

# Finite-Elemente-Simulationen in der Bauakustik:

Implementierung  
Verifizierung und Validierung  
Anwendung

am Beispiel eines innovativen Mauerwerks

Diplomarbeit

durchgeführt von

**Blasius Buchegger**

Institut für Hochbau  
der Technischen Universität Graz

Betreuer: Dipl.-Ing. Heinz Ferk  
Begutachter: Univ.-Prof. Mag. Dipl.-Ing. Dr.jur. Dr.techn. Peter Kautsch

Graz, im Februar 2014



## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit **selbstständig** verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe.

Graz, am ..... (Unterschrift)

## Danksagung

Folgenden Personen, die mich bei der Erstellung meiner Diplomarbeit unterstützt haben, möchte ich meinen Dank aussprechen:

Zuerst möchte ich mich herzlich bei meinem Betreuer Herrn Dipl.- Ing. Heinz Ferk für die äußerst hilfsbereite, umfangreiche und zeitlich sehr flexible Unterstützung bedanken.

Ein spezieller Dank gilt den Herren Clemens Halder und Jan Kasim, welche in zahlreichen Fachdiskussionen bei der Erstellung dieser Arbeit eine große Hilfe waren.

Weiters gilt mein Dank Herrn Ao. Univ.-Prof. Dipl.- Ing. Dr. techn. Gerhard Graber für die Bereitstellung der PC's und der Finite-Elemente-Software, welche für diese Arbeit notwendig waren.

Bedanken möchte ich mich auch beim Begutachter Herrn Univ.-Prof. Mag. Dipl.-Ing. Dr.jur. Dr.techn. Peter Kautsch für seine Bereitschaft, sich kritisch mit dieser Arbeit auseinanderzusetzen.

Abschließend gilt mein Dank vor allem meinen Eltern und meiner Familie, die mich in meiner gesamten Studienzeit stets unterstützt haben und mir somit einen erfolgreichen Abschluss des Studiums ermöglichten.

## Zusammenfassung

Infolge der stetig zunehmenden Umweltbelastung durch Lärm haben die akustischen und schwingungstechnischen Eigenschaften von Bauteilen und Baukonstruktionen in den letzten Jahren immer mehr an Bedeutung gewonnen. Dieser Aspekt ist daher bei der Entwicklung und Optimierung von Produkten neben anderen bauphysikalischen Eigenschaften verstärkt zu berücksichtigen.

Die vorliegende Diplomarbeit befasst sich mit der Vorgehensweise bei der Einbindung von Computersimulationen auf Basis der Finite-Elemente-Methode in bauakustisch relevante Analysen. Der Schwerpunkt der Arbeit liegt in der Implementierung eines Computermodells und der Ermittlung der hierfür notwendigen Materialparameter, wobei ein konkreter Prüfkörper als Referenz herangezogen wird. Es werden Werte aus Hersteller-Datenblättern den vorwiegend experimentell ermittelten Werten gegenübergestellt und die unter Verwendung dieser Daten erhaltenen Simulationsergebnisse miteinander verglichen. Spezifische Methoden zur Validierung des Simulationsmodells kommen zum Einsatz, mögliche Anwendungsbeispiele runden die Arbeit ab.

Im Zuge der beschriebenen Vorgehensweise wird ein vertieftes Verständnis für das Schwingverhalten des Prüfkörpers gewonnen, wodurch die Basis für eine bauakustische Optimierung der Struktur geschaffen wird.

## Abstract

Due to the increasing environmental noise exposure, the acoustic and vibration characteristics of building components and constructions have become more and more important in recent years. In the development and optimization of building constructions these aspects are considered as well as other physical properties.

This diploma-thesis deals with the approach to integrate computer-simulations based on the finite-element-method in some special aspects of building acoustics. The main focus of the work lies in the implementation of the simulation model for a specific task (a new developed brick) and on the determination of the required material parameters, while a concrete specimen is used as a reference. Values taken from manufacturer based datasheets are compared with experimentally determined values as well as the simulation results obtained with each other. Specific methods for validation of the model are presented, a presentation of possible specific types of application completes the thesis.

As a consequence of the described procedure, a profound understanding of the vibration behavior of the specimen is obtained. This provides the basis for an acoustical optimization of the investigated product.



# Inhaltsverzeichnis

<b>I</b>	<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>2</b>
1.1	Motivation . . . . .	2
1.2	Zielsetzung . . . . .	3
1.3	Gliederung der Arbeit . . . . .	3
1.4	Verwendete Software . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>7</b>
2.1	Die Finite-Elemente-Methode . . . . .	7
2.1.1	Vernetzung . . . . .	8
2.1.2	Analysearten . . . . .	8
2.1.2.1	Frequenzbereichsanalyse . . . . .	8
2.1.2.2	Eigenfrequenzanalyse . . . . .	9
2.1.3	Postprocessing . . . . .	9
2.2	Mechanische und akustische Grundlagen . . . . .	10
2.2.1	Elastizitätstheorie: Relationen zwischen Spannung und Dehnung . . . . .	10
2.2.2	Wellenformen . . . . .	12
2.2.2.1	Wellen in Festkörpern . . . . .	12
2.2.2.2	Biegewellenausbreitung in Platten . . . . .	13
2.2.2.3	Wellen in Fluiden . . . . .	15
2.3	Modalanalyse . . . . .	16
2.3.1	Schwingungen und Moden . . . . .	17
2.3.2	Systemtechnische Kriterien . . . . .	18
2.3.3	Übertragungsverhalten einer Struktur . . . . .	19
2.3.4	Analytische Modelle . . . . .	21

2.3.5	Experimentelle Modalanalyse . . . . .	26
2.3.5.1	Lagerungsbedingungen . . . . .	27
2.3.5.2	Auswahl der Messpunkte (Diskretisierung) . . . . .	28
2.3.5.3	Anregungsarten und Messungen der Übertragungsfunktion . . . . .	29
2.4	Grundlagen zur Verifizierung und Validierung . . . . .	32
2.4.1	Verifizierung der numerischen Simulation . . . . .	33
2.4.2	Validierung des Berechnungsmodells . . . . .	35

## **II Implementierung 37**

### **3 Das Simulationsmodell 38**

3.1	Vorgehensweise / Zielsetzung . . . . .	38
3.2	Der Prüfkörper . . . . .	39
3.3	Modellierung der Struktur . . . . .	40
3.3.1	Geometrie . . . . .	40
3.3.2	Materialparameter . . . . .	41
3.3.2.1	Rohdichte . . . . .	41
3.3.2.2	Elastizitätsmodul . . . . .	42
3.3.2.3	Poissonzahl . . . . .	42
3.3.2.4	Porosität . . . . .	43
3.3.2.5	Dämpfung . . . . .	44
3.3.2.6	Übliche Wertebereiche und Daten aus Datenblättern . . . . .	45
3.4	Lagerungsbedingungen . . . . .	46
3.5	Vernetzung . . . . .	46
3.5.1	Maximale Elementgröße in Fluiden . . . . .	46
3.5.2	Maximale Elementgröße in mechanischen Domänen . . . . .	47
3.5.3	Weitere Vernetzungsparameter . . . . .	48
3.6	Modellvarianten . . . . .	49
3.6.1	Hauptmodell: Planziegel (3D) . . . . .	49
3.6.2	Submodell 1: Ziegelscherbenplatte (3D) . . . . .	50
3.6.3	Submodell 2: Virtueller Schallprüfstand (2D) . . . . .	50
3.7	Parametrisierung . . . . .	51
3.7.1	Globale Parameter . . . . .	51

3.7.2	Parametersweep . . . . .	51
3.7.3	Spezielle Lösungsabfolgen . . . . .	52
3.8	Rechenzeit . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Experimentelle Messungen</b>	<b>54</b>
4.1	Rohdichte . . . . .	54
4.1.1	Ziegelscherbe . . . . .	55
4.1.2	Mineralwolle . . . . .	56
4.2	Experimentelle Modalanalyse . . . . .	57
4.2.1	Allgemeines . . . . .	57
4.2.1.1	Verwendete Messgeräte . . . . .	57
4.2.1.2	Lagerung der Prüfkörper . . . . .	58
4.2.1.3	Auswahl der Messpunkte . . . . .	59
4.2.2	Gesamtziegel . . . . .	60
4.2.2.1	Vorgehensweise . . . . .	60
4.2.2.2	Messung . . . . .	60
4.2.2.3	Analyse der Messergebnisse . . . . .	62
4.2.3	Ziegelscherbe . . . . .	66
4.2.3.1	Biegebalken . . . . .	66
4.2.3.2	Kirchhoff'sche Platte - frei gelagert . . . . .	69
4.2.3.3	Kirchhoff'sche Platte - gelenkig gelagert . . . . .	71
4.2.4	Einmassenschwinger - Mineralwolle . . . . .	73
4.3	Bestimmung der Körperschall-Nachhallzeit . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Berechnung der notwendigen Modellparamter</b>	<b>78</b>
5.1	Analyse isolierter Effekte: Biegewellenerscheinungen in Stäben und Platten . . . . .	79
5.1.1	Biegebalken . . . . .	79
5.1.2	Kirchhoff'sche Platte - frei gelagert . . . . .	80
5.1.3	Kirchhoff'sche Platte - gelenkig gelagert . . . . .	81
5.2	Analyse isolierter Effekte: Einmassenschwinger . . . . .	83
5.3	Berechnung der Strukturdämpfung . . . . .	84

<b>III</b>	<b>Verifizierung und Validierung</b>	<b>87</b>
6	Verifizierung des Berechnungsmodells	88
7	Validierung der numerischen Simulationen	89
7.1	Lage der Eigenfrequenzen - Prüfkörper ohne Mineralwolle . . . . .	89
7.2	Lage der Eigenfrequenzen - Prüfkörper mit Mineralwolle . . . . .	92
<b>IV</b>	<b>Anwendung</b>	<b>94</b>
8	Interpretation der Schwingungsformen	95
8.1	Vorgehensweise . . . . .	95
8.2	Grenzen der Methode . . . . .	98
9	Berechnung des Schalldämm-Maßes einer Wandstruktur	100
9.1	Vorgehensweise . . . . .	100
9.2	Alternative Methoden . . . . .	104
9.3	Zusammenfassung . . . . .	104
<b>V</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>105</b>
10	Zusammenfassung	106
11	Ausblick	109
<b>VI</b>	<b>Anhang</b>	<b>110</b>
<b>A</b>	<b>Details zu den Materialdaten aus Datenblättern</b>	<b>111</b>
<b>B</b>	<b>Berechnungen und Auswertungen zu den Kapiteln</b>	<b>114</b>
B.1	Kapitel 3.3.2: Ermittlung der Abmessungen des Prüfkörpers . . . . .	114
B.2	Kapitel 3.5: Vernetzung - Mindestanzahl an Freiheitsgraden . . . . .	115
B.3	Kapitel 4.1: Berechnung der Rohdichte von Ziegelscherbe und Mineralwolle . . . . .	115
B.4	Kapitel 4.2.3.1: Massenverhältnis von Aufnehmer und Prüfkörper - Balken . . . . .	117

B.5	Kapitel 4.2.3.3: Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den ermittelten Moden einer allseitig gelenkig gelagerten Ziegelscherbenplatte . . . . .	118
B.6	Kapitel 5.2: Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den ermittelten Resonanzfrequenzen verschiedener SDOF-Systeme . . . . .	119
<b>C</b>	<b>Details zu Körperschall-Nachhallzeit und Verlustfaktor</b>	<b>120</b>
<b>D</b>	<b>Die Moden im Detail: Modenformen ohne Mineralwolle</b>	<b>123</b>
D.1	Mode #1 . . . . .	124
D.2	Mode #2 . . . . .	125
D.3	Mode #3 . . . . .	126
D.4	Mode #4 . . . . .	127
D.5	Mode #5 . . . . .	128
D.6	Mode #6 . . . . .	129
D.7	Mode #7 . . . . .	130
<b>E</b>	<b>Daten des virtuellen Prüfstands und der Prüfkörper</b>	<b>131</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>131</b>

Teil I

**Einführung**

# Kapitel 1

## Einleitung

### 1.1 Motivation

Messtechnische Untersuchungen als Basis für Parameterstudien in Forschung und Entwicklung verschiedenster Produkte erfordern besonders im Bereich der Bauakustik oftmals hohe zeitliche und finanzielle Ressourcen, da dabei in der Regel ein iterativer Prozess zu beschreiten ist, welcher mit sehr langwierigen und aufwendigen Messaufbauten verbunden ist. Aufgrund der Komplexität der Strukturen und der Fülle an Randbedingungen stoßen rein analytische Behandlungen der Gesamtsysteme hierbei sehr schnell an die Grenzen der Durchführbarkeit.

Eine effektive Ergänzung können Berechnungsmodelle auf Basis numerischer Lösungsmethoden darstellen, da deren Integration ein erhebliches zeitliches und finanzielles Einsparungspotential in allen Phasen des Entwicklungsprozesses darstellen kann.

Die Anwendung der Finite-Elemente-Methode (*FEM*) ist in der Bauakustik in den letzten Jahren stark gestiegen, da entsprechende Problemstellungen besonders im tieffrequenten Bereich anzutreffen sind und hierbei diese Methode im Vergleich zu alternativen Verfahren oftmals eindeutigere Ergebnisse liefert.

Um eine korrekte Implementierung und nachvollziehbare Ergebnisse zu gewährleisten, wird ein vertieftes Verständnis des Schwingungsverhaltens der Struktur vorausgesetzt. Die Verbindung von analytischen Methoden mit experimentell ermittelten Lösungen ermöglicht es, die notwendigen

physikalischen Randbedingungen zu ermitteln, um das Modell der gestellten Aufgabe entsprechend an die Realität anzupassen. Folgedessen wird eine Vorhersage der Auswirkungen von Veränderungen an der Struktur des Aufbaus ermöglicht, wodurch ein Großteil des Optimierungsprozesses in die numerische Simulation ausgelagert werden kann.

Unsicherheiten in Bezug auf die Materialdaten haben starken Einfluss auf die Simulationsergebnisse. Beinahe jeder Produktionsprozess unterliegt gezwungenermaßen Schwankungen zwischen den einzelnen Erzeugnissen, Abweichungen von Daten aus Datenblättern und den tatsächlichen Werten eines konkreten Prüfkörpers führen in weiterer Folge beispielsweise zu einer Verschiebung der Eigenschwingungen des Systems. Daher ist es für eine fallspezifische Analyse notwendig, diese Materialdaten vom entsprechenden Prüfkörper experimentell zu bestimmen.

In dieser Arbeit sollen nun die notwendigen Parameter über verschiedenste, an die Aufgabe spezifisch adaptierte Messmethoden ermittelt werden. Die Ergebnisse weiterführender Messungen können zur Validierung herangezogen werden. Diverse Methoden, welche sich besonders im Bereich des Maschinenbaus oder der Fahrzeugtechnik etabliert haben, werden auf die Anwendbarkeit in der Bauakustik geprüft und evaluiert.

## 1.2 Zielsetzung

Aus der zuvor erörterten Motivation ergibt sich die Zielsetzung dieser Arbeit: Es soll ein leistungsfähiges, effizientes und vertrauenswürdiges Berechnungsmodell als Basis für die Analyse und Optimierung eines beispielhaft gewählten Produktes bereitgestellt werden, wobei die Optimierung des Produktes selbst aufgrund des Umfangs und der Komplexität nicht mehr Bestandteil dieser Arbeit ist.

## 1.3 Gliederung der Arbeit

Nach einer theoretischen Einführung in die Thematik im ersten Teil der Arbeit werden im zweiten Teil verschiedene Vorgehensweisen und Lösungsmethoden für die Implementierung eines konkreten Prüfkörpers erarbeitet und evaluiert. Bereits hier wird ein erstes, vertieftes Verständnis für das Strukturverhalten des Prüfkörpers gewonnen, was eine notwendige Bedingung für eine korrekte Implementierung in der Software darstellt.



Kernpunkt des dritten Teils stellt die Validierung und Verifizierung des implementierten Modells dar. Hierfür werden ausgewählte Methoden aus den Fachbereichen Maschinenbau und Fahrzeugtechnik verwendet. Dabei gilt es, durch Vergleiche mit gewonnenen Messdaten die realitätsnahe Abbildung des Prüfkörpers in der FEM-Software zu bestätigen und verschiedene Vertrauensbereiche für die Ergebnisse zu definieren.

Im vierten Teil der Arbeit wird auf mögliche Anwendungsgebiete näher eingegangen, wobei das umgesetzte Modell für die Berechnungen und Analysen bauakustisch relevanter Aspekte herangezogen wird.

Abschließend werden im fünften Teil die aus dieser Arbeit entstandenen Schlussfolgerungen zusammenfassend nochmals erörtert. In einem Ausblick wird auf Fragestellungen, die sich im Zuge der Arbeit ergeben haben, näher eingegangen und es werden Themen zu möglichen Folgeprojekten definiert.

## 1.4 Verwendete Software

### COMSOL, Inc. „COMSOL Multiphysics“

Einer der Kernpunkte dieser Arbeit ist die Simulation mit der Finite-Elemente-Methode. „COMSOL Multiphysics“ stellt hierbei ein sehr umfangreiches und mächtiges Werkzeug dar. Basierend auf der Finite-Elemente-Methode eignet sich diese Software zur Simulation von Prozessen, die über Differentialgleichungen beschrieben werden können. Dabei besteht auch die Möglichkeit, gekoppelte Probleme zu bearbeiten. Ihre Stärken hat die Applikation besonders im Postprocessing und in der Visualisierung der Daten.

Die Software hieß ursprünglich „FEMLAB“ und wurde aus einer Toolbox für Mathworks „MATLAB“ entwickelt, wodurch die Verbindung zu MATLAB ein integraler Bestandteil des Systems ist.

Neben der Basissoftware erweitern viele Zusatzpakete die Simulationsmöglichkeiten. Es wurden zusätzlich das „Akustik-Modul“ und der Synchronisationslink „Live-Link for MATLAB“ genutzt.

Um den Lesefluss in dieser Arbeit zu erhalten, wird in jenen Bereichen, in denen diese Software verwendet wurde, diese mit dem Kürzel „[COMSOL]“ bezeichnet.

## Brüel&Kjaer „Labshop“

Die Software „Labshop“ von Brüel&Kjaer gehört zur Messtechnik-Reihe „PULSE“ des genannten Herstellers. Dieses Produkt kann in vielen Anwendungsbereichen der Messtechnik genutzt werden, in dieser Arbeit wurde es vorrangig für schwingungsmesstechnische Untersuchungen verwendet. Es bietet die Möglichkeit, individuelle, auf die jeweilige Anwendung zugeschnittene Messtemplates zu programmieren und im Laufe der Messung zu modifizieren. Ihre Stärken hat die Applikation besonders in Bezug auf die umfangreichen Möglichkeiten bezüglich Signalverarbeitung und -analyse.

Bereiche, in denen die Software genutzt wurden, werden in dieser Arbeit mit „[LABSHOP]“ bezeichnet.

## Mathworks „MATLAB“

Die Software Mathworks „MATLAB“ stellt eine sehr umfangreiche Lösung zur Bearbeitung von Daten dar. Diese werden in Matrizenform verarbeitet, dadurch können einzelne Rechenoperationen sehr schnell auf die gesamten Daten ausgeführt werden, unabhängig von der Datenmenge. Weiters sind die sehr umfangreichen Zusatzpakete zu nennen (auch „Toolboxes“ genannt), in denen je nach Anwendungsart spezielle Berechnungsalgorithmen zur Analyse implementiert sind. Diese können auch durch Lösungen von Drittanbietern erweitert werden. In dieser Arbeit wurde beispielsweise die „ITA-Toolbox“ der Technischen Universität Aachen [1] miteinbezogen, welche Erweiterungen in den verschiedensten Bereichen der Akustik bietet.

Bereiche, in denen diese Software genutzt wurde, werden in dieser Arbeit mit „[MATLAB]“ bezeichnet. Im Allgemeinen wurde die Applikation sehr vielseitig genutzt. Einerseits diente sie dem Datentransfer und Analyse von in [LABSHOP] gemessenen Daten. Andererseits wurde sie zur Erweiterung der Möglichkeiten von [COMSOL] in Bezug auf Postprocessing und Visualisierung der Simulationsdaten genutzt. Weiters konnten spezielle Lösungsabfolgen für [COMSOL] über einen Synchronisationslink erstellt werden, wodurch unter anderem die Erstellung einer Simulationsdatenbank ermöglicht wurde.

Alle in der Arbeit vorkommenden Diagramme wurden in [MATLAB] erstellt, um ein einheitliches Gesamtbild und passende Skalierungen zum Datenvergleich zu ermöglichen.

## Microsoft „EXCEL“

Microsoft „EXCEL“ stellt eine der bekanntesten Softwarelösungen in Bezug auf Tabellenkalkulation dar. Die Applikation wurde in dieser Arbeit vorrangig für Basis-Rechenoperationen nicht allzu großer Datenmengen genutzt. Dabei ermöglichte die übersichtliche Darstellung und die vergleichsweise einfache Programmierung der Berechnungsalgorithmen eine effiziente und schnelle Arbeitsweise.

Weiters wurde die Software als Simulationsdatenbank genutzt, wo Daten aus [COMSOL] direkt oder über [MATLAB] einbezogen wurden. Dies ermöglichte beispielsweise Auswirkungen der Veränderung von Eingangsparametern wie Materialdaten zu analysieren und frühzeitig Tendenzen zu erkennen.

Bereiche, in denen die Software genutzt wurde, werden in dieser Arbeit mit „[EXCEL]“ bezeichnet.

# Kapitel 2

## Grundlagen

### 2.1 Die Finite-Elemente-Methode

Eine Analyse von physikalischen Systemen kann auf verschiedenste Weise erfolgen. Klar definierte Randbedingungen und geometrisch einfache Systeme können über analytische Zusammenhänge beschrieben werden. Vielfach stößt man jedoch auf sehr komplexe Systeme, deren Gesamtverhalten oftmals nicht in einem einzelnen Schritt erfasst werden kann. Diese können dann durch Modelle beschrieben werden, welche die Geometrien wiedergeben und in einzelne Domänen aufgeteilt werden. Dabei entspricht eine Domäne einem mehrdimensionalem, zusammenhängenden Teilgebiet des Modells, welche einem bestimmten Domänen-Typ zugeordnet wird. Die Typen unterscheiden sich dadurch, dass jeweils unterschiedliche Differentialgleichungen und Randbedingungen zur mathematischen Beschreibung herangezogen werden. Weiters haben die Differentialgleichungen verschiedene, abhängige Variablen [28, S.149][22, S.39].

Die Elemente werden zahlreichen Element-Familien zugeordnet, welche sich durch die Dimension, den Typ und die Anzahl der Ecken ihres jeweiligen Finiten Elements, welches sie repräsentieren, voneinander unterscheiden. Für akustische Domänen, in denen Frequenzen im Bereich des Hörschalls<sup>1</sup> analysiert werden, werden vorrangig so genannte *Lagrange-Elemente*<sup>2</sup> verwendet [22, S.40] [28, S.152]. Nähere Details zu den Elementfamilien sind unter [22, S.40-51] zu finden.

---

<sup>1</sup>Frequenzen im Bereich von 16[Hz] bis 20[kHz]

<sup>2</sup>Dies sind Kontinuums-Elemente, in denen eine Lagrange-Interpolation verwendet wird.

### 2.1.1 Vernetzung

Der Begriff *Vernetzung* beschreibt die Zerlegung des Modells in Finite Elemente. Für eine *exakte* mathematische Beschreibung müsste hierzu das Modell in *infinitesimal* kleine Elemente bzw. Punkte unterteilt werden. Werden die Differentialgleichungen von einem Computer gelöst, ergibt sich jedoch das Problem, dass dieser nur über eine endliche Rechenleistung und Speicherkapazität verfügt und somit die Gleichungen nicht in allen unendlich vielen Punkten gelöst werden können. Aus diesem Grund wird das Modell *diskretisiert*.

*Diskretisierung* bedeutet hierbei, dass die Geometrie des Modells in endlich viele, endlich kleine Elemente - sogenannte *finite Elemente* - zerlegt wird, welche eine diskrete Anzahl an Knoten<sup>3</sup> aufweisen. Je nach Dimension weist ein Element eine diskrete Anzahl an *Knoten* auf, welche *infinitesimal* kleine Punkte darstellen und in denen die entsprechenden Differentialgleichungen gelöst werden. Die *Freiheitsgrade* entsprechen dabei den physikalischen Variablen in den Knoten. Es werden aber auch die Differentialgleichungen und die Randbedingungen diskretisiert. Dabei werden sie umgeformt, sodass die resultierenden Gleichungen in endlich vielen Schritten und mit dem endlich großen Hauptspeicher des Rechners gelöst werden können [22, S.39-41].

Nähere Details zur Vernetzung und zu den physikalischen Variablen sind beispielsweise [26], [22] und [28] zu entnehmen.

### 2.1.2 Analysearten

In den folgenden Unterkapiteln werden kurz die in dieser Arbeit vorkommenden Analysearten vorgestellt. Für eine detaillierte Darstellung und Zusammenführung der zugrundeliegenden Differentialgleichungen von mechanischen und akustischen Domänen wird auf die sehr umfangreiche und ausgezeichnete Arbeit [22] verwiesen.

#### 2.1.2.1 Frequenzbereichsanalyse

Im Zuge einer *Frequenzbereichsanalyse* können die zu analysierenden Frequenzen frei gewählt werden. Hierbei werden für jede Frequenz separat die FEM-Gleichungssysteme aller Domänen des Modells *simultan* gelöst, indem alle *Freiheitsgrade* berechnet werden. Aufgrund der Kopplung über die

---

<sup>3</sup>Räumliche Abtastpunkte

Randbedingungen ist es jedoch in der Regel nicht möglich, die FEM-Gleichungssysteme unabhängig voneinander zu lösen. Typische Algorithmen für die Berechnung der Freiheitsgrade sind beispielsweise in [30] angeführt [22, S.86].

### 2.1.2.2 Eigenfrequenzanalyse

Im Zuge einer *Eigenfrequenzanalyse* wird zuerst eine endliche Anzahl an Eigenwerten bzw. Eigenfrequenzen<sup>4</sup> berechnet. Anschließend werden die zugehörigen Eigenvektoren, welche die Freiheitsgrade beinhalten, ermittelt. Die einem Eigenwert  $\lambda_{eig}$  entsprechende Eigenfrequenz  $f_{eig}$  erhält man durch eine Umformung der nachfolgenden Gleichung [22, S.86]:

$$f_{eig} = \frac{+\sqrt{\lambda_{eig}}}{2\pi} \quad (2.1)$$

Die physikalische Definition einer Frequenz setzt voraus, dass diese positiv ist. Dieser Aspekt wird in Formel 2.1 durch das positive Vorzeichen angedeutet, wodurch nur die *positive* Quadratwurzel des Eigenwerts berechnet wird. Entsprechende Lösungsalgorithmen sind in [30] angeführt [22, S.86].

### 2.1.3 Postprocessing

Bei der Lösung des Modells wurden bereits die Werte der physikalischen Variablen an endlich vielen Punkten im Modell berechnet. Im Zuge des Postprocessing werden für eine detaillierte grafische Darstellung der Ergebnisse die Werte zwischen den Punkten interpoliert. Dies entspricht somit einer Approximation der Werte der physikalischen Größe, die an den entsprechenden Punkten bei einer unendlich feinen Netzauflösung betragen würden. Dabei bilden die resultierenden Grafiken die physikalische Realität deutlich besser ab, als wenn lediglich die in den Knoten des Netzes berechneten Werte herangezogen werden [22, S.87].

Wurden die physikalischen Variablen in allen gewünschten Punkten des Modells ermittelt, können in weiterer Folge die mit diesen Variablen zusammenhängenden physikalischen Größen berechnet werden. Auch bei diesen Größen wird eine interpolierte, grafische Ausgabe ermöglicht [22, S.87].

