freiheitsgradreduktion* beschrieben sind. [11]

### 2.5.1 Aufstellen der Bewegungsgleichungen

Die früheren Verfahren, wie das Verfahren der Übertragungsmatrizen oder das Ritz'sche Verfahren mit globalen Ansatzfunktionen sind in ihrer Einsetzbarkeit beschränkt, da sie jegliche Zeitabhängigkeit eliminieren. Die Methode der finiten Elemente berücksichtigt diese jedoch und kann somit auch nicht periodische Anregungen in die Berechnung einbinden. Es können beliebige Tragwerkstypen (Rahmentragwerke oder Flächen-tragwerke) sowie dreidimensionale Kontinua berechnet werden. Mit ihr können lineare sowie nichtlineare Probleme in verschiedenen Bereichen der Technik, zum Beispiel Mechanik, Festigkeitslehre und Strömungslehre, gehandhabt werden.[10]

Das Verfahren hat das Ziel die Verschiebungen eines Körpers zu berechnen und beruht auf der Idee den Körper in  $P$  - einzelne Strukturelemente zu zerlegen, wobei  $o$  eine finite (endliche) Zahl ist. Das Element  $p$  hat das zugehörige Volumen  $V^{(p)}$  und die Oberfläche  $S^{(p)}$ , wobei  $1 \leq p \leq o$  gilt. Zu jedem Element werden zugehörige Knotenpunkte an der Oberfläche, in speziellen Fällen auch im Inneren des Elements, zugeordnet. Dann werden die Elementmatrizen gebildet, die den globalen Freiheitsgraden der Gesamtstruktur entsprechen und durch Aufsummierung der Elementmatrizen wird die Gesamtmatrix gebildet. An den Knoten sind Verschiebungen in beliebige Richtungen zulässig. Diese Knotenverschiebungen

$$\hat{\mathbf{u}} = [u_1 \quad v_1 \quad w_1 \quad u_2 \quad v_2 \quad \cdots \quad u_P \quad v_P \quad w_P]^T \quad (2.60)$$

aller  $P$  Knotenpunkte der finiten Elemente stellen die Freiheitsgrade dar und sind die gesuchten Lösungsvariablen des diskretisierten Systems. Die

Elemente sind untereinander über die gemeinsamen Knotenpunkte verbunden und Informationen bezüglich der inneren und äußeren Kräfte werden nur noch dort weitergegeben.

Die Information innerhalb eines Elements über das Verschiebungsfeld  $\underline{\mathbf{u}}(x, y, z; t)$  mit den lokalen Koordinaten  $x, y$  und  $z$  wird für das Element  $p$  durch eine Interpolationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)}$  und den Verschiebungen  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  der einzelnen Knoten angenähert.

$$\underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x, y, z; t) = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)}(x, y, z)\underline{\hat{\mathbf{u}}}(t) \quad (2.61)$$

$\underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)}$  ist die Interpolationsmatrix für die Verschiebungen, der hochgestellte Index ( $p$ ) bedeutet "für das  $p$ -te Element und  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}(t)$  sind die Knotenpunktverschiebungen für die jeweiligen definierten globalen Verschiebungskordinaten - hier sind es  $u, v$  und  $w$ . Das heißt der Vektor  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  hat eine Dimension von  $3o$ . [6]

Die Ansatzfunktionen sind für plausible Ergebnisse bestimmten Forderungen unterworfen:

- Zur Annäherung der Verschiebung sind nur stetige Funktionen sinnvoll.
- Starrkörperverschiebungen sollen reproduzierbar sein.
- Elemente dürfen sich nicht überlappen oder klaffen. Sie müssen kompatibel sein.
- Die Erfassung von konstanten Verzerrungszuständen soll gegeben sein.

Zur Erfüllung dieser Forderungen werden meist Polynome als Ansatzfunktion verwendet. [8] Der simpelste Fall ist die Annäherung als lineare Funktion .

Somit ist das kontinuumsmechanische, kontinuierliche Problem mit unendlich vielen Freiheitsgraden (gesamtes Verschiebungsfeld  $\underline{\mathbf{u}}$ ) durch ein diskretes System mit endlich vielen Freiheitsgraden (Knotenpunktverschiebungen  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$ ) angenähert worden. Ein Beispiel zu einer beliebigen Funktion ist in 2.12 abgebildet.

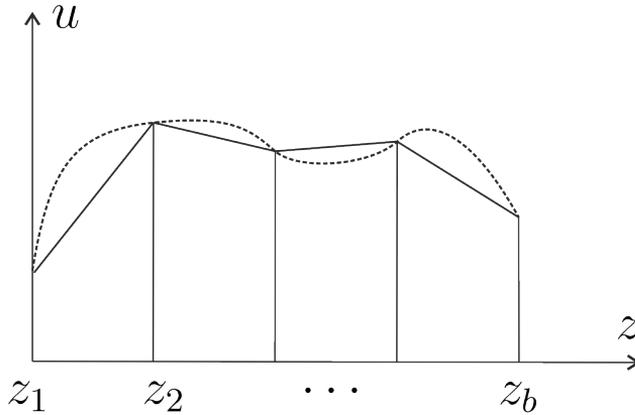


Abbildung 2.12: Kontinuierliches und diskretisiertes System

Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen oder virtuellen Arbeit sagt aus, dass ein Körper nur dann im Gleichgewicht ist, wenn bei einer virtuellen Verschiebung  $\delta \underline{\mathbf{u}}$  aus der aktuellen Lage heraus, die Summe der virtuellen Arbeit der inneren Kräfte  $\delta W_{int}$ , der virtuellen Arbeit der äußeren Kräfte  $\delta W_{ext}$  und der virtuellen Arbeit der Trägheitskräfte  $\delta W_{inertia}$  gleich null ist.

$$\delta W_{int} + \delta W_{ext} + \delta W_{inertia} = 0 \quad (2.62)$$

Diese Terme sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \delta W_{int} &= - \int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{\tau}} dV \\ \delta W_{ext} &= \int_V \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}^V dV + \int_S \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}^S dS \\ \delta W_{inertia} &= \int_V \delta \underline{\mathbf{u}}^T \rho (-\underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}) dV \end{aligned} \quad (2.63)$$

Mit Hilfe der Spannungen  $\underline{\underline{\tau}}$  und den Verzerrungen  $\underline{\underline{\varepsilon}}$ , angeschrieben als

Tensoren zweiter Stufe

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \tau_{xx} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{pmatrix} \quad \underline{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.64)$$

und mit dem Werkstoffgesetz  $\underline{\tau} = \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\varepsilon}$  mit

$$\underline{\underline{\mathbf{C}}} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix}$$

ergibt sich daraus für die innere virtuellen Arbeit

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \underline{\varepsilon} \underline{\tau} dV = - \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\underline{\mathbf{C}}}\underline{\varepsilon} dV \quad (2.65)$$

Unter Verwendung der Differentialoperatormatrix  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_p$  wird ein Zusammenhang zwischen der lokalen Elementverschiebung  $\underline{\mathbf{u}}^{(p)}$  und der Verzerrung  $\underline{\varepsilon}^{(p)}$  im Element  $p$  deklariert.

$$\underline{\varepsilon}^{(p)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_p \underline{\mathbf{u}}^{(p)}(x, y, z; t) \quad \underline{\underline{\mathbf{D}}}_p = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Für das unendliche lokale Verschiebungsfeld  $\mathbf{u}^{(p)}$  wird die endliche lokale Knotenpunktverschiebung  $\hat{\mathbf{u}}^{(p)}$  eingesetzt. Somit wird die Verzerrung mit den Knotenpunktverschiebungen verbunden. Die Multiplikation von der Differentialoperatormatrix  $\underline{\underline{\mathbf{D}}}_p$  und der Interpolationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}$  wird mit der  $\underline{\underline{\mathbf{B}}}$  Matrix abgekürzt.

$$\underline{\underline{\varepsilon}}^{(p)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_p \mathbf{u}^{(p)} = \underline{\underline{\mathbf{D}}}_p \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)}(x, y, z) \hat{\mathbf{u}}(t) = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(p)} \hat{\mathbf{u}}(t) \quad (2.67)$$

Diese Annahme gilt auch für die virtuellen Verschiebungen  $\delta \mathbf{u}$  und Verzerrungen  $\delta \underline{\underline{\varepsilon}}$

$$\delta \mathbf{u} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)}(x, y, z) \delta \hat{\mathbf{u}} \quad \delta \underline{\underline{\varepsilon}} = \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(p)}(x, y, z) \delta \hat{\mathbf{u}} \quad (2.68)$$

Eingesetzt in die Gleichung der virtuellen Arbeit und aufsummiert für jedes Element  $p$  ergibt:

$$\delta W_{int} = - \int_V \delta \underline{\underline{\varepsilon}} \underline{\underline{\mathbf{C}}} \underline{\underline{\varepsilon}} dV = - \delta \hat{\mathbf{u}}^T \underbrace{\sum_{(p)} \int_{V^{(p)}} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(p)T} \underline{\underline{\mathbf{C}}}^{(p)} \underline{\underline{\mathbf{B}}}^{(p)} dV^{(p)}}_{\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(p)}}}_{\underline{\underline{\mathbf{K}}}} \hat{\mathbf{u}} \quad (2.69)$$

$$\delta W_{int} = - \delta \hat{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \hat{\mathbf{u}}$$

mit der globalen Steifigkeitsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}$  als Summe der Elementsteifigkeitsmatrizen  $\underline{\underline{\mathbf{K}}}^{(p)}$ .

$$\begin{aligned} \delta W_{ext} &= \int_V \delta \mathbf{u}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}^B dV + \int_S \delta \mathbf{u}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}^S dS^{(p)} = \dots \\ &\dots \delta \hat{\mathbf{u}}^T \sum_{(p)} \underbrace{\left[ \int_{V^{(p)}} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)T} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^V dV^{(p)} + \int_{S^{(p)}} \underline{\underline{\mathbf{H}}}^{(p)T} \underline{\underline{\mathbf{f}}}^S dS^{(p)} \right]}_{\underline{\underline{\mathbf{f}}}} = \quad (2.70) \end{aligned}$$

$$\delta W_{ext} = \delta \hat{\mathbf{u}}^T \underline{\underline{\mathbf{f}}}$$

mit  $\underline{\mathbf{f}}$  für äußere Kräfte, die die verteilten Volumskräfte  $\underline{\mathbf{f}}^{B(p)}$  und Oberflächenkräfte  $\underline{\mathbf{f}}^{S(p)}$  beinhaltet.

$$\begin{aligned} \delta W_{inertia} &= \int_V \delta \underline{\mathbf{u}}^T \rho (-\underline{\ddot{\mathbf{u}}}) dV = \dots \\ &\dots = -\delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}^T \underbrace{\sum_{(p)} \int_{V^{(p)}} \underline{\mathbf{H}}^{(p)T} \rho \underline{\mathbf{H}}^{(p)} dV^{(p)}}_{\underline{\mathbf{M}}^{(p)}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\delta W_{inertia} = -\delta \underline{\hat{\mathbf{u}}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}}$$

mit globaler Massenmatrix  $\underline{\mathbf{M}}$ , die sich als Summe der Elementmassenmatrizen  $\underline{\mathbf{M}}^{(p)}$  ergibt.

Die Gleichungen 2.69, 2.70 und 2.71 in das Prinzip der virtuellen Arbeit 2.62 eingesetzt, ergibt

$$\delta \underline{\mathbf{u}}^T (\underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\hat{\mathbf{u}}}) = \delta \underline{\mathbf{u}}^T \underline{\mathbf{f}} \quad (2.72)$$

Durch die virtuelle Verschiebung kann gekürzt werden und es folgt:

$$\underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (2.73)$$

Die Steifigkeit und Massenmatrix zeigen bei geeigneter Knotennummerierung eine ausgeprägte Bandstruktur auf, was die Berechnung beschleunigt, da der numerische Aufwand gering gehalten wird.

Mit berücksichtigter Dämpfung ergibt sich die Gleichung 2.73 zu

$$\underline{\mathbf{M}} \underline{\ddot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{D}} \underline{\dot{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}. \quad (2.74)$$

## 2.5.2 Timoshenko Elemente für Rotordynamik

Die Bewegungsgleichung 2.74 ist für *allgemeine Körper* bestimmt. Bei der Rotation von Körpern um eine Achse müssen zusätzliche dynamische Eigenschaften berücksichtigt werden. Die Drehung  $\Omega t$  hat einen großen

Einfluss, was zu sogenannten Kreiseffekten führt und mit der gyroskopischen Matrix berücksichtigt wird. Somit lautet die Bewegungsgleichung

$$\underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} + (\underline{\Omega} \underline{\mathbf{G}} + \underline{\mathbf{D}}) \dot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{f}}. \quad (2.75)$$

Rotierende Körper werden als eindimensionale Balken modelliert. Dazu gehören die zwei vorgestellten Gruppen:

- Euler-Bernoulli Balkenelemente
- Timoshenko Balkenelemente

Da die Information über die Schubdeformation im Falle der Rotordynamik nicht zu vernachlässigen ist, werden Timoshenko Balkenelemente verwendet.

Das Timoshenko Element hat zwei Knoten an den Enden und sechs Freiheitsgrade pro Knoten (siehe Abbildung 2.13). Es besteht aus einem rotationssymmetrischen homogenen Balken mit ungekoppelten Zug-, Torsions- und Biegeeigenschaften. Die sechs Freiheitsgrade setzen sich zusammen aus drei Verschiebungen und drei Rotationen. Der Vektor von der Knotenverschiebung - der generalisierten Koordinaten des Elements - ist

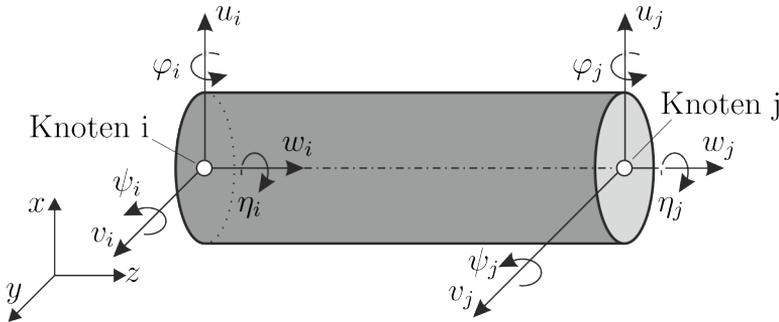


Abbildung 2.13: Freiheitsgraddefinition eines Timoshenko Elements

$$\underline{\mathbf{u}} = [u, v, w, \varphi, \psi, \eta]^T. \quad (2.76)$$

Da sich die einzelnen Beanspruchungsarten (Zug, Torsion und Biegung) komplett entkoppeln lassen, kann der Vektor  $\hat{\mathbf{u}}$  auch zerlegt werden in diese Beanspruchungsarten.

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{z}} &= [w_1, w_2]^T, & \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_u} &= [u_1, \varphi_1, u_2, \varphi_2]^T, \\ \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}} &= [\eta_1, \eta_2]^T, & \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_v} &= [v_1, \psi_1, v_2, \psi_2]^T.\end{aligned}\quad (2.77)$$

In der vorliegenden Arbeit ist nur die Biegung von Relevanz.

**Ansatzfunktion** Um die Schubdeformation zu berücksichtigen, aber trotzdem nicht zu überschätzen, muss eine gute Ansatzfunktion gefunden werden. Dazu werden die Ansatzfunktionen

$$\begin{aligned}N_{11} &= \frac{1 + \Phi(1 - \zeta) - 3\zeta^2 + 2\zeta^3}{1 + \Phi}, & N_{12} &= l\zeta \frac{1 + \frac{1}{2}(1 - \zeta) - 2\zeta + \zeta^2}{1 + \Phi} \\ N_{13} &= \zeta \frac{\Phi + 3\zeta - 2\zeta^2}{1 + \Phi}, & N_{14} &= l\zeta \frac{-\frac{1}{2}\Phi(1 - \zeta) - \zeta + \zeta^2}{1 + \Phi}, \\ N_{21} &= 6\zeta \frac{\zeta - 1}{l(1 + \Phi)}, & N_{22} &= \frac{1 + \Phi(1 - \zeta) - 4\zeta + 3\zeta^2}{1 + \Phi}, \\ N_{23} &= -6\zeta \frac{\zeta - 1}{l(1 + \Phi)}, & N_{24} &= \frac{\Phi\zeta - 2\zeta + 3\zeta^2}{1 + \Phi},\end{aligned}\quad (2.78)$$

mit  $\zeta = w/l$  als dimensionslose Koordinate,

$$\Phi = \frac{12EI_y\chi}{GA l^2} \quad (2.79)$$

und  $\chi$  als Schubkorrekturfaktor gewählt. [8] Wenn der Balken unendlich dünn ist, ist  $\Phi$  gleich null und die Ansatzfunktionen entsprechen denen des Euler-Bernoulli Balkens. Als rotationssymmetrischer Balken ist das axiale Flächenträgheitsmoment  $I_y = I_x$ , der Schubkorrekturfaktor  $\chi$  und  $\Phi$  in  $u$ - und  $v$ -Richtung gleich und es lässt sich mit entsprechender Vorzeichenregelung die gleiche Interpolationsmatrix  $H$  für die Verschiebung in  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_u}$  und  $\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_v}$  finden.

$$\begin{bmatrix} u \\ \varphi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix}}_H \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ \varphi_1 \\ u_2 \\ \varphi_2 \end{bmatrix} \quad (2.80)$$

$$\begin{bmatrix} v \\ \psi \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & N_{14} \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & N_{24} \end{bmatrix}}_H \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ -\psi_1 \\ v_2 \\ -\psi_2 \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

Die potenzielle Energie

$$dL = \frac{1}{2}EI_y \left[ \left( \frac{d\psi}{dz} \right)^2 + \left( \frac{d\varphi}{dz} \right)^2 \right] dz + \frac{1}{2} \frac{GA}{\chi} (\gamma_{uw}^2 + \gamma_{vw}^2) dz. \quad (2.82)$$

setzt sich aus den Teilen Biegung und Schub zusammen mit den Schubverformungen  $\gamma_{uw}$  und  $\gamma_{vw}$ . Diese hängen mit den Verschiebungen wie folgt zusammen

$$\gamma_{uw} = \psi - \frac{du}{dw}, \quad \gamma_{vw} = -\varphi - \frac{dv}{dw}. \quad (2.83)$$

Die Gleichungen 2.80 und 2.81 in die Gleichung 2.83 eingesetzt und eine Integration über die Elementlänge  $l$  ergibt

$$L = \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_u}^T \underline{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_u} + \frac{1}{2} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_v}^T \underline{\mathbf{K}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{B}_v} \quad (2.84)$$

mit der symmetrischen Steifigkeitsmatrix

$$\underline{\mathbf{K}} = \frac{EI_y}{l^3(1 + \Phi)} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12l & 6l \\ (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 & \\ & 12 & -6l & \\ \text{symm.} & & (4 + \Phi)l^2 & \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

Die kinetische Energie  $dT$  für den Balken lautet

$$dT = \frac{1}{2} \left[ \rho A (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) + I_y (\dot{\varphi}^2 + \dot{\psi}^2) + J_p (\Omega^2 + 2\Omega\dot{\varphi}\psi) \right] \quad (2.86)$$

Bei einem axialsymmetrischer Querschnitt haben das polare Massenträgheitsmoment  $J_p$  und das axiale Massenträgheitsmoment  $J_y$  den Zusammenhang von  $J_p = 2J_y$ . Die Ansatzfunktionen 2.80 und 2.81 in die Gleichung 2.86 eingesetzt, integriert über die Elementlänge  $l$  ergibt

$$T = \frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_u^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T \dot{\underline{\mathbf{u}}}_u + \frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_v^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T \dot{\underline{\mathbf{u}}}_v + \frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_u^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_R \dot{\underline{\mathbf{u}}}_u + \frac{1}{2} \dot{\underline{\mathbf{u}}}_v^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_R \dot{\underline{\mathbf{u}}}_v + \dots \quad (2.87)$$

$$\dots + \rho J_y l \Omega^2 - 2\Omega \dot{\underline{\mathbf{u}}}_v^T \underline{\underline{\mathbf{M}}}_R \dot{\underline{\mathbf{u}}}_u$$

Die Matrizen  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T$  und  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R$  sind die Massenmatrizen verknüpft mit der translatorischer Trägheit und der Rotationsträgheit

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_T = \frac{\rho A l}{420(1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & lm_2 & m_3 & -lm_4 \\ & l^2 m_5 & lm_4 & -l^2 m_6 \\ & & m_1 & -lm_2 \\ \text{symm.} & & & l^2 m_5 \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R = \frac{\rho I_y}{30l(1 + \Phi)^2} \begin{bmatrix} m_7 & lm_8 & -m_7 & lm_8 \\ & l^2 m_9 & -lm_8 & -l^2 m_{10} \\ & & m_7 & -lm_8 \\ \text{symm.} & & & l^2 m_9 \end{bmatrix} \quad (2.89)$$

wo

$$\begin{aligned} m_1 &= 156 + 294\Phi + 140\Phi^2, & m_2 &= 22 + 38.5\Phi + 17.5\Phi^2, \\ m_3 &= 54 + 126\Phi + 70\Phi^2, & m_4 &= 13 + 31.5\Phi + 17.5\Phi^2, \\ m_5 &= 4 + 7\Phi + 3.5\Phi^2, & m_6 &= 3 + 7\Phi + 3.5\Phi^2, \\ m_7 &= 36, & m_8 &= 3 - 15\Phi, \\ m_9 &= 4 + 5\Phi + 10\Phi^2, & m_{10} &= 1 + 5\Phi - 5\Phi^2. \end{aligned}$$

Die Massenmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{M}}}$  und gyroscopische Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  ergibt sich damit

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}} = \underline{\underline{\mathbf{M}}}_T + \underline{\underline{\mathbf{M}}}_R \quad \underline{\underline{\mathbf{G}}} = 2\underline{\underline{\mathbf{M}}}_R \quad (2.90)$$

Die Systemmatrizen sind in [8] hergeleitet.