---

<sup>4</sup>Homogene Lösungen des Gleichungssystems

## 2.2 Mechanische und akustische Grundlagen

### 2.2.1 Elastizitätstheorie: Relationen zwischen Spannung und Dehnung

Wirkt beispielsweise am freien Ende eines einseitig eingespannten Stahlbandes eine *Kraft*  $F$ , so erfährt das Stahlband eine *Längenänderung*  $\Delta l = l_1 - l_0$  (siehe Abbildung 2.1) [26, S.23].

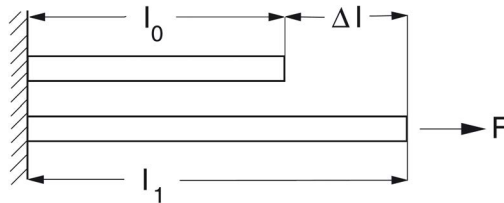


Abbildung 2.1: Längenänderung eines Stabes durch Krafteinwirkung [26, S.23]

Über das Verhältnis der resultierenden *Längenänderung*  $\Delta l$  und der *Ausgangslänge*  $l_0$  des Bandes ist die *Dehnung*  $\epsilon$  definiert [26, S.23]:

$$\epsilon = \frac{\Delta l}{l_0} \quad (2.2)$$

Die resultierende *Spannung*  $\sigma$  durch diesen Zugversuch wird in Abbildung 2.2 dargestellt: Bis zur sogenannten *Proportionalitätsgrenze*  $R_P$  besteht ein linearer Zusammenhang zwischen der *Dehnung*  $\epsilon$  und der *Spannung*  $\sigma$  [26, S.34].

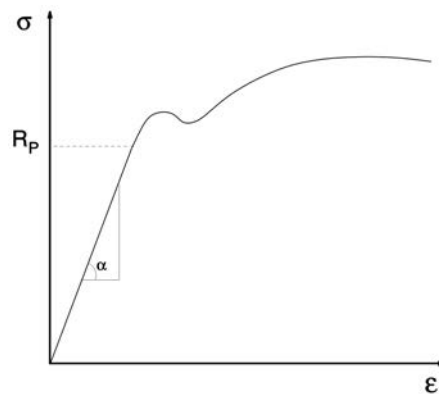


Abbildung 2.2: Spannungs-Dehnungs-Schaubild [26, S.34]

Dieser lineare Zusammenhang wird *Elastizitätsmodul*  $E$  (*Young's Modulus*) genannt [26, S.34]:

$$E = \tan \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} \quad \text{oder :} \quad \sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.3)$$

Dies entspricht somit dem Hooke'schen Federgesetz, deshalb werden derartige Materialien oft auch Hooke'sche Materialien genannt. Der *Elastizitätsmodul* ist somit sozusagen die Federkonstante des Werkstoffs [26, S.35].

Eine weitere Eigenschaft bei einem derartigen Zugversuch stellt die sogenannte *Querdehnung* oder *Querkontraktion* dar. Dies bedeutet, dass sich ein Zugstab oder -band quer zur Zugrichtung zusammenzieht. Wird beispielsweise ein kreisrunder Querschnitt mit einem Durchmesser  $d$  angenommen, dann ist die Querdehnung folgendermaßen definiert [26, S.35]:

$$\epsilon_q = \frac{\Delta d}{d} \quad (2.4)$$

In weiterer Folge kann das Verhältnis zwischen Querdehnung  $\epsilon_q$  und Längsdehnung  $\epsilon_x$  gebildet werden. Dieser Zusammenhang wird *Querkontraktionszahl* oder *Poissonzahl* (engl.: *Poisson's ratio*)  $\nu$  bezeichnet [26, S.35]:

$$\nu = -\frac{\epsilon_q}{\epsilon_x} \quad (2.5)$$

Für homogene Materialien ergibt sich hierbei ein Wertebereich von  $0 \leq \nu \leq 0,5$ . Als Referenzwert wird sehr oft Stahl mit einem Wert von  $\nu = 0,3[-]$  herangezogen [26, S.35].

Damit für ein Material diese Zusammenhänge gelten, müssen folgende Bedingungen erfüllt sein [26, S.35]:

1. **Linearität:** Werden die Spannungskomponenten um einen gewissen Betrag vergrößert, dann steigen die Dehnungskomponenten um den selben Betrag.
2. **Superposition:** Spannungen und Dehnungen können in den jeweiligen Koordinatenrichtungen überlagert bzw. addiert werden.
3. **Isotropie:** Das Material verhält sich in alle Koordinatenrichtungen gleich.



Ein weiterführende Einführung in die Elastizitätstheorie ist beispielsweise bei [26, Kap.3] zu finden.

## 2.2.2 Wellenformen

### 2.2.2.1 Wellen in Festkörpern

Sind starre Körper elastisch - also über Federn - miteinander verbunden, so können zwischen ihnen Schwingungen auftreten. Diese Schwingungen des mechanischen Systems können in weiterer Folge durch Systeme von Differentialgleichungen beschrieben werden. Über die Eigenwerte der Differentialgleichungen ist es möglich, die Eigenfrequenzen des System zu bestimmen. Dabei werden kinetische und potentielle Energie gespeichert und wechselweise ineinander umgewandelt [21, S.29][12, S.35] [28, S.120].

Sind die *infinitesimalen* Elemente eines Festkörpers derart miteinander elastisch verbunden, dass die beschreibenden Feldgrößen miteinander verkoppelt werden, können Wellenerscheinungen auftreten. Ein Zyklus bzw. eine Welle entsteht dadurch, dass die örtliche Ableitung der Feldgröße der zeitlichen Ableitung proportional ist. Für den dämpfungsfreien Fall erhält man die einfache Wellengleichung, Differentialgleichungen höherer Ordnung sind etwa bei der Biegewelle möglich [12, S.35] [28, S.120].

Prinzipiell sind im homogenen, festen Medium nur 2 Arten von Wellen, nämlich *Longitudinalwellen* und *Transversalwellen*, möglich.

*Longitudinalwellen* sind dadurch gekennzeichnet, dass sich die Materieteilchen in Richtung der Wellenausbreitung bewegen. Bei reinen *Transversalwellen* geschieht die Bewegung normal zur Ausbreitungsrichtung. Durch die auftretenden Schubdeformationen durch Schubspannungen wird die Form verändert, es erfolgt jedoch keine Volumensänderung. Die Ausbreitung von reinen Longitudinal- oder Transversalwellen ist nur in Medien möglich, deren Ausdehnungen sehr groß im Vergleich zur Wellenlänge sind. Ist diese Bedingung nicht erfüllt, treten andere Wellentypen auf, die durch die Superposition von diesen beiden Hauptwellenarten erklärt werden können [21, S.29-47][12, S.36] [28, S.120].

Die nachfolgende Abbildung 2.3 zeigt mehrere mögliche Wellentypen in Festkörpern. Für nähere Details zu den Definitionen wird auf [21] und [26] verwiesen.

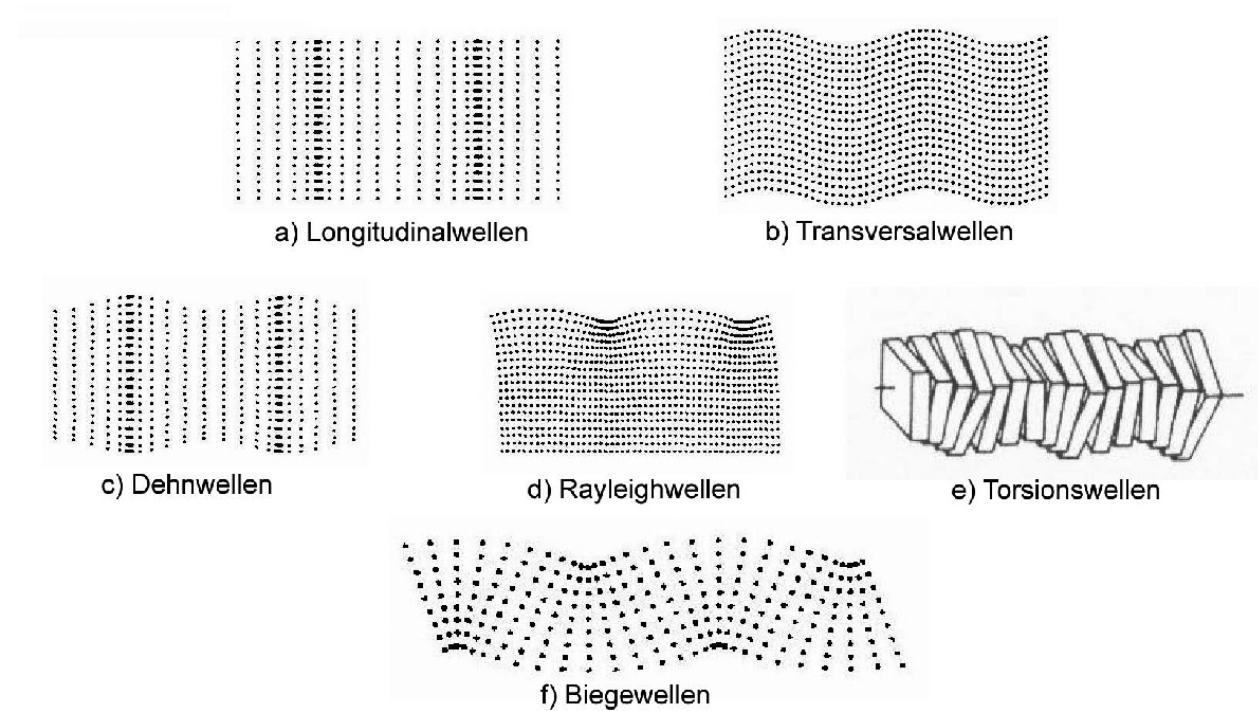


Abbildung 2.3: Schematische Darstellung der wichtigsten Wellenarten [12, S.37]

Für die Bauakustik sind in Zusammenhang mit der Luftschallübertragung insbesondere die sogenannten *Biegewellen* relevant, da sie in dünnen Platten entstehen können und aufgrund der transversalen Auslenkung der Oberfläche der Platte in der Lage sind, Schall in die umgebene Luft abzustrahlen. Aus diesem Grund wird näher auf diesen Wellentyp eingegangen, besonders in Bezug auf die Eigenschaften einer Ausbreitung in Platten [28, S.120].

### 2.2.2.2 Biegewellenausbreitung in Platten

Biegewellen sind eine Kombination aus longitudinalen und transversalen Wellen. Kennzeichnend für diesen Wellentyp ist die Eigenschaft einer *dispersiven*<sup>5</sup> Ausbreitungsgeschwindigkeit der Welle. Sie ist auch der einzige Wellentyp mit dieser Eigenschaft [28, S.121].

Biegewellen breiten sich vorrangig in dünnen Platten aus. Zur Beschreibung der Bewegung solcher dünnen Platten kann die *Kirchhoff'sche Plattengleichung* herangezogen werden. Dünne beschreibt

<sup>5</sup>Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist frequenzabhängig.

hierbei das Verhältnis der Plattendicke zu den restlichen Abmessungen. Nachfolgend ist die homogene Differentialgleichung der Kirchhoff'schen Platte angeführt [28, S.130], eine detaillierte Herleitung kann beispielsweise [21, S.47-57] entnommen werden:

$$\Delta\Delta\zeta + \frac{m'}{B} \cdot \frac{\partial^2\zeta}{\partial t^2} = 0 \quad (2.6)$$

$$\text{wobei : } B = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (2.7)$$

Dabei ist:

$\Delta$	der Laplace-Operator
$\zeta$	die Verschiebung normal zur Plattenoberfläche [m]
$m'$	die flächenbezogene Masse [kg/m <sup>3</sup> ]
$B$	die Biegesteifigkeit [Nm <sup>2</sup> ]
$E$	der Elastizitätsmodul [N/m <sup>2</sup> ]
$h$	die Plattendicke [m]
$\nu$	die Poissonzahl [-]

Über einen Ansatz harmonischer, ebener Wellen, welche sich auf der Platte ausbreiten, kann die Gleichung nach der Wellenzahl gelöst werden [28, S.130]:

$$k_B^2 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 m'}{B}} \quad (2.8)$$

Dabei ist:

$k_B$	die Biegewellenzahl [1/m]
$\omega$	die Kreisfrequenz [Hz]

Hierbei können 2 Fälle unterschieden werden: Für das positives Vorzeichen ergibt sich eine reelle, wellenartige Fernfeldlösung, welche eine Ausbreitung der Welle ermöglicht [28, S.130]:

$$(k_B)_{1,2} = \pm \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}} \quad (2.9)$$

Für das negative Vorzeichen ergibt sich eine imaginäre Nahfeldlösung [28, S.130]:

$$(k_B)_{3,4} = \pm j\sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{B}} \quad (2.10)$$

Es wurde bereits kurz erwähnt, dass die Ausbreitungsgeschwindigkeit der Biegewelle *dispersiv*, also frequenzabhängig ist. Diese Eigenschaft ist in der reellen Lösung ersichtlich [10, S.19] [28, S.131]:

$$\text{aus : } c_B = \frac{\omega}{k_B} \quad \text{folgt : } c_B = \sqrt{\omega} \cdot \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \quad (2.11)$$

Es gilt zu beachten, dass die angeführten Zusammenhänge nur für Frequenzen, bei denen die Biegewellenlänge groß im Vergleich zur Plattendicke ist, gelten. Bei höheren Frequenzen bzw. kleineren Biegewellenlängen verliert die Kirchhoff'sche Plattengleichung ihre Gültigkeit [28, S.131].

### 2.2.2.3 Wellen in Fluiden

Wellenerscheinungen können nicht nur in Festkörpern, sondern auch in reibungsbehafteten (viskosen) Fluiden<sup>6</sup> auftreten. Die hierbei entsprechenden Bewegungsgleichungen stellen in ihrer allgemeinsten Form die nichtlinearen *Navier-Stokes-Gleichungen* dar. Sie bilden jedoch die Grundlage der Strömungslehre, aber auch der Akustik, da sie vereinfacht und linearisiert werden können. Dabei wird der konvektive Teil der Beschleunigung<sup>7</sup> und die viskose Reibung vernachlässigt und das Gasgesetz linearisiert, wodurch sich die klassischen Feldgleichungen der reibungsfreien akustischen Fluide<sup>8</sup> ergeben [12, S.37].

Es können sich in reibungsfreien Fluiden aufgrund der Verschieblichkeit der Moleküle nur Wellen ausbreiten, die mit einer Volumenänderung verbunden sind. Diese Tatsache trifft somit nur auf die Longitudinalwelle zu [12, S.37].

Eine detaillierte Herleitung der Wellengleichung für das Fluid bzw. für Luft ist in beinahe jedem Fachbuch für Akustik enthalten<sup>9</sup>, daher wird auf deren Anführung an dieser Stelle verzichtet.

---

<sup>6</sup>Gase oder Flüssigkeiten

<sup>7</sup>Gleichströmung

<sup>8</sup>In erster Näherung die der Luft

<sup>9</sup>Beispielsweise in [15, S.36-38,S.170] oder [29, S.9-16]

Die Wellengleichung für den Schalldruck (*Helmholtz-Gleichung*) lautet [15, S.170]:

$$\Delta p + k^2 p = 0 \quad (2.12)$$

$$\text{wobei : } k = \frac{\omega}{c} \quad \text{bzw. : } \Delta = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

Dabei ist:

$\Delta$	der Laplace-Operator
$p$	der Schalldruck [ $Pa$ ]
$k$	die Wellenzahl [ $1/m$ ]
$\omega$	die Kreisfrequenz [ $Hz$ ]
$c$	die Ausbreitungsgeschwindigkeit (Schallgeschwindigkeit) [ $m/s$ ]

Ausgehend von dieser Gleichung sind verschiedene Lösungsansätze für die ebene Welle oder für die Kugelwelle möglich. Diese sind beispielsweise in [15, S.34 ff, S.66 ff] oder [29, S.17 ff] angeführt.

## 2.3 Modalanalyse

Die Analyse von schwingenden Strukturen stellt in der akustischen Messtechnik ein sehr wichtiges Gebiet dar. Diese Strukturschwingungen - auch Körperschall genannt - treten in vielen technischen Bereichen des täglichen Lebens auf, wie z.B. in Autos oder in Haushaltsgeräten wie bei der Waschmaschine. Im normalen Betrieb soll die Stabilität der Strukturen durch diese Schwingungen möglichst nicht beeinträchtigt werden. Trotz optimaler Planung können jedoch oftmals trotz ausreichender Stabilität unerwünschte Effekte wie z.B. Schallabstrahlung auftreten, welche in weiterer Folge als sehr störend empfunden werden können. Um in so einem Fall den Ursprung detektieren zu können, ist eine Untersuchung der schwingenden Struktur nötig. [19, S.499]

Neben der Untersuchung von Schwingungsproblemen können mit Hilfe der Modalanalyse Modelle entwickelt werden, welche bei reduziertem messtechnischen Aufwand umfangreiche Analysen ermöglichen. Hierbei werden zunächst die notwendigen Beschreibungsgrößen (oder auch Modalparameter) durch Messungen an der realen Struktur ermittelt. Die Modalanalyse ermöglicht neben der Analyse eines gesamten Systems auch die Untersuchung einzelner Komponenten, wodurch in weiterer

Folge Optimierungsmöglichkeiten bezüglich des Schwingungsverhaltens erarbeitet werden können. [19, S.500]

### 2.3.1 Schwingungen und Moden

Die Faszination des Phänomens von Eigenschwingungen und deren Analyse ist in der technischen Welt weit verbreitet. So schreiben beispielsweise Prof. Dr.-Ing. Michael Möser und Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Kropp in ihrem sehr bekannten Fachbuch "Körperschall" [21, S.277, Abs. 2]:

"Eine weitere sehr wesentliche Eigenschaft von endlichen Platten, Schalen etc. ist - genauso wie bei Stäben - das Auftreten der zu den Eigenfrequenzen gehörenden Eigenschwingungsformen (Moden), in der Mathematik oft Eigenfunktionen genannt. Wie bereits die klassischen Untersuchungen von Chladni zeigten, können diese Eigenschwingungsformen sehr kompliziert sein und zu Bildern von geradezu faszinierender Schönheit führen."

Die Eigenschwingungen eines schwingfähigen Systems werden durch ihre Eigenfrequenz und der Eigenschwingungsform (oder auch *Mode*, *math.: Eigenfunktion*) definiert. Letzteres beschreibt somit das resultierende Schwingungsmuster. Wird nun das System mit einer Frequenz angeregt, welche exakt solch einer Eigenfrequenz entspricht, spricht man von einer Resonanzfrequenz, bei der sehr hohe Amplituden entstehen können.

Ein sehr wichtiges Kriterium bei Eigenfunktionen stellt die Orthogonalität dar. Dies bedeutet, dass die Moden voneinander unabhängig sind [19, S.500]:

$$\int_S m'' \psi_{(q)}(x, y) \psi_{(r)}(x, y) dx dy = 0 \quad \forall q \neq r \quad (2.13)$$

Dabei ist:

$m''$  die ortsabhängige Flächenmasse [ $kg/m^2$ ]  
 $\psi_{(r)}$  die Eigenfunktion [—]

Dieses Annahme ist jedoch nur bei abgeschlossenen Systemen möglich, was bei einer Begrenzung mit ideal freien oder starren Rändern der Fall ist. Sind mehrere Systeme miteinander verbunden, entstehen viele komplexe Teilsysteme. Die Modalanalyse ist hierbei weiterhin anwendbar, jedoch mit erheblich höherem Aufwand.

Sind die Eigenschwingungen eines Systems bekannt, lässt sich in weiterer Folge das stationäre Schwingungsverhalten durch Superposition (Überlagerung) dieser Moden beschreiben [19, S.501]:

$$\underline{\xi}(x, y) = \sum_{r=1}^{\infty} \hat{\underline{\xi}}_{(r)}(x, y) \psi_{(r)}(x, y) \quad (2.14)$$

Dabei ist:

$\underline{\xi}$  die komplexe Auslenkung  $[m]$

Aus dem Entwicklungssatz (2.13) lässt sich ableiten, dass sich das Schwingungsverhalten eines Systems bei einer beliebigen Anregung aus den entsprechenden Eigenfrequenzen und Eigenfunktionen beschreiben lässt. Analog zur Fouriertransformation kann man somit die Modalanalyse auch als „Modaltransformation“ bezeichnen. Die Art der mathematische Beschreibung folgt in Kapitel 2.3.4 [19, S.500,501].

### 2.3.2 Systemtechnische Kriterien

Bei der Modalanalyse wird grundsätzlich ein lineares, zeitinvariantes System vorausgesetzt. In der Akustik ist dies zumeist gegeben. Folgende Annahmen können somit getroffen werden [19, S.501/502]:

**Superpositionsprinzip:** Das Prinzip der Superposition besagt, dass bei einer gleichzeitigen Erregung mit mehreren Signalen die Antwort des Systems gleich der Summe der Antworten ist, die jedes einzelne Signal hervorrufen würde.

**Additivität:** Eine Veränderung der Eingangskraft um den Faktor  $\alpha$  bewirkt eine Veränderung der Antwort des Systems mit dem Faktor  $\alpha$ .

**Reziprozität:** Aufgrund der Annahme von Linearität ist es möglich, die Orte von Anregung und Antwort zu vertauschen, wobei das Übertragungsverhalten des Systems nicht verändert wird.

**Kausalität:** Es entsteht keine Systemantwort ohne Erregersignal. Dies gilt auch vor dem Anliegen eines entsprechenden Erregersignals.

**Stabilität:** Wird das Erregersignal gestoppt, klingen die Schwingungen kontinuierlich ab. Somit ist ein Aufschaukeln des Systems nicht möglich. Hierbei bestimmt die Dämpfung des Systems die Dauer des Abklingvorgangs.

**Zeitinvarianz:** Die dynamischen Eigenschaften des Systems verändern sich nicht (z.B. während experimenteller Messungen).

### 2.3.3 Übertragungsverhalten einer Struktur

Eine Anregung im Punkt A eines linearen, zeitinvarianten Systems ruft ein entsprechendes Schwingungsverhalten hervor. Die resultierende Systemantwort im Punkt B hängt dabei von den entsprechenden Eigenschaften und Materialien des Systems ab. Zur exakten Bestimmung des Schwingungsverhaltens sind daher drei Größen notwendig [19, S.502]:

- die Anregung im Punkt A (zumeist die entsprechende Kraft),
- die Systemeigenschaften zwischen den beiden Punkten,
- und das Antwortverhalten im Punkt B (Beschleunigung, Schnelle, Auslenkung).

Mit Hilfe von Kraft- und Beschleunigungsaufnehmern wird die Messung der eingeleiteten Kraft und der resultierenden Beschleunigung ermöglicht. Mit diesen gewonnenen Daten lassen sich in weiterer Folge die Übertragungseigenschaften des Systems berechnen. Dabei werden Frequenzgänge ermittelt, für die gilt: [19, S.502]

$$\text{Systemeigenschaften} = \frac{\text{Antwortverhalten}}{\text{Anregung}}$$



Das Verhältnis von Antwort zu Anregung des Systems wird im Frequenzbereich auch Übertragungsfunktion (engl.: „Frequency Response“ - FRF) bezeichnet. Bei linearen Systemen ändern sich diese Funktionen nur mit der Frequenz, nicht jedoch mit der Stärke der Anregung. Als Übertragungsfunktionen können folgende Verhältnisse von Kraft und Bewegungsgrößen herangezogen werden: [19, S.502,S.503]

- dynamische Nachgiebigkeit (*engl.*: „Receptance“)

$$\underline{n}_{dyn}(\omega) = \frac{\underline{\xi}(\omega)}{\underline{F}(\omega)} \quad [m/N]$$

- Admittanz (*engl.*: „Admittance“) oder Beweglichkeit (*engl.*: „Mobility“)

$$\underline{Y}(\omega) = \frac{\underline{v}(\omega)}{\underline{F}(\omega)} \quad [m/Ns]$$

- Trägheit (*engl.*: „Intertance“ / „Accelerance“)

$$\underline{a}_{cc}(\omega) = \frac{\underline{a}(\omega)}{\underline{F}(\omega)} \quad [m/Ns^2]$$

Dabei ist:

$\underline{\xi}(\omega)$	die komplexe Auslenkung [m]
$\underline{F}(\omega)$	die komplexe Kraft [N]
$\underline{v}(\omega)$	die komplexe Schnelle [m/s]
$\underline{a}(\omega)$	die komplexe Beschleunigung [m/s <sup>2</sup> ]

Eine Übertragungsfunktion stellt somit die mathematische Beschreibung der schwingenden Struktur dar. Die Ursache für das entsprechende dynamische Verhalten ist jedoch im Vorfeld unklar, wodurch die Notwendigkeit der Erstellung eines passenden Modells besteht. Hierbei unterscheidet man vorrangig zwischen analytischen Modellen und Modalmodellen. Bei komplexen Strukturen sind sehr oft Vereinfachungen vorzunehmen, da die Generierung eines Modells mit allen Details zu zeitaufwendig oder gar unmöglich ist [19, S.502/503].

### 2.3.4 Analytische Modelle

Im Allgemeinen kann ein schwingendes System als spezielle Kombination von Massen, Federn und Dämpfern aufgefasst werden. Dabei ergeben sich oft sehr komplexe Verteilungen dieser Elemente, wodurch deren Trennung sehr schwierig ist. Abbildung 2.4 zeigt beispielhaft ein derartiges Modell:

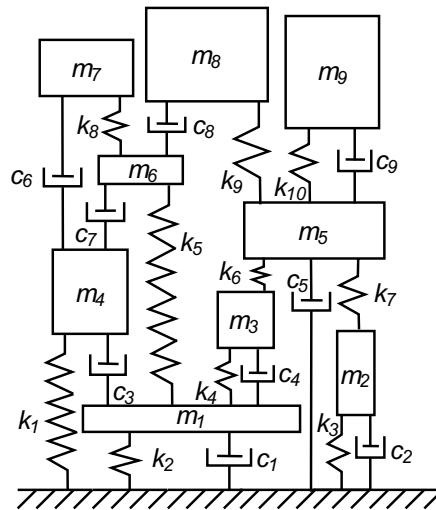


Abbildung 2.4: Komplexes analytisches Modell bestehend aus Massen  $m_m$ , Federn  $k_m$  und Dämpfern  $c_m$  [19, S.504]

Die mathematische Beschreibung derartiger analytischer Modelle erfolgt mittels Bewegungsgleichungen und dazu passenden Anfangs- und Randbedingungen und entspricht mehreren, miteinander verknüpften Differentialgleichungen, welche das Systemverhalten beschreiben. Durch diese Vorgehensweise ist es möglich, die entsprechenden Übertragungsfunktion des Systems und somit das dynamische Verhalten zu berechnen [19, S.503/504].

#### Einmassenschwinger (SDOF - System)

Der Einmassenschwinger stellt das einfachste schwingende System dar. Dieser wird oftmals auch *SDOF-System* genannt (engl.: *Single Degree Of Freedom*). Die Grundprinzipien von Schwingungen sind hierbei einfach und verständlich darstellbar. Es gilt zu beachten, dass dieses System in der Realität nur sehr selten auftritt. Jedoch bildet der Einmassenschwinger die Grundlage für Systeme mit mehr als einem Freiheitsgrad.

Das System besteht lediglich aus einer Masse  $m$ , einer Feder mit der Federsteifigkeit  $k$  und einem Dämpfer mit der Reibkonstante  $c$ . Bewegt hierbei eine angreifende Kraft  $F$  die Masse aus ihrer Ruhelage, kann sich diese lediglich in eine Richtung bewegen und es treten keine Momente auf. Somit hat das gesamte System nur einen Freiheitsgrad. Folgende Grafik zeigt ein derartiges System:

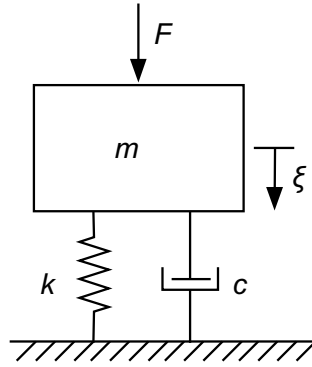


Abbildung 2.5: Einmassenschwinger (SDOF-System) [19, S.506]

Wird eine viskose Dämpfung vorausgesetzt, erhält man folgende Differentialgleichung für das Schwingungsverhalten des Systems [19, S.506]

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = \underline{F} \quad (2.15)$$

Über die homogene Differentialgleichung ( $\underline{F} = 0$ ) lassen sich in weiterer Folge mit Hilfe der Laplace-Transformation<sup>10</sup> und dem Ansatz  $\psi e^{\underline{s}t}$  die Eigenwerte des Systems bestimmen: [19, S.506]

$$(m\underline{s}^2 + c\underline{s} + k)\psi = 0 \quad \underline{s} \in \mathbb{C} \quad (2.16)$$

Dabei entsprechen die nichttrivialen Lösungen für  $\underline{s}$  den Eigenwerten zum Eigenvektor  $\psi$ . Sie sind somit nur noch von den systemeigenen Parametern abhängig. Man unterscheidet drei verschiedene Fälle, welche von der Dämpfung  $c$  abhängen [19, S.506]:

<sup>10</sup>  $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$  mit  $s \in \mathbb{C}$   
 $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{(2\pi j)} \int_C e^{st} F(s) ds$

- $c = c_k = 2\sqrt{mk}$ : kritische Dämpfung oder aperiodischer Grenzfall  $\rightarrow$  beide Eigenwerte sind gleich

$$\text{aus : } c = c_k = 2\sqrt{mk} \quad \text{folgt : } \underline{s} = -\frac{c}{2m} \quad (2.17)$$

- $c \geq 2\sqrt{mk}$ : exponentielles (aperiodisches) Abklingen der Auslenkung  $\rightarrow$  reele Eigenwerte

$$\text{aus : } c \geq 2\sqrt{mk} \quad \text{folgt : } \underline{s} \in \mathbb{R} \quad (2.18)$$

- $c < 2\sqrt{mk}$ : unkritisch gedämpftes System  $\rightarrow$  konjugiert komplexe Eigenwerte

$$\text{aus : } c < 2\sqrt{mk} \quad \text{folgt : } \underline{s} = -\frac{c}{2m} + j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta + j\omega_d \quad (2.19)$$

$$\text{bzw. : } \underline{s}^* = -\frac{c}{2m} - j\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = -\delta - j\omega_d \quad (2.20)$$

Dabei ist:

- $\delta$  die modale Dämpfung [-]
- $\omega_d$  die Modalfrequenz [Hz]

In Formel 2.19 ist ersichtlich, dass die modale Dämpfung  $\delta$  durch den Realteil von  $\underline{s}$  definiert ist:

$$\delta = -\text{Re}\{\underline{s}\} = \frac{c}{2m} \quad (2.21)$$

Die Modalfrequenz  $\omega_d$  entspricht dabei dem Imaginärteil und kann folgendermaßen ermittelt werden:

$$\omega = \text{Im}\{\underline{s}\} = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \quad (2.22)$$

Aus dieser Beziehung kann nun die Eigenfrequenz des ungedämpften Systems bestimmt werden, welche sich aus folgendem Zusammenhang ergibt:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.23)$$

Für schwach gedämpfte Systeme ( $c \ll c_k$ ) kann somit als Näherung  $\omega_d \approx \omega_0$  angenommen werden.

Abbildung 2.6 zeigt eine gedämpfte Schwingung eines Einmassenschwingers im Zeitbereich: Die Schwingung selbst wird hierbei durch  $\xi = \psi e^{-\delta t}$  beschrieben. Die Funktion  $\psi e^{-\delta t}$  stellt die Einhüllende der abklingenden Schwingung dar.

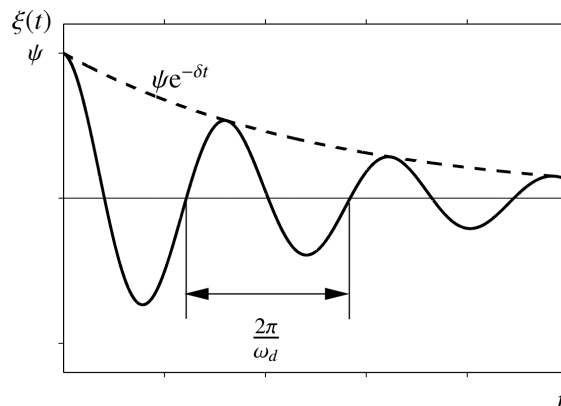


Abbildung 2.6: Schwingung und Dämpfung eines SDOF-Systems im Zeitbereich [19, S.507]

Die Lösungen der homogenen Differentialgleichungen eignen sich somit zur Bestimmung der grundlegenden Systemparameter.

Um nun die stationäre Lösung zu ermitteln, wird eine harmonische Kraftanregung des linearen

Systems mit  $\underline{F}(\omega, t) = \hat{\underline{F}}(\omega)e^{j\omega t}$  angenommen. Dabei weist die Antwort die gleiche Frequenz wie die Anregung auf und hat die Form  $\underline{\xi}(\omega, t) = \hat{\underline{\xi}}(\omega)e^{j\omega t}$ . Aus Formel 2.15 folgt somit: [19, S.507]

$$(-\omega^2 m + j\omega c + k)\hat{\underline{\xi}}(\omega) = \hat{\underline{F}}(\omega) \quad (2.24)$$

Über das Verhältnis zwischen Anregung und Antwort eines linearen System (2.3.3) kann nun die Übertragungsfunktion  $\underline{H}(\omega)$  bestimmt werden: [19, S.507]

$$\underline{H}(\omega) = n_{dyn}(\omega) = \frac{\hat{\underline{\xi}}(\omega)}{\hat{\underline{F}}(\omega)} = \frac{1}{-\omega^2 m + j\omega c + k} \quad (2.25)$$

Daraus lassen sich zwei Fälle für das Übertragungsverhalten bei einzelnen Frequenzen  $\omega$  bezüglich der Eigenfrequenz  $\omega_d$  ableiten:

- $\omega \ll \omega_d \rightarrow \underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{k}$  : Die Steifigkeit  $k$  beeinflusst den Frequenzgang und somit das System am stärksten.
- $\omega \gg \omega_d \rightarrow \underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{(-\omega^2 m)}$  : Die Masse  $m$  bestimmt maßgeblich den Frequenzgang.

Durch Multiplikation vom Eingangsspektrum mit der bekannten Übertragungsfunktion im Frequenzbereich lässt sich nun das Ausgangsspektrum berechnen: [19, S.507]

$$\hat{\underline{\xi}}(\omega) = \underline{H}(\omega)\hat{\underline{F}}(\omega) \quad (2.26)$$

Beispielhaft werden in Abbildung 2.7 die Frequenzgänge eines SDOF-Systems für verschiedene Dämpfungsgrade  $D = \frac{\delta}{\omega_0}$  dargestellt. Auf der horizontalen Achse ist hierbei die dimensionslose Erregerfrequenz  $\eta = \frac{\omega}{\omega_0}$  aufgetragen. Die Übertragungsfunktion ergibt sich zu:

$$\underline{H}(\omega) = \underline{n}_{dyn}(\omega) = \frac{1}{k(-\eta^2 + 2j\eta D + 1)} \quad (2.27)$$

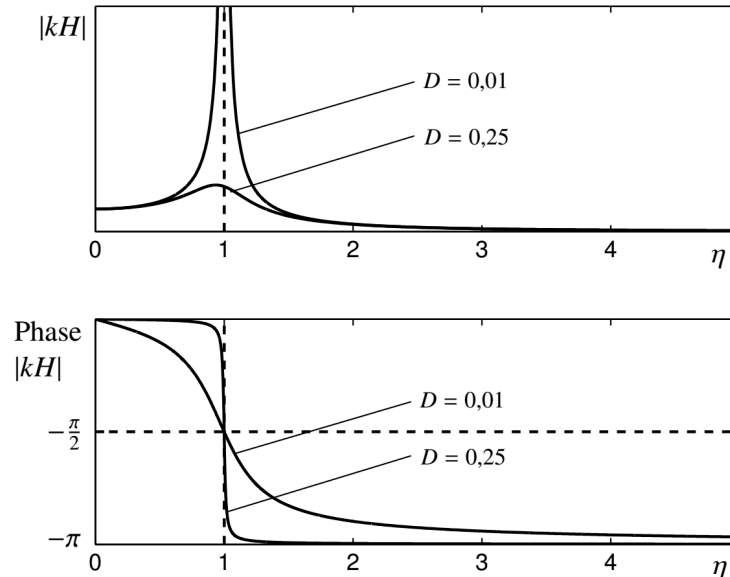


Abbildung 2.7: Amplitudenverlauf (oben) und Phasengang (unten) eines Einmassenschwingers bei verschiedenen Dämpfungsgraden  $D$  [19, S.508]

Hierbei kann man sehr schön erkennen, wie die Resonanzspitze mit abnehmender Dämpfung zunimmt. Dabei nähert sich die Phasenänderung einem plötzlichen Sprung um  $-\pi$  an.

Um ein analytisches Modell überprüfen zu können, wird es mit Messungen an realen Strukturen abgeglichen. Die entsprechende Vorgehensweise wird im nachfolgenden Kapitel erläutert.

### 2.3.5 Experimentelle Modalanalyse

Die experimentelle Modalanalyse dient zur Ermittlung des Schwingungsverhaltens einer realen, komplexen Struktur. Durch diese Methode werden weiterführende Analysen an einem entsprechenden Modalmodell ermöglicht. Die messtechnische Realisierung erfolgt hierbei über Methoden der Körperschallmesstechnik [19, S.517].

### 2.3.5.1 Lagerungsbedingungen

Die Lagerung stellt eine entscheidende Randbedingung bei der Untersuchung des Schwingungsverhaltens realer Prüfkörper dar. Realistische Randbedingungen ermöglichen hierbei Rückschlüsse auf das Verhalten in der tatsächlichen Einbausituation. Messungen im eingebauten Zustand werden zumeist als „in situ“ bezeichnet. [19, S.517]

Vielfach haben jedoch nichtlineare Effekte oder hohe Strukturdämpfungen im eingebauten Zustand starke Auswirkungen auf die Ergebnisse. In diesem Fall werden die Messungen unter Laborbedingungen durchgeführt. Dabei werden möglichst *ideale* Randbedingungen geschaffen. Dies hat weiters den Vorteil, dass die Ergebnisse einfacher mit analytischen Zusammenhängen verglichen werden können. Ideal starre und unbewegliche Randbedingungen sind hierbei zumeist jedoch sehr schwer umzusetzen. Aus diesem Grund werden vorwiegend annähernd ideal freie Randbedingungen geschaffen. Dies kann beispielsweise mit weich federnden Lagerungen wie weichen Spiralfedern oder mit Luft gefüllten Kissen realisiert werden. Es gilt jedoch zu beachten, dass die Federelemente so abgestimmt werden, dass die Masse-Feder-Resonanzen der Aufhängung weit unter dem interessierenden Frequenzbereich liegen. In jedem Fall muss über die Randbedingungen bzw. Lagerungsbedingungen individuell entschieden werden [19, S.518].

Infolge einer elastischen Lagerung mit einer ideal starren Masse als Referenz entsteht ein Einmassenschwinger (siehe auch Kapitel 2.3.4) mit einer bestimmten Resonanzkreisfrequenz  $\omega_0$ . Eine schwingungsmesstechnische Abkopplung vom Untergrund erfolgt oberhalb von  $\sqrt{2} \cdot \omega_0$ . Eine vollständige Entkopplung ist ab einer Kreisfrequenz von  $\omega_{min} \geq 10 \cdot \omega_0$  gegeben [23, 07B S.3/S.31].

Abbildung 2.8 zeigt die Durchlässigkeit für Schwingungen über den Einmassenschwinger: Eine starre Anbindung an den Untergrund ergäbe einen Wert von  $DI = 1[-]$ . Die Durchlässigkeit ist hierbei über folgenden Zusammenhang definiert [23, 07B, S.31]:

$$DI = \frac{\sqrt{1 + 4(2D\eta)^2}}{\sqrt{(1 - \eta^2)^2 + 4(2D\eta)^2}} \quad \text{wobei : } \eta = \frac{\omega}{\omega_0} \quad (2.28)$$



Dabei ist:

- $D$  die modale Dämpfung [-]  
 $\eta$  das Verhältnis der Kreisfrequenzen [-]  
 $\omega$  die entsprechende Kreisfrequenz [Hz]  
 $\omega_0$  die Resonanzkreisfrequenz [Hz]

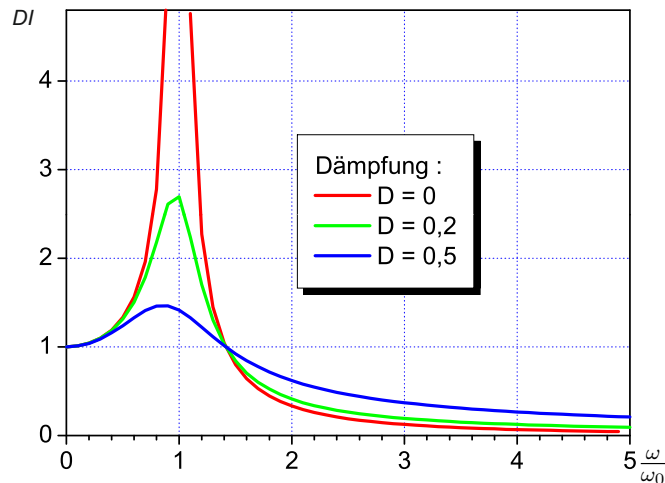


Abbildung 2.8: Durchlässigkeit  $DI$  mit elastischer Lagerung bei verschiedenen Dämpfungen

### 2.3.5.2 Auswahl der Messpunkte (Diskretisierung)

Die Diskretisierung stellt einen wichtigen Schritt bei der Durchführung der Messungen für die Modalanalyse dar und bezeichnet die Festlegung der einzelnen Messpunkte auf der Struktur. Hierbei gilt es, einige Aspekte zu beachten. Bei einer Verteilung im gleichen Abstand über die Struktur kann der Fall eintreten, dass die Messpunkte jeweils in den Knotenpunkten einer Mode liegen und somit eine Resonanz nicht erfasst wird. Bei komplexen Strukturen sollte beachtet werden, dass die Schwingungen jedes charakteristischen Strukturteils im Zuge der Messungen erfasst werden, um den ermittelten Resonanzspitzen eine entsprechende Schwingungsform zuzuordnen zu können.

Die notwendige Anzahl der Messpunkte hängt im Allgemeinen von der Geometrie der Struktur, wie auch von der Anzahl der Moden im interessierenden Frequenzbereich ab. Des Weiteren hängt die Anzahl von der notwendigen Genauigkeit der Messung ab. Für eine messtechnische Überprüfung von zuvor analytisch berechneten Modalfrequenzen reichen bereits wenige Messpunkte aus. Für die Erstellung eines komplexen Modalmodells sind jedoch deutlich mehr Messpunkte erforderlich, wodurch der Messaufwand rapide steigt.

### 2.3.5.3 Anregungsarten und Messungen der Übertragungsfunktion

Aufgrund des Reziprozitätsgesetzes (siehe auch Kapitel 2.3.2) können Anregungspunkt und Messpunkt vertauscht werden. Dieser Aspekt wird bei den beiden möglichen Anregungsarten *Shaker* und *Impulshammer* verdeutlicht. Wird ein *Shaker*<sup>11</sup> verwendet, wird die Struktur an nur einem Punkt angeregt, der Messpunkt „wandert“ über die Struktur. Beim *Impulshammer* hingegen erfolgt die (Kraft-)Anregung nacheinander an allen Messpunkten, wobei die Antworten an einem vorher ausgewählten Punkt in Form der Beschleunigungen gemessen werden. Diese Vorgehensweise verkürzt die Messdauer, da die Umplatzierung der Sensoren an den Messpunkten entfällt. Durch eine entsprechende Verarbeitung der Messsignale können die jeweiligen Übertragungsfunktionen wie bereits in Kapitel 2.3.3 beschrieben, ermittelt werden [19, S.519].

Da in dieser Arbeit vorwiegend mit einem *Impulshammer* gearbeitet wird, wird auch fachlich nur auf diesen näher eingegangen. Für Details zur Anregung mit einem *Shaker* wird auf [19] verwiesen.

**Anregung mit dem Impulshammer** Bei einem Impulshammer handelt es sich um ein Werkzeug, mit dem eine Struktur mit mechanischen Kraftimpulsen angeregt werden kann. Der Hammer, an dessen Aufschlagseite ein Kraftaufnehmer integriert ist, kann mit Schlagspitzen verschiedener Härte ausgestattet werden. Dieses Messgerät wird vorwiegend im Zuge von Strukturtests wie Modalanalysen, Resonanzbestimmungen oder der Ermittlung verschiedenster Strukturgrößen wie beispielsweise Impedanzen verwendet. Dabei wird die erregte Schwingungsantwort mit einem Beschleunigungssensor erfasst [19, S.493].

Die Hammermasse bestimmt die Amplitude und die Härte der Aufschlagspitze den Frequenzinhalt der eingeleiteten Kraft. Die Härte der Spitze definiert die Form des Impulses. Je weicher diese ausgeführt ist, desto kleiner und breiter ist der Impuls. Die nachfolgenden Abbildungen zeigen den Einfluss des verwendeten Materials [19, S.494].

---

<sup>11</sup>elektrodynamische Vibrationsvorrichtung

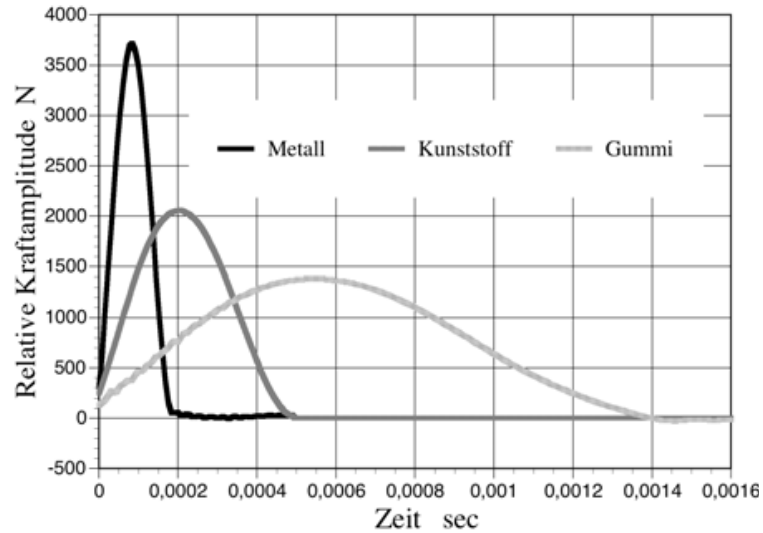


Abbildung 2.9: Einfluss der Härte der Aufschlagspitze auf Höhe und Form des Kraftimpulses [19, S.494]

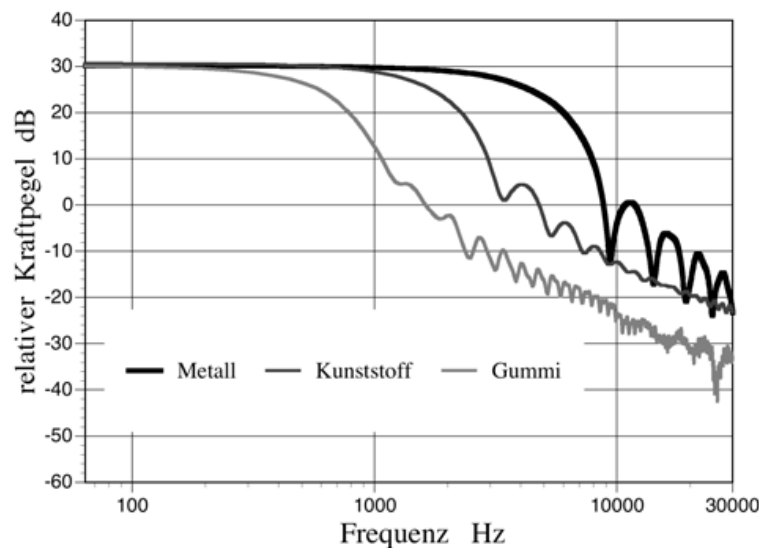


Abbildung 2.10: Einfluss der Härte der Aufschlagspitze auf den Frequenzbereich des anregenden Kraftimpulses [19, S.495]

**Ankopplungseinflüsse:** Neben den verwendeten Messgeräten spielt bei schwingungsmesstechnischen Untersuchungen auch die Ankopplung dieser Geräte an die Struktur eine große Rolle. Hierbei wird zwischen verschiedensten mechanischen und elektrischen Einflüsse, aber auch

Umgebungseinflüssen wie Temperatur oder Magnetfeldern unterschieden. Den maßgeblichsten Einfluss stellt die Art der Verbindung von Sensor und Messobjekt dar, daher wird nachfolgend nur auf diesen Aspekt näher eingegangen.

Eine mechanisch möglichst steife Befestigung des Sensors am Messobjekt ermöglicht die Messung hoher Frequenzen. Das durch die Kombination Messobjekt-Verbindungsmaterial-Sensor entstehende Masse-Feder-Masse-System weist eine Resonanzfrequenz auf, welche die Messung stark beeinflussen kann. Diese liegt höher, je steifer die Feder ist, und sollte bei den Messungen größer oder zumindest gleich jener der Sensoren sein (solide Schraubverbindung). Somit begrenzt die gewählte Montageart den nutzbaren Frequenzbereich, welcher in folgender Grafik bei Verwendung verschiedener Materialien dargestellt wird [19, S.459]:

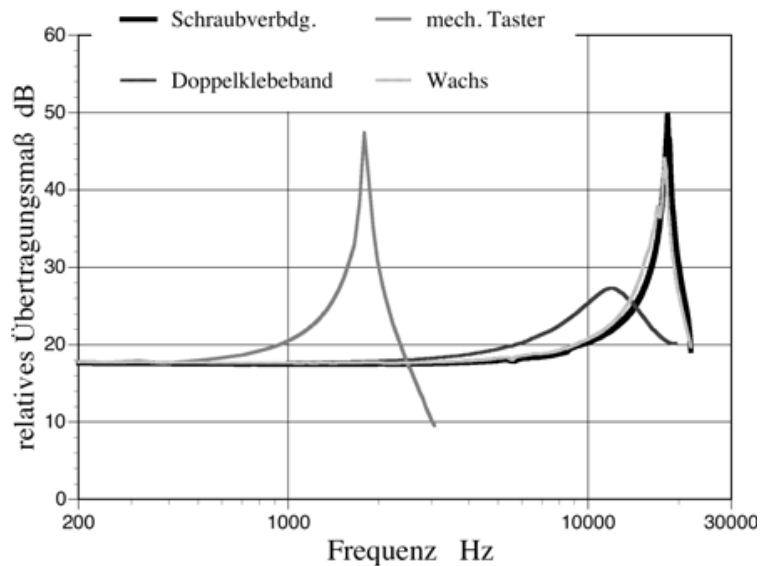


Abbildung 2.11: Einfluss verschiedener Arten der Ankopplung auf den nutzbaren Messfrequenzbereich [19, S.459]

## 2.4 Grundlagen zur Verifizierung und Validierung

Aufgrund der Diskretisierung von physikalischen Problemstellungen bei numerischen Simulationen muss man im Vorfeld davon ausgehen, dass die Endresultate fehlerbehaftet sind. Um vertrauenswürdige Ergebnisse und einen definierten Toleranzbereich zu erhalten, sind Fehlerkontrollen erforderlich. Hierbei ist zwischen den unterschiedlichsten Fehlerquellen zu unterscheiden, um die jeweils am besten geeignete Methode zur Fehlerkontrolle auswählen zu können [25].

Folgende mögliche Fehlerquellen werden hierbei unterschieden [25]:

### Modellierungsfehler

Die physikalische Problemstellung wird im Allgemeinen idealisiert. Durch Vereinfachungen wie z.B. Annahme von isotropen Materialgesetzen wird ein Fehler hervorgerufen.

### Diskretisierungsfehler

Durch die Überführung des kontinuierlichen mathematischen Modells in ein diskretes System wird ein sogenannter *Diskretisierungsfehler* erzeugt. In geometrischer Hinsicht betrifft dies die Güte der Beschreibung der Form durch die Elemente und die entsprechende Elementdichte. Auch die Wahl der Ansatzfunktionen bei (dynamischen) Strukturverformungen hat hierbei Auswirkungen. Zeitliche Diskretisierungen bei dynamischen Berechnungen (im Zeitbereich) können ebenso wie die Anzahl der miteinbezogenen Eigenmoden (im Frequenzbereich) einen Einfluss auf den Diskretisierungsfehler haben.

### Numerischer Fehler

Bei numerischen Berechnungen ist die Darstellungspräzision der Zahlen begrenzt. Aus den erforderlichen Rundungsoperationen folgt somit gezwungenermaßen ein Rundungsfehler.

## Parameterfehler

Der Parameterfehler resultiert aus den Unsicherheiten der Eingabeparameter (Material- und Geometrieparameter).

## Zusätzliche Fehlerquellen

Zusätzliche Fehlerquellen können durch fehlerhafte Programmierung (Quellcode-Eingabe / Programmerstellung) und durch Fehlinterpretation von Ergebnissen entstehen. Ersteres kann bei einer Verwendung von kommerziellen Programmen weitgehend ausgeschlossen werden. Letztere hängt sehr stark von der Komplexität der Problemstellung und dem vorhandenen Fachwissen ab.

Um die Ergebnisse der Berechnungen zu kontrollieren und die soeben genannte Fehlerquellen zu detektieren, wird die *Verifizierung* und die *Validierung* verwendet. *Verifizierung* beschreibt hierbei die Überprüfung der korrekten Wiedergabe des mathematischen Modells durch das numerische Modell und stellt somit ein geeignetes Mittel dar, um den Diskretisierungsfehler und den numerischen Fehler zu kontrollieren [25].

Um zu untersuchen, wie genau das mathematische Modell die reale (physikalische) Problemstellung repräsentiert, wird die *Validierung* verwendet. Hierbei können Modellierungs- und Parameterfehler kontrolliert werden, indem die Berechnungsergebnisse mit experimentell ermittelten Daten verglichen werden. Es gilt jedoch zu berücksichtigen, dass auch experimentelle Ergebnisse einen gewissen Messfehler beeinhalteten. Bei derartigen Vergleichen sollte daher der experimentelle Fehler abgeschätzt werden können um vertrauenswürdige Resultate zu erhalten [25].

Für detaillierte Beschreibungen und weiterführende Methoden wird auf [3], [11] und [8] verwiesen.

### 2.4.1 Verifizierung der numerischen Simulation

Als Beispiel zur Verifizierung wird die Biegeschwingung eines beidseitig gelenkig gelagerten Balkens herangezogen. Hierbei geht die analytische Lösung von einem schubstarren Balken (Euler-Bernoulli Balken) aus, wobei sich die Eigenkreisfrequenzen über folgenden mathematischen Zusammenhang ergeben [25, S.62]:

$$\omega_{i,A} = (i\pi)^2 \sqrt{\frac{B}{\rho AL^4}} \quad \text{mit : } \frac{B}{\rho AL^4} = 1 \quad \text{folgt : } \omega_{i,A} = (i\pi)^2 \quad (2.29)$$

Dabei ist:

$\omega_{i,A}$	die i-te Eigenkreisfrequenz (Analytisch) [Hz]
$B$	die Biegesteifigkeit [ $Nm^2$ ]
$\rho$	die Rohdichte [ $kg/m^3$ ]
$A$	die Fläche [ $m^2$ ]
$L$	die Länge [ $m$ ]

In Abbildung 2.12 wird das Konvergenzverhalten einer Eigenkreisfrequenz des Balkens gegenüber der analytischen Lösung gezeigt. Für die FEM-Berechnung werden die Ergebnisse unterschiedlicher Vorgehensweisen zur Erhöhung der Genauigkeit herangezogen. Die h-Version stellt hierbei die konventionelle Methode mit einer schrittweisen Netzverfeinerung dar. Dabei wurde die Anzahl der linearen Elemente ausschließlich in Längsrichtung des Balkens erhöht. Bei der p-Version werden die Auswirkungen einer schrittweisen Erhöhung der Polynomgrade in Richtung der Balkenlängsachse und der Balkenhöhe bei konstanter Netzdicke dargestellt. Die hp-Version zeigt eine Kombination von Netzverfeinerung und Erhöhung des Polynomgrades, bei allen Simulationen kommen 3-D Hexaederelemente zum Einsatz [25, S.62].