### 2.5.3 Lösen der Bewegungsgleichungen

Der nächste Schritt ist, die Bewegungsgleichung, vorerst ohne Dämpfung (siehe Gleichung 2.73), zu lösen, um die Verschiebungen einzelner Knoten zu bestimmen. Die Bewegungsgleichung ist eine Differentialgleichung zweiter Ordnung. Diese kann übergeführt werden in eine Differentialgleichung erster Ordnung, wenn der Ansatzvektor  $\underline{\mathbf{z}}$  mit den generalisierten Koordinaten  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  als Verschiebung und  $\underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}}$  als Geschwindigkeit in den Knoten in die Ausgangsgleichung 2.73 eingesetzt wird. Der Ansatzvektor

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\mathbf{u}}} \\ \underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}} \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

und dessen Ableitung

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}} \\ \underline{\ddot{\hat{\mathbf{u}}}} \end{bmatrix} \quad (2.92)$$

eingesetzt in die Bewegungsgleichung 2. Ordnung ergibt

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{I}} \\ -\underline{\mathbf{M}}^{-1}\underline{\mathbf{K}} & \underline{\mathbf{0}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{A}}} \cdot \underline{\mathbf{z}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ -\underline{\mathbf{M}}^{-1}\underline{\mathbf{f}} \end{bmatrix}}_{\underline{\mathbf{b}}}, \quad (2.93)$$

was einer Differentialgleichung erster Ordnung entspricht. Mit den eingeführten Abkürzungen erfolgt eine übersichtlichere Darstellung der Differentialgleichung

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \underline{\mathbf{A}} \cdot \underline{\mathbf{z}} + \underline{\mathbf{b}} \quad (2.94)$$

Diese Gleichung kann mittels eines numerischen Verfahrens, zum Beispiel dem Runge-Kutta Verfahren, gelöst werden. Näheres dazu wird im nächsten Abschnitt erläutert.

## Runge-Kutta

Die Gleichung 2.94 wird mittels Runge-Kutta Verfahren zu jedem Zeitschritt gelöst. Als Beispiel soll das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(0) = y_0, \quad 0 \leq t < T \leq \infty \quad (2.95)$$

angeführt werden. Als Lösung dieser Gleichung wird eine differenzierbare Funktion über dem Intervall  $[0, T)$  verstanden, deren Ableitung diese Gleichung erfüllt.

Im Vergleich zu anderen Einschrittverfahren, wie dem Euler-Verfahren, ist das Runge-Kutta Verfahren genauer, da der lokale Fehler geringer ist. Beim Euler-Verfahren wird die Tangentensteigung nur an den Randpunkten zwischen zwei Schritten auf der Lösungsfunktion approximiert. Das Runge-Kutta Verfahren nimmt mehrere Stufen  $\eta_j$  zwischen den Randpunkten um die Steigung an mehreren Punkten zu ermitteln. Der Ansatz vom momentanen Funktionswert  $y_i$  für den nächsten Funktionswert  $y_{i+1}$  ist

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^s b_j f(t_i + c_j h, \eta_j), \quad \sum_{j=1}^s b_j = 1. \quad (2.96)$$

Die Idee ist, dass wenn die Schrittweite  $h$  ausreichend gering ist, der neue Funktionswert  $y_{i+1}$  sich vom vorherigen  $y_i$  nicht signifikant unterscheiden wird und deswegen über die Annäherung von der Steigung  $f(t_i + c_j h, \eta_j)$  und der Schrittweite  $h$  sich der neue Punkt  $y_{i+1}$  mit den Parameter  $c_j$ ,  $b_j$  und  $s$  berechnen lässt. Der Wert  $c_j$  ist der  $j$ .te Knoten des Verfahrens. Dieser ist beim Wert 1 genau der nächste Iterationspunkt. Bei einem Wert unter 1 wird ein Hilfspunkt zwischen den zwei Iterationsschritten verwendet und bei 0 wird die Funktion am momentanen Punkt  $i$  ermittelt. Die Variable  $b_j$  ist die Gewichtung und  $s$  ist die Stufenanzahl. Die Summe der Gewichtung  $b_j$  muss wieder eins sein. Die Stufen  $\eta_j$  können über die Annäherung

$$\eta_j \approx y(t_i + c_j h) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + c_j h} \dot{y} dt = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_i + c_j h} f(t, y(t)) dt \quad (2.97)$$

und über den Einsatz der Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^s b_j g(c_j) \approx \int_0^1 g(x) dx \quad (2.98)$$

sich zu folgendem ergeben:

$$\begin{aligned} \eta_j &= y_i + h \sum_{l=1}^s a_{jl} f(t_i + c_l h, \eta_l) \\ \sum_{l=1}^s a_{jl} &= c_j \quad j = 1, \dots, s \end{aligned} \quad (2.99)$$

Die Koeffizienten  $a_{jl}$ ,  $b_j$ ,  $c_j$  können in einem quadratischen Tableau zusammengefasst werden, die nach Butcher [13] benannt sind.

$$\frac{c \mid A}{\mid b} = \begin{array}{c|cccc} c_1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1s} \\ c_2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2s} \\ \cdots & \cdots & & & \cdots \\ c_s & a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{ss} \\ \hline & b_1 & b_2 & \cdots & b_s \end{array} \quad (2.100)$$

Auch andere Verfahren lassen sich damit abbilden. Zum Beispiel wenn  $s = 1$ ,  $c_1 = 0$ ,  $\eta_1 = y_1$  ergibt dies das explizite Euler-Verfahren:

$$\frac{0 \mid 0}{\mid 1}$$

Eingesetzt in die Gleichung 2.96 gibt die Formel für den nächsten Iterationsschritt  $y_{i+1}$  vor.

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i) \quad (2.101)$$

Für den impliziten Euler wird  $s = 1$ ,  $c_1 = 1$ ,  $\eta_1 = y_{i+1}$  und damit das Tableau

$$\frac{1 \mid 1}{\mid 1}$$

Diese verknüpft mit der Gleichung 2.96 zeigt den Berechnungsschritt für die Näherung.

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_{i+1}, y_{i+1}) \quad (2.102)$$

Für das klassische Runge-Kutta Verfahren nach Kutta (1901) als explizites Verfahren mit der Simpson-Formel wird der mittlere Knoten  $c$  verdoppelt bei gleichzeitiger Halbierung des dazugehörigen Gewichts  $b$ . Daraus folgen vier Stufen.

|     |     |     |     |     |
|-----|-----|-----|-----|-----|
| 0   |     |     |     |     |
| 1/2 | 1/2 |     |     |     |
| 1/2 | 0   | 1/2 |     |     |
| 1   | 0   | 0   | 1   |     |
|     | 1/6 | 1/3 | 1/3 | 1/6 |

Die Definition für den nächsten Schritt  $y_{i+1}$  erfolgt durch Einsetzen der Tableau in die Gleichung 2.96.

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \quad i = 0, 1 \dots \quad (2.103)$$

mit den Steigungen  $k_1, k_2, k_3, k_4$

$$\begin{aligned}
 k_1 &= f(t_i, u_i), \\
 k_2 &= f(t_i + h/2, y_i + \frac{h}{2} k_1), \\
 k_3 &= f(t_i + h/2, y_i + \frac{h}{2} k_2), \\
 k_4 &= f(t_i + h, y_i + h k_3)
 \end{aligned} \quad (2.104)$$

Graphisch dargestellt zeigt dies Abbildung 2.14.

- Mit einem halben (expliziten) Euler Schritt ist die im Punkt (1) markierte Steigung  $k_2 = f(t_i + h/2, \eta_2)$  errechnet.
- Ein weiterer halber Euler Schritt mit dieser Steigung  $k_2$  führt auf die markierte Steigung (2)  $k_3 = f(t_i + h/2, \eta_3)$ .

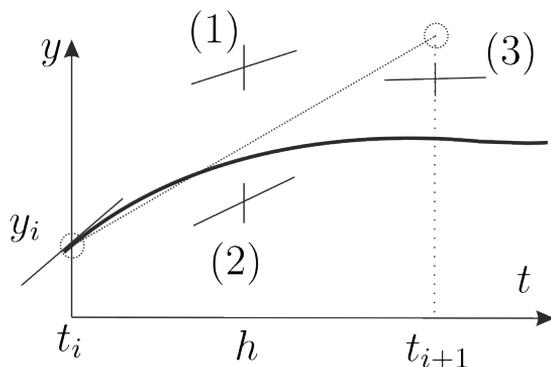


Abbildung 2.14: Runge-Kutta Verfahren

- Ein ganzer Euler Schritt mit Steigung  $k_3$  definiert  $k_4 = f(t_i + h, \eta_4)$ .
- Abschließende Mittelung von  $k_1 = f(t_i, y_i)$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  und  $k_4$  ergibt die Steigung der strichlierten Linie zu  $y_{i+1}$ .

Als Anmerkung sei noch erwähnt, dass ein Mehrschrittverfahren ein Verfahren ist, dass statt nur dem vorherigen Wert auch ältere Näherungen  $y_{i-1}$ ,  $y_{i-2}$  etc. zur Berechnung von  $y_{i+1}$  verwendet werden. [14]

# 3 Berechnungsmethoden

In diesem Kapitel werden folgende beide Lösungsarten beschrieben: die quasi-stationäre Lösung und die transiente Berechnung. Ihr grundlegender Unterschied ist, dass bei der quasi-stationären Lösung analytisch vorgegangen und bei der transienten Berechnung ein numerisches Verfahren eingesetzt wird.

Während der quasi-stationären Berechnung werden dynamische Einflüsse und Berechnungsergebnisse vom vorderen Zeitschritt vernachlässigt. Somit liefert diese schnellere, wenn auch realitätsfernere Ergebnisse, die oft ausreichend sind. Für nichtlineare Fälle ist sie allerdings ungeeignet. Es werden nur die erzwungenen, eingeschwungenen Schwingungszustände berechnet. Auch die Berechnung mit zwei unterschiedlichen Anregungsfrequenzen ist nicht möglich.

Für die transiente Berechnung wird die Lösung vom vorderen Zeitschritt berücksichtigt und als Ausgangsbasis für den nächsten Zeitschritt herangezogen. Dadurch kann der Einschwingvorgang genauer untersucht werden. Auch eventuelle Nichtlinearitäten sind mit dieser Methode integrierbar. Außerdem wird hier auch der Einfluss durch unterschiedliche externe Kraftanbringung berücksichtigt.

### 3.1 Quasi-stationäre Berechnung

Die Ausgangsgleichung ist in Gleichung 2.74 schon angeführt und wird hier noch einmal wiederholt:

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}\dot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}}$$

Der ungedämpfte Fall ist gegeben wenn  $\underline{\underline{\mathbf{D}}} = 0$ . Wenn die externe Kraft als eine harmonische Anregung

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}} \cos \Omega t \quad (3.1)$$

angreift, kann diese als rotierender Zeiger mit Betrag der Amplitude  $\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}}$  und der Phasenlage  $j\Omega$  abgebildet werden. Dies ergibt

$$\underline{\mathbf{f}} = \Re \left( \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}} e^{j\Omega t} \right). \quad (3.2)$$

Die Lösung dieser inhomogenen Differentialgleichung besteht aus homogenen und partikulären Teilen, wobei der partikuläre Anteil den erwähnten *eingeschwungenen Zustand* darstellt und deshalb wichtiger ist. Für diesen kann der Ansatz für die Verschiebung

$$\underline{\hat{\mathbf{u}}} = \Re \left( \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} e^{j\Omega t} \right) \quad (3.3)$$

gefunden werden. Die Differentialgleichung 3.1 ergibt nach Einsetzen des Ansatzes 3.3 und dessen Ableitungen und der Anregung 3.2

$$\left[ -\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} + j\Omega \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \right] \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}}. \quad (3.4)$$

Daraus ergibt sich für die gesuchte Amplitude

$$\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = \underline{\underline{\mathbf{H}}}(j\Omega) \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}} \quad (3.5)$$

mit der Frequenzgangmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}(j\Omega)$  dargestellt

$$\underline{\underline{\mathbf{H}}}(j\Omega) = \left[ -\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} + j\Omega \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \right]^{-1}. \quad (3.6)$$

Die Frequenzgangmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{H}}}(j\Omega)$  stellt die Verknüpfung mit der harmonischen Krafterregung (Eingangsgröße) und mit der Systemantwort der Verschiebung (Ausgangsgröße) her. [1]

Bei Rotoren wird zusätzlich die gyroskopische Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{G}}}$  berücksichtigt. Deswegen folgt aus Gleichung 3.4

$$\left[ -\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} + j\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{G}}} + j\Omega \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \right] \underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}} \quad (3.7)$$

und für den Lösungsvektor

$$\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}} = \left[ -\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{M}}} + j\Omega^2 \underline{\underline{\mathbf{G}}} + j\Omega \underline{\underline{\mathbf{D}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}} \right]^{-1} \underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}}. \quad (3.8)$$

Diese Gleichung zeigt den eingeschwungenen Zustand des Rotors bei einer konstanten Drehzahl. Wenn die Berechnung über mehrere Drehzahlen durchgeführt wird, ergibt dies ein Verhalten des Rotors im ausgewählten Drehzahlbereich. Somit kann ein Hochlauf mit linearer Lagerung gut dargestellt werden. [9]

## Rotor unter Unwucht

Bei Unwucht wird der Kraftvektor  $\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}}$  zu der definierten Größe

$$\underline{\mathbf{f}}_{\mathbf{A}} = \underline{\mathbf{m}} e \Omega^2, \quad (3.9)$$

wo die Exzentrizität  $e$  aus der gewünschten Wuchtgüte

$$G = e \cdot \Omega = e \cdot \frac{\pi n}{30} \Rightarrow e = \frac{30 \cdot G}{\pi n} \quad (3.10)$$

berechnet werden kann und der Massenvektor  $\underline{\mathbf{m}}$  die jeweilige Elementmasse eingetragen hat.

In Abbildung 3.1 ist vom Balken (siehe 5.3) bei Unwuchtanregung die Verschiebung im linken Lager über der Frequenz dargestellt. Bei niedriger Frequenz ist eine Proportionalität zwischen Wellendurchbiegung und

der Unwucht ersichtlich. Die kritische Frequenz bei 17 Hertz ist klar erkennbar, dort würde die Wellenauslenkung unendlich groß werden. Wenn der kritische Bereich schnell durchfahren wird, werden wieder geringere Wellenauslenkungen erreicht während sich bei sehr hohen Drehzahlen die Wellenauslenkung  $\underline{u}_A$  asymptotisch dem Wert der Exzentrizität  $e$  nähern. Dies bedeutet, dass der Schwerpunkt auf der Drehachse liegt und sich die Welle selbst zentriert hat.

Da es sich bei der Berechnung um eine isotropische Lagerung handelt, beträgt die Verschiebung in  $u$ - und  $v$ -Richtung den gleichen Wert.

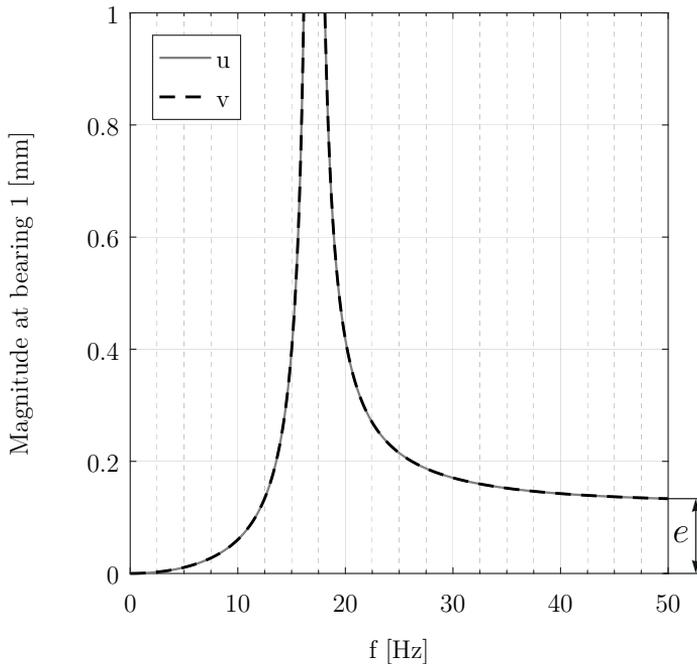


Abbildung 3.1: Hochlauf eines Rotors

## 3.2 Transiente Berechnung

Für die transiente Berechnung wird unterschieden zwischen linear elastischen Lagern und anisotropen, drehzahlabhängigen Lagern. Bei den linear elastischen Lagern ist die Gleichung 3.11 Ausgangsbasis.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}}(t) + \left(\Omega(t)\underline{\underline{\mathbf{G}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}\right)\dot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\hat{\mathbf{u}}}(t) = \underline{\mathbf{f}} \quad (3.11)$$

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{G}}}, \underline{\underline{\mathbf{D}}}, \underline{\underline{\mathbf{K}}} \dots \text{konstant}$$

Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix sowie die gyroskopische Matrix sind konstant und ändern sich während der Berechnung nicht.