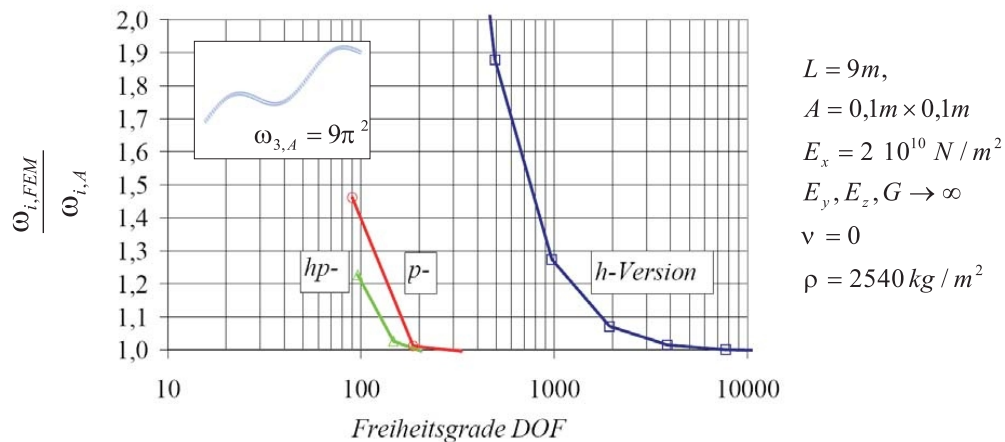


Abbildung 2.12: Konvergenz der dritten Eigenkreisfrequenz eines Balkens gegenüber der analytischen Lösung in Abhängigkeit der Anzahl der Freiheitsgrade (DOF) [25, S.63]

<i>h-Version (<math>p=1</math>)</i>			<i>p-Version (<math>n_{El}=1</math>)</i>			<i>hp-Version</i>			
<i>DOF</i>	<i><math>n_{El}</math></i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$	<i>DOF</i>	<i><math>p</math></i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$	<i>DOF</i>	<i><math>n_{EL}</math></i>	<i><math>p</math></i>	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,A}$
132	10	5,481	90	3 1 4	1,461	96	2	2 1 3	1,227
252	20	3,378	186	5 1 6	1,012	147	2	3 1 4	1,027
492	40	1,880	330	7 1 8	0,996	204	3	3 1 4	0,996
972	80	1,274							
1932	160	1,072							
3852	320	1,015							
7692	640	1,001							
15372	1280	0,997							

Tabelle 2.1: Berechnungsdaten zu Abbildung 2.12 [25, S.63]

### 2.4.2 Validierung des Berechnungsmodells

Im Zuge der Validierung wird untersucht, inwieweit das physikalische (reale) Modell durch das mathematische Modell repräsentiert wird. Dabei werden die Berechnungsergebnisse mit experimentell ermittelten Messergebnissen verglichen, wobei es gilt, den Messfehler zu berücksichtigen. Der Sinn der Validierung liegt darin, die bei der Simulation entstehenden Fehler mit jenen der Messung zu vergleichen. Des Weiteren kann durch diese Vorgehensweise der erforderliche Grad der Diskretisierung bestimmt werden, um den Diskretisierungsfehler genügend klein gegenüber dem Modellierungs- und dem Parameterfehler zu halten. Dadurch können effiziente Berechnungsreihen realisiert werden, welche in weiterer Folge beispielsweise eine Bauteiloptimierung ermöglichen [25, S.64].

Als bauakustisch relevantes Beispiel für die Validierung wird zunächst die Konvergenz der Eigenkreisfrequenzen bei einer beidseitig gelenkig gelagerten Brettstapeldecke gegenüber den Messwerten vorgestellt. Bei der Modellierung wurden verschiedene Diskretisierungsvarianten (6x6 und 10x10 Hexaeder-Elemente) und variable Polynomgrade ( $p = 1, \dots, 7$ ) berücksichtigt [25, S.64/65].

Die schnelle Konvergenz der berechneten Eigenfrequenzen ist in Abbildung 2.13 klar ersichtlich. Bei der hier verwendeten Diskretisierung mit Elementgrößen zwischen  $0,83[m] \times 0,877[m] \times 0,15[m]$  bzw.  $0,50[m] \times 0,52[m] \times 0,15[m]$  wird mit  $p \geq 3$  für die Verschiebung in z-Richtung bereits ein ausreichend kleiner Fehler gegenüber der zu erwartenden Standardabweichung der Messwerte ( $2\sigma_m \leq 10\%$ ) erreicht [25, S.67].



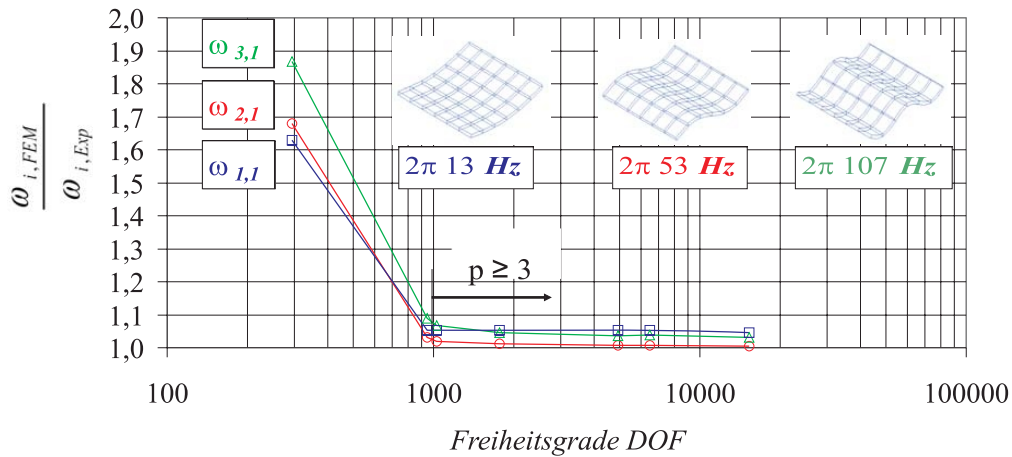


Abbildung 2.13: Konvergenz der berechneten Eigenkreisfrequenzen einer Brettstapeldecke gegenüber den Messwerten in Abhängigkeit der Anzahl an Freiheitsgraden (*DOF*)

			$\omega_{1,Exp} = 82,9$		$\omega_{2,Exp} = 331,1$		$\omega_{3,Exp} = 675,1$	
DOF	$n_{EL}$	$p$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$	$\omega_{i,FEM}$	$\omega_{i,FEM} / \omega_{i,Exp}$
294	6x6	111	135,1	1,629	556,1	1,679	1260,4	1,867
945	6x6	222	87,3	1,053	341,2	1,030	735,8	1,090
1029	6x6	223	87,3	1,053	337,4	1,019	720,1	1,067
1764	6x6	335	87,3	1,053	334,9	1,011	706,2	1,046
4926	6x6	557	87,3	1,053	333,6	1,008	699,3	1,036
6474	10x10	335	87,3	1,053	333,6	1,008	701,8	1,040
15300	10x10	557	86,7	1,045	333,0	1,006	696,2	1,031

Abbildung 2.14: Berechnungsdaten zu Abbildung 2.13

Die Untersuchungen zeigen, dass bei dieser Problemstellung der Diskretisierungsfehler keine Probleme bereitet, da er bereits bei geringem numerischen Aufwand im Bereich des Messfehlers liegt. Somit ist zu erwarten, dass der Modellierungs- und der Parameterfehler den maßgeblichsten Einfluss auf den Gesamtfehler hat [25, S.67].

Teil II

Implementierung

# Kapitel 3

## Das Simulationsmodell

### 3.1 Vorgehensweise / Zielsetzung

Zur Erstellung des Finite-Elemente-Simulationsmodells wird die Software „COMSOL Multiphysics“ verwendet. Diese Software ist für multiphysikalische Anwendungen ausgelegt und enthält dementsprechend ein umfangreiches Akustik-Modul, mit dem es möglich ist, eine Vielzahl an akustischen Phänomenen zu implementieren und zu untersuchen.

Zur Verwendung kommt neben dem Basismodul der Software („Structural Mechanics“) auch das soeben erwähnte Akustik-Modul. Um spezielle Programmabläufe erstellen zu können, die nicht direkt in [COMSOL] implementiert sind, wird der Synchronisations-Link „LiveLink for MATLAB“ zwischen [COMSOL] und [MATLAB] verwendet. Dies dient auch zur Erweiterung der Möglichkeiten bezüglich des Postprocessing der Simulationsdaten (siehe auch Kapitel 1.4).

Eine Einführung in die Programmierung von [COMSOL] ist jedoch nicht Bestandteil dieser Arbeit, da hierzu bereits sehr gute und umfangreiche Anleitungen verfasst wurden. Diesbezüglich wird gerne auf die öffentlich zugängliche, sehr gelungene Diplomarbeit [22] verwiesen, in der umfangreich und detailliert die grundlegende Theorie der FEM und die verschiedensten Modellierungsschritte erörtert werden. Weiters gilt zu erwähnen, dass die Dokumentationen zu der Software und den entsprechenden Modulen sehr ausführlich ausgearbeitet sind. Die interne Modell-Bibliothek enthält eine Vielzahl an bereits implementierten Modellen inklusive umfangreichen Beschreibungen zur mathematischen Behandlung der entsprechenden Physik und den Modellierungsschritten.

Dies erleichtert die Einarbeitung in bestimmte Anwendungsbereiche.

Bei der Erstellung eines Simulationsmodells auf Basis der Finite-Elemente-Methode ist eine gute Kenntnis der zugrundeliegenden Theorie besonders in Bezug auf die physikalischen Zusammenhänge und Effekte von entscheidender Bedeutung für den Erfolg. Auf diesen Aspekt wurde bereits im ersten Teil dieser Arbeit in den Kapiteln 2.1 und 2.2 sorgfältig eingegangen.

Im folgenden Kapitel wird nun ein derartiges Simulationsmodell implementiert. Dabei gilt es, verschiedenste Faktoren abzuwiegen und entsprechende Schwerpunkte zu setzen. Solche Faktoren sind:

1. Die zu berücksichtigenden physikalischen Effekte und Randbedingungen
2. Die notwendige Präzision bei der Erfassung und Diskretisierung von Geometrie und Materialparameter
3. Die benötigte Rechenzeit

Vereinfachungen in allen diesen Punkten sind unumgänglich, da die Darstellungsgenauigkeit eines solchen Modells immer endlich ist. Jedoch kann der entstehende Fehler durch eine geschickte Wahl der Randbedingungen und Setzen der passenden Schwerpunkte deutlich gesenkt werden, wodurch ein leistungsfähiges und effizientes Modell entsteht.

Als reales Vorbild wird ein passender Prüfkörper verwendet. Bereits im Vorfeld zeigt sich, dass einige Effekte deutlich klarer zu analysieren und die Ergebnisse viel vertrauenswürdiger sind, wenn diese in eigenständigen Modellen isoliert betrachtet werden. Aus diesem Grund werden neben einem Hauptmodell des gesamten Prüfkörpers auch mehrere Submodelle implementiert, welche eine möglichst fragestellungsadäquate Genauigkeit der Berechnung von Materialdaten, Analyse von speziellen Effekten oder auch der Kontrolle experimentell ermittelter Daten dienen.

## 3.2 Der Prüfkörper

Bei dem in dieser Arbeit betrachteten Prüfkörper handelt es sich um einen neuartigen, innovativen Planziegel der Firma „Wienerberger Ziegelindustrie GmbH“ mit der Bezeichnung „Porotherm 30 W.i Objekt Plan“. Das Produkt soll künftig besonders im Bereich des mehrgeschossigen Wohnbaus Verwendung finden und ist speziell auf die Anforderungen in der Niedrigenergie- und Passivhausbauweise abgestimmt. Durch die integrierte Wärmedämmung aus Steinwolle erreicht der Ziegel

herausragende Wärmeschutzwerte, wodurch die Dicke und der Aufwand einer ansonsten erforderlichen Zusatzdämmung reduziert werden kann.



Abbildung 3.1: Der verwendete Prüfkörper

Aufgrund des speziellen Aufbaus fiel die Wahl eines Prüfkörpers auf diesen Planziegel, da hierbei diverse Modifikationen für Subsysteme umsetzbar waren. Weiters wurde bereits im Vorfeld beobachtet, dass sich - wie auch bei jedem anderen Bauteil - ein spezielles Schwingverhalten einstellt, welches in einem bestimmten Frequenzbereich zu ungünstigen Einbrüchen der Schalldämmung führt.

In dieser Arbeit wird mehrmals der Begriff „Ziegelscherbe“ verwendet. Dies bezeichnet allgemein das reine Ziegelmaterial, also ohne etwaige Füllung der Struktur.

### 3.3 Modellierung der Struktur

#### 3.3.1 Geometrie

Die Eingabedaten, welche gezwungenermaßen mit endlicher Präzision und einer gewissen Schwankungsbreite aufgrund des auftretenden Messfehlers ermittelt werden müssen, erzeugen folgedessen auch einen Fehler in der Simulation (siehe auch Kapitel 2.4). Dabei stellt die Bestimmung der Geometrie im Vergleich zu anderen Eingangsgrößen (im hier vorliegenden Fall) den am genauesten festzustellenden Parameter dar. Infolge einer möglichst exakten Erfassung der Abmessungen des Prüfkörpers kann der entstehende Fehler bereits im Vorfeld klein gehalten werden.

Aus diesem Grund wurde zur Ermittlung der Geometrie eine digitale Schiebelehre mit bekannter Messunsicherheit verwendet. Bei gleichartigen Abmessungen, wie z.B. bei der Lochtiefe wurde jedoch

zur Vereinfachung der Modellierung der arithmetische Mittelwert der einzelnen Werte gebildet. Die Lochtiefe schwankte hierbei beispielsweise zwischen  $29,49[mm]$  und  $30,92[mm]$ , eine Abweichung von Minimal - zu Maximalwert von  $1,43[mm]$  erschien als ein akzeptabler Wert und wurde für die Modellbildung für den vorliegenden Zweck als ausreichend erachtet.

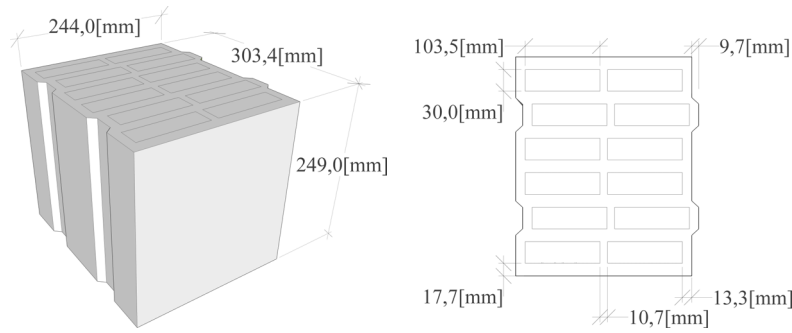


Abbildung 3.2: Abmessungen des Prüfkörpers

### 3.3.2 Materialparameter

Die Ziegelscherbe wird allgemein als homogenes, linear-elastisches, isotropes Material modelliert. Diese Vorgehensweise bei der Modellierung führte bereits bei [9] zu sehr guten Ergebnissen, hierbei wurde ein ähnlicher Prüfkörper implementiert.

Die Implementierung der Mineralwolle stellt ein etwas schwierigeres Unterfangen dar, da es sich hierbei akustisch gesehen eigentlich um einen poröser Absorber handelt. Hierfür wären jedoch viele zusätzliche Kenndaten notwendig, welche im Vorfeld nicht zur Verfügung stehen und auch messtechnisch schwierig zu erfassen sind. Alternativ wurde bereits in einem ähnlichen Anwendungszweck in [9] gezeigt, dass die Wolle auch als linear elastisches Material implementiert werden kann, wobei folgedessen sehr realitätsnahe Ergebnisse erzielt werden können.

#### 3.3.2.1 Rohdichte

Die Rohdichte  $\rho[kg/m^3]$  stellt im Vergleich zu den anderen Kennwerten den messtechnisch am einfachsten festzustellenden Parameter dar. Bereits mit kleinen Proben und einfachen Messaufbauten können realitätsnahe Werte ermittelt werden, wobei sich bei einer korrekten Durchführung der Messung der resultierende Messfehler in Grenzen hält. Aus diesem Grund stellt dieser Kennwert

zusammen mit einer möglichst exakten Bestimmung der Geometrie die Basis für die Modellierung dar. Darauf aufbauend sollen nun die restlichen notwendigen Parameter erfasst bzw. berechnet werden.

### 3.3.2.2 Elastizitätsmodul

Der dynamische Elastizitätsmodul  $E[Pa]$  stellt sozusagen die „mechanische Federkonstante“ des Materials dar. Eine exakte Ermittlung des Parameters gestaltet sich jedoch schwierig. Weiters wirkt sich ein von der Realität abweichender Wert deutlich stärker auf das Endergebnis (Resonanzfrequenz) aus, als vergleichsweise bei der Dichte. Somit wird diesem Parameter in dieser Arbeit besondere Aufmerksamkeit geschenkt.

### 3.3.2.3 Poissonzahl

Die Poissonzahl  $\nu[-]$  stellt ebenfalls einen sehr aufwendig zu messenden Parameter dar. Ein Vergleich von (informativen) Testsimulationen im Vorfeld zeigte, dass sich eine Variation des Parameters, in Bezug auf die Lage der Eigenfrequenzen<sup>1</sup>, minimale Auswirkungen hat. Aus diesem Grund kann der Parameter ohne Bedenken aus einschlägiger Literatur übernommen werden. In [9] werden sehr gute Ergebnisse bei Simulationen einer Ziegelwand in einem virtuellen FEM - Prüfstand erzielt. Hierbei wurden ähnliche Simulationsparameter bei der Ziegelscherbe verwendet:

Dichte $\rho[kg/m^3]$	Elastizitätsmodul $E[Pa]$	Poissonzahl $\nu[-]$
1495	5,5e9	0,2

Tabelle 3.1: Materialparameter Ziegel: Poissonzahl - Referenz [9]

Da die Abweichung dieser Werte sehr gering zu den vom Hersteller angegebenen Daten (siehe auch Kapitel A) ist, wird die Poissonzahl für die Ziegelscherbe in allen Simulationen konstant mit 0,2[-] angenommen.

<sup>1</sup>Verglichen mit den Auswirkungen einer Variation des Elastizitätsmoduls

### 3.3.2.4 Porosität

Ziegelscherben werden vorwiegend in poröser Struktur hergestellt, da diese Technik die Dämmwirkung in thermischer, aber auch in akustischer Hinsicht steigern kann. Auch bei dem hier vorliegenden Prüfkörper ist dies der Fall.

Abbildung 3.3 zeigt die Vorderseite des Ziegels, welche im verbauten Zustand direkt der einfallenden Schallwelle ausgesetzt ist. Die Struktur ist vorwiegend geschlossen, wodurch eine Schallwelle nicht bzw. nur in geringem Maße eindringen kann. Im oberen Bildrand ist jeweils ein Millimeterlineal als Hilfestellung für einen Größenvergleich abgebildet.

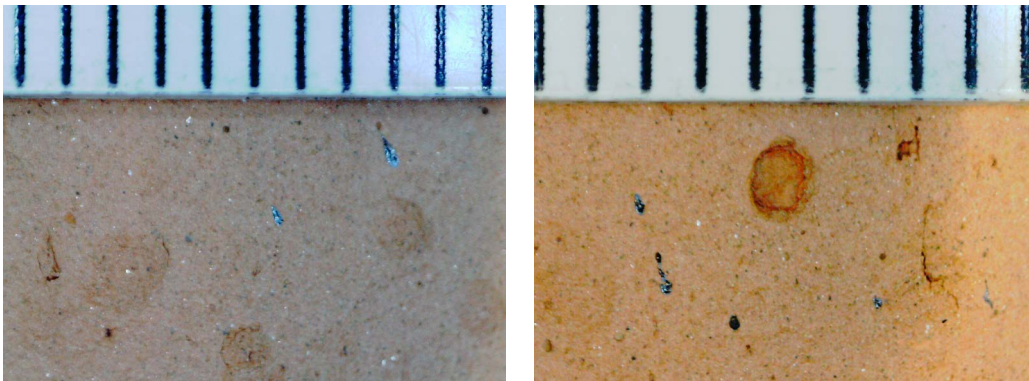


Abbildung 3.3: Ziegelscherbe unter dem Mikroskop: Übersicht der Front (links) und Detailansicht einzelner Öffnungen (rechts)

Abbildung 3.4 zeigt die Oberseite des Ziegels unter dem Mikroskop. Eine entsprechende Porosität ist klar erkennbar. Im eingebauten Zustand<sup>2</sup> sind diese Öffnungen jedoch nicht einer einfallenden Schallwelle ausgesetzt, sie wirken deshalb nur innerhalb des elastischen Materials.

---

<sup>2</sup>Zusammenschluss mehrerer Ziegel zu einer Wand



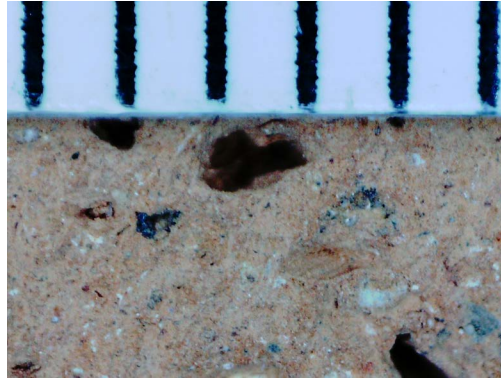


Abbildung 3.4: Ziegelscherbe unter dem Mikroskop: klar ersichtliche Öffnungen, lagerfugenseitig

Da die Schallwelle nicht direkt in das Material eindringt, und die Porosität nur die strukturelle Dämpfung erhöht, wird das Simulationsmodell in dieser Hinsicht vereinfacht. Die Absorptionswirkung des Ziegelmaterials wird zusammen mit der Porosität zu einem Gesamtverlustfaktor  $\eta$  zusammengefasst. Weiters dürfte die Porosität nur sehr geringe Auswirkungen auf die Schwingungsform der Ziegelplatten und somit auch auf weitere Untersuchungen haben. Dieser Aspekt wird daher nicht näher untersucht.

Diesbezüglich wäre zwar im Akustik-Modul von [COMSOL] eine entsprechende physikalische Umgebung implementiert („Poroelastische Wellen“), es wäre jedoch eine Vielzahl zusätzlicher Materialdaten zur Modellierung der Porosität notwendig (Porosität, Kompressionsmodul, Schermodul, Permeabilität, Kompressibilität des Fluids, Dynamische Viskosität, Biot-Willis Koeffizient). Die theoretische und messtechnische Behandlung dieser physikalischen Umgebung würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen.

### 3.3.2.5 Dämpfung

Um die akustische Dämpfung der Materialien zu beschreiben, wird der isotrope Gesamtverlustfaktor  $\eta[-]$  herangezogen, da dieser auch messtechnisch am realen Prüfkörper ermittelt werden kann. Dieser wird im Allgemeinen frequenzabhängig implementiert. Näheres dazu ist in den nachfolgenden Kapiteln 4.3 und 5.3 zu finden.

### 3.3.2.6 Übliche Wertebereiche und Daten aus Datenblättern

Für einen Überblick der Wertebereiche der soeben erörterten Materialparameter werden diese einschlägiger Literatur entnommen und in Tabelle 3.2 zusammengefasst.

<b>Übliche Wertebereiche der Materialparameter</b>				
<b>Materialart</b>	$\rho[kg/m^3]$	$E[MPa]$	$\nu[-]$	$\eta[-]$
<b>Ziegelmauerwerk</b>	1400...2000	3000...16000	0.2	0,01...0,04
<b>Mineralfaserplatte</b>	50...100	0,57...1,26	–	–

Tabelle 3.2: Übliche Wertebereiche der Materialparameter [10, S.73/261]

Weiters werden in Tabelle 3.3 die Werte aus den Datenblättern der Materialien kurz zusammengefasst:

<b>Herstellerangaben (Details im Anhang unter A)</b>				
<b>Materialart</b>	$\rho[kg/m^3]$	$E[MPa]$	$\nu[-]$	$\eta[-]$
<b>Ziegelmauerwerk</b>	1325	5434,5	–	0,025 <sup>3</sup>
<b>Mineralfaserplatte</b>	70	–	–	–

Tabelle 3.3: Materialwerte aus Datenblättern

Bei der Ziegelscherbe sind bis auf die Poissonzahl alle Daten bekannt. Für die Poissonzahl ist in [14] allgemein ein Wertebereich von  $\nu = 0,11...0,20[-]$  für Hochlochziegel angegeben..

Im Gegensatz dazu fehlen bei der Mineralwolle mehrere maßgebliche Parameter. In Kapitel 3.3.2.2 wurde bereits die Wichtigkeit des Elastizitätsmoduls für Simulationen erwähnt. Um für diesen Parameter einen verwendbaren Wert zu erhalten, wurden alternative Produkte<sup>4</sup> des selben Herstellers herangezogen und deren - aus den dynamischen Steifigkeiten berechneten - Elastizitätsmoduln gemittelt, um einen Anhaltspunkt zu erhalten. Hierbei gilt jedoch zu beachten, dass diese Produkte üblicherweise mit erheblich höherer Dichte produziert werden, da eine bestimmte Mindestbelastbarkeit des Materials gefordert ist. Weiters wurden die dynamischen Steifigkeiten unter einer statischen Belastung ermittelt ( $2[kPa]$ ). Die Werte der Elastizitätsmoduln reichen (bei vergleichbaren Materialdicken) von  $0,57[MN/m^2]$  bis  $1,26[MN/m^2]$ . Im Mittel (aus vier ausgewählten Produkten) erhält man somit einen Wert von  $0,74[MN/m^2]$  als erste Näherung.

<sup>4</sup>Verwendung vorwiegend als Trittschalldämmung in Fußböden

Werte für die Poissonzahl der Mineralwolle konnten nicht ermittelt werden. Aus diesem Grund wird der Wert für Luft (aus der internen Materialbibliothek von [COMSOL]) mit  $0,1[-]$  verwendet. Der Verlustfaktor muss an dieser Stellen noch unbestimmt bleiben.

## 3.4 Lagerungsbedingungen

Unter Laborbedingungen sind spezielle Randbedingungen wie ideal feste Einspannungen oftmals nur sehr schwierig bis unmöglich herzustellen (siehe auch Kapitel 2.3.5). Aus diesem Grund werden bei vibroakustischen Messungen vorwiegend ideal freie Einspannungsbedingungen angenähert, da diese auch analytisch oftmals einfacher zu behandeln sind. Somit werden auch in den Simulationen die Prüfkörper vorwiegend allseitig frei, ohne jegliche statische oder dynamische Vorbelastung behandelt. Lediglich bei der Simulation einer Ziegelscherbenplatte (siehe Kapitel 3.6.2) wird eine allseitig gelenkige Lagerung implementiert.

## 3.5 Vernetzung

### 3.5.1 Maximale Elementgröße in Fluiden

Bei der Schallausbreitung in Fluiden gestaltet sich die Berechnung der benötigten Vernetzung bzw. Netzdichte im zweidimensionalen Fall relativ einfach. Wie bereits in Kapitel 2.1.1 erwähnt wurde ist, ist für eine korrekte Behandlung die Wellenlänge der höchsten zu berücksichtigenden Frequenz, durch mindestens 6 Knotenpunkte abzutasten. Da sich in Fluiden eine lineare Abhängigkeit von Wellenlänge zu Frequenz ergibt, und die Ausbreitungsgeschwindigkeit somit konstant ist, kann diese Bedingung einfach über die folgende Beziehung berechnet werden:

$$\text{aus : } \lambda_{min} = \frac{c}{f_{max}} \quad \text{folgt : } h_{max} = \frac{\lambda_{min}}{6} \quad (3.1)$$

Dabei ist:

$\lambda_{min}$	die kleinste vorkommende Wellenlänge [m]
$c$	die Schallgeschwindigkeit [m/s]
$f_{max}$	die höchste vorkommende Frequenz [Hz]
$h_{max}$	die maximale Elementgröße [m]

Im dreidimensionalen Fall ist diese theoretische Regel wie bereits erwähnt nicht anwendbar. Da in dieser Arbeit eine Schallausbreitung in Fluiden lediglich für den zweidimensionalen Fall betrachtet wird (siehe Kapitel 9), ist eine nähere Untersuchung des dreidimensionalen Falls nicht vorgesehen.

### 3.5.2 Maximale Elementgröße in mechanischen Domänen

In Festkörpern gestaltet sich die Bedingung in Formel 3.1 etwas schwieriger, da sich beispielsweise bei Biegewellen eine frequenzabhängige Wellenlänge einstellt (siehe auch Kapitel 2.2). Die Ausbreitungsgeschwindigkeit und somit auch die Wellenlänge bezogen auf die Frequenz ist stark von den Materialkennwerten und geometrischen Zusammenhängen<sup>5</sup> abhängig. Bei Kenntnis dieser Parameter kann die notwendige Vernetzung berechnet werden. Sind diese nicht bekannt, kann die höchste Wellenlänge durch vibroakustische Messungen (experimentelle Modalanalyse) ermittelt werden. Nachfolgende Berechnungen zeigen eine mögliche Vorgehensweise bei der Bestimmung der Wellenlänge einer Biegewelle [21, S.52]:

$$\text{aus : } c_B = \sqrt{\omega} \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \quad \text{und : } \lambda_B = \frac{c_B}{f} = \frac{2\pi c_B}{\omega} \quad (3.2)$$

$$\text{folgt : } \lambda_B = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega}} \sqrt[4]{\frac{B}{m'}} \quad (3.3)$$

---

<sup>5</sup>Plattendicke bei Biegewellenerscheinungen

Dabei ist:

$c_B$	die Phasengeschwindigkeit einer Biegewelle [ $m/s$ ]
$\omega$	die Kreisfrequenz [ $Hz$ ]
$B$	die Biegesteifigkeit [ $Nm^2$ ]
$m'$	die flächenbezogene Masse [ $kg/m^2$ ]
$\lambda_B$	die Wellenlänge einer Biegewelle [ $m$ ]

Dieser mathematische Zusammenhang wird nun für die kleinste Abmessung in der Geometrie berechnet. Dies betrifft den Steg im Zentrum des Prüfkörpers, welcher auch als Platte angesehen werden kann. Für diese Platte wird die Biegesteifigkeit, die flächenbezogene Masse und die Biegewellenlänge bei  $3150[Hz]$  näherungsweise berechnet. Für die Biegewellenlänge ergibt sich ein Wert von  $128,30[mm]$  und für die maximale Elementgröße entsprechend der Formel 3.1 ein Wert von  $21,384[mm]$ .

Zur Kontrolle einer ausreichenden Auflösung der Wellenlänge durch eine Anzahl von mindestens 12 Freiheitsgraden ( $DOF$ ) wird die Mindestanzahl an Freiheitsgraden über folgenden mathematischen Zusammenhang berechnet [22, S.56]:

$$g_{D,min} = n_{D,min} = 12^3 \cdot \frac{V_D}{\lambda_{min}^3} = 1728 \cdot \frac{V_D}{\lambda_{min}^3} = 1728 \cdot \frac{f_{max}^3 \cdot V_D}{c^3} \quad (3.4)$$

Dabei ist:

$V_D$  das Volumen der jeweiligen akustischen Domäne [ $m^3$ ]

Die Berechnung der exakt implementierten Volumina kann in [COMSOL] („Geometry“ → „Measurements“) erfolgen.

### 3.5.3 Weitere Vernetzungsparameter

In Kapitel 2.1.1 wurden bereits alle notwendigen Vernetzungsparameter detailliert beschrieben. Bei der Wahl der entsprechenden Werte wird die automatische Vernetzung der Software verwendet, welche nach [22] bereits sehr gute Ergebnisse lieferte.

Es wird zunächst die entsprechende maximale Elementgröße bei der höchsten darzustellenden Frequenz berechnet. Daraufhin wird die automatische Vernetzung auf einen vergleichbaren bzw. kleineren Wert für die maximale Elementgröße eingestellt. Die Werte für beispielsweise „maximale Netz-Element-Wachstumsrate“ werden direkt übernommen, für die maximale Elementgröße werden die berechneten Werte verwendet.

## 3.6 Modellvarianten

Zur Optimierung der Rechenzeit und des Speicherbedarfs scheint es unumgänglich, neben einem kompletten Hauptmodell auch diverse Submodelle zu implementieren. Diese Vorgehensweise erleichtert weiters die Interpretation spezifischer physikalischer Effekte, indem diese isoliert untersucht werden können.

### 3.6.1 Hauptmodell: Planziegel (3D)

Zur Untersuchung reiner Körperschallphänomene bezogen auf die Gesamtstruktur wird ein exaktes dreidimensionales Abbild des Prüfkörpers erstellt. Dieses ermöglicht beispielsweise Vergleiche zwischen experimentell ermittelten Übertragungsfunktionen und jenen aus den Simulationsergebnissen zu Validierungszwecken.

Grundsätzlich werden zwei Varianten unterschieden, wobei der komplette Planziegel einmal mit Füllung und einmal ohne Füllung betrachtet wird. Das Schwingverhalten beider Varianten wird im Zuge einer experimentellen Modalanalyse bestimmt (siehe Kapitel 4.2.2). Eine Untersuchung dieser beiden Varianten dient unter anderem dazu, die ermittelten Parameter für die Ziegelscherbe in dem entsprechenden System<sup>6</sup> zu implementieren, mit experimentellen Messungen zu vergleichen und die Vertrauenswürdigkeit von den in den Subsystemen experimentell und analytisch ermittelten Werten zu bestimmen.

---

<sup>6</sup>Ohne Einbeziehung der Mineralwolle

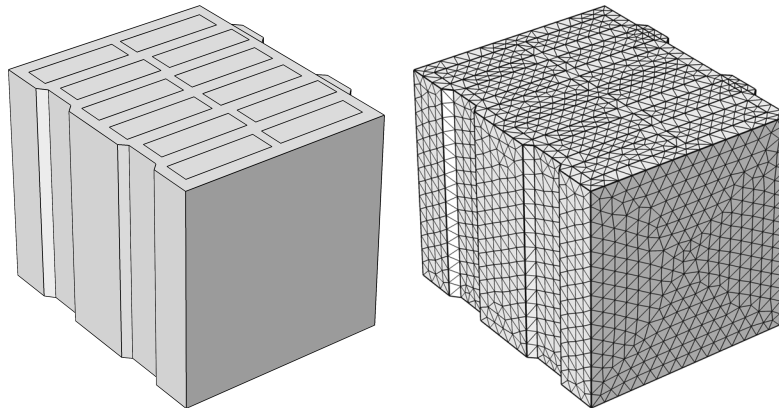


Abbildung 3.5: Hauptmodell: 3D-Ziegelmodell, Geometrie (links) und Vernetzung (rechts)

### 3.6.2 Submodell 1: Ziegelscherbenplatte (3D)

Zur Validierung des analytisch und experimentell ermittelten dynamischen Elastizitätsmodul der Ziegelscherbe wird ein exaktes, dreidimensionales Abbild der verwendeten Probe erstellt. Näheres dazu ist unter Kapitel 4.2.3 zu finden.

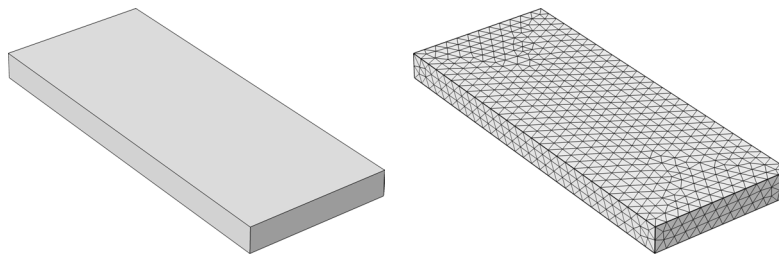


Abbildung 3.6: Submodell 2: 3D-Ziegelplatte, Geometrie (links) und Vernetzung (rechts)

### 3.6.3 Submodell 2: Virtueller Schallprüfstand (2D)

Als mögliches Anwendungsbeispiel des Simulationsmodells wird die Wirkungsweise des Ziegels in Bezug auf die Schalldämmung untersucht. Hierbei handelt es sich um ein Kopplungsproblem (siehe Kapitel 2.2) zwischen Luftschall und Körperschall. Als Prüfkörper wird eine Wand aus einzelnen Planziegel-Elementen erstellt. Aufgrund der zusätzlichen Domänen<sup>7</sup> nehmen die hierzu notwendi-

---

<sup>7</sup>Siehe auch Kapitel 2.1

gen  $DOF$  stark zu, was natürlich auch die Rechenzeit entsprechend erhöht. Daher wird das 3D-Simulationsmodell auf ein zweidimensionales Modell (Horizontalschnitt) reduziert.

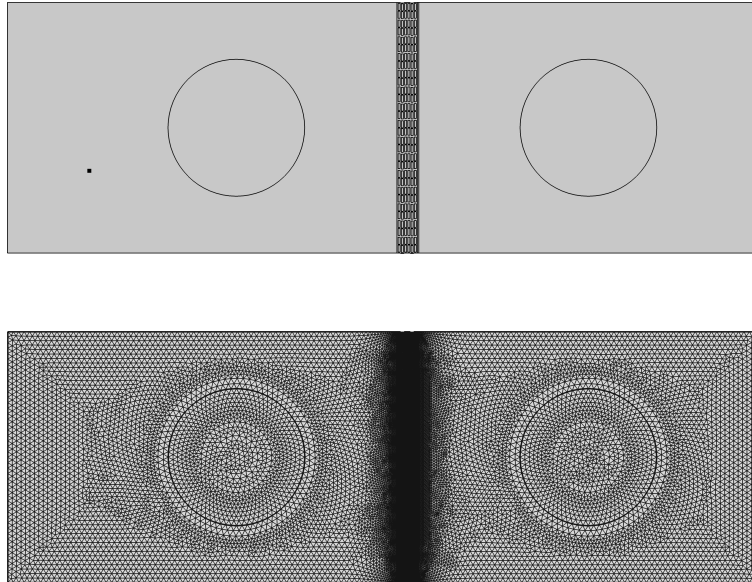


Abbildung 3.7: Submodell 2: 2D Modell - Schalldämmung: Aufbau (oben) und Vernetzung (unten) des virtuellen Prüfstands

## 3.7 Parametrisierung

### 3.7.1 Globale Parameter

Zur einfachen Variation der implementierten Parameter werden diese als globale Variablen definiert. Dadurch können die entsprechenden Werte bezogen auf Geometrie, Materialdaten oder Vernetzung schnell und effektiv verändert werden, ohne in den Programmcode eingreifen zu müssen. Weiters können die Parameter für die Berechnung analytischer Lösungen in [COMSOL] herangezogen werden und im Postprocessing direkt mit den numerischen Lösungen verglichen werden.

### 3.7.2 Parametersweep

Der sogenannte *Parametersweep* stellt ein ungemein hilfreiches Werkzeug dar. Hierbei können innerhalb frei definierbarer Wertebereiche und Schrittweiten Kombinationen verschiedenster (globaler)



Parameter des Simulationsmodells in einem Schritt gelöst werden. In weiterer Folge kann eine Datenbank der Ergebnisse beispielsweise in [EXCEL] erstellt werden, wodurch verschiedene Varianten gegenübergestellt und Tendenzen analysiert werden können (siehe auch in Kapitel 1.4). Eine klare Vorstellung bzw. Eingrenzung eines realistischen Wertebereichs wird dabei jedoch vorausgesetzt, da die Gesamt-Rechenzeit mit der Anzahl der variierten Parameter extrem ansteigt. Mittels Parametersweep ist es auch möglich, eine Sensitivitätsanalyse des betrachteten Modells hinsichtlich einzelner Parameter durchzuführen.

### 3.7.3 Spezielle Lösungsabfolgen

Durch den sogenannten „Live-Link to MATLAB“<sup>8</sup> ist es möglich, die in [COMSOL] erstellten Modelle direkt in [MATLAB] zu integrieren. Vor dort aus können die meisten der verwendeten Funktionen der FEM-Simulation direkt über eine entsprechende Syntax angesteuert werden und folgedessen spezielle Abfolge-Routinen in Bezug auf verschiedene Konfigurationen des Solvers programmiert werden. Eine Schar von Lösungen der numerischen Simulation wird in weiterer Folge mit einem entsprechenden Rechenalgorithmus in einer Matrix angeordnet. Die Daten werden dann entweder direkt von [MATLAB] bearbeitet oder an eine Simulations-Datenbank weitergegeben.

## 3.8 Rechenzeit

Die benötigte Rechenzeit stellt einen maßgeblichen Faktor bei der Simulation physikalischer Abläufe dar, da sie die Anzahl der möglichen Variationen des Modells bestimmt.

Nachfolgende Tabellen zeigen entsprechende Zeiten für die zuvor beschriebenen, implementierten Modelle: Verwendet wurde ein 64[Bit] Windows 7-Rechner mit einem 2-Kern Intel-Prozessor und 8[GB] Ram. Die Analysen entsprechen jenen, die in dieser Arbeit beschrieben werden. Beim Hauptmodell des Planziegels wurde zu Validierungszwecken eine Eigenfrequenzanalyse ohne Mineralwolle durchgeführt und eine Übertragungsfunktion mit Mineralwolle extrahiert (siehe Kapitel 2.4.2). Letztere wurde in mehreren Lösungsschritten mit variabler Vernetzung/Anzahl der *DOF* durchgeführt, um die Rechenzeit zu verkürzen. Für einen Vergleich der Resonanzfrequenzen eines realen Prüfkörpers in Form einer Ziegelscherbenplatte (siehe Kapitel 4.2.3) mit dem entsprechenden Modell (siehe Kapitel 3.6.2) wurde eine Eigenfrequenzanalyse durchgeführt.

---

<sup>8</sup>Siehe auch Kapitel 1.4

Die Berechnung des Schalldämm-Maßes im virtuellen Prüfstand wurde auch in mehrere Lösungsschritte geteilt, da ansonsten extrem lange Rechenzeiten erforderlich wären (siehe auch Kapitel 9).

<b>Hauptmodell: Planziegel (3D)</b>			
<b>Studie</b>	<b>Anzahl der Moden<sup>[-]</sup> / Frequenzbereich [Hz]</b>	<b>DOF<sup>[-]</sup></b>	<b>Zeit [h : m : s]</b>
<b>Eigenfrequenzanalyse (ohne Wolle)</b>	50 <sup>1</sup>	88932	00 : 00 : 43
<b>Übertragungsfunktion (mit Wolle)</b>	500 – 3150 <sup>2</sup>	107223	14 : 04 : 27

<b>Submodell 1: Ziegelscherbenplatte (3D)</b>			
<b>Studie</b>	<b>Anzahl der Moden [-]</b>	<b>DOF<sup>[-]</sup></b>	<b>Zeit [h : m : s]</b>
<b>Eigenfrequenzanalyse</b>	10	50496	00 : 00 : 10

Tabelle 3.4: Rechenzeiten für die Simulationsmodelle in 3D

<b>Submodell 2: Virtueller Schallprüfstand (2D)</b>			
<b>Studie</b>	<b>Frequenzbereich [Hz]</b>	<b>DOF(variabel) [-]</b>	<b>Zeit (gesamt) [h : m : s]</b>
<b>Schalldämm-Maß (Wand)</b>	89 – 710 <sup>3</sup>	81395 – 108695 <sup>4</sup>	00 : 26 : 49
<b>Schalldämm-Maß (3-Ziegel)</b>	711 – 3536 <sup>3</sup>	73257 – 899377 <sup>4</sup>	08 : 04 : 21

Tabelle 3.5: Rechenzeiten für Simulationsmodelle in 2D

<sup>1</sup>[-]<sup>2</sup>[Hz]<sup>3</sup>Schrittweite: 1 [Hz]<sup>4</sup>DOF bei tiefster und bei höchster Frequenz (siehe Frequenzbereich)

# Kapitel 4

## Experimentelle Messungen

Im nachfolgenden Kapitel werden experimentelle Messungen beschrieben, welche einerseits als Basis für die in Kapitel 5 berechneten Materialparameter, andererseits zu Validierungszwecken der Simulation in Kapitel 2.4.2 dienen.

### 4.1 Rohdichte

Die Rohdichte des Materials stellt einen zentralen Parameter bei der Analyse des Prüfkörpers dar. Wie bereits unter Kapitel 3.3.2 erwähnt, wird allgemein Homogenität angenommen, daher ist dieser Kennwert als konstant anzunehmen.

Die Rohdichte ist definiert als die Trockenmasse eines Stoffes bezogen auf sein Kornvolumen. Das Volumen der Kornporen wird hierbei einbezogen [17]:

$$\rho_R = \frac{m_d}{V_K} = \frac{m_d}{V_0 + V_P} \quad [\text{kg}/\text{m}^3] \quad (4.1)$$

Dabei ist:

$m_d$	die Trockenmasse eines Stoffes [ $kg$ ]
$V_K$	das Kornvolumen inklusive des Volumens der Kornporen [ $m^3$ ]
$V_0$	das Stoffvolumen ohne Kornporen [ $m^3$ ]
$V_P$	das Volumen der Kornporen [ $m^3$ ]

#### 4.1.1 Ziegelscherbe

Zur Bestimmung der Rohdichte der Ziegelscherbe wurde ein passender Prüfkörper in Stabform gefertigt. Die Berechnung des Volumens über die Abmessungen des Prüfkörpers würde einen signifikanten Fehler verursachen, da der Stab nicht ideal geformt werden kann. Hierfür bietet sich das sogenannte *Wasserverdrängungsverfahren* [13] an. Dabei wird der Prüfkörper in ein Wasserbad gelegt, wobei das verdrängte Wasservolumen exakt dem des Prüfobjekts entspricht.

Die Ziegelscherbe stellt ein poröses Medium dar. Da bei der Bestimmung der Rohdichte das Porenvolumen miteinzubeziehen ist, gilt es, ein Eindringen der Flüssigkeit in den Prüfkörper zu verhindern. Eine Möglichkeit besteht darin, eine Abdichtung mit einem sogenannten Vakuumbbeutel herzustellen. Dabei wird der Prüfkörper in einen Plastikbeutel gelegt und die Luft mit einer Vakuuiermaschine abgesaugt.

Da eine solche Apparatur nicht zur Verfügung stand, wurde eine handelsübliche Adhäsionsfolie (Frischhaltefolie) aus Polyethylen verwendet. Der Prüfkörper wurde mit einer Schicht des Materials sorgfältig geschlossen umwickelt und die Stoßstellen mit Spezialkleber verklebt. Im Anschluss wurde die Folie mittels eines Heißluftföhns an allen Seiten kurz erwärmt, wodurch sich die Folie nochmals etwas zusammenzog, sich der Geometrie anpasste und der Kleber sicher trocknete. Es zeigte sich, dass diese Methode ebenfalls den gewünschten Effekt erzielte und eine gute Alternative zu einem Vakuumbbeutel darstellte. Aufgrund der sehr geringen Materialstärke wurde die Messung nur minimal verfälscht, eine entsprechende Korrektur wurde in die Berechnungen miteinbezogen.

Abbildung 4.1 zeigt den Prüfkörper sowie den gewählten Messaufbau. Das exakte Gewicht der Ziegelscherbe wurde mittels Laboranalysenwaage jeweils mit und ohne Folie bestimmt, um deren Auswirkungen zu analysieren. Daraufhin wurde das Volumen ermittelt. In ein Reagenzglas mit konstantem Durchmesser wurde destilliertes Wasser gefüllt und der Wasserstand bestimmt. Daraufhin wurde der folierte Prüfkörper in die Flüssigkeit eingetaucht und der erhöhte Wasserstand ebenfalls ermittelt. Über die entsprechenden geometrischen Zusammenhänge des Zylinders wurde das Volumen berechnet, welches in weiterer Folge zur Dichteberechnung herangezogen wurde.

Der Einfluss der Folie wurde dabei korrigiert.



Abbildung 4.1: Rohdichte Ziegelscherbe: Prüfkörper, Bestimmung der Masse und Ermittlung des Volumens (von links nach rechts)

Im Anhang B.3 sind die entsprechenden Daten und Berechnungen angeführt. Für die Rohdichte der Ziegelscherbe wurde ein Wert von  $1373[\text{kg}/\text{m}^3]$  bestimmt.

#### 4.1.2 Mineralwolle

Bei der Dichtebestimmung der Mineralwolle muss auf die konventionelle Methode über das Verhältnis Masse zu Volumen des Wollelements zurückgegriffen werden, da hierbei flüssigkeitsbasierte Methoden schwierig umzusetzen sind. Abbildung 4.2 zeigt die Bestimmung der Masse eines entsprechenden Prüfkörpers. Es wurden insgesamt sechs Prüfkörper gleicher Abmessungen gemittelt, um einen Wert für weiterführende Berechnungen zu erhalten:



Abbildung 4.2: Rohdichte Mineralwolle: Bestimmung der Masse des Prüfkörpers

Das Volumen wurde über die geometrischen Abmessungen bestimmt, hierfür wurde eine digitale Schiebelehre verwendet.

Die entsprechenden Daten und Berechnungen zur Rohdichte der Mineralwolle sind in Anhang B.3 angeführt. Für die Rohdichte der Mineralwolle wurde ein Wert von  $54[\text{kg}/\text{m}^3]$  bestimmt.

## 4.2 Experimentelle Modalanalyse

Zur Bestimmung des Schwingungsverhaltens des Prüfkörpers wird die experimentelle Modalanalyse herangezogen. Details dazu sind in Kapitel 2.3.5 zu finden. In dieser Arbeit wurde diese Technik auf mehrere Prüfelemente angewendet, wobei die komplette Messung in [LABSHOP] aufbereitet wurde.

### 4.2.1 Allgemeines

#### 4.2.1.1 Verwendete Messgeräte

Abbildung 4.3 zeigt die verwendeten Messgeräte entsprechend der Beschreibung von links nach rechts. Kernpunkt der Messumgebung stellt das 5-Kanal Messsystem „Pulse“ der Firma Brüel&Kjaer dar. Für die Anregung des Prüfkörpers wurde ein Impulshammer -ebenfalls von Brüel&Kjaer- mit der Bezeichnung „Impact Hammer Type 8206“ verwendet, der notwendige Aufnehmer für die eingeleitete Kraft ist hierbei bereits im Anregungskopf integriert. Die Ausgangsgröße wurde mit Beschleunigungssensoren von Brüel&Kjaer mit der Bezeichnung „Piezo Type 4507-B“ detektiert. Die Raum-Lufttemperatur und -Luftfeuchtigkeit wurde mit einem „Testo 610“ gemessen.



Abbildung 4.3: Experimentelle Modalanalyse - verwendete Messgeräte: Messsystem, Impulshammer, Beschleunigungssensor und Messgerät für Lufttemperatur und -feuchtigkeit (von links nach rechts)

#### 4.2.1.2 Lagerung der Prüfkörper

Die Lagerung des Prüfkörpers bei der Messung stellt einen wichtigen Faktor bei der Modalanalyse dar, da sie den möglichen Messfrequenzbereich bestimmt. Zur Entkopplung des Prüfkörpers wird dieser auf Luftpolster gelagert. In Kapitel 2.3.5.1 wurde bereits erwähnt, dass eine möglichst ideal starre Masse als Referenzmasse zur Bildung eines Einmassenschwingers notwendig ist. Im Zentrum des Hallraums<sup>1</sup> des „Labor für Bauphysik“ der Technischen Universität Graz befindet sich ein massiver Stahlbetonblock, welcher diese Voraussetzungen erfüllt. Dieser ist zusätzlich vom Untergrund und dem restlichen Boden des Raums entkoppelt.

Abbildung 4.4 zeigt die entsprechende Messumgebung. Die linke Grafik zeigt die vom Boden des Raums entkoppelte starre Masse. Um ein Eindringen von Verschmutzungen wie beispielsweise Steinen<sup>2</sup> in die Schlitzte zu vermeiden, werden diese mit Gewebeklebeband abgeklebt (mittlere Grafik). Der Abstand des Prüfkörpers vom Untergrund infolge der Lagerung auf Luftpolstern ergibt einen Wert von rund  $29,5[mm]$  (rechte Grafik).



Abbildung 4.4: Experimentelle Modalanalyse: Untergrund und Lagerung des Prüfkörpers

Zur Berechnung und Überprüfung des möglichen Messfrequenzbereichs wird die Resonanzfrequenz des durch die Kombination Untergrund-Luftpolster-Prüfkörper entstehenden Einmassenschwingers experimentell bestimmt. Die nachfolgenden Grafiken zeigen den Messaufbau und einen Ausschnitt der entsprechenden Übertragungsfunktion. Hierbei wurde der Prüfkörper vertikal angeregt und der Beschleunigungsaufnehmer auf der Oberseite platziert. Die Resonanzfrequenz beträgt exakt  $14[Hz]$ .

<sup>1</sup>Prüfstand für akustische Messungen, vorrangig für Messungen des Absorptionsgrades

<sup>2</sup>Können gegebenenfalls als Schallbrücke fungieren und eine Übertragung von Schwingungen ermöglichen

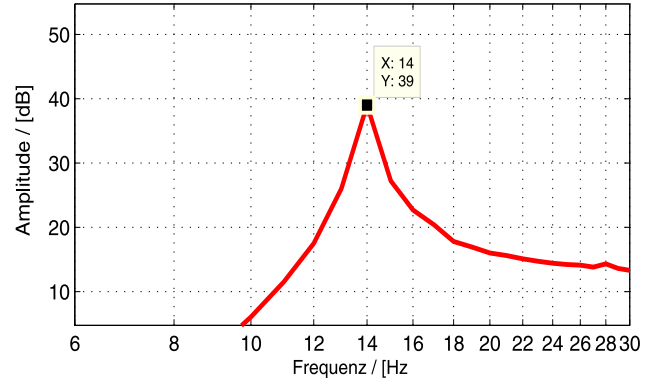
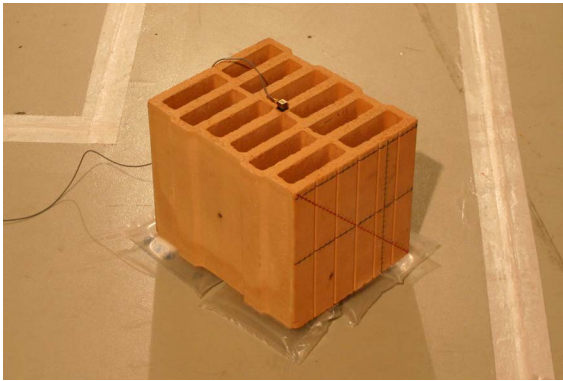


Abbildung 4.5: Überkritische Lagerung: Messaufbau und Ausschnitt aus der entsprechenden Übertragungsfunktion

Eine Entkopplung und somit ein unbeeinflusster Messbereich ergibt sich ab einer Frequenz von  $140[Hz]$  (siehe auch Kapitel 2.3.5.1).