Für die Berechnung mittels nichtlinearer Lager werden die Steifigkeits- und die Dämpfungswerte in jedem Berechnungsschritt neu ermittelt und in die Matrizen übernommen.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}}(t) + \left(\Omega(t)\underline{\underline{\mathbf{G}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}(t)\right)\dot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}}(t) + \underline{\underline{\mathbf{K}}}(t)\underline{\hat{\mathbf{u}}}(t) = \underline{\mathbf{f}} \quad (3.12)$$

$$\begin{array}{l} \underline{\underline{\mathbf{M}}}, \underline{\underline{\mathbf{G}}} \dots \text{konstant} \\ \underline{\underline{\mathbf{D}}}(t), \underline{\underline{\mathbf{K}}}(t) \dots \text{zeitabhängig} \end{array}$$

Die Dämpfung- und Steifigkeitsmatrix sind in diesem Fall nicht konstant, da sie von der Zeit bzw. Drehzahl abhängen.

Der Kraftvektor ist in beiden Fällen

$$\underline{\mathbf{f}} = \underline{\mathbf{m}}e \begin{bmatrix} \Omega^2 \cos \Omega t + \dot{\Omega} \sin \Omega t \\ \Omega^2 \sin \Omega t + \dot{\Omega} \cos \Omega t \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

mit den Anteilen der Unwucht in  $u$ - und  $v$ -Richtung [9].

## Lösen der Bewegungsgleichung

Die Gleichungen 3.11 und 3.12 sind beide Differentialgleichung zweiter Ordnung. Um eine schnelle Berechnungszeit zu erreichen und die Fehler-toleranz gering zu halten, wird die Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine Differentialgleichung erster Ordnung übergeführt. Dazu wird der globale Vektor  $\underline{\mathbf{z}}$  mit den generalisierten Koordinaten, der Verschiebung  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  und dessen Ableitung der Geschwindigkeit  $\underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}}$  aufgestellt.

$$\underline{\mathbf{z}} = \begin{bmatrix} \underline{\hat{\mathbf{u}}} \\ \underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}} \end{bmatrix} \quad \underline{\dot{\mathbf{z}}} = \begin{bmatrix} \underline{\dot{\hat{\mathbf{u}}}} \\ \underline{\ddot{\hat{\mathbf{u}}}} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Eingesetzt in die Differentialgleichung 3.11 führt dies zu

$$\underline{\dot{\mathbf{z}}} = \underline{\underline{\mathbf{A}}}\underline{\mathbf{z}} + \underline{\underline{\mathbf{A}}_1}\underline{\mathbf{z}}\Omega(t) + \underline{\mathbf{b}} \quad (3.15)$$

mit den Abkürzungen

$$\underline{\underline{\mathbf{A}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{I}}} \\ -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{K}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{D}}} \end{bmatrix} \quad \underline{\underline{\mathbf{A}}_1} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & -\underline{\underline{\mathbf{M}}}^{-1}\underline{\underline{\mathbf{G}}} \end{bmatrix} \quad \underline{\mathbf{b}} = \underline{\mathbf{f}}. \quad (3.16)$$

Nun, da die Differentialgleichung zweiter Ordnung in eine Differentialgleichung erster Ordnung umgewandelt wurde, kann diese mittels Integration gelöst werden. Die Lösungsvariable  $\underline{\mathbf{z}}$  setzt sich aus der oberen Hälfte, mit den Verschiebungen der Freiheitsgrade, und der unteren Hälfte, mit den Geschwindigkeiten der einzelnen Knoten, zusammen.

Die Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{A}}}$  beschreibt das System in Abhängigkeit von der Steifigkeit und Dämpfung, die Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{A}}_1}$  gibt das System in Abhängigkeit von der gyroskopischen Matrix und deren Drehzahlabhängigkeit an und der Vektor  $\underline{\mathbf{b}}$  berücksichtigt die externe Kräfte, die auf das System wirken.

Der Lösungsvektor  $\underline{\mathbf{z}}$  gibt die Verschiebung und die Geschwindigkeit in den Knoten aus. Wenn die Verschiebung in einem Punkt über den Hochlauf geplottet wird, ergibt dies eine Abbildung wie in 3.2. Hier wird die

Verschiebung des Balkens in seinem ersten Lager in u-Richtung gezeigt, wobei der Balken von null auf fünf Hertz beschleunigt wird und anschließend ein Einschwingen von zwei Sekunden stattfindet.

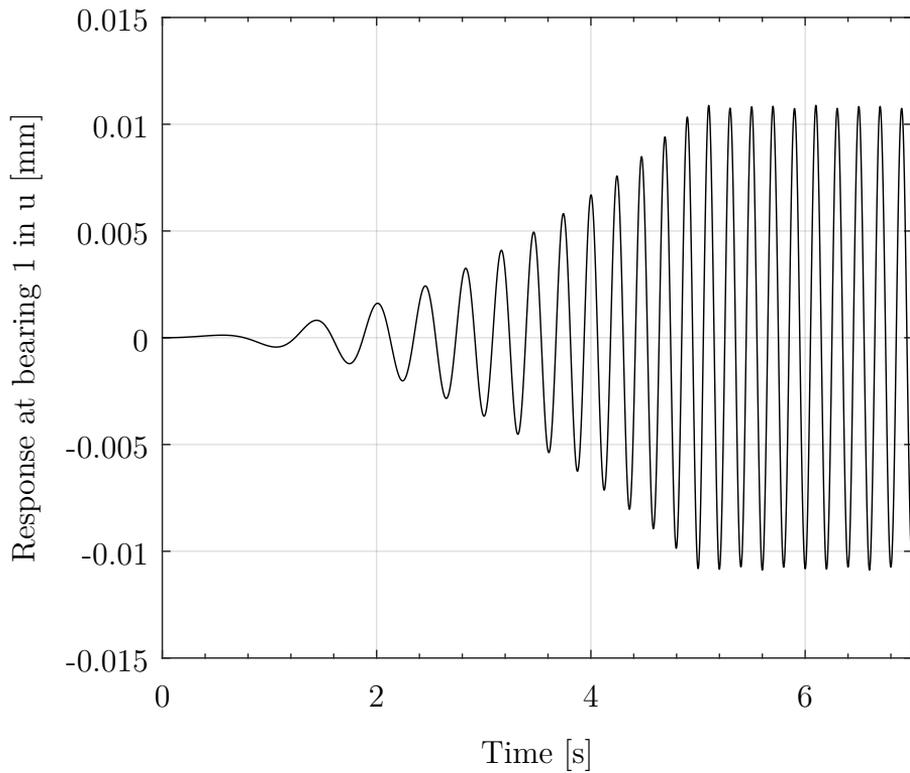


Abbildung 3.2: Hochlauf des Balken von 0 auf 5 Hertz mit anschließendem Halten



## 4 Freiheitsgradreduktion

Passende Finite Elemente Modelle sind notwendig um das Verhalten von Rotoren zu simulieren. Die Simulationszeit für solche Modelle kann sehr lang sein. Mit zunehmender Rechenleistung besteht die Möglichkeit die Simulation von rotierenden Maschinen mit geringeren Elementlängen, folglich feinere Netze, durchzuführen. Somit steigt die Anzahl der Freiheitsgrade mit nahezu gleicher Berechnungszeit wie zuvor. Nichtsdestotrotz ist die Berechnungszeit wichtig, wenn es zu umfangreichen Parameterstudien kommt. Eine gezielte Überlegung über die Anzahl von Freiheitsgraden ist für die Berechnung des Modells notwendig.

Daher bietet es sich an die Zahl der Freiheitsgrade schon von Beginn an zu beschränken [11]. Eine Verringerung der Freiheitsgrade im Nachhinein wird Reduktion bzw. Kondensation von Freiheitsgraden genannt [10]. Dazu gibt es Methoden zur Freiheitsgradreduktion für ein gegebenes dynamisches Finite Elemente Model unter Beibehaltung der dynamischen Eigenschaften des Systems, was folglich zu einer geringeren Berechnungszeit führt. Die Herleitungen für die folgenden Verfahren erfolgt aus [10].

Als Anhaltspunkt dient die Steifigkeitsmatrix des Gesamtmodells mit allen Freiheitsgraden eines Balkens, welche in Abbildung 4.1 ersichtlich ist. Die Bandstruktur der Matrix ist klar erkennbar, was eine Folge der guten Nummerierung der Knoten ist.

Aufgrund einer kurzen Elementlänge wird das Netz sehr fein und die Anzahl der Knoten beträgt sehr schnell eine große Zahl. Diese, mit den zugehörigen Freiheitsgraden in Translation und Rotation, ergibt eine hohe Anzahl von Freiheitsgraden weswegen auch eine hohe Berechnungszeit

benötigt wird. Um diese zu minimieren, werden die Freiheitsgrade reduziert und folglich auch die Rechenzeit. Die dazu verwendeten Methoden sind:

- Statische Kondensation
- Modale Reduktion
- Component Mode Synthesis

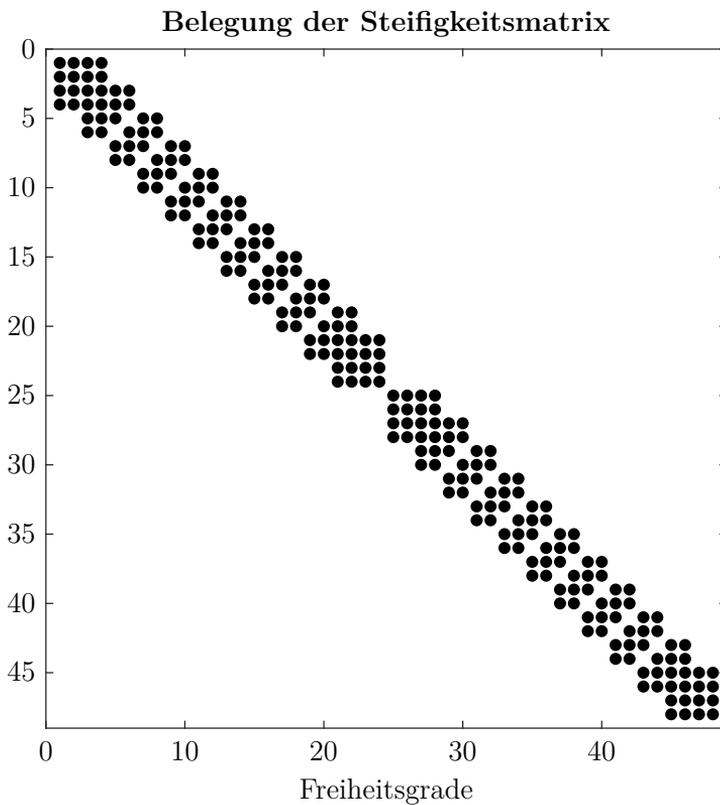


Abbildung 4.1: Ausgangssteifigkeitsmatrix

## 4.1 Prinzip der Reduktion

Das Prinzip ist unabhängig von der Wahl des Reduktionsverfahren. Deswegen wird es vorab beschrieben und anschließend für die einzelnen Verfahren in den Unterpunkten ergänzt. Es wird von der Bewegungsgleichung 2.74 ausgegangen, die hier noch einmal angeführt ist

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}\ddot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}\dot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}\underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{f}} \quad (4.1)$$

Die Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix haben eine Dimension von  $b \times b$ , wobei  $b$  die Anzahl der Freiheitsgraden entspricht.

Es wird als nächstes eine Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  erstellt, die es ermöglicht die  $b$  Freiheitsgrade des Vektors  $\underline{\hat{\mathbf{u}}}$  durch eine geringere Anzahl  $c$  im Vektor  $\underline{\mathbf{q}}$  auszudrücken.

$$\underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{q}} \quad (4.2)$$

wobei  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  eine  $b \times c$  Dimension besitzt.

Die Transformationsmatrix ist zeitunabhängig, sodass gilt

$$\underline{\hat{\mathbf{u}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \underline{\mathbf{q}} \quad \dot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \dot{\underline{\mathbf{q}}} \quad \ddot{\underline{\hat{\mathbf{u}}}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}} \cdot \ddot{\underline{\mathbf{q}}} \quad (4.3)$$

Werden diese Bedingungen in die Ausgangsgleichung 4.1 eingesetzt, von links mit der transponierten Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$  multipliziert, ergibt sich folgendes reduzierte Bewegungsgleichungssystem:

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\mathbf{f}} \quad (4.4)$$

oder vereinfacht ausgedrückt

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{\text{red}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\text{red}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{red}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{f}}_{\text{red}} \quad (4.5)$$

Diese Gleichung ist somit auf  $c$  Freiheitsgrade reduziert, visuell veranschaulicht im Falkner Schema in Abbildung 4.2.

Die transponierte Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$  erklärt sich aus dem Prinzip der virtuellen Arbeit. Wenn in Gleichung 2.72 mit Berücksichtigung

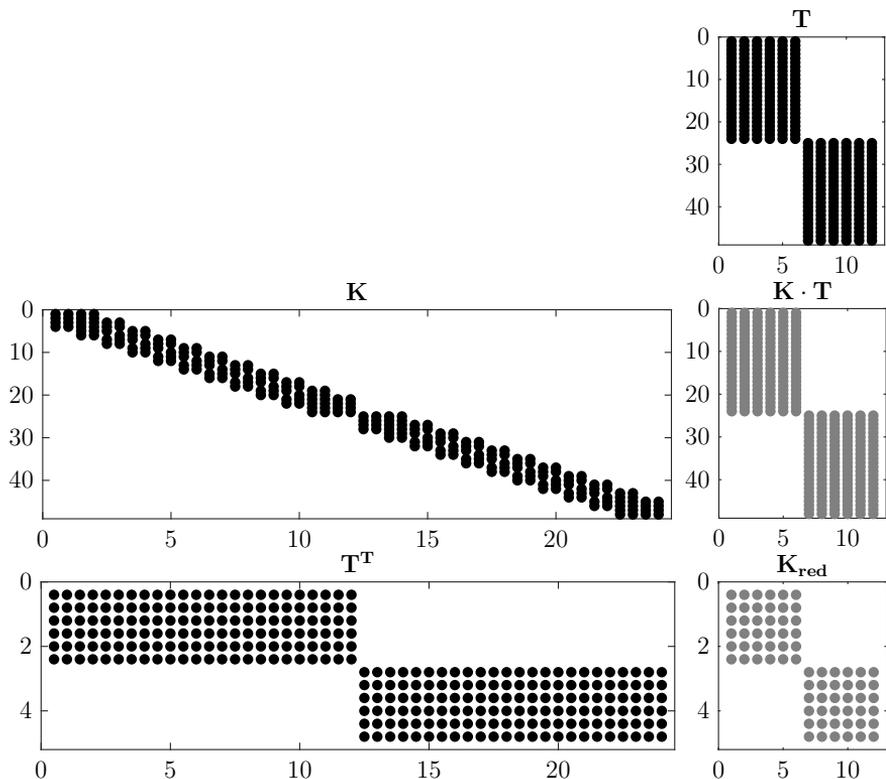


Abbildung 4.2: Reduktion der Matrizen

der Dämpfung die Bedingung für die wirklichen Verschiebungen  $\hat{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{q}}$  und

$$\delta \hat{\underline{\mathbf{u}}} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \delta \underline{\mathbf{q}} \quad \delta \hat{\underline{\mathbf{u}}}^T = \delta \underline{\mathbf{q}}^T \cdot \underline{\mathbf{T}}^T \quad (4.6)$$

für die virtuellen Verschiebungen eingesetzt wird, ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\delta \underline{\mathbf{q}}^T \left( \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{T}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{T}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{q}} \right) = \delta \underline{\mathbf{q}}^T \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{F}} \quad (4.7)$$

welche mit 4.4 ident ist, wenn mit  $\delta \underline{\mathbf{q}}$  gekürzt wird. Die Funktionsweise der Kondensation findet nur mit der Transformationsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  statt.

Wenn  $c = b$  ist, findet keine Reduktion statt, sondern nur eine Umsortierung der Freiheitsgrade. Sollen nur  $c$  Freiheitsgrade berücksichtigt werden, müssen die Informationen von der  $b \times b$  Ausgangsmatrix erhalten bleiben. Somit ist die richtige Besetzung der  $\underline{\mathbf{T}}$ -Matrix ausschlaggebend für eine Verringerung der Freiheitsgrade, ohne die wichtigen ersten Eigenformen und Eigenfrequenzen des Systems zu vernachlässigen.

## 4.2 Statische Kondensation

Um eine Steifigkeitsmatrix zu reduzieren, wird nach Hauptfreiheitsgraden  $h$  und Nebenfreiheitsgraden  $n$  sortiert, sodass sich folgende Gleichung ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}_{hn}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}_{hh}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}_n}} \\ \underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}_h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{D}_{nn}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}_{nh}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{D}_{hn}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}_{hh}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}_n}} \\ \underline{\underline{\dot{\mathbf{u}}_h}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}_{nn}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}_{nh}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}_{hn}}} & \underline{\underline{\mathbf{K}_{hh}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{u}_n}} \\ \underline{\underline{\mathbf{u}_h}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{f}_n}} \\ \underline{\underline{\mathbf{f}_h}} \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Abbildung 4.3 zeigt die Sortierung der Steifigkeitsmatrix. Die Verknüpfungen zwischen den Haupt- und Nebenfreiheitsgraden ist in den Nebematrizen  $\underline{\underline{\mathbf{K}_{nh}}}$  und  $\underline{\underline{\mathbf{K}_{hn}}}$  an den Einträgen in grau links unten und rechts oben abgebildet. Im Eck rechts unten diagonal besetzt sitzt die Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{K}_{hh}}}$  mit den Hauptfreiheitsgraden.

**Annahmen** Um die Reduzierung durchführen zu können, werden zwei Annahmen laut [11] getroffen:

- Es greifen nur an den Hauptfreiheitsgraden externe Kräfte an  $\Rightarrow \underline{\underline{\mathbf{f}_n}} = 0$
- An den Nebenfreiheitsgraden sind Massen- und Dämpfungsanteil sehr gering (geringe Drehträgheit) und deswegen vernachlässigbar klein.