#### 4.2.1.3 Auswahl der Messpunkte

Um die relevanten Resonanzfrequenzen des Systems zu bestimmen und auf die resultierende Modenform schließen zu können wurden Messpunkte entlang von acht Messlinien gewählt. Diese hohe Anzahl an Messpunkten erleichtert deutlich die Zuordnung der Moden bei Vergleichen mit der Simulation (siehe Kapitel 8). Um in weiterführenden Analysen die Abstände zwischen den einzelnen Messpunkten (z.B. zur Bestimmung von Wellenlängen) einfach berechnen zu können, wird allgemein ein Abstand von  $1[cm]$  verwendet. Eine noch detailliertere Auflösung ist aufgrund der Größe des Impulshammers nicht praktikabel. Es wurden alle Messpunkte jeweils mit und ohne Füllung gemessen.

Abbildung 4.6 zeigt die entsprechende Verteilung. In den weiteren Kapiteln dieser Arbeit werden alle Messlinien des Gesamtziegels der Vorderseite kurz „Frontal“ und Messlinien der Seite kurz „Seitlich“ bezeichnet. Die blauen Linien werden mit „Horizontal/Mitte“ (Mitte des Ziegels) bzw. „Horizontal/Oben“ (Oberseite des Ziegels) benannt, die grünen Linien „Vertikal“ und die roten Linien „Diagonal“.



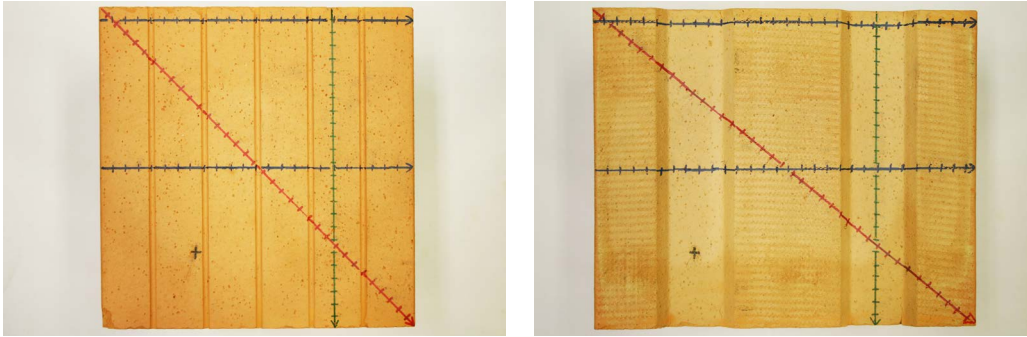


Abbildung 4.6: Verwendete Messlinien beim Planziegel: Frontal (rechts) und Seitlich (links)

Somit ergibt sich ein Benennungsschema von beispielsweise [Frontal - Horizontal/Mitte - Ohne Füllung].

## 4.2.2 Gesamtziegel

### 4.2.2.1 Vorgehensweise

In einer ersten Messreihe wurde das Schwingungsverhalten des gesamte Prüfkörpers bestimmt. Der Prüfkörper wurde entkoppelt von äußeren Einflüssen gelagert und die Übertragungsfunktionen an äquidistanten Punkten entlang mehrerer Messlinien bestimmt. Während der Messung wurden akustisch relevante physikalische Parameter wie Lufttemperatur und Luftfeuchtigkeit gemessen, welche teils auch in die Simulationen einfließen.

In einer zweiten Messreihe wurde die Füllung aus Mineralwolle entfernt und die zuvor durchgeführte Messung an exakt den selben Messpunkten und mit den selben Randbedingungen wiederholt. Dieser Schritt bewirkte eine Veränderung der Resonanzfrequenzen, der Güten und der modalen Dämpfung.

### 4.2.2.2 Messung

Zu Beginn der Messung wurde der Prüfkörper eben mittels einer Wasserwaage eingerichtet, um eine gleichmäßige Belastung der Luftpolster und Steifigkeit des Masse-Feder Systems der Lagerung zu gewährleisten. Anschließend wurden die Beschleunigungssensoren mittels Bienenwachs<sup>3</sup> montiert

<sup>3</sup>Annähernd starre Anbindung mit hoher Frequenzbandbreite, siehe auch Kapitel 2.3.5.3

und die Kabel am Prüfkörper befestigt, um Störungen der Messung aufgrund von Bewegungen der Kabel zu vermeiden<sup>4</sup>.

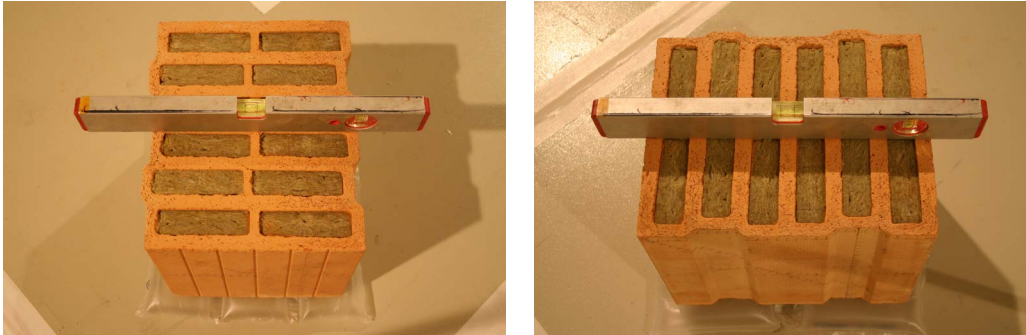


Abbildung 4.7: Einrichten des Prüfkörpers mittels Wasserwaage

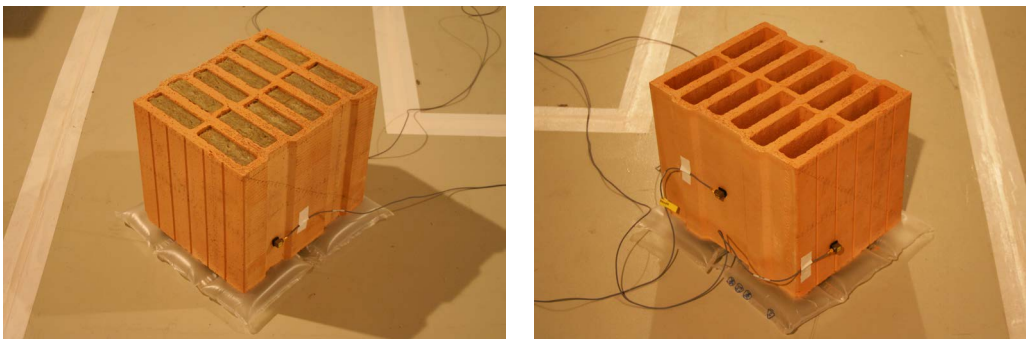


Abbildung 4.8: Lagerung des Prüfkörpers auf Luftpolster

Abbildung 4.9 zeigt eine entsprechende Messsituation. Zwar galt der Prüfkörper durch die Lagerung auf den Luftpolstern im interessierenden Frequenzbereich als entkoppelt. Aber um zusätzlich sicherzustellen, dass keine Störungen während der Messungen durch Trittschall über den Untergrund hervorgerufen werden, wurden die Messgeräte außerhalb der starren Masse aufgebaut. Diese Vorgehensweise wurde auch bei allen nachfolgenden Messaufbauten gewählt.

---

<sup>4</sup>Vermeidung des „Triboelektrischen Effektes“ (siehe auch[19, S.462]): Bewegungen des Kabels führen zu lokalen Kapazitätsänderungen - Fehlersignale durch entstehende triboelektrische Ladungen



Abbildung 4.9: Messsituation

#### 4.2.2.3 Analyse der Messergebnisse

**Datenverarbeitung:** Um die in [LABSHOP] aufgezeichneten Daten weiterzuverarbeiten und die Übertragungsfunktionen analysieren zu können, wurden diese über speziell programmierte Einlese-Routinen in [MATLAB] überführt. [LABSHOP] exportiert dabei die Daten geteilt in Real- und Imaginärteil. Entsprechend erstellte Umrechnungsroutinen in [MATLAB] ermöglichten hierbei die Darstellung in Amplituden- und Phasengänge. Diese Vorgehensweise wurde bei den gemessenen 16 Datensätze durchgeführt, als Resultat ergaben sich somit aus allen Messpunkten nach Kapitel 4.2.1.3 insgesamt 480 Übertragungsfunktionen in Amplituden- und Phasengängen über einen Frequenzbereich von  $1[Hz]$  bis  $3200[Hz]$ .

**Bestimmung der Resonanzfrequenz:** Ziel der Analyse der Modaluntersuchungen ist es einerseits, die Resonanzfrequenzen exakt zu ermitteln. Eine darartige Analyse wird nun anhand eines ausgewählten Datensatzes erörtert.

Abbildung 4.10 zeigt den Datensatz [Frontal - Horizontal/Mitte - Ohne Füllung], aufgetragen auf den bauakustisch relevanten Frequenzbereich von  $100[Hz]$  bis  $3150[Hz]$ . Jede der Kurven entspricht einer Messung in einem speziellen Punkt entlang der Messlinie. Die Legende zeigt hierbei den Abstand zum Ausgangspunkt (Rand =  $0[cm]$ ) in äquidistanten Schritten. Auffallend sind die prägnanten Resonanzspitzen, welche sich aufgrund der geringen modalen Dämpfung wegen der entfernten

Mineralwolle ergeben. Wegen der Fülle an Kurven können aus den Phaseninformationen nur bedingt Informationen gewonnen werden. Diese Darstellung eignet sich somit vielmehr für einen ersten Überblick über das Spektrum.

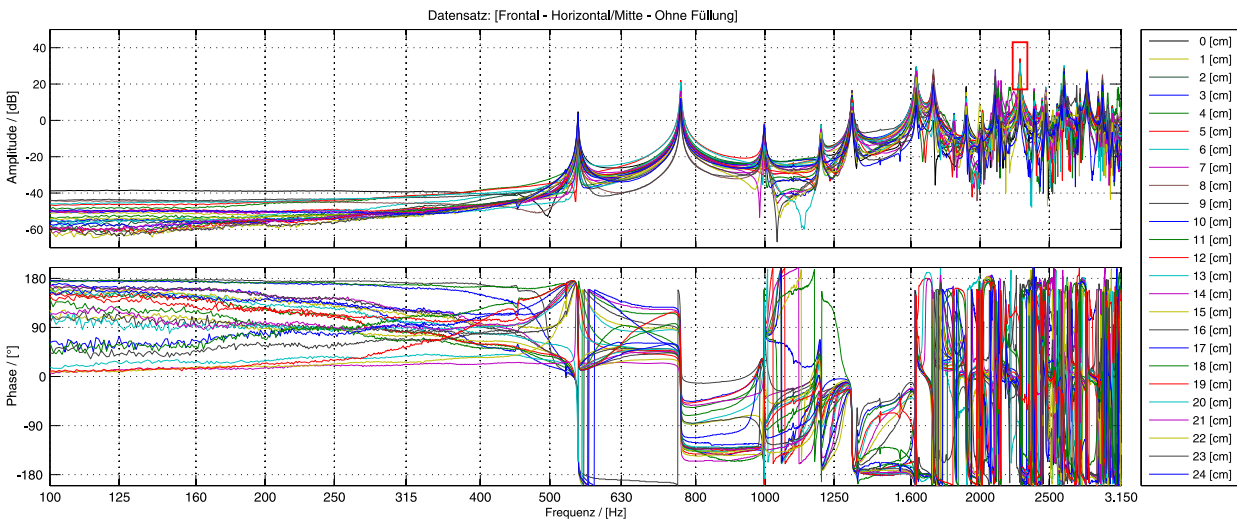


Abbildung 4.10: Amplituden- und Phasengänge der Messung [Frontal - Horizontal/Mitte - ohne Füllung]

Es wird nun eine Resonanzfrequenz zur Analyse ausgewählt. Die Wahl fiel hierbei auf jene bei rund  $2300[Hz]$ , da diese eine der ausgeprägtesten Erscheinungen darstellt (siehe Abbildung 4.10, rote Markierung).

Die Fülle an Kurven in Abbildung 4.10 ist für eine detaillierte Analyse nicht geeignet. [MATLAB] bietet hierfür im sogenannten „Plot Browser“ die Möglichkeit, beliebig Kurven ein- oder auszublenden. Nun werden zwei Minima und ein Maximum gesucht und verglichen. Eine alternative Darstellung in einem Wasserfalldiagramm wie in Abbildung 8.1 kann dabei eine Hilfestellung bieten. Diese Vorgehensweise wird gewählt um zu zeigen, dass die Resonanzfrequenz nicht exakt konstant ist, sondern einer geringen Schwankung unterliegt. Hierbei können mehrere Effekte beteiligt sein: Einerseits können geometrische Inhomogenitäten in Bezug auf die Materialstärke zu einer ortsabhängigen Biegesteifigkeit führen. Weiters könnte auch die unter Kapitel 3.3.2.4 kurz beschriebene Porosität einen Einfluss auf die Steifigkeit haben. Auch die Masse des Beschleunigungssensors kann unter Umständen eine geringe Dämpfung verursachen, welche auch eine Verschiebung der Resonanzfrequenz zur Folge hat. Diese Aspekte werden an dieser Stelle jedoch nicht näher untersucht.

Abbildung 4.11 zeigt die exakten Positionen der gewählten Übertragungsfunktionen am Planziegel. Die Messpunkte bei 5[cm], 12[cm] und 19[cm] scheinen für die Analyse von dem benötigten Maximum und den Minima der Wellenerscheinung bestens geeignet.

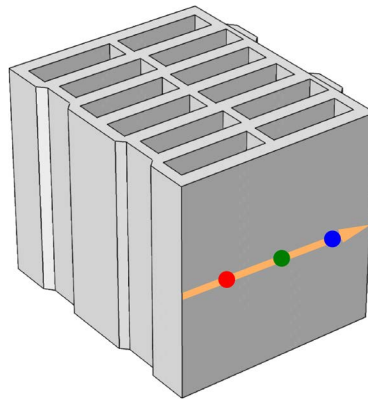


Abbildung 4.11: Positionen der gewählte Übertragungsfunktionen

Die gemessenen Übertragungsfunktionen dieser Messpunkte werden nun in einem Bode-Diagramm dargestellt. Die farbliche Codierung entspricht den Punkten in Abbildung 4.11. Zur Bestimmung der Resonanzfrequenz gibt es zwei Möglichkeiten. Eine Möglichkeit stellt das sogenannte *Peak-Amplitude* oder auch *Peak-Picking-Verfahren*<sup>5</sup> dar. Dabei wird einfach das Maximum der Amplitude gesucht. Bei Resonanzen, die eine sehr hohe Dämpfung aufweisen, aber auch im Falle einer weiteren, nahe angrenzenden Resonanzerscheinung, ist diese Vorgehensweise gegebenenfalls nicht durchführbar. Dies tritt bei Messungen am Planziegel mit Füllung auf. In diesem Fall ist es besser, die Phase heranzuziehen. Wie bereits unter Kapitel 2.3.4 erwähnt, erfährt deren Betrag im Bereich der Resonanz einen Sprung um  $-180[^\circ]$  bei einem Einmassenschwinger, wobei der Schnittpunkt bei  $-90[^\circ]$  exakt der Resonanzfrequenz entspricht. Bei dem hier vorliegenden Prüfkörper handelt es sich jedoch um ein MDOF-System (Multi Degree Of Freedom-System) welches aus der Superposition vieler einzelner Einmassenschwinger besteht. Aufgrund dieser Überlagerungen tritt kein derart ideales Verhalten im Kurvenverlauf auf. Es ist jedoch möglich, ober- und unterhalb der zu erwartenden Resonanzfrequenz Datenpunkte mit vergleichbarem Phasenverlauf zu ermitteln. Die Resonanzfrequenz ergibt sich dann bei der Hälfte des resultierenden Phasensprungs.

---

<sup>5</sup>Siehe auch [19, S.523]

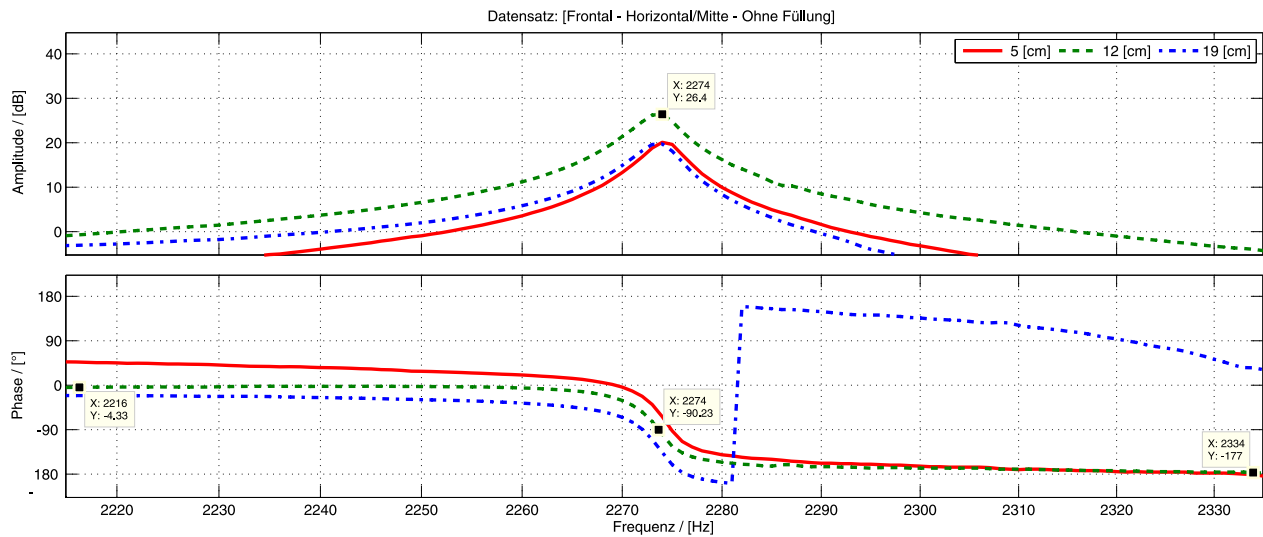


Abbildung 4.12: Auswertung der gewählten Übertragungsfunktionen

Eine Resonanzerscheinung mit annähernd idealen Eigenschaften eines SDOF-Systems ist in den nachfolgenden Abbildungen 4.20 und 4.24 zu finden.

**Modale Dämpfung:** Zur Bestimmung der modalen Dämpfung wird die sogenannte *Halbwertsbreite* herangezogen. Hierbei werden jene Frequenzen gesucht, bei denen die Amplitude um 3[*dB*] gegenüber des Maximalwerts ober- und unterhalb der Resonanzfrequenz geringer ist. Aus der Differenz dieser Frequenzen ergibt sich die entsprechende Bandbreite. Abbildung 4.13 zeigt eine derartige Vorgehensweise.

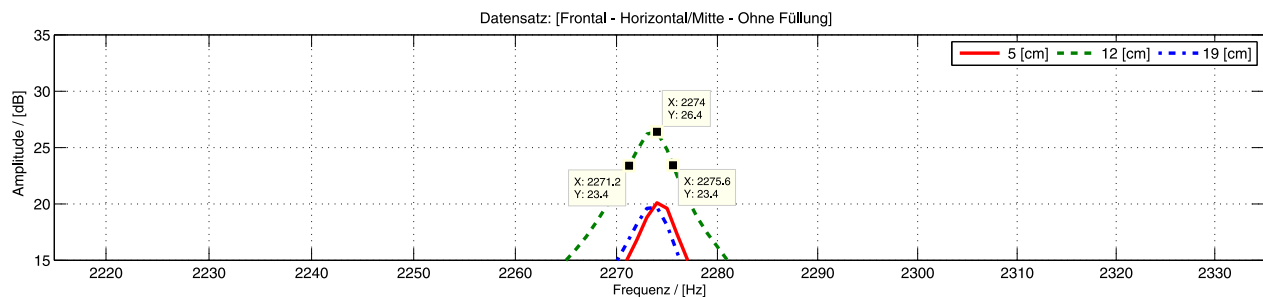


Abbildung 4.13: Bestimmung der Halbwertsbreite

Die modale Dämpfung kann über folgende Zusammenhänge ermittelt werden [19, S.523]:

$$D_{(r)} = \frac{\Delta\omega}{2\omega_{d(r)}} \quad \text{wobei : } \Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$$

Dabei ist:

$D_{(r)}$	die modale Dämpfung [–]
$\Delta\omega$	die Halbwertsbreite [Hz]
$\omega_{d(r)}$	die Resonanzfrequenz [Hz]
$\omega_2$	die obere $-3[dB]$ -Frequenz [Hz]
$\omega_1$	die untere $-3[dB]$ -Frequenz [Hz]

Die oben genannte Vorgehensweise wurde in weiterer Folge auf alle gemessenen Resonanzfrequenzen angewendet. Details dazu sind in einer Zusammenstellung in Anhang D zu finden.

### 4.2.3 Ziegelscherbe

#### 4.2.3.1 Biegebalken

Für die Bestimmung des Elastizitätsmoduls der Ziegelscherbe wird beispielsweise bei [21, S.170] die Formung des Prüfkörpers als „idealer“ Balken beschrieben, da hierfür eine klar definierte, vergleichsweise einfache Theorie zugrunde liegt. Wie bereits zuvor erwähnt (siehe Kapitel 4.2.3) soll das verwendete Messsystem eine möglichst geringe Rückwirkung auf den Prüfkörper haben, da ansonsten die Messgröße stark verfälscht wird. Ein Piezo-Beschleunigungssensor kann bereits eine derartige Wirkung verursachen. Zur Prüfung dieses Aspekts wird eine Berechnung des Massenverhältnisses zwischen Prüfkörper und Aufnehmer vorgenommen. Der Massenwiderstand des Aufnehmers soll kleiner sein als ein Zehntel des Biegewelleneingangswiderstandes des Balkens. Die entsprechende Näherungslösung (Abschätzung) lautet [21, S.171]:

$$m < \frac{M}{30n} \quad (4.2)$$

Dabei ist:

- $m$  die Masse des Aufnehmers [ $kg$ ]
- $M$  die Masse des Prüfkörpers [ $kg$ ]
- $n$  die Anzahl der Schwingungsknoten auf dem Stab  $[-]$

Die Daten und die Berechnung sind im Anhang B.4 zu finden. Die Masse des Aufnehmers betrug  $1,681[g]$ . Bei einem Gewicht von rund  $4,791[g]$  war somit bereits im Vorfeld eine starke Verfälschung der Messgröße zu erwarten. Informativ wurde eine solche Messung durchgeführt, um die Auswirkungen zu verdeutlichen.

Abbildung 4.14 zeigt den entsprechenden Messaufbau. In einem ersten Schritt wurde die Wellenform der entstehenden Biegewelle bestimmt. Um den Aufnehmer im Schwingungsbauch der Biegewelle zu positionieren, wurde er am Rand des Prüfkörpers angebracht. Die Anregung mittels Impulshammer erfolgte am anderen Ende des Balkens. Eine Beeinflussung der Welle durch die Aufhängung konnte dadurch minimiert werden, dass die Aufhängepunkte in die zuvor ermittelten Knotenpunkte der Welle verschoben wurden. Danach wurde eine verwertbare, zweite Messung durchgeführt.

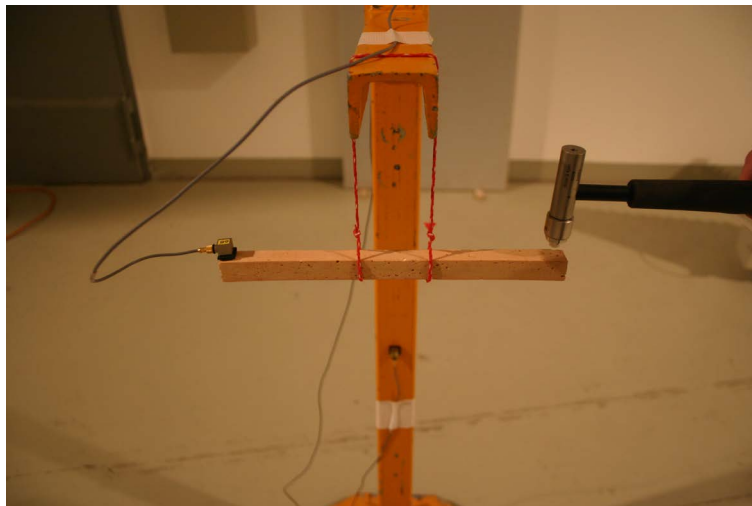


Abbildung 4.14: Ziegelscherbe: Messungen am Biegebalken - Messaufbau (informative Erst-Messung)

Die Abbildungen 4.15 und 4.16 zeigen die resultierende Wellenform und die zugehörige Übertragungsfunktion: Als Resonanzfrequenz der charakteristischen Biegewelle wurde eine Frequenz von  $613[Hz]$  bestimmt.



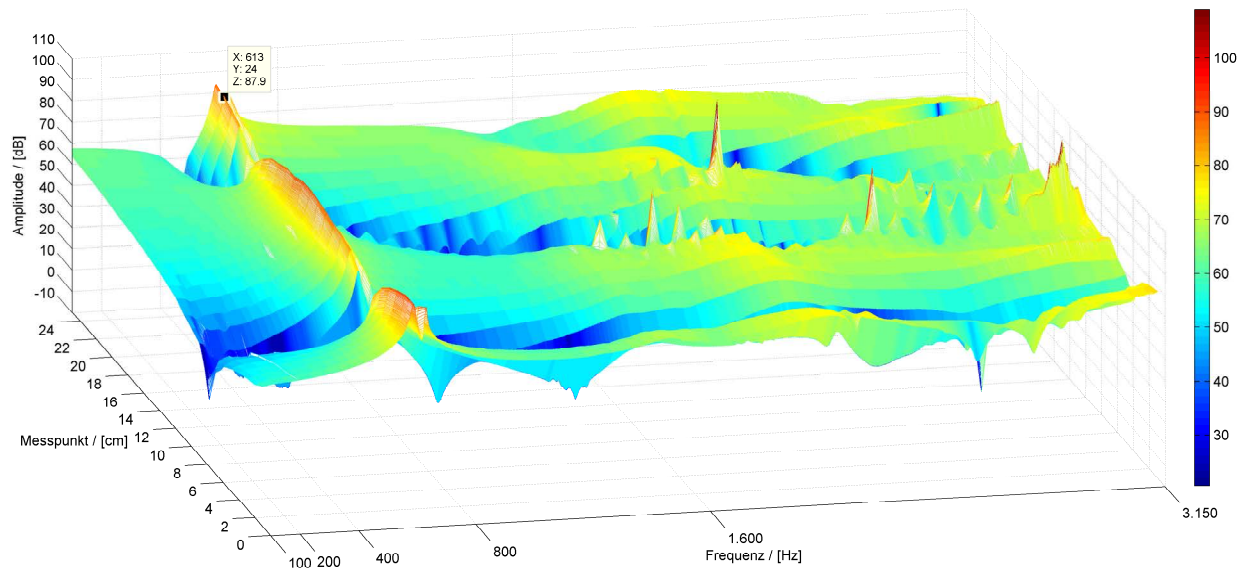


Abbildung 4.15: Biegebalken: Wellenform

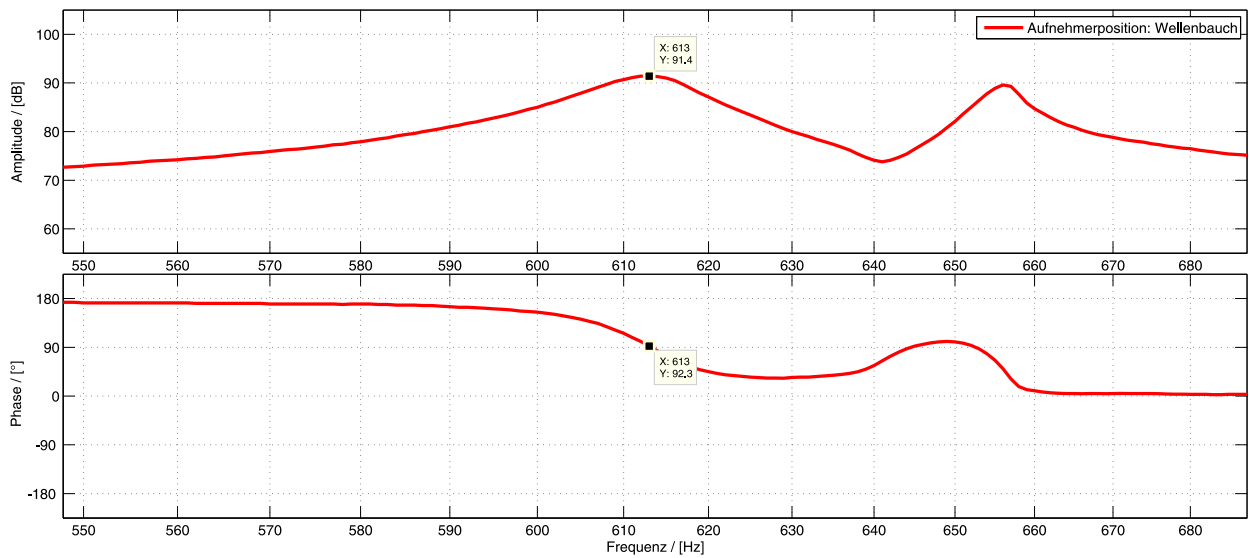


Abbildung 4.16: Biegebalken: ausgewählte Übertragungsfunktion (0[cm])

Weiterführende Berechnungen des Elastizitätsmoduls werden in Kapitel 5.1.1 durchgeführt.