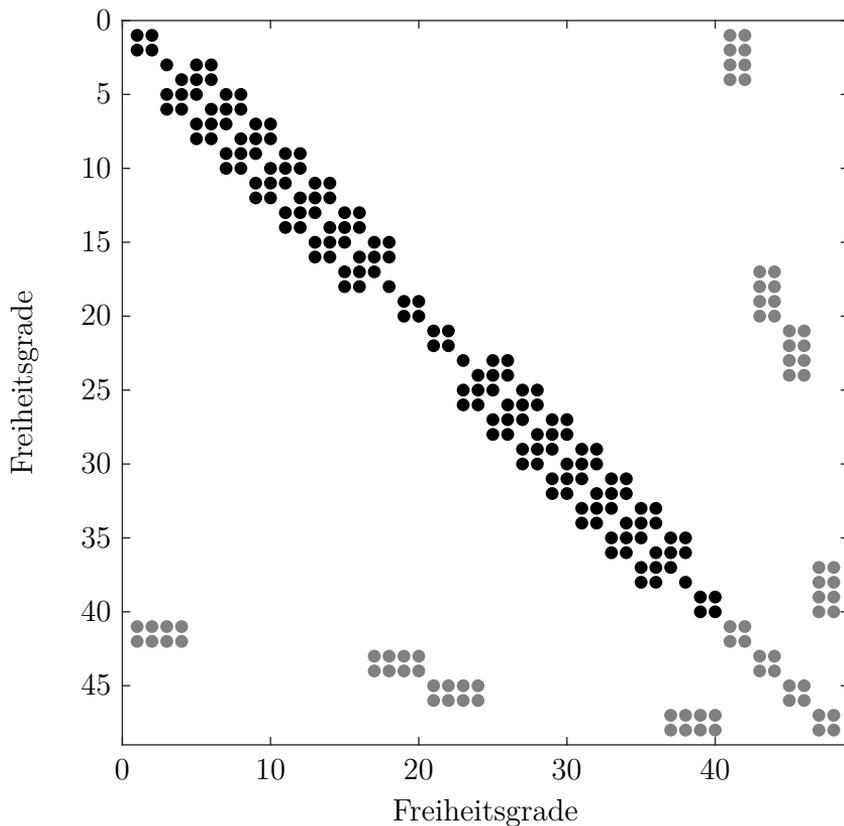


Abbildung 4.3: Umordnung der Matrizen

Diese Annahmen in 4.8 eingesetzt, ergibt:

$$\begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}}}_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}}_n \\ \ddot{\mathbf{u}}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}_n \\ \dot{\mathbf{u}}_h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nn} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nh} \\ \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{hn} & \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{hh} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{u}_n \\ \mathbf{u}_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{0}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{f}}}_h \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Somit lässt sich aus der 1. Zeile der Zusammenhang zwischen Vektor  $\underline{\mathbf{u}}_n$  und  $\underline{\mathbf{u}}_h$  bestimmen:

$$\underline{\mathbf{u}}_n = -\underline{\mathbf{K}}_{nn}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{nh} \underline{\mathbf{u}}_h \quad (4.10)$$

Als Transformationsschritt ergibt sich

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{T}} \cdot \underline{\mathbf{q}} \quad \text{mit} \quad \underline{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{E}} \\ -\underline{\mathbf{K}}_{nn}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{nh} \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{u}}_h \quad (4.11)$$

Durch Einsetzen von 4.11 in die Ausgangsgleichung 4.8 und von links mit der transponierten Transformationsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}$  multipliziert, ergibt

$$\underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{T}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{T}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{f}} \quad (4.12)$$

oder vereinfacht ausgedrückt

$$\underline{\mathbf{M}}_{\text{red}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{D}}_{\text{red}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{K}}_{\text{red}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{f}}_{\text{red}}. \quad (4.13)$$

Dies stellt zwar nur noch eine Annäherung dar, aber bei treffender Wahl von Haupt- und Nebenfreiheitsgraden eine dementsprechend gute.

Dazu muss gesagt werden, dass bei falscher Selektion von Haupt- und Nebenfreiheitsgraden das Ergebnis sehr weit abweichen kann. Zum Beispiel dürfen bei der Berechnung eines eingespannten Balkens die Drehfreiheitsgrade nicht vernachlässigt werden.

## 4.3 Modale Kondensation

Die modale Kondensation hat eine andere Herangehensweise als die statische Kondensation. Es wird wieder von der Gleichung 2.74 ausgegangen, die Dämpfungsmatrix  $\underline{\mathbf{D}}$  und die externen Kräfte  $\underline{\mathbf{f}}$  werden zunächst ignoriert, sodass sich folgende Gleichung ergibt:

$$\underline{\mathbf{M}} \ddot{\underline{\mathbf{u}}} + \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{0}} \quad (4.14)$$

Diese beiden Matrizen sind symmetrisch. Es ist ein konservatives Hilfsystem gebildet worden. Die Eigenfrequenzen und Eigenvektoren  $\underline{\varphi}$  zu diesem System lassen sich leicht bestimmen. So werden die Eigenvektoren  $\underline{\varphi}$  in der Modalmatrix  $\underline{\underline{\phi}}$  (Dimension  $b \times b$ ) spaltenweise angeordnet.

$$\underline{\underline{\phi}} = [\underline{\varphi}_1, \dots, \underline{\varphi}_i, \dots, \underline{\varphi}_n] \quad (4.15)$$

Für die Ausgangsgleichung 2.74 werden nur die langwelligen niedrigen Eigenformen 1 bis  $c \ll b$  als Ansatzvektoren verwendet. Daraus ergibt sich die Transformation

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\underline{\phi}}^* \underline{\mathbf{q}} \quad (4.16)$$

mit der Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}} = \underline{\underline{\phi}}^*$  als die verkürzte Modalmatrix des konservativen Systems mit den Eigenvektoren von 1 bis  $c$  deklariert. Die Gleichung 4.16 wird in das Ausgangsgleichungssystem eingesetzt und von links mit der transponierten Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T$  multipliziert. Somit ergibt sich

$$\underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{D}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \underline{\underline{\mathbf{T}}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\underline{\mathbf{T}}}^T \underline{\mathbf{f}} \quad (4.17)$$

oder wieder vereinfacht ausgedrückt

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{\text{red}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{D}}}_{\text{red}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{\text{red}} \underline{\mathbf{q}} = \underline{\mathbf{f}}_{\text{red}} \quad (4.18)$$

Abbildung 4.4 zeigt die Reduktion der Steifigkeitsmatrix für den Balken. Es findet eine Reduktion auf die ersten 12 Eigenformen statt.

Von den anfänglichen 240 Freiheitsgraden hat eine Reduktion auf 12 stattgefunden. Die Massenmatrix und Steifigkeitsmatrix sind rein diagonal besetzt, da die Eigenvektoren orthogonal sind.

$$m_{gen,i} = \varphi_i^T \underline{\underline{\mathbf{M}}} \varphi_i \quad (4.19)$$

$$k_{gen,i} = \varphi_i^T \underline{\underline{\mathbf{K}}} \varphi_i \quad (4.20)$$

Die Anzahl von Eigenformen sollte so gewählt werden, dass im entsprechenden Drehzahlbereich die dominanten Eigenwerte abgebildet werden.

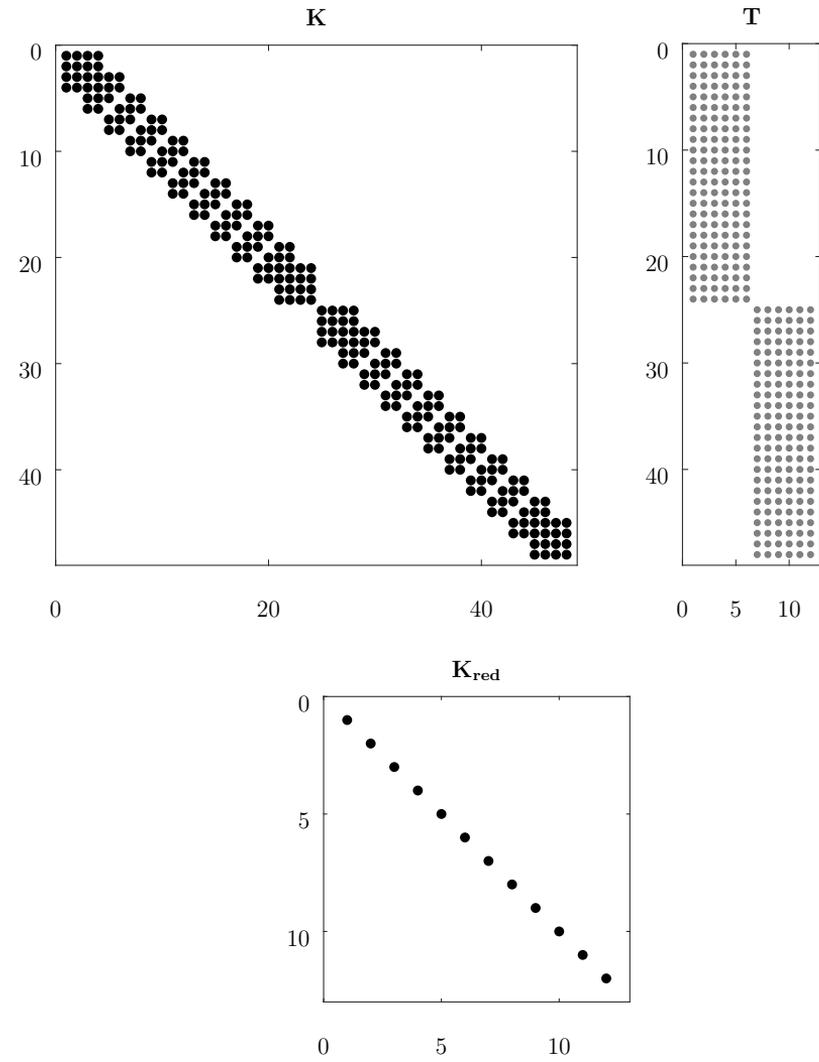


Abbildung 4.4: Modale Reduktion der Massenmatrix

## 4.4 Component Mode Synthesis

Die Component Mode Synthesis ist eine Kombination zwischen der statischen und der modalen Kondensation. Sie hat den Vorteil, dass wichtige physikalische Freiheitsgrade, die Hauptfreiheitsgrade im statischen System, im reduzierten System beibehalten werden und die Anzahl der Freiheitsgrade ähnlich gering ist wie bei der modalen Kondensation. Die Methode wird hauptsächlich verwendet, um die Rechenzeit zu verkürzen.

Diese Methode ist notwendig, wenn Parameteränderungen im System auftreten und somit viele Simulationen durchgeführt werden. Bei drehzahlabhängigen Lagerwerten müsste die Gleichung bei der modalen Kondensation bei jedem Zeitschritt neu reduziert werden. Bei der gemischten Kondensation können die Lager als Hauptfreiheitsgrade deklariert werden und es müssen nur Teile der Gleichung neu berechnet werden. [10]

Es findet zuerst eine statische Kondensation statt und anschließend wird eine modale Reduktion vollzogen.

**Statische Kondensation** Der erste Schritt ist die Umordnung in Haupt- und Nebenfreiheitsgraden. Ausgangsbasis ist wieder die Gleichung 4.1. Die Umtransformierung in Hauptfreiheitsgraden  $h$  und Nebenfreiheitsgraden  $n$  ergibt die Gleichung:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\underline{M}}_{nn} & \underline{\underline{M}}_{nh} \\ \underline{\underline{M}}_{hn} & \underline{\underline{M}}_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{\ddot{u}}_n \\ \underline{\ddot{u}}_h \end{Bmatrix} + \left( \Omega(t) \begin{bmatrix} \underline{\underline{G}}_{nn} & \underline{\underline{G}}_{nh} \\ \underline{\underline{G}}_{hn} & \underline{\underline{G}}_{hh} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{0}} \\ \underline{\underline{0}} & \underline{\underline{D}}_{hh} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \underline{\dot{u}}_n \\ \underline{\dot{u}}_h \end{Bmatrix} + \dots \\ + \dots \begin{bmatrix} \underline{\underline{K}}_{nn} & \underline{\underline{K}}_{nh} \\ \underline{\underline{K}}_{hn} & \underline{\underline{K}}_{hh} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{u}_n \\ \underline{u}_h \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{f}_{nn} \\ \underline{f}_{hh} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (4.21)$$

Die Hauptfreiheitsgrade werden an dem unteren Ende des Verschiebungsvektors  $\underline{\hat{u}}$  angeordnet. Die Besetztheit ist in Abbildung 4.3 ersichtlich. Die

Hauptfreiheitsgrade sind im rechten unteren Quadranten angeordnet und können zum Beispiel die Freiheitsgrade der Lager sein. Die Massenmatrix ist gleich wie die Steifigkeitsmatrix. Die Dämpfungsmatrix ist bis auf die Hauptfreiheitsgradeinträge komplett leer.

**Ansatzvektoren aus der modalen Kondensation** Die Hauptfreiheitsgrade  $\underline{\mathbf{u}}_h$  werden gedanklich auf null gesetzt und die gyroscopische Matrix unberücksichtigt, so dass die Gleichung 4.21 in ein konservatives Hilfsystem umgewandelt wird.

$$\underline{\underline{\mathbf{M}}}_{nn} \underline{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nn} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_n = \underline{\underline{\mathbf{0}}} \quad \text{bzw.} \quad \underline{\underline{\mathbf{f}}}_{nn}. \quad (4.22)$$

Die Eigenvektoren  $\underline{\varphi}_i$  können berechnet werden. Die niedrigen langwelligen Eigenformen werden wieder in der verkürzten Modalmatrix  $\underline{\underline{\phi}}^*$  für die Einträge der Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  verwendet.

$$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_n = \underline{\underline{\phi}}^* \underline{\underline{\mathbf{q}}}_n \quad (4.23)$$

**Ansatzvektoren aus der statischen Kondensation** Durch die modale Kondensation werden nur die Freiheitsgrade verknüpft, die im Hilfsystem vorhanden sind. Die Verknüpfung der Hauptfreiheitsgrade und den Nebenfriheitsgrade wird über die statische Kondensation durchgeführt. Dazu wird die obere Zeile der Steifigkeitsmatrix aus Gleichung 4.21

$$\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nn} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_n + \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nh} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_h = 0 \quad (4.24)$$

verwendet und aufgelöst auf die Nebenfriheitsgraden

$$\underline{\underline{\mathbf{u}}}_n = -\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nn}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nh} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_h \quad (4.25)$$

um einen statischen Zusammenhang zwischen den Haupt- und Nebenfriheitsgraden zu bekommen. Die Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  wird mit diesen Ansatz ergänzt

$$\begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{u}}}_n \\ \underline{\underline{\mathbf{u}}}_h \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\phi}}^* & -\underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nn}^{-1} \underline{\underline{\mathbf{K}}}_{nh} \\ \underline{\underline{\mathbf{0}}} & \underline{\underline{\mathbf{E}}} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \underline{\underline{\mathbf{q}}}_n \\ \underline{\underline{\mathbf{u}}}_h \end{pmatrix} \quad (4.26)$$

oder in Kurzschreibweise dargestellt

$$\underline{\mathbf{u}} = \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{q}}. \tag{4.27}$$

Das gesamte System ist nun über diese Ansatzfunktionen berücksichtigt und abgebildet.

Abbildung 4.5 zeigt die Transformationsmatrix. Es sind die Eigenformen der modalen Reduktion und die Ansatzfunktionen der statischen Kondensation klar ersichtlich.

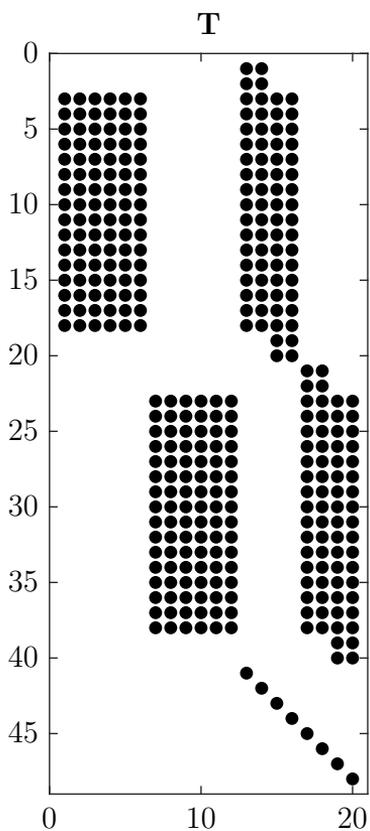


Abbildung 4.5: Transformationsmatrix der CMS Reduktion

### Das reduzierte Bewegungsgleichungssystem

Wird der Ansatz 4.27 in die Bewegungsgleichung 4.21 eingesetzt und von links mit der transponierten Transformationsmatrix  $\underline{\mathbf{T}}^T$  multipliziert ergibt dies das reduzierte Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{M}} \underline{\mathbf{T}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{D}} \underline{\mathbf{T}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{T}} \underline{\mathbf{q}} &= \underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{F}} \\ \underline{\mathbf{M}}_{\text{red}} \ddot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{D}}_{\text{red}} \dot{\underline{\mathbf{q}}} + \underline{\mathbf{K}}_{\text{red}} \underline{\mathbf{q}} &= \underline{\mathbf{f}}_{\text{red}} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Als Beispiel für die Berechnung der reduzierten Steifigkeitsmatrix  $\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}}$  wird die Formel

$$\underline{\mathbf{T}}^T \underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{T}} \quad (4.29)$$

mit dem Falkner Schema dargestellt. Zuerst wird  $\underline{\mathbf{K}} \underline{\mathbf{T}}$  berechnet und das Ergebnis mit  $\underline{\mathbf{T}}^T$  multipliziert:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\text{hn}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\phi}^* & -\underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \underline{\phi}^{*T} & \underline{\mathbf{0}} \\ (-\underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}})^T & \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}} \underline{\phi}^* & -\underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} + \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} \\ \underline{\mathbf{K}}_{\text{hn}} \underline{\phi}^* & -\underline{\mathbf{K}}_{\text{hn}} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} + \underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}} \underline{\mathbf{E}} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \underline{\phi}^{*T} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}} \underline{\phi}^* & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}} - \underline{\mathbf{K}}_{\text{hn}} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.30)$$

Somit ergibt sich für die Einträge

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{red}} = \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{\text{red}} & \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} & \underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}}^{\text{red}} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

mit  $\underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{\text{red}}$  als rein diagonal besetzte Matrix der berücksichtigten modalen Freiheitsgrade. Da die Ansatzvektoren aus der Steifigkeitsmatrix  $\underline{\mathbf{K}}$  ermittelt worden sind, sind die Einträge in der Nebendiagonale leer. Die reduzierte Matrix für die Hauptfreiheitsgrade

$$\underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}}^{\text{red}} = \underline{\mathbf{K}}_{\text{hh}} - \underline{\mathbf{K}}_{\text{hn}} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nn}}^{-1} \underline{\mathbf{K}}_{\text{nh}} \quad (4.32)$$

setzt sich zusammen aus dem Eintrag  $\underline{\underline{\mathbf{K}_{hh}}}$  des Ausgangsgleichungssystems 4.21, die die Einträge der Hauptfreiheitsgraden enthält und von den Beiträgen  $-\underline{\underline{\mathbf{K}_{hn}}}\underline{\underline{\mathbf{K}_{nn}^{-1}}}\underline{\underline{\mathbf{K}_{nh}}}$ .

Die Dämpfungsmatrix des reduzierten Systems ist nur im Quadrant, der zu den beibehaltenen Hauptfreiheitsgraden gehört, besetzt.

$$\underline{\underline{\mathbf{D}_{hh}^{\text{red}}}} = \underline{\underline{\mathbf{D}_{hh}}} \quad (4.33)$$

Die Berechnung der Massenmatrix ist ident und es folgt die reduzierte Massenmatrix

$$\underline{\underline{\mathbf{M}_{\text{red}}}} = \begin{bmatrix} \underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}^{\text{red}}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}^{\text{red}}}} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}_{hn}^{\text{red}}}} & \underline{\underline{\mathbf{M}_{hh}^{\text{red}}}} \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

mit den Einträgen:

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}^{\text{red}}}} &= [m_{gen,i}] \\ \underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}^{\text{red}}}} &= \underline{\underline{\phi}}^{*\text{T}} [\underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}}}\underline{\underline{\phi_{\text{stat}}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}}}] \\ \underline{\underline{\mathbf{M}_{hn}^{\text{red}}}} &= (\underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}^{\text{red}}}})^T \\ \underline{\underline{\mathbf{M}_{hh}^{\text{red}}}} &= \underline{\underline{\phi_{\text{stat}}}}^{\text{T}} [\underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}}}\underline{\underline{\phi_{\text{stat}}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}_{nh}}}] + \underline{\underline{\mathbf{M}_{hn}}}\underline{\underline{\phi_{\text{stat}}}} + \underline{\underline{\mathbf{M}_{hh}}} \end{aligned} \quad (4.35)$$

$$\text{mit } \underline{\underline{\phi_{\text{stat}}}} = -\underline{\underline{\mathbf{K}_{nn}^{-1}}}\underline{\underline{\mathbf{K}_{nh}}}.$$

Die Matrix  $\underline{\underline{\mathbf{M}_{nn}^{\text{red}}}}$  hat nur in der Diagonale Einträge, da nur die generalisierten Massen des Hilfssystem übrig bleiben. Die anderen Submatrizen werden mit den Massenmatrizen des Ausgangssystems mit den modalen und statischen Ansatzvektoren gewichtet.