#### 4.2.3.2 Kirchhoff'sche Platte - frei gelagert

Im folgenden Unterkapitel wird beschrieben, wie der Ziegel auf eine einzelne Wandplatte reduziert wurde und die zur Berechnung notwendigen Biegewellen-Parameter mittels experimenteller Modalanalyse bestimmt wurden. Hierbei kam der Lagerung der Platte eine entscheidende Bedeutung zu. Damit die Platte möglichst frei schwingen konnte, sollte sie in den Knotenpunkten gelagert werden, was die Auswirkungen auf die Biegewelle vermindert. Um dies zu ermöglichen, wurde zuerst eine informative Modalanalyse entlang der Messlinie durchgeführt, um die exakten Knotenpunkte der Biegewelle zu bestimmen. An diesen Punkten wurde dann die Platte auf drei spitzen Stahlstiften gelagert, um die Kontaktfläche zu minimieren. Weiters wurde das Gesamtkonstrukt entsprechend Kapitel 4.2.1.2 frei gelagert. Abbildung 4.17 zeigt den resultierenden Messaufbau.

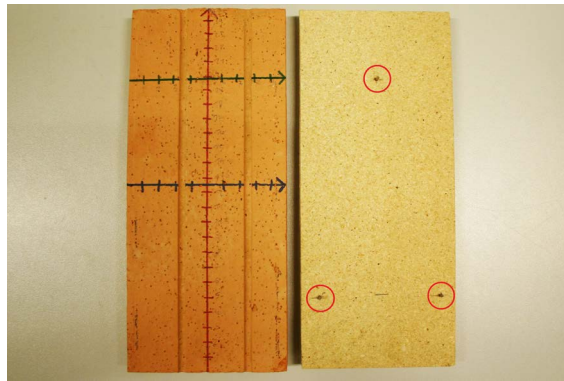


Abbildung 4.17: Ziegelscherbe: gewählte Messpositionen (links) und Untergrund mit Stahlstiften (rechts, rote Markierungen)

Die Messumgebung erwies sich als sehr empfindlich gegenüber Störungen. Somit galt es, das Schwingungsverhalten des Prüfkörpers möglichst unbeeinträchtigt zu erfassen. Wie bereits zuvor beim Balken festgestellt wurde, verursacht bereits die (sehr geringe) Masse des Beschleunigungsaufnehmers eine Dämpfung der Biegewelle, welche in weiterer Folge eine Frequenzverschiebung der Resonanz bewirkt und weiters in einer fehlerhaften Berechnung des Elastizitätsmoduls resultiert. Da der Prüfkörper in Plattenform nun jedoch eine erheblich höhere Masse aufweist als zuvor der Balken, kann die Bedingung nach Formel 4.2 klar eingehalten werden.

Abbildung 4.18 zeigt die gewählten Aufnehmerpositionen auf der Platte.



Abbildung 4.18: Aufnehmerposition im Wellenbauch (links) und im Wellenknoten (rechts)

Aus dieser Messung wurden die Wellenform und die exakte Biegewellenfrequenz bestimmt. Abbildung 4.19 zeigt ein Wasserfalldiagramm der erfassten Bewegungsform. Diese stimmt mit der Theorie einer freien Biegewelle (frei schwingendes Ende / Bauch am Rand) eindeutig überein, die Eigenform im Bereich von  $871[Hz]$  ist klar zu erkennen.

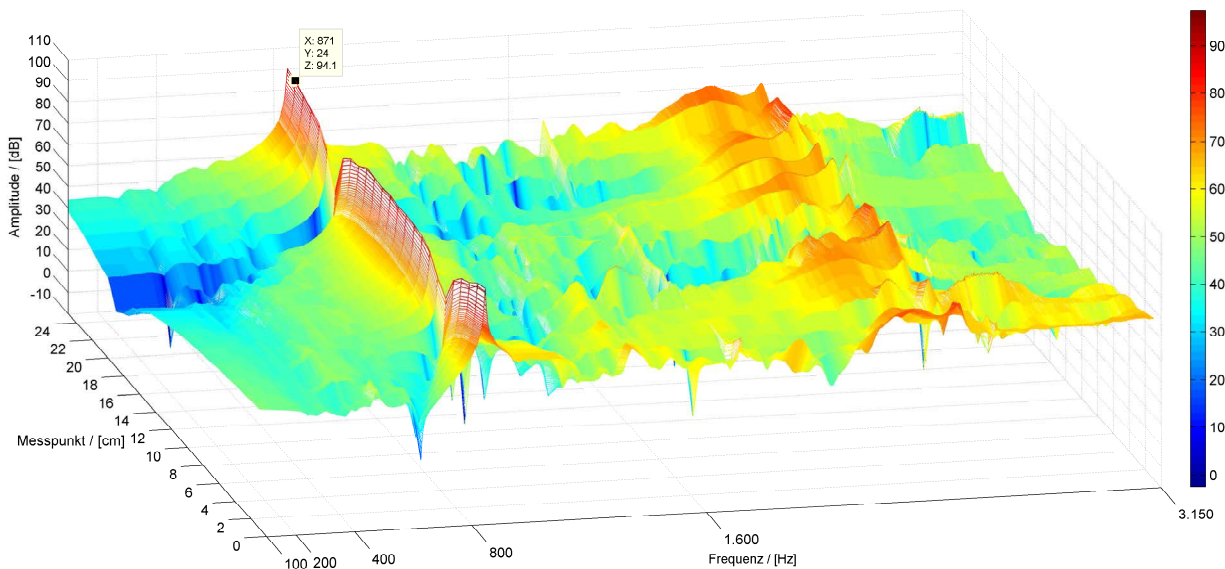


Abbildung 4.19: Frei gelagerte Platte: Wellenform

Wie bereits zuvor erwähnt, erfährt die Eigenform eine leichte Frequenzverschiebung infolge der Dämpfung durch den Aufnehmer. Abbildung 4.20 zeigt einen Ausschnitt der resultierenden Übertragungsfunktionen bei den unter 4.18 dargestellten Aufnehmerpositionen. Hierbei ist deutlich die

Frequenzverschiebung bei einer Positionierung des Sensors im Wellenbauch zu erkennen. Bei freier Lagerung wird eine Biegewelle am Rand einer Platte (Wellenbauch) maximal ausgelenkt, daher wird der Messpunkt bei  $0[cm]$  gewählt. Die Resonanzfrequenz kann auch bei einer Positionierung im Wellenknoten eindeutig extrahiert werden.

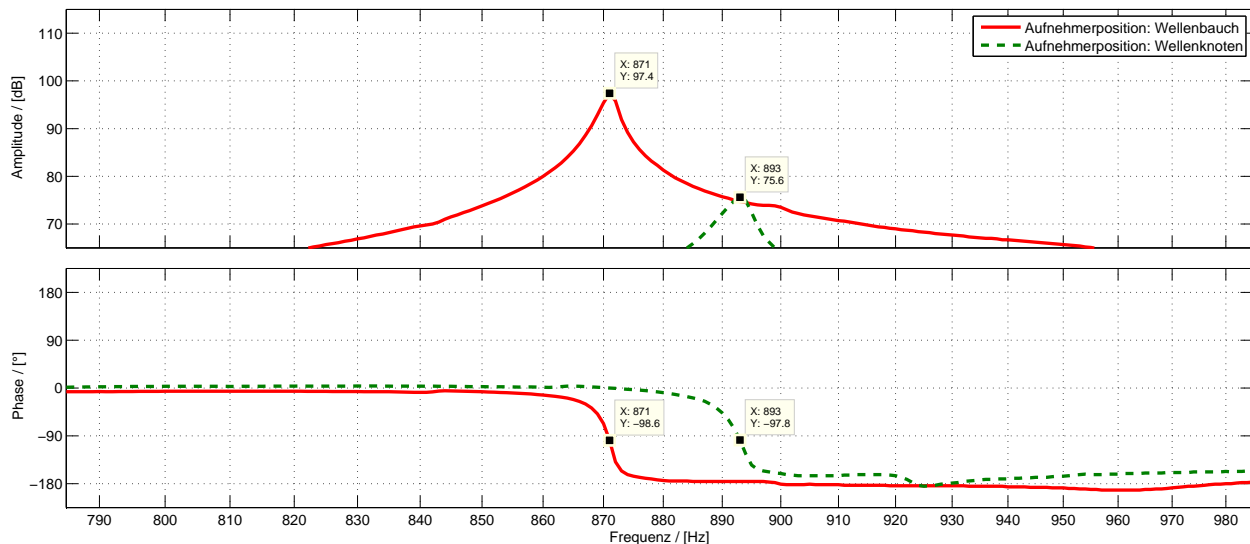


Abbildung 4.20: Frei gelagerte Platte: Ausschnitt aus der resultierenden Übertragungsfunktionen bei verschiedenen Sensorpositionen

Dies lässt die Schlussfolgerung zu, dass durch eine Positionierung im Wellenknoten die Biegewelle nur sehr gering beeinflusst wird. Daher kommt dieses Messergebnis der Realität am nächsten und die Messgröße (Frequenz) wird am wenigsten verfälscht. Dieser Wert ist somit für weitere Berechnungen im nachfolgenden Kapitel 5.1 bestens geeignet.

#### 4.2.3.3 Kirchhoff'sche Platte - gelenkig gelagert

Um einen Vergleich zwischen analytischen und numerischen Lösungen für den Fall der gelenkig gelagerten Kirchhoff'schen Platte zu ermöglichen, wurde ein entsprechender Messaufbau realisiert. Dabei wurde die im vorhergegangenen Kapitel beschriebene Platte auf der Referenzmasse (annähernd ideal starre Masse, siehe auch Kapitel 4.2.1.2) im Abstand von  $2[mm]$  positioniert. Entlang des Randes wurde eine schmale, starre Verbindung mittels Heißkleber hergestellt. Um zu verhindern, dass eine zusätzliche Steifigkeit zwischen Platte und Referenzmasse infolge eines abgeschlossenen Luftpolders

eine Rückwirkung auf das Schwingungsverhalten des Prüfkörpers erzeugt, wurden am Längsrand der Platte Nägel im Abstand von  $2[cm]$  als Abstandshalter verwendet, welche nach ihrer Entfernung eine Ventilierung des Zwischenraums erzeugten. Abbildung 4.21 zeigt den entsprechenden Versuchsaufbau.



Abbildung 4.21: „Gelenkige“ Kirchhoff'sche Platte: Abstandshalter (ganz links), Ventilierung (links), Messaufbau (rechts) und verwendete Aufnehmerposition (ganz rechts)

Die erste notwendige Randbedingung - ein bewegungsunfähiger Rand bezogen auf die translatorischen Freiheitsgrad (Schnelle  $v = 0$ ) - konnte optimal erstellt werden. Als zweite Randbedingung sollte die Verbindung zum Untergrund gelenkig ausgeführt sein (Moment  $\Theta \neq 0$ ). Diese Bedingung wurde zwar nicht optimal erreicht, es zeigt sich jedoch, dass sie nur geringen Einfluss auf die ersten modalen Erscheinungen hat.

Weiters wurde - wie schon im vorhergegangenen Kapitel - beobachtet, dass die Positionierung des Aufnehmers einen geringen Einfluss auf das Messergebnis aufgrund dessen Eigenmasse hat. Um diesen Einfluss dennoch zu minimieren, wurde der Sensor knapp neben einem erwarteten Knotenpunkt der beiden ersten Moden - neben dem Rand - platziert. Hierbei schienen die Ergebnisse am vertrauenswürdigsten zu sein.

Abbildung 4.22 zeigt die erhaltene Übertragungsfunktion, sowie die ermittelte, erste Modalerscheinung der Platte.

In einer informativen Messung wurde die erwähnte Ventilierung mit Kleber geschlossen. Bis auf eine minimale Verschiebung der Resonanzfrequenz von wenigen Hertz konnten keine wesentlichen Auswirkungen auf die ersten beiden Moden festgestellt werden.

Weiterführende Berechnungen werden nachfolgend in Kapitel 5.1.3 durchgeführt.

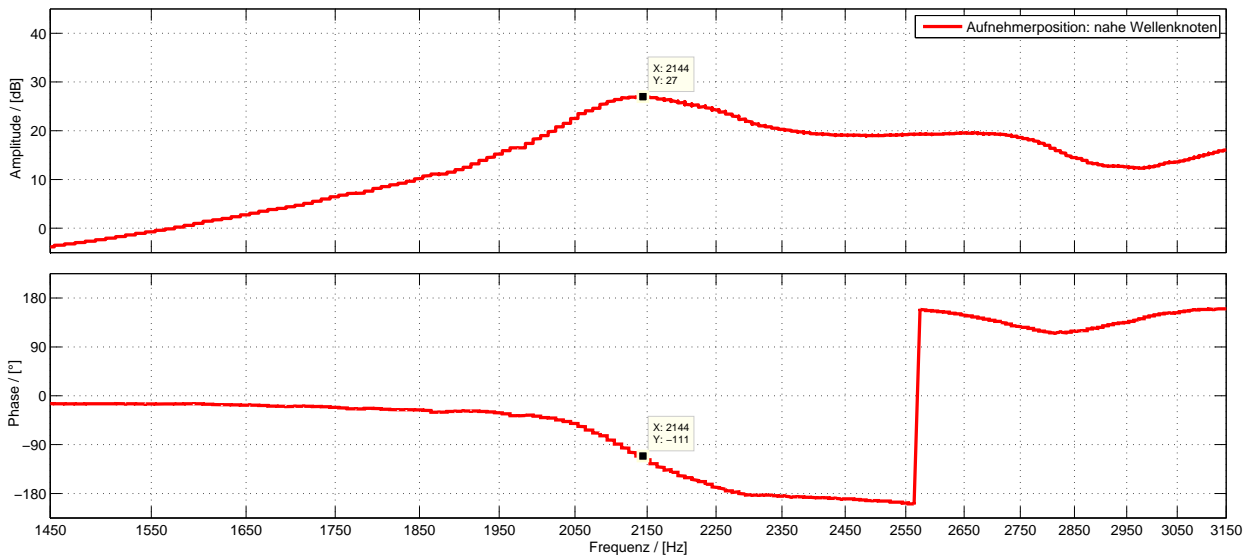


Abbildung 4.22: Gelenkig gelagerte Platte: ausgewählte Übertragungsfunktion

#### 4.2.4 Einmassenschwinger - Mineralwolle

Zur Bestimmung des dynamischen Elastizitätsmoduls der Mineralwolle (siehe auch Kapitel 5.2) wird die Resonanzfrequenz eines einfachen Masse-Feder-Systems bestehend aus einer Schicht Mineralwolle und einer Referenzmasse ermittelt. Diese Vorgehensweise geschieht in Anlehnung an [4]. Wie bereits erwähnt, ist ein in der Form ermittelter Elastizitätsmodul stark von der entsprechenden statischen Vorbelastung abhängig. Aus diesem Grund werden zwei verschiedene Referenzmassen, einmal eine Stahlplatte und einmal eine Sperrholzplatte, verwendet.

Abbildung 4.23 zeigt die zwei erstellten Versuchsaufbauten. Wie bereits bei den experimentellen Untersuchungen des gesamten Planziegels wird auch hier der massive Untergrund als ideal starre Masse verwendet. Als Referenzmasse wird einerseits ein homogener Eisenblock, andererseits eine Sperrholzplatte mit jeweils derselben, quadratischen Grundfläche verwendet. Bei beiden Platten liegen jegliche Eigen(biege)schwingungen sehr weit über dem zu erwartenden Resonanzfrequenz des Masse-Feder-Systems (zwischen 10 und 100[Hz]), was eine Missinterpretation der Übertragungsfunktionen bereits im Vorfeld ausschließt. Die Mineralwoll-Schicht wurde exakt auf die Größe der Platte zugeschnitten.

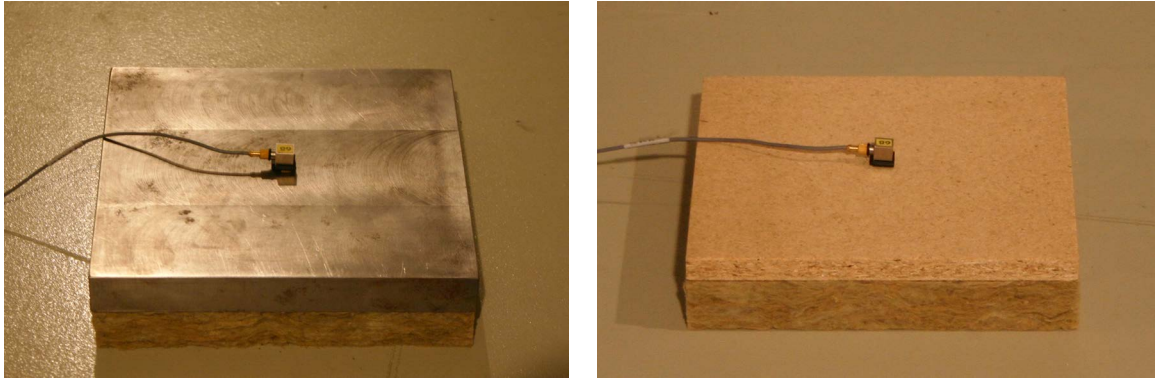


Abbildung 4.23: SDOF-System: Referenzmasse Eisenblock (links) und Sperrholzplatte (rechts)

Details wie Materialdaten und Abmessungen dieser Prüfaufbauten sind in Anhang B.6 zu finden. Als Anregungspunkt wurde das Zentrum der Platte nahe des Schwingaufnehmers gewählt, damit sich die eingebrachte Kraft möglichst gleichmäßig auf den Prüfkörper verteilt. Bei der Sperrholzplatte wurden die einzelnen Schichten mit Sprühkleber miteinander verklebt, um einen konstanten Kontakt der angrenzenden Flächen zu garantieren<sup>6</sup>.

Abbildung 4.24 zeigt die extrahierten Übertragungsfunktionen bei Verwendung der Eisenplatte. Die Ermittlung der Resonanzfrequenz aus der Amplitude der Übertragungsfunktion wird dabei etwas erschwert. Hauptgrund hierfür ist die stark begrenzte Energie, die durch den Hammerschlag aufgrund der hohen Masse der Eisenplatte in das System eingebracht werden kann. Es ergeben sich Resonanzfrequenzen von  $16,531[Hz]$  bei einfacher Wollschicht und  $12,906[Hz]$  bei doppelter Wollschicht.

Weiters wurde eine Sperrholzplatte als Referenzmasse verwendet. Abbildung 4.25 zeigt die so erhaltenen Übertragungsfunktionen. Im Vergleich zur Eisenplatte sind hier die Resonanzfrequenzen viel eindeutiger zu erkennen. Es gilt zu beachten, dass die Amplitude mit einem Faktor von 10 im Vergleich zur vorherigen Darstellung neu skaliert wurde. Es ergeben sich Resonanzfrequenzen von  $34,063[Hz]$  bei einfacher Wollschicht und  $21,438[Hz]$  bei doppelter Wollschicht.

Die ermittelte Resonanzfrequenz kann in weiterer Folge zur Berechnung des dynamischen Elastizitätsmoduls der Mineralwolle in Kapitel 5.2 herangezogen werden.

---

<sup>6</sup>Aufgrund der geringen Masse wurde ein „Hüpfen“ der Referenzmasse bemerkt, welches die Messung stark verfälscht

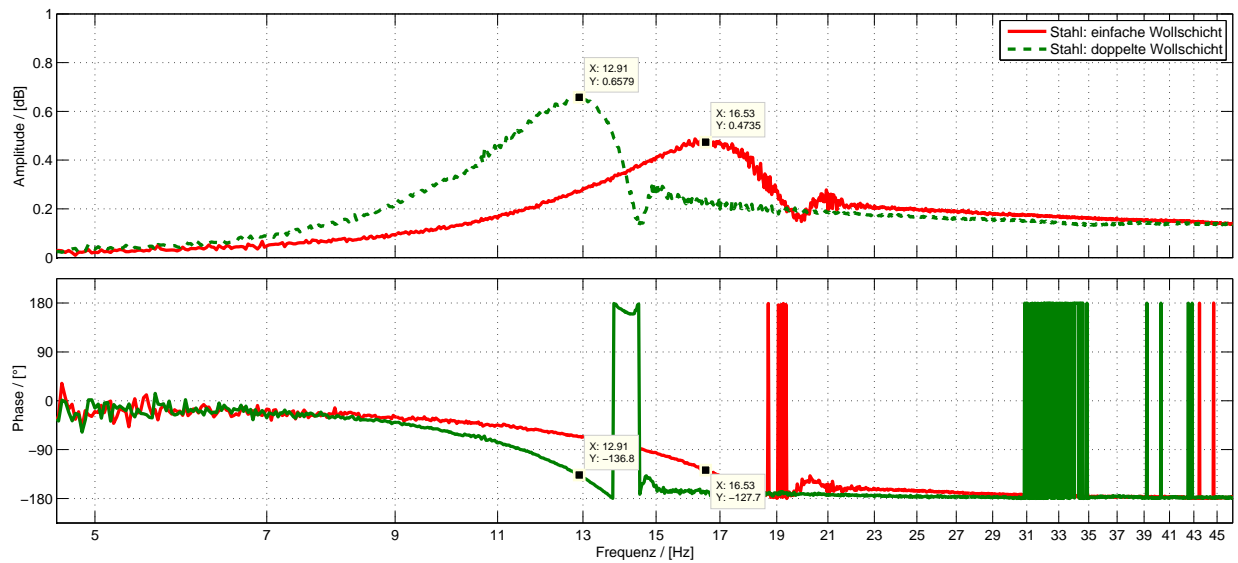


Abbildung 4.24: SDOF-System mit Eisenblock als Referenzmasse: Übertragungsfunktionen in Amplitude und Phase

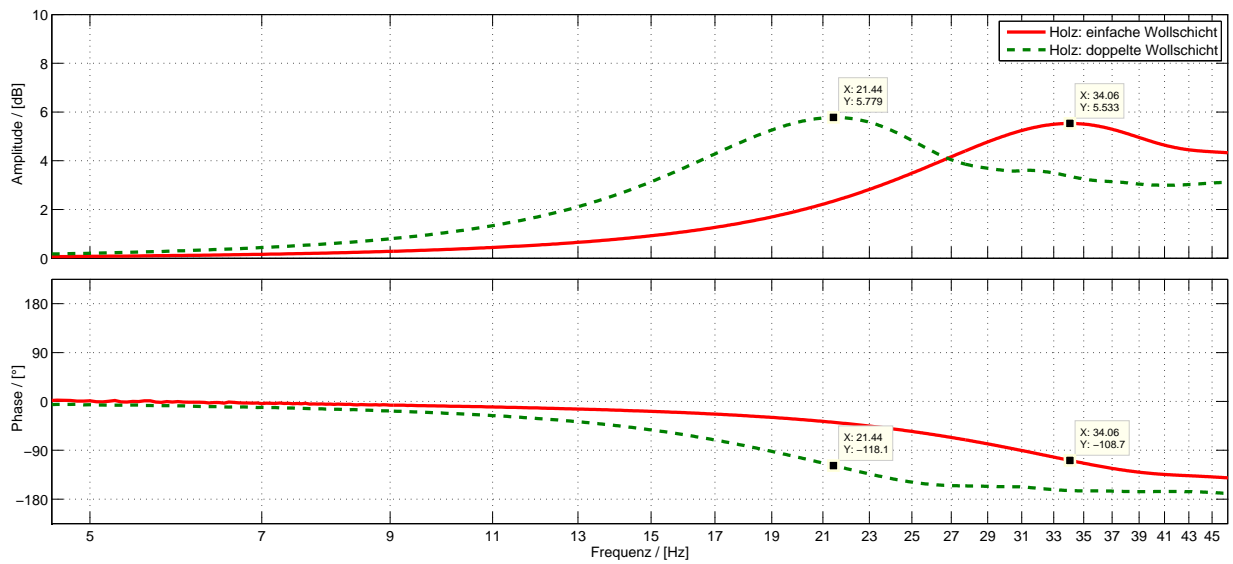


Abbildung 4.25: SDOF-System mit Sperrholzplatte: Übertragungsfunktion in Amplitude und Phase



### 4.3 Bestimmung der Körperschall-Nachhallzeit

Zur Bestimmung des Gesamtverlustfaktors ist es möglich, die Körperschall-Nachhallzeit heranzuziehen. Bei Systemen mit hoher Modendichte kann eine Auswertung des Verlustfaktors über die modale Dämpfung sehr umständlich bzw. unmöglich sein, hierfür eignet sich die Methode über die Körperschall-Nachhallzeit als schnelle und effiziente Alternative.

Ein großer Vorteil dieser Methode ist, dass keine zusätzliche Messung notwendig ist - die bereits in den experimentellen Modalanalysen ermittelten Daten können hierfür direkt herangezogen werden. Die Hammeranregung entspricht hierbei einem annähernd idealen Impuls, die gemessene Impulsantwort im Zeitbereich gibt somit Aufschluss über die Körperschall-Nachhallzeit. Für die Mittelung der diskreten Auswertepunkte können in weiterer Folge die Zeitsignale aller Messungen herangezogen werden.

Für die Auswertung der Körperschall-Nachhallzeit kam eine Toolbox für [MATLAB] des Instituts für Technische Akustik der Technischen Universität Aachen zum Einsatz [1]. Hierbei wurden die aufgezeichneten Impulsantworten in [MATLAB] eingelesen, und die Nachhallzeiten mit Hilfe des Pakets *Roomacoustics* berechnet. Üblicherweise wird die Nachhallzeit in Terzbändern angegeben. Die Frequenzauflösung wurde auf 12 Bändern / Oktave gesetzt, um mehrere Zwischenergebnisse zu erhalten. Vereinzelt ergaben sich Berechnungsfehler, diese Datensätze wurden entsprechend entfernt.