## 4.5 Vergleich der Reduktionsverfahren

Die Reduktionsverfahren statische Reduktion, modale Reduktion und component mode synthesis haben zum Schluss dieselbe Gleichung (siehe 4.13, 4.18 und 4.28), dennoch unterscheidet sich die Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$ . Bei der statischen Reduktion setzt sich diese aus der Steifigkeitsmatrix der Nebenfreiheitsgrade zusammen. Bei der modalen Reduktion werden die Eigenvektoren mit der Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  berücksichtigt. Die Component Mode Synthesis ist eine Kombination der statischen und modalen Kondensation. Somit setzt sich die Transformationsmatrix  $\underline{\underline{\mathbf{T}}}$  aus den Einträgen der Steifigkeitsmatrix und den Eigenvektoren zusammen.

Als Beispiel für die Anwendung dieser drei Verfahren wird auf das Kapitel 5.3 referenziert.



# 5 Aufbau und Bedienung des Programms

Die vorgestellten Berechnungen aus den vorherigen Kapiteln wurden mit der Software *MATLAB*<sup>®</sup> durchgeführt. Zur Vereinfachung der Bedienung des Programms gibt es eine Konfigurationsdatei für jeden einzelnen zu berechnenden Rotor. Der Programmaufbau, der Programmablauf und die graphische Auswertung sollen in diesem Kapitel mit Beispielen näher erläutert werden.

Die Berechnung erfolgt immer nach vier Punkten, diese sind auch bei anderen kommerziellen Finite Elemente Programmen auffindbar.

- **Input:** Das Programm liest die Konfigurationsdatei und speichert die entsprechenden Parameter. Die Input-Daten werden gesichert.
- **Preprocessing:** Die Input-Daten werden gelesen und zu den entsprechend gesetzten Parametern die geeigneten Daten erzeugt. Hier sind es die Systemdaten.
- **Solution:** Es wird der entsprechende Solveralgorithmus aufgerufen, um das System zu lösen. Die Lösung wird gespeichert.
- **Postprocessing:** Die berechneten Lösungsdaten werden analysiert und graphisch ausgewertet, um den Rotor untersuchen zu können.

Abbildung 5.1 zeigt einen normalen Programmablauf der Finite Elemente Methode. Die Geometrie, die Topologie der Knotenpunkte, die physikalischen Daten wie etwa Masse und Steifigkeit, sowie externe Kräfte

werden über die Konfigurationsdatei in Matlab geladen, beziehungsweise errechnet. Es werden die Elementmatrizen und die Systemmatrizen im Preprocessing erstellt und im Solver der Lösungsvektor ermittelt. Im Postprocessing findet die Ausgabe statt.

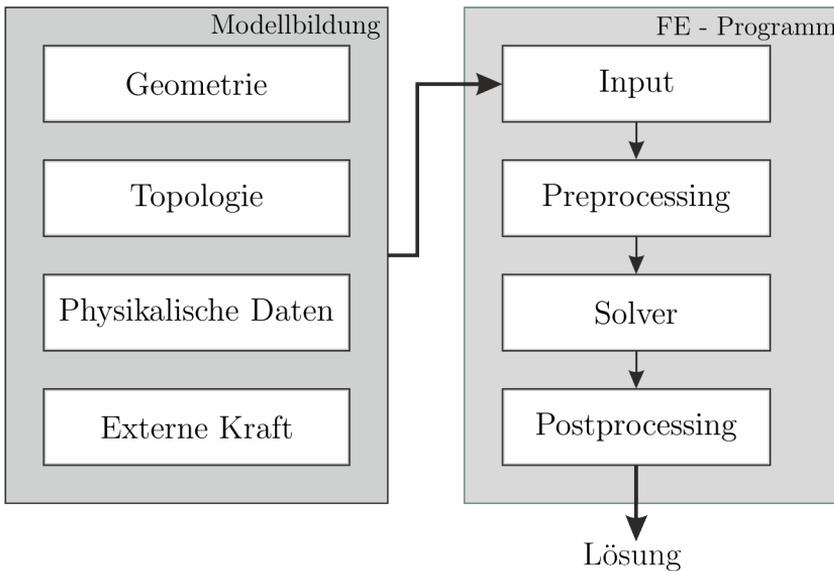


Abbildung 5.1: Programmablauf

### 5.1 Matlab Programm

Die Konfigurationsdatei wird in Matlab eingelesen und die Eingabeparameter werden gespeichert. Anschließend wird die Geometrie des Rotors mit der definierten Elementlänge in einzelne Elemente zerlegt und die Berechnung der lokalen Massen-, Dämpfungs- und Steifigkeitsmatrix, sowie der gyroskopischen Elementmatrix durchgeführt. Die externe Kraft wird an den ausgewählten Knoten aufgetragen und aus den Elementmatrizen werden die globalen Systemmatrizen zusammengestellt. Im An-

schluss wird die definierte Berechnung mit den gesetzten Parametern gestartet. Die Berechnungen für die Eigenfrequenzen und des Campbell-diagramm sind bereits implementiert und werden hier nicht noch einmal angeführt.

### 5.1.1 Quasi-stationäre Ermittlung

Abbildung 5.2 zeigt den Ablauf der quasi-stationären Berechnung. Es wird zunächst die Rotordrehzahl als Vektor erstellt und die lokalen und globalen Systemmatrizen berechnet. Je nach Lagerart werden die Lagerkoeffizienten in die Steifigkeits- und Dämpfungsmatrix an unterschiedlichen Stellen eingebaut und folglich die Gesamtsystemmatrix zusammengestellt. Anschließend folgt die Aufstellung der Bewegungsgleichung und die Lösung nach Kapitel 3.1.

### 5.1.2 Transiente Ermittlung

In der transienten Methode ist neben der Berechnung des Gesamtmodells auch die Freiheitsgradreduktion implementiert. Die Gesamtmodellberechnung greift auf die im Preprocessing aufgestellten Systemmatrizen und die vordefinierte Rotordrehzahl zurück. Anschließend werden die Lager entsprechend ihrer Knoten in den Matrizen eingebaut, was zur Gesamtsystemmatrix führt. Die Bewegungsgleichung wird nach Kapitel 3.2 aufgestellt und mittels Integration gelöst, wodurch sich der Lösungsvektor ergibt.

Für die Freiheitsgradreduktion wird die Methode erweitert. Bis zur Gesamtsystemmatrix unterscheidet sie sich nicht von dem Ausgangsmodell. Die globalen Systemmatrizen werden in Haupt- und Nebenfreiheitsgrade sortiert, die Transformationsmatrix (modale Reduktion oder gemischte Reduktion) wird berechnet und die reduzierte Bewegungsgleichung nach Kapitel 4 aufgestellt.

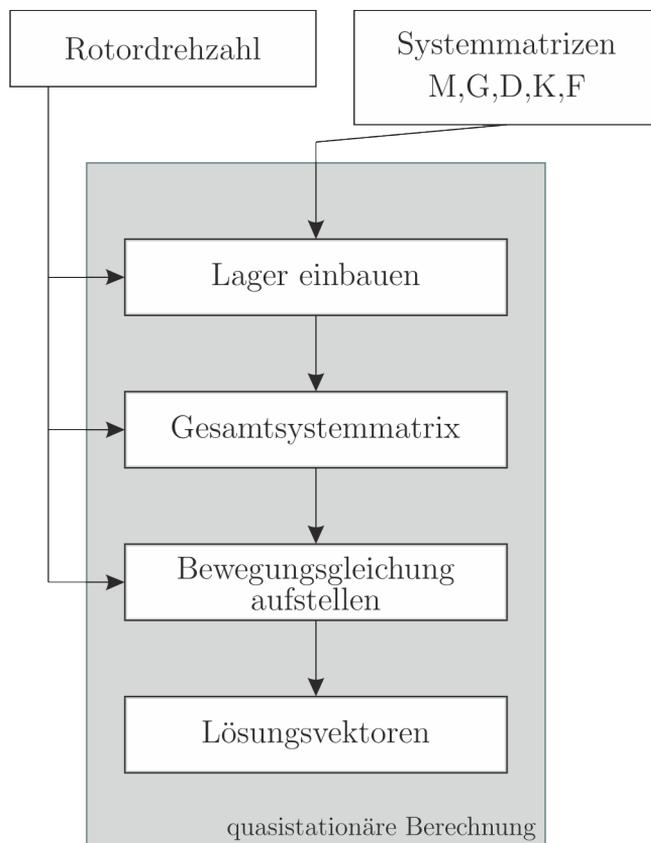


Abbildung 5.2: Ablauf der quasi-stationären Berechnung

## 5.2 Anwendung

Das Programm mit den einzelnen Berechnungs- und Ausgabemöglichkeiten wird mittels zwei unterschiedlicher Beispiele gezeigt. Diese sind:

- Berechnung eines rotierenden Balkens
- Berechnung eines Rotors

Die Geometrien des Balkens und des Rotors sind als Schema in Abbildung 5.3 und 5.4 dargestellt. Beide Bauteile sind homogene, symmetrische Körper mit je zwei Lagern. Die Unwuchtsmasse wird beim Balken in der Mitte angebracht, beim Rotor sind mehrere Ausgleichsmassen angebracht.

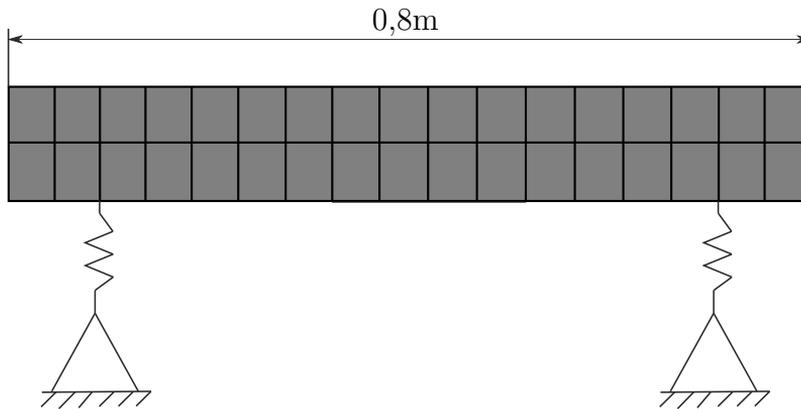


Abbildung 5.3: Geometrie des Balkens

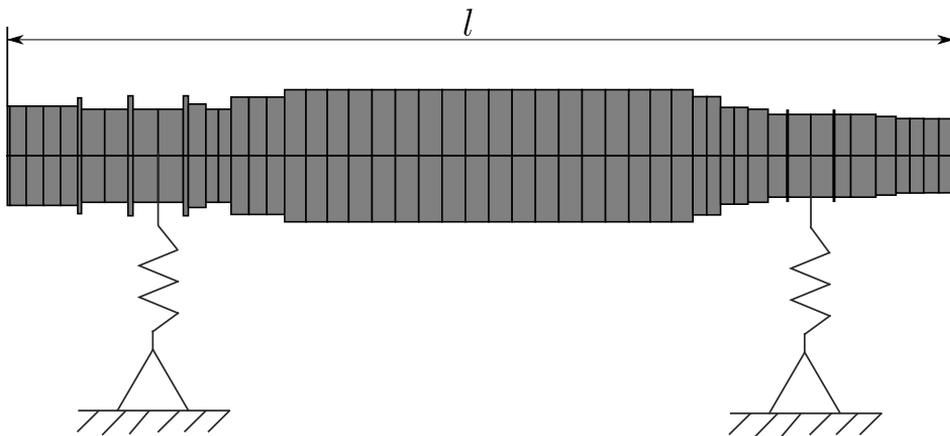


Abbildung 5.4: Geometrie des Rotors

### 5.2.1 Quasi-stationäre Lösung

Es werden im folgenden die Ergebnisse für die quasi-stationäre Methode dargestellt. Dazu werden für den Balken und den Rotor isotrope Steifigkeits- und Dämpfungskoeffizienten für die Lager verwendet.

#### Balken

An einem ausgewählten Knoten wird der Lösungsvektor über die Simulationszeit aufgetragen. Der Lösungsvektor hat die Verschiebung, die Verdrehung, die Geschwindigkeit und die Winkelgeschwindigkeit von allen Knoten als Einträge gespeichert. Abbildung 5.5 zeigt die Verschiebung vom Balken am ersten Lager. Die erste Eigenfrequenz ist hier klar ersichtlich.

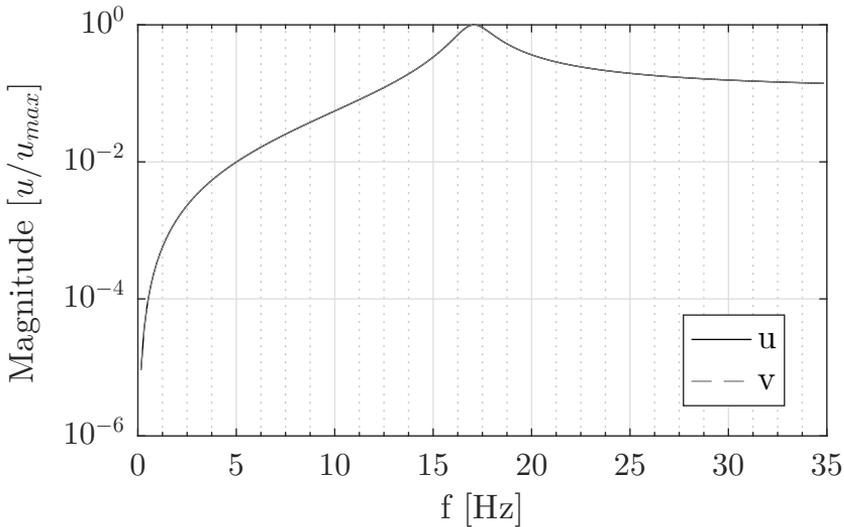


Abbildung 5.5: Quasi-stationäre Antwort am ersten Lager des Balkens

Mittels Orbitplot wird der Lösungsvektor in den zwei verfügbaren Verschiebungsrichtungen  $u$  und  $v$  aufgetragen. Bei einer linearen oszillatorischen Bewegung nimmt die Form eine Ellipse an, hier ist es ein Kreis, da isotrope Lager verwendet werden. Abbildung 5.6 zeigt den Orbit am ersten Lager.

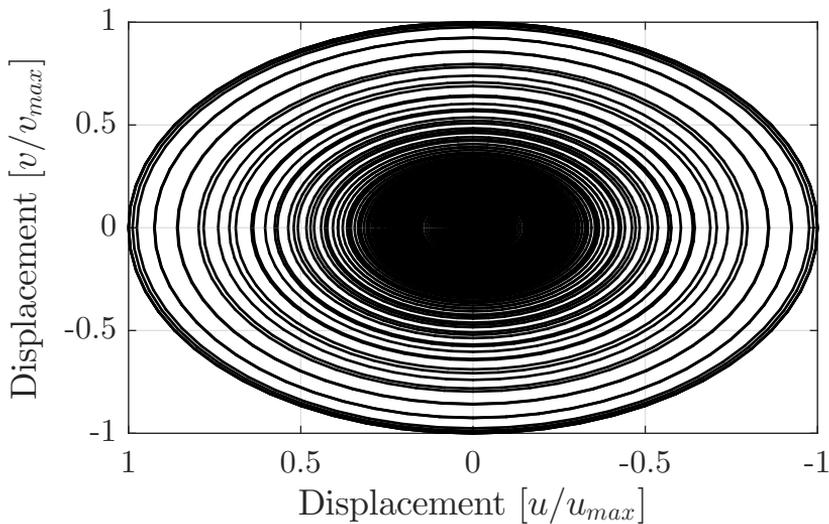


Abbildung 5.6: Orbitdarstellung des Balkens

## Rotor

In Abbildung 5.7 ist die Verschiebung des ersten Lagerknotens des Rotors dargestellt. Bei 33 und 34 Hertz befinden sich die ersten zwei Eigenfrequenzen. Da es sich auch hier um eine isotrope Lagerung handelt, ist die Verschiebung in beide Richtungen gleich groß und der Orbit (siehe Abbildung 5.8) zeigt ebenfalls einen Kreis.

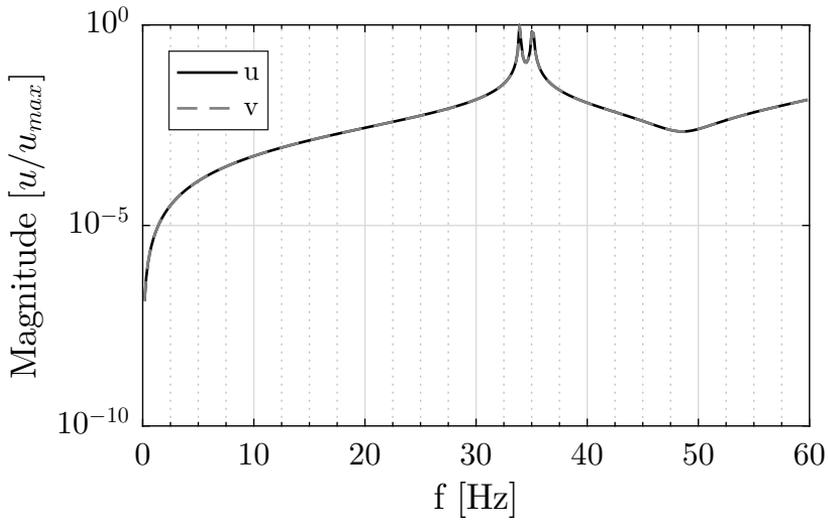


Abbildung 5.7: Quasi-stationärer Antwortvektor des Rotors

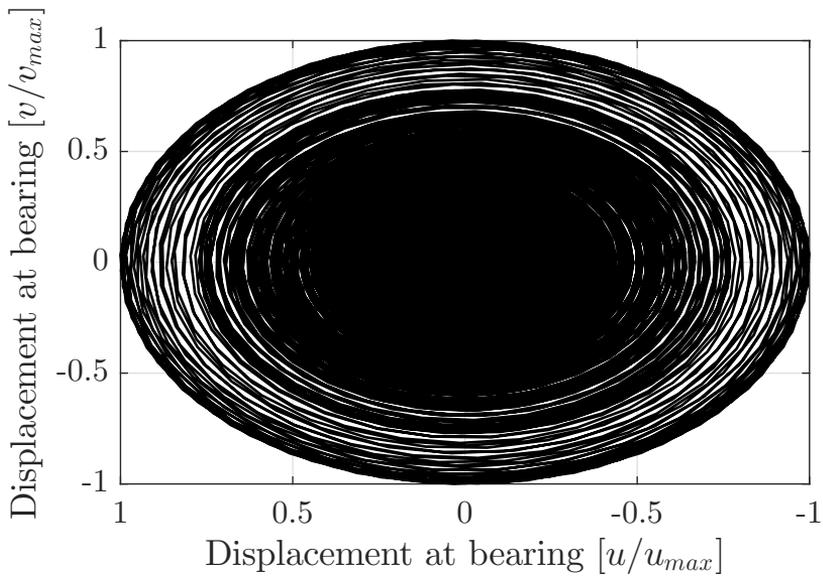


Abbildung 5.8: Quasi-stationärer Orbit des Rotors

### 5.2.2 Transiente Lösung

Für die transiente Berechnung wird neben der Berechnung mit isotropen Lagern für den Balken und den Rotor auch eine Berechnung für den Rotor mit anisotropen Lagern durchgeführt. Die anisotropen Lagerdaten werden aus Abbildung 5.9 mit der Drehzahl interpoliert. Das heißt, dass zur jeweiligen Drehzahl die dazugehörigen Steifigkeits- und Dämpfungswerte in die Matrizen übertragen werden. Die Ergebnisse werden hier erläutert.

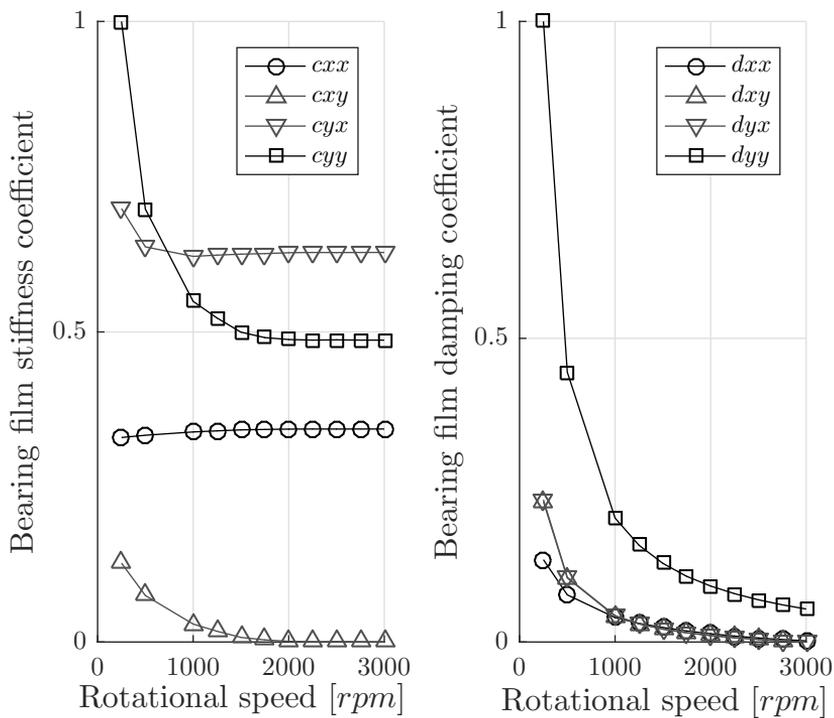


Abbildung 5.9: Steifigkeits- und Dämpfungswerte des hydrodynamischen Gleitlagers vom Rotor

## Balken

Abbildung 5.10 zeigt den Hochlauf des Balkens. Die Verschiebung am ersten Lager ist hier über der Zeit aufgetragen. Auf der zweiten Ordinate ist die Frequenz des Hochlaufs abgebildet und stellt als Lineare den Hochlauf von 0 auf 35 Hertz dar. Die erste Eigenfrequenz ist bei 17 Hertz präsent.

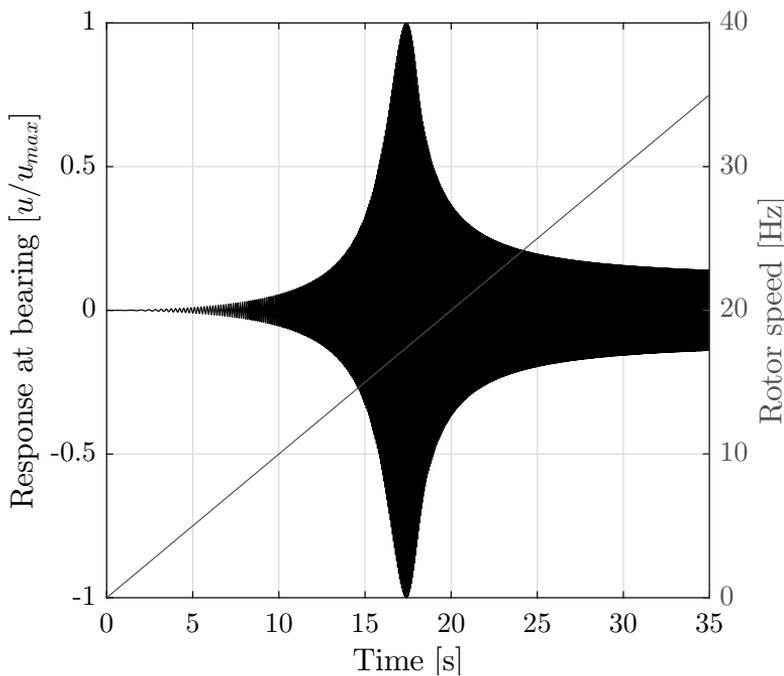


Abbildung 5.10: Transiente Antwort am ersten Lager des Balkens

Der Orbit und die Frequenzganganalyse werden in Abbildung 5.11 und 5.12 dargestellt. Die Verschiebungen in die zwei Richtungen  $u$  und  $v$  zeigen einen Kreis, was auf die isotrope Lagerung rückzuführen ist. Die FFT-Analyse (siehe Abbildung 5.12) zeigt ein ähnliches Bild wie 5.5 und lässt somit auf eine korrekte Berechnung schließen.

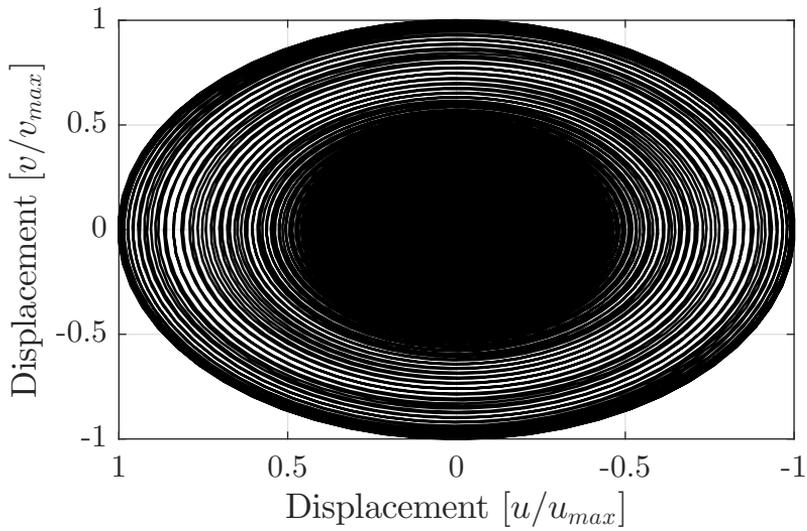


Abbildung 5.11: Transienter Orbit am ersten Lager des Balkens

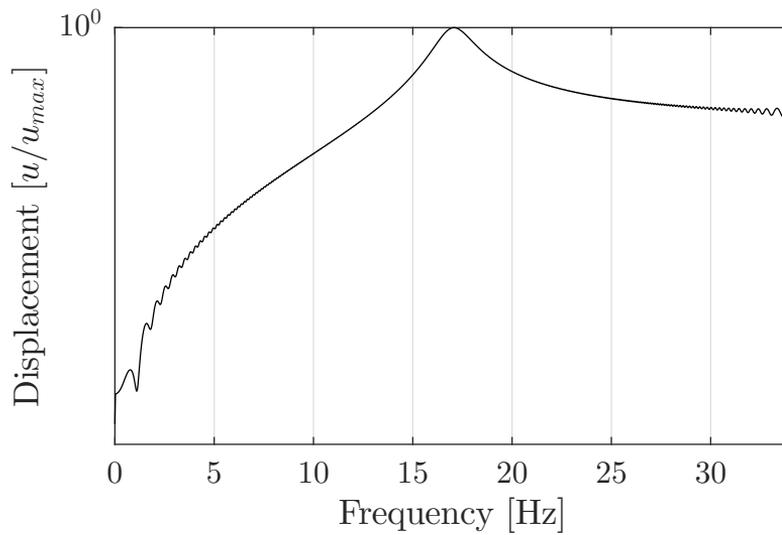


Abbildung 5.12: Frequenzgang am ersten Lager des Balkens

### Isotrop gelagerter Rotor

Bei isotropen Lagerkoeffizienten wird der Rotor vom Stillstand auf 40 Hertz hochgefahren. Anschließend wird diese Frequenz für zwei Sekunden gehalten. Dies zeigt Abbildung 5.13. Bei der Durchfahrt durch die Eigenfrequenz ist die Resonanz klar ersichtlich. Die Verschiebung in  $v$  ist ident. Der Orbit ist ein Kreis.

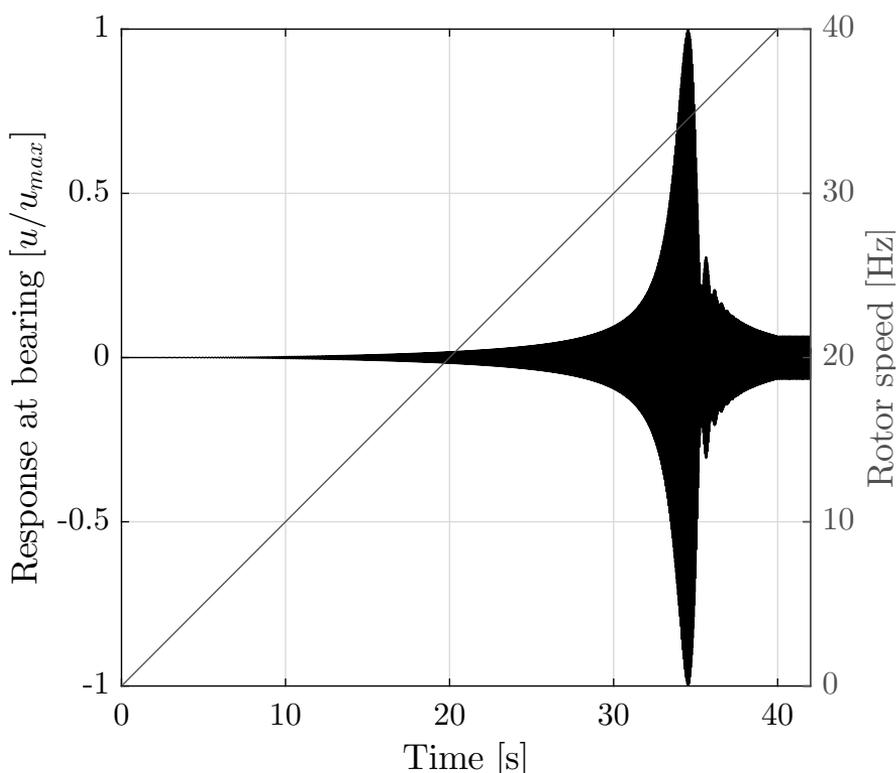


Abbildung 5.13: Verschiebungsantwort am isotropen Lager des Rotors

### Anisotrop gelagerter Rotor

In der Berechnung mit anisotropen Lagerkoeffizienten wird der Rotor ebenfalls vom Stillstand auf 40 Hertz hochgefahren. Der Orbit (siehe Abbildung 5.14) zeigt ein nichtlineares Verhalten, da eine Ellipse nicht zu erkennen ist. Abbildung 5.15 und 5.16 stellen dies dar. Im Vergleich zur isotropen Berechnung liegen hier unterschiedliche Verschiebungen in  $u$ - und  $v$ -Richtung vor.

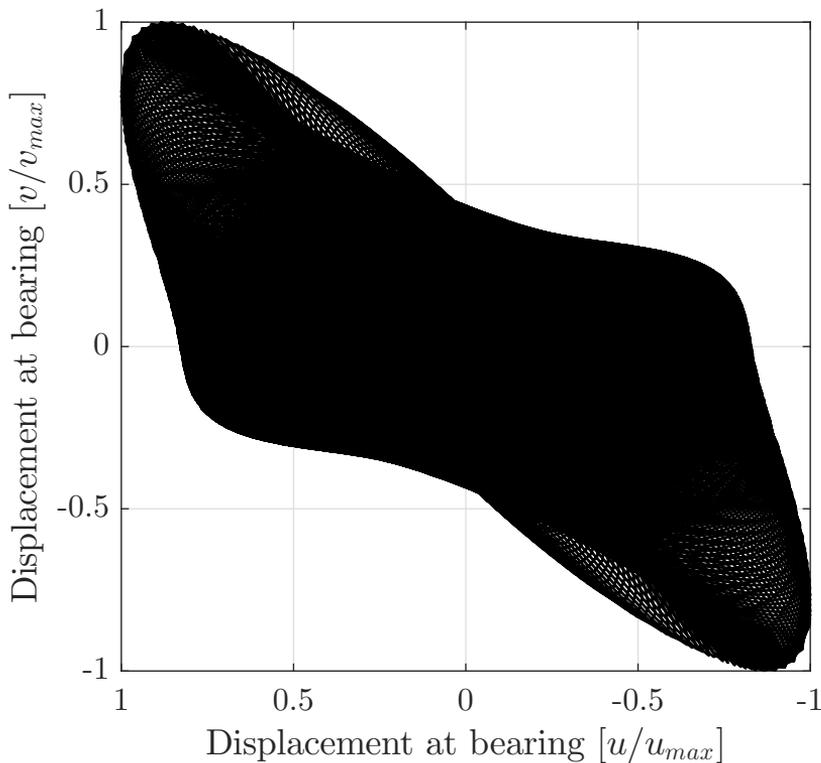


Abbildung 5.14: Orbitdarstellung

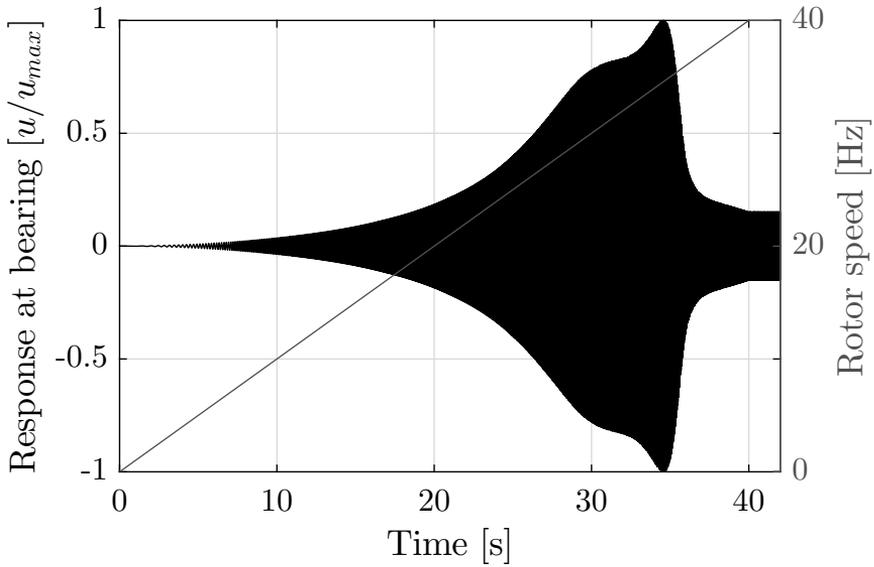


Abbildung 5.15: Verschiebung  $u$  am ersten anisotropen Lager des Rotors

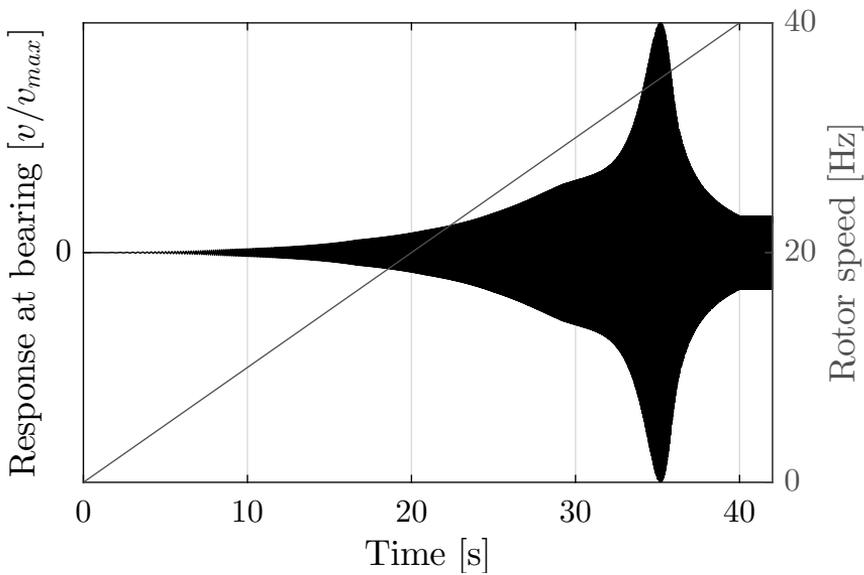


Abbildung 5.16: Verschiebung  $v$  am ersten anisotropen Lager des Rotors

Zusätzlich ist für den anisotropen gelagerten Rotor das Spektrogramm und die Ordnungsanalyse dargestellt. Diese werden hier vorerst näher beschrieben und dann abgebildet.

Der Lösungsvektor kann nicht nur im Zeitbereich, sondern auch im Frequenzbereich dargestellt werden. Dies ist in Abbildung 5.17 ersichtlich. Die Amplitude im Zeitbereich kann projiziert als Zeiger auf die Imaginärachse im Frequenzbereich abgebildet werden.

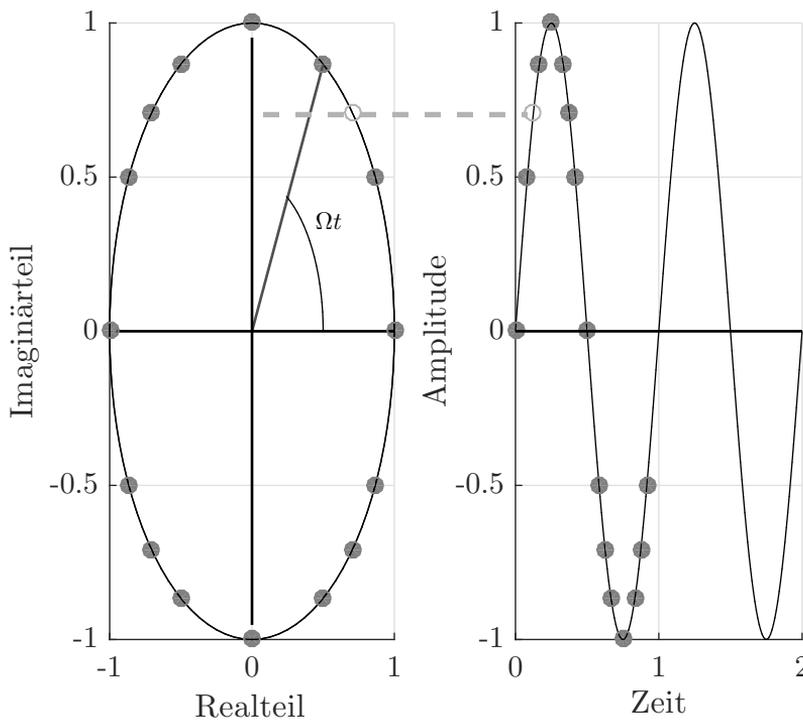


Abbildung 5.17: Sinussignal im Frequenz- und Zeitbereich

Die Umrechnung zwischen den zwei Bereichen findet mit der *short time Fourier transform* statt. Der zeitabhängige Lösungsvektor wird als Summe oder als ein Integral von komplexen Exponentialfunktionen verschiedener Frequenzen zerlegt und weist somit ein charakteristisches

Frequenzspektrum auf. [15] Es gilt

$$\underline{u}_f(f) = F[\hat{\underline{u}}(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{\underline{u}}(t) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

|     |                             |   |       |
|-----|-----------------------------|---|-------|
| mit | $F[\hat{\underline{u}}(t)]$ | Fourier-Transformation von $\hat{\underline{u}}(t)$ | (5.1) |
|     | $\hat{\underline{u}}(t)$    | Signal im Zeitbereich                               |       |
|     | $\underline{u}_f(f)$        | komplexes Signal im Frequenzbereich.                |       |

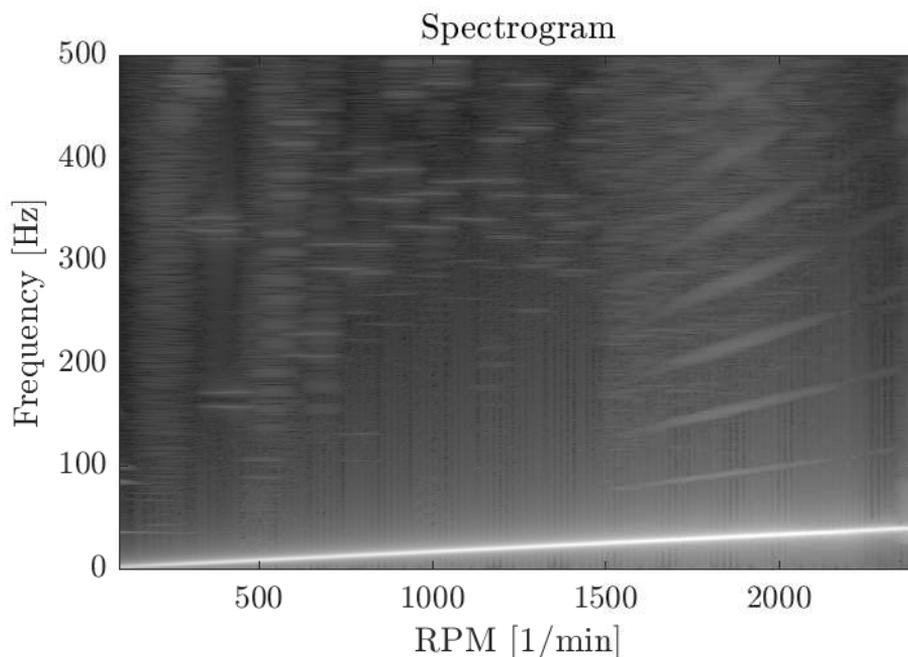


Abbildung 5.18: Spektrogramm für den Rotor

Dieses gewichtet die ermittelten Exponentialfunktionen zu den jeweiligen Frequenzen und ergibt als Summe wieder das Gesamtsignal. Das Spektrogramm für den Rotor mit anisotropen Lagern ist in Abbildung 5.18 dargestellt. Hier sind die Frequenzbereiche ersichtlich, die eine hohe Leistungsdichte aufweisen. Die erwähnte Gewichtung ist als Grauskala hinterlegt (niedrig: dunkle Farbe; hoch: helle Farbe). Die erste Ordnung

als weiße Lineare ist klar ersichtlich. Es sind Überlagerung von höheren Ordnungen erkennbar mit einen geringeren Einfluss als die erste Ordnung. Horizontale Linien sind Linien konstanter Frequenz und steigende Kurven sind Linien konstanter Ordnung.

Bei der Ordnungsanalyse wird auf der y-Achse anstelle der Frequenz die Drehfrequenz und deren Vielfaches aufgetragen - Ordnungen genannt. Diese geben an, wie oft pro Umdrehung eine Anregung stattfindet. Auf der x-Achse ist die Drehzahl abgebildet. Abbildung 5.19 zeigt ein solches von dem Rotor mit anisotropen Lagern. Horizontale Linien sind hier Linien konstanter Ordnung und abfallende Kurven Linien konstanter Frequenz. Es ist die Gewichtung in Abhängigkeit von der Ordnung und der Drehzahl aufgetragen.

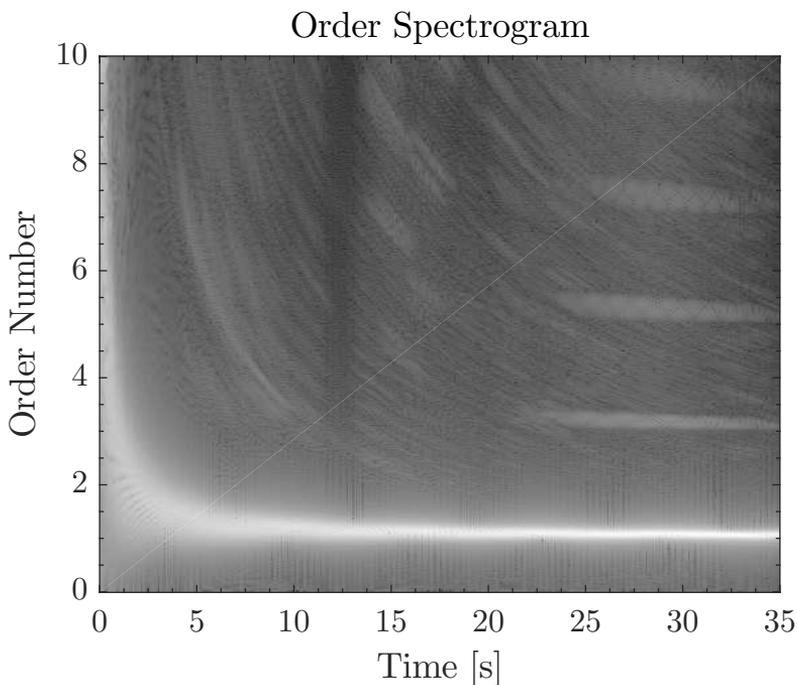


Abbildung 5.19: Ordnungsanalyse

## 5.3 Validierung

In diesem Kapitel werden die unterschiedlichen Lösungsmethoden gegenübergestellt, um eine Validierung der einzelnen Berechnungsmethoden des Programms zu machen. Es wird die Amplitude des Lösungsvektors bei einer ausgewählten Frequenz festgelegt und diese mit den anderen Methoden verglichen. Weiters werden die Vektoren voneinander abgezogen, um die relative Abweichung zu ermitteln.

Die vorgestellten Lösungsmethoden werden an dem rotierenden Balken mit einer kleinen Unwuchtmasse in der Mitte angewandt und die Lösungsvektoren untereinander verglichen. Die Geometrie des Balkens ist in Abbildung 5.3 dargestellt.

Die vier vorgestellten Lösungsmethoden sind:

- Quasi-stationäre Berechnung
- Gesamtmodellberechnung
- Modale Reduktion
- Gemischte Kondensation

Als erstes wird mit *ANSYS*<sup>®</sup> die quasi-stationäre Berechnung validiert und anschließend diese mit den transienten Methoden gegenübergestellt.

### 5.3.1 Vergleich mit Ansys

Die quasi-stationäre Berechnung kann sehr schnell mit *Ansys* validiert werden und der Vergleich liefert plausible Ergebnisse wie in 5.20 ersichtlich ist. Abgesehen von einer kleinen Differenz im Bereich der Resonanz, welche auf eine numerische Abweichung rückzuführen ist, stimmen die zwei Kurven komplett überein.

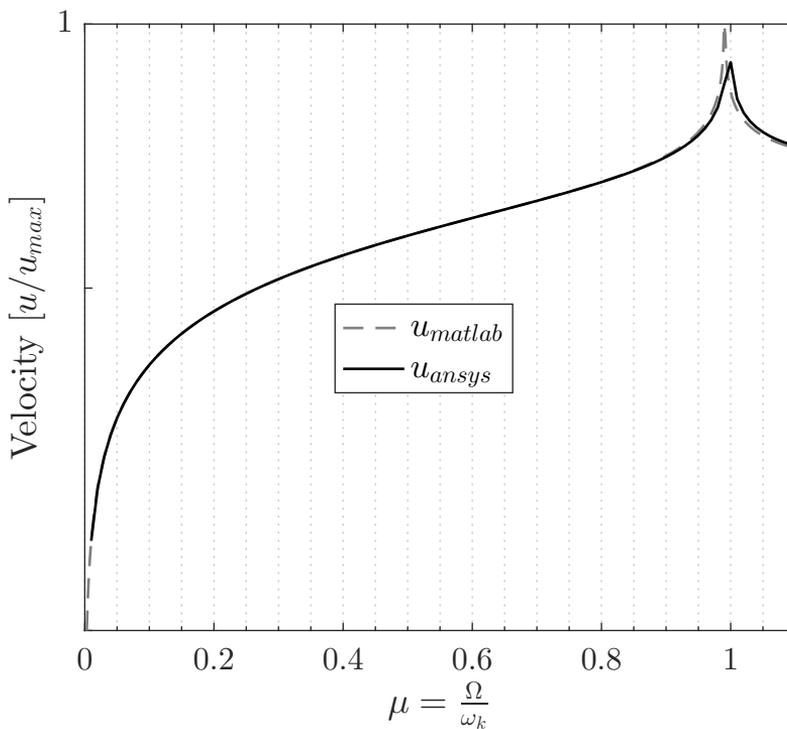


Abbildung 5.20: Vergleich mit Ansys

### 5.3.2 Quasi-stationäre Lösung

Zunächst wird die Lösung von der quasi-stationären Berechnung gezeigt. Dazu ist der Hochlauf des Balkens von null auf fünf Hertz dargestellt. Bei fünf Hertz beträgt die Amplitude 0.01087 mm.

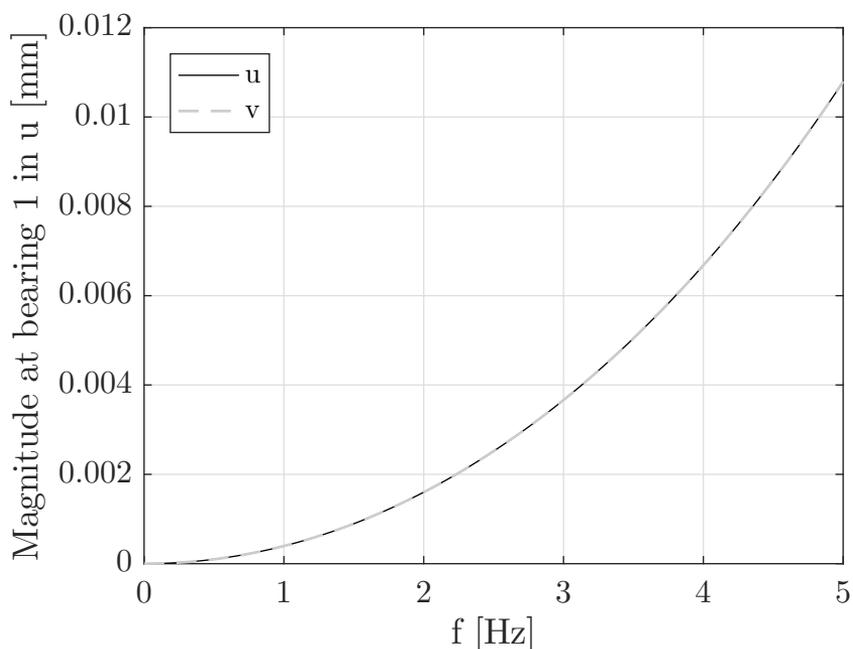


Abbildung 5.21: Quasi-stationäre Lösung des Balkens

Tabelle 5.1: Ergebnis der quasi-stationären Berechnung

| 5 Hz              | u       | v       |
|-------------------|---------|---------|
| Stationäre Lösung | 0,01087 | 0,01087 |

### 5.3.3 Vergleich Gesamtberechnung und modale Reduktion

Es werden die Berechnungen des Ausgangsmodells und der modalen Kondensation miteinander verglichen. Aus Abbildung 5.22 ist ersichtlich, dass die Kurven übereinander liegen und somit die Lösungen aus den Berechnungen gleich sind. Wenn die beiden Lösungsvektoren bei jedem Zeitschritt abgezogen werden, ergibt dies Abbildung 5.23. Der mittlere Fehler über die gesamte Zeit ist nahezu null.

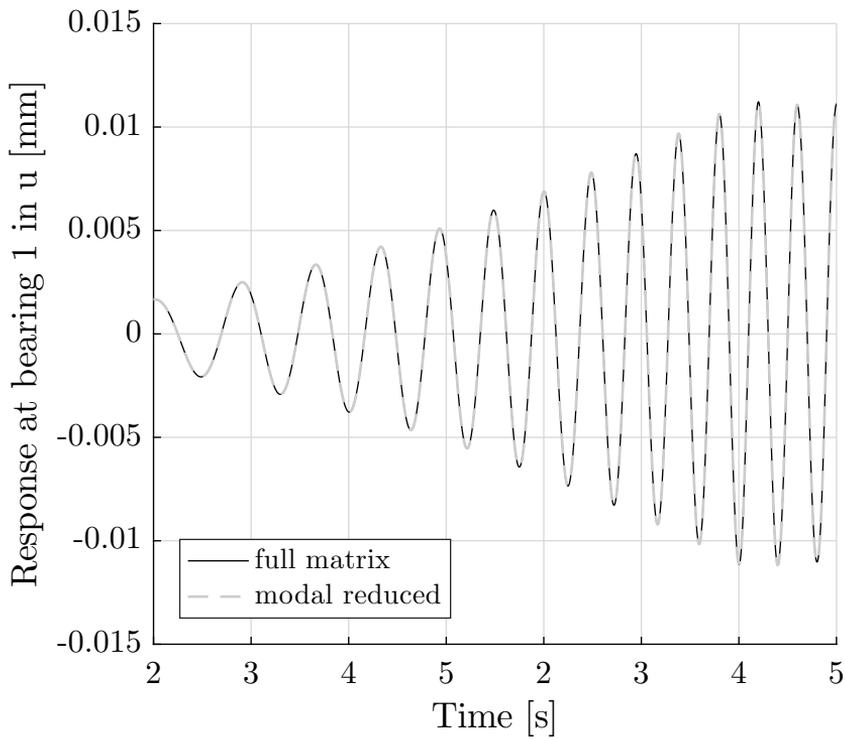


Abbildung 5.22: Berechnung Gesamtmodells und modale Reduktion

Die Berechnungszeit für die Vollmatrix ist 22 Minuten, für die modale Reduktion 30 Sekunden. Aufschlüsse über die Ergebnisse des Lösungsvektors gibt folgende Tabelle:

Tabelle 5.2: Ergebnisse der einzelnen Berechnungen

| 5 Hz              | u       | v       |
|-------------------|---------|---------|
| Stationäre Lösung | 0,01087 | 0,01087 |
| Vollmatrix        | 0,01084 | 0,01084 |
| modale Reduktion  | 0,01085 | 0,01085 |

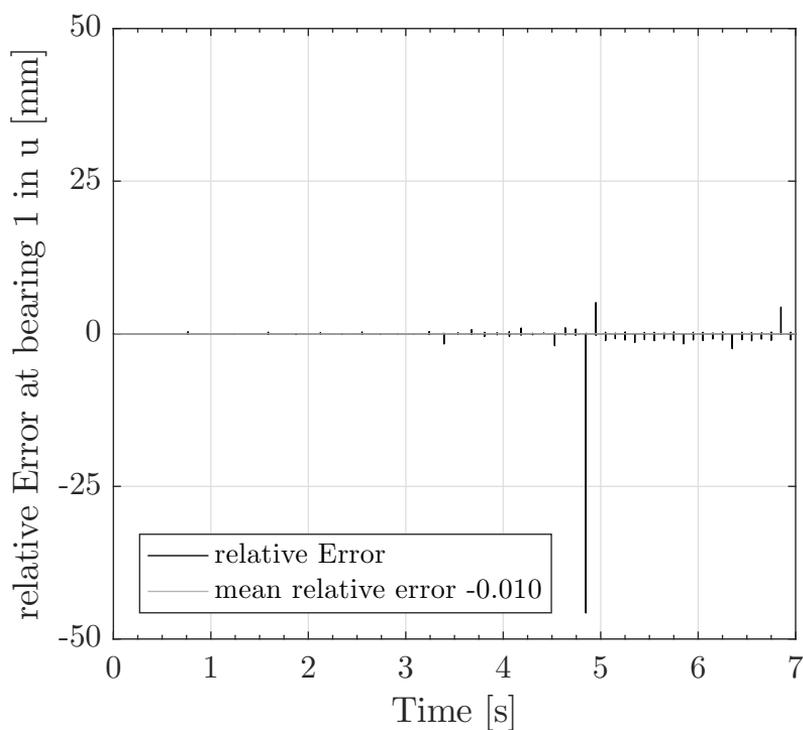


Abbildung 5.23: Abweichung der beiden Berechnungen

### 5.3.4 Vergleich unreduzierte Berechnung und gemischte Reduktion

Bei diesen Vergleich wird die Berechnung des Gesamtmodells der Berechnung der gemischten Kondensation gegenübergestellt. Auch hier ist ersichtlich, dass die Amplituden und die Phase ident sind, wie Abbildung 5.24 zeigt. Eine genauere Betrachtung der Amplitude zeigt Abbildung 5.25 (markierter Kreis in Abbildung 5.24). Die Differenz der beiden Lösungsvektoren stellt Abbildung 5.26 dar.

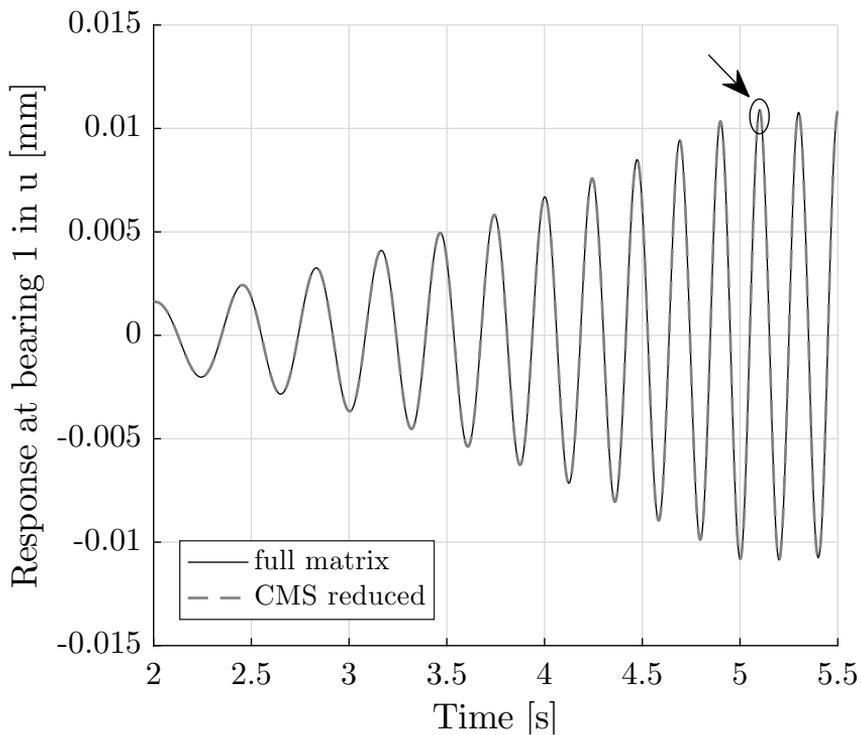


Abbildung 5.24: Berechnung Gesamtmodell und CMS Berechnung

Die Berechnungszeit für die Vollmatrix beträgt 22 Minuten, für die gemischte Reduktion 28 Sekunden. Der Lösungsvektor ist in der folgenden Tabelle aufgelistet:

Tabelle 5.3: Ergebnisse der einzelnen Berechnungen

| 5 Hz                | u       | v       |
|---------------------|---------|---------|
| Stationäre Lösung   | 0,01087 | 0,01087 |
| Vollmatrix          | 0,01084 | 0,01084 |
| gemischte Reduktion | 0,01082 | 0,01082 |

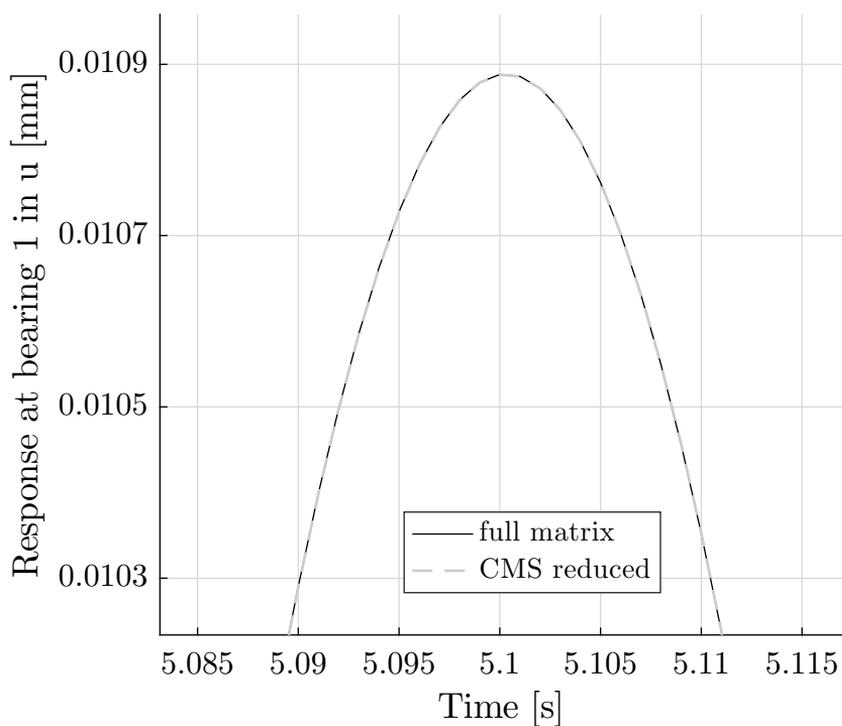


Abbildung 5.25: Ausschnitt der Gegenüberstellung

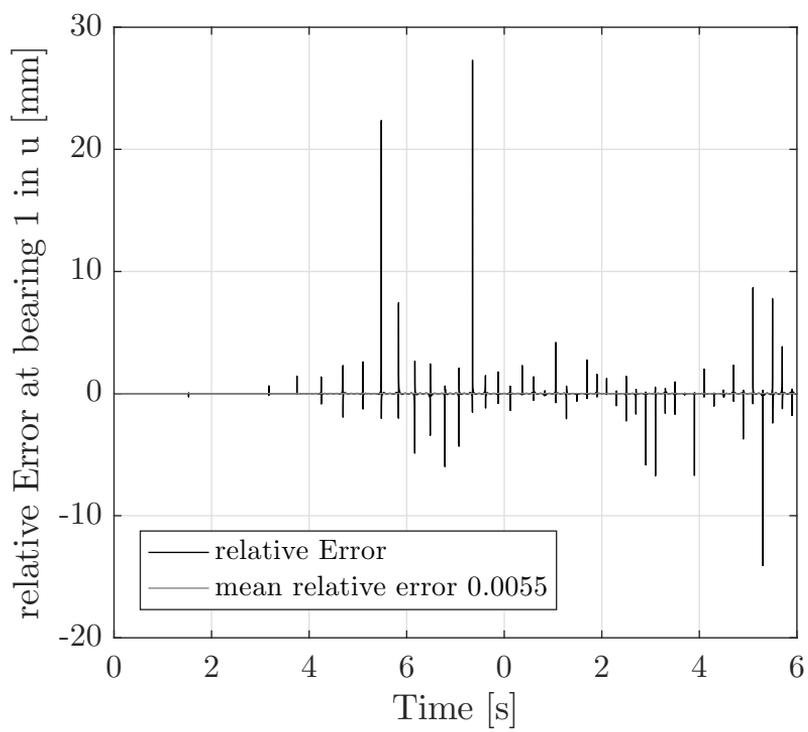


Abbildung 5.26: Abweichung der beiden Berechnungen



# 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden nach der Einleitung in Kapitel 1 die notwendigen theoretischen Grundlagen in Kapitel 2 hergeleitet und zusammengefasst. Nach Berücksichtigung verschiedenster Effekte am einfachsten schwingungsfähigen System, dem Einmassenschwinger, wurden spezielle Effekte für Rotoren erklärt. Anschließend wurden verschiedene Balkentheorien beschrieben und das Aufstellen und Lösen der Bewegungsgleichung von Rotoren hergeleitet.

In Kapitel 3 wurden die zwei unterschiedlichen Berechnungsmethoden vorgestellt und die jeweilige mathematische Herleitung, sowie deren Einsatzbereich erklärt.

Zur Beschleunigung der Berechnung wurde eine Reduktion der Freiheitsgrade eingeführt, welche in Kapitel 4 beschrieben wurde. Ausgehend vom Reduktionsprinzip, wurden statische, modale und gemischte Reduktion mathematisch definiert und deren Vor- und Nachteile erläutert.

Die Implementierung und Validierung des Programms wurde in Kapitel 5 vorgestellt. Außerdem sind darin die Möglichkeiten der Analyse des Lösungsvektors mit dem vorhandenen Programm angeführt. Im Abschnitt *Validierung* wurde weiters die Berechnung mit *ANSYS*<sup>®</sup> verglichen, was nahezu idente Ergebnisse liefert.

Mittels des Vergleichs mit *ANSYS*<sup>®</sup> wurde überprüft, ob das entwickelte Programm das gewählte Modell richtig beschreibt und berechnet. Es ist aber noch sicherzustellen, ob der gewählte Modellierungsgrad ausreichend

ist und ob die Ergebnisse aus der Simulation in ausreichendem Maße der Realität entsprechen. Dazu ist ein Vergleich mit experimentell ermittelten Daten unabdingbar.

Aufgrund der getroffenen Vereinfachungen während der Modellierung treten Abweichungen im Vergleich zur Realität auf. Diese könnten mittels eines detaillierteren komplexeren Modells minimiert werden. Im Folgenden sind einige Verbesserungsvorschläge angeführt:

- Wie in Kapitel 2 gezeigt, ist das Schwingungsverhalten maßgeblich von der Dämpfung des Systems abhängig. Mit Hilfe von systematische Messreihen an realen Maschinen und vergleichende Berechnungen könnten die Größenordnung und die dominanten Übertragungsglieder identifiziert werden.
- Es gibt des weiteren noch keine Möglichkeit beliebige Kräfte an bestimmten Knoten angreifen zu lassen. Dies wäre eine Zusatzfunktion, um zum Beispiel den magnetischen Zug in den Hochlauf einzubinden. Dazu wäre die Berechnung des resultierenden Kraftvektors notwendig und es müsste eine Funktion geschrieben werden, die die Kräfte mit deren Betrag und Winkel an bestimmten Knoten definiert.
- Ein sinnvolle Ergänzung für die Validierung wäre eine Einbindung der Messdaten. So könnte ein automatisches Übereinanderlegen der Mess- und Simulationsergebnisse hilfreiche Informationen geben.
- Eine Erweiterung der Berechnung um die resultierende Lagerkräfte zu bestimmen.

# Nomenklatur

*kleine lateinische Buchstaben*

|                 |                                       |
|-----------------|---------------------------------------|
| $b$             | Gesamtfreiheitsgrade                  |
| $c$             | Anzahl der reduzierten Freiheitsgrade |
| $d$             | Dämpfung                              |
| $e$             | Exzentrizität                         |
| $\underline{f}$ | Kraftvektor                           |
| $g$             | Erdbeschleunigung                     |
| $h$             | Hauptfreiheitsgrade                   |
| $j$             | imaginäre Einheit                     |
| $k$             | Steifigkeit                           |
| $l$             | Länge                                 |
| $m$             | Masse                                 |
| $n$             | Drehzahl, Nebenfreiheitsgrade         |
| $o$             | Gesamtanzahl der Elemente             |

## Nomenklatur

---

|                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $p$                                   | lokales Element                       |
| $\underline{\mathbf{q}}$              | reduzierter Verschiebungsvektor       |
| $\underline{\dot{\mathbf{q}}}$        | reduzierter Geschwindigkeitsvektor    |
| $\underline{\ddot{\mathbf{q}}}$       | reduzierter Beschleunigungsvektor     |
| $s$                                   | komplexe Lösungsvariable              |
| $t$                                   | Zeit                                  |
| $\underline{\mathbf{u}}$              | Verschiebungsfeld                     |
| $\underline{\dot{\mathbf{u}}}$        | Geschwindigkeitsvektor                |
| $\underline{\ddot{\mathbf{u}}}$       | Beschleunigungsvektor                 |
| $\underline{\mathbf{u}}_{\mathbf{A}}$ | Amplitudenvektor                      |
| $\hat{\underline{\mathbf{u}}}$        | Knotenpunktverschiebungsfeld          |
| $\hat{\underline{\dot{\mathbf{u}}}}$  | Knotenpunktgeschwindigkeitsfeld       |
| $\hat{\underline{\ddot{\mathbf{u}}}}$ | Knotenpunktbeschleunigungsfeld        |
| $u, v, w$                             | Verschiebung in x,y,z                 |
| $x$                                   | Ortsvektor                            |
| $\dot{x}$                             | Geschwindigkeit                       |
| $\ddot{x}$                            | Beschleunigung                        |
| $\bar{x}$                             | Ortskoordinate um statische Ruhelage  |
| $\dot{\bar{x}}$                       | Geschwindigkeit um statische Ruhelage |

|                 |                                      |
|-----------------|--------------------------------------|
| $\dot{\hat{x}}$ | Beschleunigung um statische Ruhelage |
| $\hat{x}$       | Amplitude                            |
| $x_0$           | Anfangsortsvektor                    |
| $\dot{x}_0$     | Anfangsgeschwindigkeitssvektor       |
| $x_h$           | harmonische Lösung                   |
| $x_p$           | partikuläre Lösung                   |
| $x_s$           | Statische Ruhelage                   |
| $xyz$           | Referenzkoordinaten                  |

*große lateinische Buchstaben*

|                               |                            |
|-------------------------------|----------------------------|
| $A$                           | Fläche                     |
| $\underline{\underline{D}}$   | Dämpfungsmatrix            |
| $\underline{\underline{D}}_p$ | Differentialoperatormatrix |
| $\underline{\underline{E}}$   | Einheitsmatrix             |
| $E$                           | Elastizitätsmodul          |
| $F$                           | Kraft                      |
| $\hat{F}$                     | Kraftamplitude             |
| $\underline{\underline{G}}$   | gyroskopische Matrix       |
| $G$                           | Schubmodul                 |

## Nomenklatur

---

|                 |                               |
|-----------------|-------------------------------|
| <u><b>H</b></u> | Interpolationsmatrix          |
| $I$             | Flächenträgheitsmoment        |
| $J_p$           | polares Massenträgheitsmoment |
| $J_y$           | axiales Massenträgheitsmoment |
| <u><b>K</b></u> | Steifigkeitsmatrix            |
| $L$             | potenzielle Energie           |
| <u><b>M</b></u> | Massenmatrix                  |
| $N$             | Ansatzfunktion                |
| $S$             | Oberfläche                    |
| $T$             | kinetische Energie            |
| <u><b>T</b></u> | Transformationsmatrix         |
| $U$             | Unwucht                       |
| $\hat{V}$       | Vergrößerungsfunktion         |
| $V$             | Volumen                       |

### *griechische Buchstaben*

|                  |                        |
|------------------|------------------------|
| $\gamma$         | Schubverformung        |
| $\delta$         | Abklingkonstante       |
| $\delta\epsilon$ | virtuelle Verzerrungen |

|                                       |   |
|---------------------------------------|---|
| $\delta \underline{\mathbf{q}}$       | virtueller reduzierter Verschiebungsvektor            |
| $\delta \underline{\mathbf{u}}$       | virtuelle Verschiebung                                |
| $\delta W_{ext}$                      | virtuelle Arbeit der externen Kräfte                  |
| $\delta W_{int}$                      | virtuelle Arbeit der inneren Kräfte                   |
| $\delta W_{inertia}$                  | virtuelle Arbeit der Trägheitskräfte                  |
| $\underline{\underline{\varepsilon}}$ | Verzerrungen  |
| $\zeta$                               | Phasenwinkel  |
| $\vartheta$                           | Dämpfungsgrad   |
| $\lambda$                             | Eigenwerte  |
| $\mu$                                 | Verhältnis Erregerkreisfrequenz zu Eigenkreisfrequenz |
| $\rho$                                | Dichte  |
| $\underline{\underline{\tau}}$        | Spannungen  |
| $\varphi, \psi, \eta$                 | Rotation um $x$ , $y$ und $z$                         |
| $\underline{\underline{\varphi}}$     | Eigenvektoren   |
| $\underline{\underline{\phi}}$        | Modalmatrix   |
| $\chi$                                | Schubkorrekturfaktor                                  |
| $\Omega$                              | Anregungskreisfrequenz                                |
| $\omega_k$                            | Eigenkreisfrequenz                                    |



# Abbildungsverzeichnis

|      |   |    |
|------|---|----|
| 2.1  | Einmassenschwinger . . . . .  | 6  |
| 2.2  | Zeitlicher Verlauf der Verschiebung . . . . .                             | 8  |
| 2.3  | Schwach gedämpfte Schwingung . . . . .                                    | 10 |
| 2.4  | Stark gedämpfte Schwingung . . . . .                                      | 11 |
| 2.5  | Vergrößerungsfunktion . . . . .   | 14 |
| 2.6  | Rotor mit Unwucht als Punktmasse . . . . .                                | 16 |
| 2.7  | Querschnitt des Rotors . . . . .  | 16 |
| 2.8  | Verhalten bei Unwuchtanregung . . . . .                                   | 19 |
| 2.9  | Ausgebogener Läufer mit Schrägstellung der Scheibe . . . . .              | 20 |
| 2.10 | Euler-Bernoulli Modell . . . . .  | 23 |
| 2.11 | Timoshenko Modell . . . . .   | 24 |
| 2.12 | Kontinuierliches und diskretisiertes System . . . . .                     | 28 |
| 2.13 | Freiheitsgraddefinition eines Timoshenko Elements . . . . .               | 32 |
| 2.14 | Runge-Kutta Verfahren . . . . .   | 40 |
| 3.1  | Hochlauf eines Rotors . . . . .   | 44 |
| 3.2  | Hochlauf des Balken von 0 auf 5 Hertz mit anschließendem Halten . . . . . | 47 |
| 4.1  | Ausgangssteifigkeitsmatrix . . . . .                                      | 50 |
| 4.2  | Reduktion der Matrizen . . . . .  | 52 |
| 4.3  | Umordnung der Matrizen . . . . .  | 54 |
| 4.4  | Modale Reduktion der Massenmatrix . . . . .                               | 57 |
| 4.5  | Transformationsmatrix der CMS Reduktion . . . . .                         | 60 |
| 5.1  | Programmablauf . . . . .  | 66 |
| 5.2  | Ablauf der quasi-stationären Berechnung . . . . .                         | 68 |

|      |  |    |
|------|--|----|
| 5.3  | Geometrie des Balkens . . . . .  | 69 |
| 5.4  | Geometrie des Rotors . . . . .   | 69 |
| 5.5  | Quasi-stationäre Antwort am ersten Lager des Balkens .                                   | 70 |
| 5.6  | Orbitdarstellung des Balkens . . . . .   | 71 |
| 5.7  | Quasi-stationärer Antwortvektor des Rotors . . . . .                                     | 72 |
| 5.8  | Quasi-stationärer Orbit des Rotors . . . . .   | 72 |
| 5.9  | Steifigkeits- und Dämpfungswerte des hydrodynamischen<br>Gleitlagers vom Rotor . . . . . | 73 |
| 5.10 | Transiente Antwort am ersten Lager des Balkens . . . . .                                 | 74 |
| 5.11 | Transienter Orbit am ersten Lager des Balkens . . . . .                                  | 75 |
| 5.12 | Frequenzgang am ersten Lager des Balkens . . . . .                                       | 75 |
| 5.13 | Verschiebungsantwort am isotropen Lager des Rotors . .                                   | 76 |
| 5.14 | Orbitdarstellung . . . . .   | 77 |
| 5.15 | Verschiebung $u$ am ersten anisotropen Lager des Rotors .                                | 78 |
| 5.16 | Verschiebung $v$ am ersten anisotropen Lager des Rotors .                                | 78 |
| 5.17 | Sinussignal im Frequenz- und Zeitbereich . . . . .                                       | 79 |
| 5.18 | Spektrogramm für den Rotor . . . . .   | 80 |
| 5.19 | Ordnungsanalyse . . . . .  | 81 |
| 5.20 | Vergleich mit Ansys . . . . .  | 83 |
| 5.21 | Quasi-stationäre Lösung des Balkens . . . . .  | 84 |
| 5.22 | Berechnung Gesamtmodells und modale Reduktion . . .                                      | 85 |
| 5.23 | Abweichung der beiden Berechnungen . . . . .   | 86 |
| 5.24 | Berechnung Gesamtmodell und CMS Berechnung . . . .                                       | 87 |
| 5.25 | Ausschnitt der Gegenüberstellung . . . . .   | 88 |
| 5.26 | Abweichung der beiden Berechnungen . . . . .   | 89 |

# Literaturverzeichnis

- [1] Jäger H. Mastel R., Knaebel M. *Technische Schwingungslehre*. Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 2016.
- [2] Berger S. *Ermittlung kritischer Drehzahlen und Eigenformen von Rotoren elektrischer Maschinen*. Masterarbeit, Technische Universität Graz, 2013.
- [3] M.A. Prohl. A general method for calculating critical speeds of flexible rotors. *Journal of Applied Mechanics*, 66:142–148, 1945.
- [4] Dimentberg F. *Flexural vibrations of rotating shafts*. Butterworths, 1961.
- [5] Piarulli V.J. Loevi R.G. *Dynamics of Rotating Shafts*. The Shock and Vibration Information Center Naval Research Laboratory, Washington D.C., 1969.
- [6] Bathe K.J. *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [7] Gasch R. Pfützner H., Nordmann R. *Rotordynamik*. Springer Verlag Berlin Heidelberg, 2002.
- [8] Genta G. *Dynamics of rotating systems*. Springer-Verlag, 2005.
- [9] Friswell M. Penny J., Garvey S. *Dynamics of rotating machines*. Cambridge University Press, 2010.
- [10] Gasch R. Knothe K., Liebich R. *Strukturdynamik Diskrete Systeme und Kontinua*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2012.

- [11] Krämer E. *Maschinendynamik*. Springer Vieweg, 1984.
- [12] Kuypers F. *Klassische Mechanik*. Wiley-VCH, 7. edition, 2005.
- [13] J. C. Butcher. A stability property of implicit runge-kutta methods. *BIT Numerical Mathematics*, 15(4):358–361, 1975.
- [14] Hanke-Bourgeois M. *Grundlagen der Numerischen Mathematik und des Wissenschaftlichen Rechnens*. Teubner Verlag, 2006.
- [15] Rauscher C. Janssen V., Minihold R. *Grundlagen der Spektralanalyse*. Rohde & Schwarz, 2007.