Eine Berechnung der Nachhallzeit ( $T_{60}$ ) erfordert einen Pegelabfall von mindestens  $75[dB]$ . Eine Kraft in den Prüfkörper einzuleiten, welche eine derart hohen Mindestpegel erzeugt, würde starke Nichtlinearitäten hervorrufen. Im Extremfall kann dies auch zu einer Zerstörung des Prüfkörpers führen. Folglich werden abklingende Kurven geringerer Pegelintervalle berechnet und diese auf die notwendigen  $60[dB]$  extrapoliert. Dabei gilt es, einen ausreichenden Störabstand zum Grundrauschen einzuhalten. Nach umfangreichen Analysen wurde die  $T_{15}$  mit einem Pegelabfall von  $15[dB]$  für die Extrapolation verwendet, da längere Abklingkurven bereits bei der Auswertung in der [MATLAB]-Toolbox Fehler verursachten. Weiters wurde als Mittelungsmethode der Median verwendet, da hierbei etwaige Messfehler besser unterdrückt werden und weniger in das Gesamtergebnis eingehen. Entsprechende Grafiken und Berechnungen zur Bestätigung dieser Annahmen sind im Anhang C angeführt.

Abbildung 4.26 zeigt die so ermittelten Körperschall-Nachhallzeiten des Ziegels, einmal mit und einmal ohne Füllung aus Mineralwolle. Im Zuge der experimentellen Modalanalyse wurden bei Messungen des Ziegels ohne Mineralwolle deutlich ausgeprägte Resonanzerscheinungen bestimmt (siehe

auch Kapitel 4.2.2), welche auch in der Körperschall-Nachhallzeit durch hohe Werte in den entsprechenden Frequenzbereichen erkennbar sind. Die Wolle erhöht deutlich die modale Dämpfung, was eine Abnahme der Körperschall-Nachhallzeiten bei den Resonanzfrequenzen bewirkt.

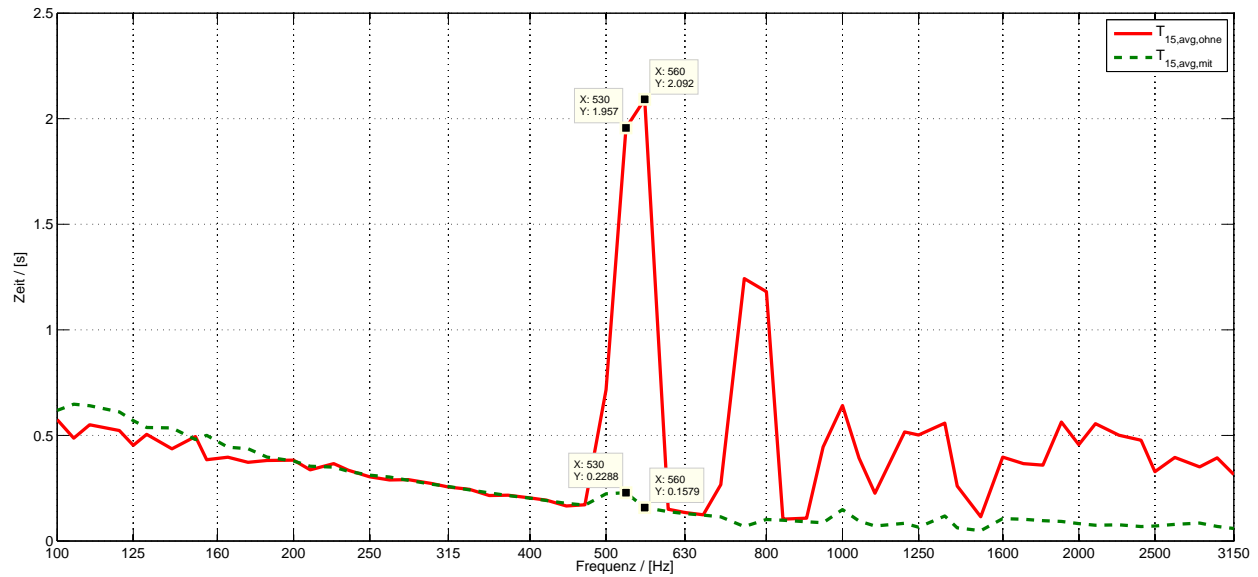


Abbildung 4.26: Vergleich von Körperschall-Nachhallzeiten ohne (rot) und mit (grün) Wolle

## Kapitel 5

# Berechnung der notwendigen Modellparameter

Wie bereits eingangs erwähnt wurde, handelt es sich bei dem hier vorliegenden Prüfkörper um ein komplexes, schwingfähiges System. Zur Bestimmung von Materialparametern mussten somit Subsysteme erstellt werden, für die auch analytische Lösungen vorhanden sind. Die Kombination einer Analyse derartiger Systeme mit den entsprechenden theoretischen Zusammenhängen ermöglicht eine korrekte Bestimmung der erforderlichen Werte der Materialparameter. Eine derartige Vorgehensweise wird nun im folgenden Kapitel vorgestellt. Aufgrund der unterschiedlichen Arten der Materialien müssen unterschiedliche Methoden angewendet werden. Die Dichte wurde bereits zuvor bestimmt (siehe Kapitel 4.1) und wird bei den vorgenommenen Berechnungen somit als konstant angenommen.

Es werden verschiedene Berechnungsmethoden untersucht und in Bezug auf ihre Anwendbarkeit im vorliegenden Fall evaluiert. Dabei zeigt sich, dass die Randbedingungen eine entscheidende Rolle spielen. Bereits geringe Abweichungen zu den Idealbedingungen können weitreichende Folgen haben, daher werden unterschiedliche Varianten und Versuchsaufbauten analysiert und evaluiert.

## 5.1 Analyse isolierter Effekte: Biegewellenerscheinungen in Stäben und Platten

### 5.1.1 Biegebalken

Wie bereits in Kapitel 3.3.2.2 erwähnt, stellt der Elastizitätsmodul den empfindlichsten Parameter bei der hier vorgestellten Modellierung dar. Aus diesem Grund wurden in Kapitel 2.3.5 detailliert verschiedenste Messmethoden zur Ermittlung der Resonanzfrequenzen unterschiedlicher Prüfkörpergeometrien und Randbedingungen vorgestellt. Nun werden die gemessenen Daten analytisch weiterverarbeitet und teils numerischen Lösungen in entsprechenden Simulationsumgebungen gegenübergestellt.

Hierbei wurde ein Biegebalken nach [21, S.171] erstellt. Bereits im Vorfeld wurde nach der Berechnung der Massenverhältnisse von Prüfkörper und Aufnehmer vermutet, dass sich hier eine starke Rückwirkung des Aufnehmers auf die Messgröße einstellt, wodurch der Messfehler sehr groß wird. Analytisch berechnet sich der E-Modul aus folgender Beziehung [21, S.172]:

$$B' = m'l_P^4 f_n^2 \frac{64}{\pi^2(2n-1)^4} \quad (5.1)$$

$$\text{durch Umformung von Formel 2.7 ergibt sich : } E = \frac{12 \cdot B'(1 - \nu^2)}{h^3} \quad (5.2)$$

Dabei ist:

$B'$	die Biegesteifigkeit des Balkens [ $Nm$ ]
$m'$	die Masse des Probestabes pro Längeneinheit ( $m'l_P$ ist somit die Gesamtmasse) [ $kg$ ]
$l_P$	die Länge des Balkens [ $m$ ]
$f_n$	die Resonanzfrequenz [ $Hz$ ]
$n$	die Anzahl der Schwingungsknoten der Biegewelle [-]
$E$	der Elastizitätsmodul [ $N/m^2$ ]
$\nu$	die Poissonzahl [-]
$h$	die Dicke des Balkens [ $m$ ]

Bei der ermittelten Resonanzfrequenz von  $613[Hz]$  und den gegebenen Abmessungen ergibt sich somit ein Elastizitätsmodul von  $0,116[GPa]$  (Rechenweg ist im Anhang B.4 angegeben). Im Vergleich zu den üblichen Wertebereichen bzw. Daten aus Datenblättern ist sofort ersichtlich, dass der berechnete Wert des Elastizitätsmoduls nicht die gewünschte Vertrauenswürdigkeit besitzt. Grund hierfür ist unter anderem die zu hohe Masse des Aufnehmers (siehe auch Kapitel 4.2.3.1).

### 5.1.2 Kirchhoff'sche Platte - frei gelagert

In einem weiteren Messaufbau wurde eine Platte erstellt, welche frei gelagert wurde. Wie bereits in Kapitel 2.3.5.1 erwähnt, stellt die freie Lagerung eine messtechnisch vergleichsweise einfacher herzustellende Randbedingung dar. Analytische Zusammenhänge zwischen den Materialparametern und den entstehenden Resonanzfrequenzen konnten in den vorangegangenen Recherchen jedoch nicht gefunden werden. Eine Herleitung in Folge einer Kombination von den entsprechenden Plattengleichungen und der passenden Randbedingung wäre zwar denkbar, soll aber nicht Bestandteil dieser Arbeit sein, da bereits bei ersten informativen Simulationen ersichtlich war, dass diese Variante ebenfalls nicht sehr vertrauenswürdig erscheint. Somit wurden in dieser Messung die Resonanzfrequenz von  $871[Hz]$  bei einer eindeutigen Wellenform mit zwei Knotenpunkten längs der Platte ermittelt. In weiterer Folge wurde ein Simulationsmodell erstellt, mit dem eine numerische Lösung des Sachverhaltes ermöglicht wurde. Hierbei wurde über einen Parametersweep (siehe auch Kapitel 3.7.2) die Resonanzfrequenz bei der entsprechenden Wellenform in Abhängigkeit vom Elastizitätsmodul variiert und angepasst, wobei die anderen relevanten Parameter konstant gehalten wurden. Abbildung 5.1 zeigt die Lösung dieser Simulation.

Um die in der Modalanalyse gemessene Resonanzfrequenz von  $871[Hz]$  zu erhalten, ist in der Simulation ein Elastizitätsmodul von  $12,07[GPa]$  notwendig. Dieser Wert liegt zwar laut Fachliteratur im üblichen Wertebereich dieses Material (siehe Kapitel 3.3.2.6), im Vergleich zu den Daten aus Datenblätter weicht er doch stark ab. Dies kann mehrere Gründe haben:

**Messung:** Ein derart frei schwingendes System reagiert empfindlich auf störende Einwirkungen. Neben dem im vorigen Kapitel bereits erwähnten Einfluss des Beschleunigungsaufnehmers kann gegebenenfalls auch die Lagerung auf den Luftpolstern eine merkliche Rückwirkung haben. Eine alternative Messung mit entsprechend gefederten Aufhängungen und einem berührungslosem Messsystem - beispielsweise mit einem Laser-Vibrometer - könnten hierbei Abhilfe schaffen, dieser Aspekt wurde jedoch nicht weiter untersucht.

**Simulation:** Die Platte wurde als linear elastisches, isotropes Material modelliert und somit stark vereinfacht. In der Realität können Effekte wie die Porosität bei derart kleinen Prüfkörpern strukturdynamisch eine starke Rolle spielen, da die eingeschlossene Luft gegebenenfalls die Biegesteifigkeit senken kann, somit auch der entsprechende Elastizitätsmodul und die zugehörige Resonanzfrequenz. Die Implementierung als poroelastisches Material wäre möglich (siehe Kapitel 3.3.2.4), jedoch steigt hierbei die Anzahl an notwendigen Materialkennwerten enorm und folgedessen die Fehleranfälligkeit der Methode (siehe auch Kapitel 2.4). Aus diesen Gründen scheint eine darartige Variante zur Ermittlung eines passenden Wertes für den Elastizitätsmodul nicht verwendbar.

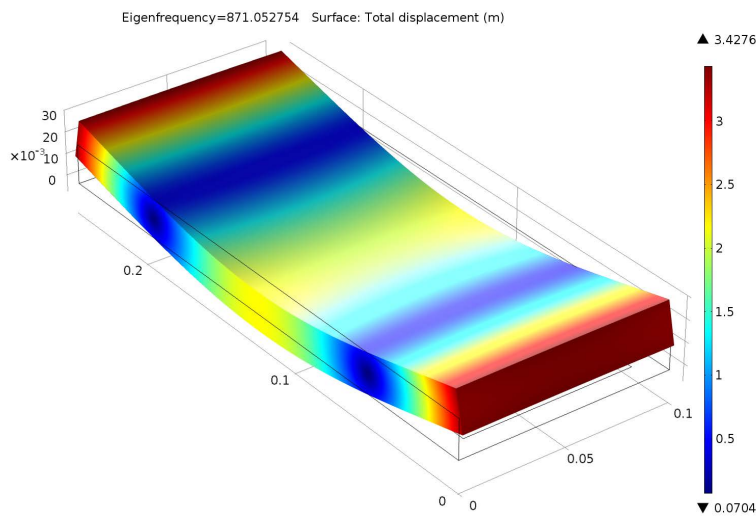


Abbildung 5.1: Frei gelagerte Kirchhoff'sche Platte: Anpassung der Resonanzfrequenz

### 5.1.3 Kirchhoff'sche Platte - gelenkig gelagert

Als dritte Variante wurde der Prüfkörper in Plattenform allseitig gelenkig gelagert. Analytische Lösungen dieser Anordnung als Basis der Kirchhoff'schen Plattentheorie ist diverser Fachliteratur entnehmbar, auf eine entsprechende Herleitung wird an diesem Punkt verzichtet. Die Eigenfrequenzen einer solchen Platte ergeben sich zu [19, S.213]:

$$f_{mn} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{B'}{m''}} \left[ \left( \frac{m}{l_x} \right)^2 + \left( \frac{n}{l_y} \right)^2 \right] \quad m, n = 1, 2, \dots \quad (5.3)$$

Dabei ist:

$f_{mn}$	die Eigenfrequenzen der Platte [ $Hz$ ]
$B'$	die Biegesteifigkeit der Platte [ $Nm^2$ ]
$m''$	die flächenbezogene Masse der Platte [ $kg/m^2$ ]
$l_x, l_y$	die Kantenlängen der Platte [ $m$ ]

In einem entsprechenden Messaufbau (siehe Kapitel 4.2.3.3) konnten die ersten beiden Moden eindeutig bestimmt werden. Die erste Mode hatte eine Resonanzfrequenz von  $2144[Hz]$ , die zweite Mode eine Resonanzfrequenz von  $2795[Hz]$ .

In weitere Folge wurde Formel 5.3 umgeformt und nach der Biegesteifigkeit ( $B'$ ) gelöst. Die Definition der Biegesteifigkeit wurde ebenfalls umgeformt und nach dem Elastizitätsmodul ( $E$ ) gelöst<sup>1</sup>. Werden diese Zusammenhänge in einem Tabellenkalkulationsprogramm wie z.B. [EXCEL] implementiert, ergibt dies eine Matrix, in der in Abhängigkeit der ermittelten Resonanzfrequenzen die zugehörigen Elastizitätsmoduln ermittelt werden können. Eine entsprechende Berechnung ist unter Kapitel B.5 zu finden.

Es ergeben sich für die erste Mode ( $m = 1, n = 1$ ) ein Elastizitätsmodul von  $6,054[GPa]$  und für die zweite Mode ( $m = 2, n = 1$ ) ein Elastizitätsmodul von  $5,127[Pa]$ . Wie bereits in Kapitel 4.2.3.3 erwähnt, sind höherfrequente Moden nicht verwendbar, da einerseits ab einer bestimmten Frequenz die durch den Hammerschlag eingebrachte Energie stark abnimmt<sup>2</sup>, andererseits die dämpfenden Mechanismen wie das Eigengewicht des Aufnehmers und die nicht ideal gelenkige Lagerung immer mehr Einfluss auf die Messung nehmen. Auch bei Mode zwei wurde bei der Messung ein Einfluss durch die Positionierung des Aufnehmers beobachtet. Mode eins schien diesbezüglich keine wesentliche Verschiebung bezüglich ihrer Frequenz zu erfahren. Wie auch schon in [21, S.171] ersichtlich, nimmt beim Balken die Stärke des Einflusses des Aufnehmers mit der Anzahl an Wellenknoten (gleichbedeutend mit der Ordnung der Mode) zu.

Aus diesen Gründen wurde die erste Mode zur Berechnung des Elastizitätsmoduls herangezogen, wodurch sich einen Wert von  $E = 6,054[GPa]$  ergab.

---

<sup>1</sup>Siehe auch Formel 5.2

<sup>2</sup>Begrenzung der Bandbreite der Messung, siehe auch Kapitel 2.3.5.3

## 5.2 Analyse isolierter Effekte: Einmassenschwinger

Zur Berechnung des Elastizitätsmoduls der Mineralwolle wurden mehrere entsprechende Messaufbauten in Form von Einmassenschwingern<sup>3</sup> erstellt (siehe Kapitel 4.2.4). Über die gewonnenen Resonanzfrequenzen konnte der Elastizitätsmodul über folgenden mathematischen Zusammenhang ermittelt werden [21, S.169]:

$$E' = 4\pi^2 f_R^2 m \frac{l_P}{S} \quad (5.4)$$

Dabei ist:

$E'$	der Realteil des Elastizitätsmoduls [ $N/m^2$ ]
$f_R$	die Resonanzfrequenz des SDOF-Systems [ $Hz$ ]
$m$	die Referenzmasse [ $kg$ ]
$l_P$	die Dicke der Probe (Mineralwolle) [ $m$ ]
$S$	die Fläche der Probe [ $m^2$ ]

Die Berechnungen und die entsprechenden Ausgangsdaten der verschiedenen Varianten sind im Anhang B.6 angeführt. Hierbei ist klar ersichtlich, dass bei dieser Anordnung der resultierende Elastizitätsmodul sehr stark von der statischen Belastung abhängig ist. Bereits in den entsprechenden Grundlagenkapiteln und bei der Definition der Wertebereiche der Parameter wurde dieser Effekt beschrieben.

Um die Messmethode zu verifizieren und mit Herstellerdaten vergleichbar zu machen, wurde zuerst ein Eisenblock mit einer statischen Vorlast von etwa  $2[kPa]$  verwendet. Dies entspricht weitgehend zusammen mit den Prüfkörperabmessungen den Vorgaben der Norm (siehe auch [2]) zur Bestimmung von dynamischen Steifigkeiten. Somit wurden die Ergebnisse der Messung mit Daten anderer Produkte des selben Herstellers vergleichbar.

Bei dem hier verwendeten Prüfkörper wurde die Mineralwolle in Plattenformen in die Löcher eingebracht. Bei einer Entfernung der Füllung wurde eine geringe Vorspannung bzw. Kompression bemerkt, die lediglich dazu dienen soll, die Position des Materials bei Bewegungen des Planziegels zu fixieren.

---

<sup>3</sup>Siehe auch Kapitel 2.3.4



Aus diesen Gründen scheint die Messung mit einer Lage Mineralwolle und der Sperrholzplatte als Referenzmasse jene Lösung zu sein, die der Realität am nächsten kommt. Hierbei beträgt die Flächenbelastung rund  $89[Pa]$ . Somit wird für alle weiteren Berechnungen und Simulationen der entsprechende Wert für der Elastizitätsmodul von  $12,310[kPa]$  verwendet (der Rechenweg ist im Anhang B.6 angeführt).

### 5.3 Berechnung der Strukturdämpfung

Grundsätzlich besteht die Möglichkeit, den Gesamtverlustfaktor über die Körperschall-Nachhallzeit zu berechnen. Hierbei wurden die Messdaten der Modalanalyse herangezogen, was den Messaufwand deutlich verkürzt<sup>4</sup>. Der (frequenzabhängige) Gesamtverlustfaktor ergibt sich über den folgenden Zusammenhang [21, S.173]:

$$\eta = \frac{\ln 10^6}{\omega T} \quad (5.5)$$

Dabei ist:

$\eta$  der Gesamtverlustfaktor  $[-]$

$\omega$  die Kreisfrequenz  $[Hz]$

$T$  die Körperschall-Nachhallzeit bei der entsprechenden Kreisfrequenz  $[s]$

Der so ermittelte Gesamtverlustfaktor über den betrachteten Frequenzbereich kann in weiterer Folge in der numerischen Simulation frequenzabhängig implementiert werden. Abbildung 5.2 und Tabelle 5.1 zeigen die entsprechenden Werte, einmal mit und einmal ohne Mineralwolle. Wie erwartet erhöht die Wolle ab etwa  $480[Hz]$  den Gesamtverlustfaktor erheblich. Klar ersichtlich sind auch die Einbrüche der Dämpfung bei den bereits ermittelten Resonanzfrequenzen.

---

<sup>4</sup>Siehe auch Kapitel 4.3

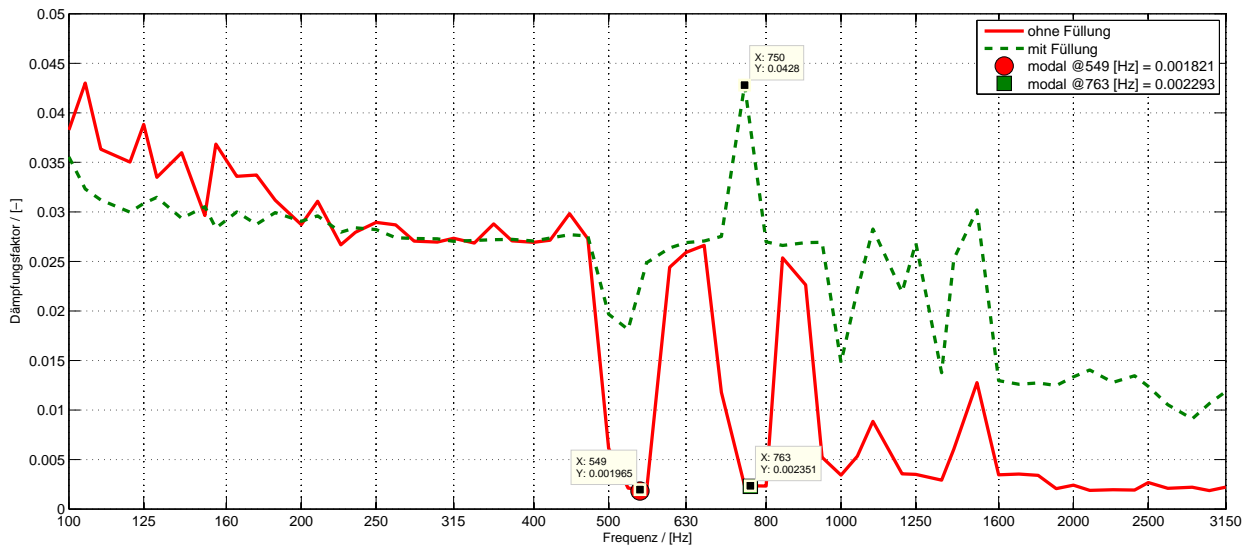


Abbildung 5.2: Vergleich von Dämpfungsfaktoren ohne Wolle / mit Wolle / Werte aus modaler Dämpfung

Frequenz [Hz]	Dämpfungsfaktor		
	mit Wolle [-]	ohne Wolle [-]	Differenz [-]
100	0,036	0,038	-0,003
125	0,031	0,039	-0,008
165	0,030	0,034	-0,004
200	0,029	0,029	0,000
315	0,027	0,027	0,000
400	0,027	0,027	0,000
500	0,020	0,006	<b>0,014</b>
630	0,027	0,026	0,001
800	0,027	0,002	<b>0,025</b>
1000	0,015	0,003	0,011
1250	0,027	0,004	<b>0,023</b>
1600	0,013	0,003	0,009
2000	0,013	0,002	0,011
2500	0,012	0,003	0,010
3150	0,012	0,002	0,010

Tabelle 5.1: Vergleich von Gesamtverlustfaktoren

Ein Vergleich mit den entsprechenden modalen Dämpfungsfaktoren zeigt, dass die Werte für den Ziegel mit und ohne Mineralwolle bei allen Frequenzen relativ nahe beieinander liegen. Somit

kann diese Variante zur Bestimmung des Gesamtverlustfaktors auch als zeitsparende Alternative zur unter Kapitel 4.2.2.3 beschriebenen Bestimmung der modalen Dämpfung angesehen werden. Hierbei gilt jedoch die Wahl einer ausreichenden Frequenzauflösung bei der Bestimmung der Körperschall-Nachhallzeiten zu beachten.

## Teil III

# Verifizierung und Validierung

## Kapitel 6

# Verifizierung des Berechnungsmodells

Wie bereits unter Kapitel 2.4 erwähnt wurde, dient die Verifizierung der Überprüfung der korrekten Wiedergabe des mathematischen Modells durch das numerische Modell. Dabei können der Diskretisierungsfehler und der numerische Fehler kontrolliert werden.

Die maximal darstellbare Frequenz bei der Berechnung hängt im Allgemeinen von der Dichte der Vernetzung und der Mindestanzahl an Freiheitsgraden ab (siehe auch Kapitel 2.1.1). Bei den experimentellen Messungen war ersichtlich, dass im oberen Frequenzbereich eine sehr hohe Modendichte herrscht, welche von den Eigenschwingungen der Ziegelwände hervorgerufen wird. Die höchste darzustellende Frequenz bzw. die dazugehörige Wellenlänge bestimmt somit die Dichte der Vernetzung.

Da in dieser Arbeit die kommerziell erhältliche Software „COMSOL Multiphysics“ verwendet wird, kann von einer Richtigkeit der implementierten Berechnungsalgorithmen ausgegangen werden. Eine umfangreiche Verifizierung scheint vielmehr in Softwarelösungen, bei denen die komplette Entwicklungsumgebung eigenständig programmiert wurde, notwendig. Weiters wurde bereits unter Kapitel 3.5 eine entsprechende Mindestanzahl an *DOF* berechnet. Aufgrund der Tatsache, dass die Anzahl an *DOF* bei allen Simulation weit über dem berechneten Mindestmaß liegen, kann die Richtigkeit der Vorgehensweise nochmals unterstrichen werden.

Wie bereits unter Kapitel 2.4.2 erwähnt, spielt der Modellierungs- und Parameterfehler eine viel größere Rolle. Hierbei gilt es, die geometrische Diskretisierung und die gewählten Randbedingungen, wie auch den Parameterfehler bezüglich der Eingangsparameter zu überprüfen. Die entsprechende Vorgehensweise wird nun im nachfolgenden Kapitel diskutiert.

# Kapitel 7

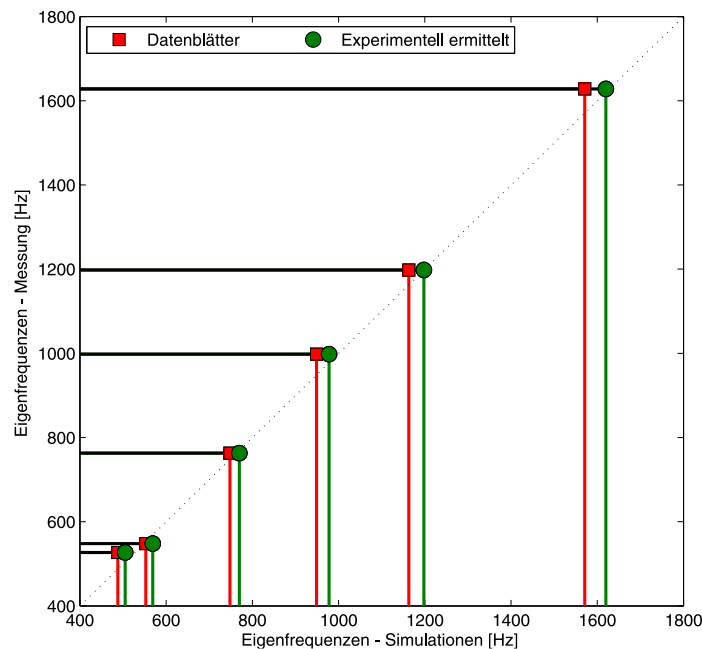
## Validierung der numerischen Simulationen

In Kapitel 2.4.2 wurde bereits erwähnt, dass der Modellierungs- und der Parameterfehler die bestimmenden Größen im Bezug auf den Gesamtfehler der numerischen Simulation darstellen. Im Zuge der Validierung wird untersucht, inwieweit das physikalische (reale) Modell durch das mathematische Modell repräsentiert wird. Hierfür werden die Berechnungsergebnisse mit den entsprechenden experimentell ermittelten Messdaten verglichen, wobei zu beachten gilt, dass auch die Messungen bis zu einem bestimmten Grad fehlerbehaftet sind.

### 7.1 Lage der Eigenfrequenzen - Prüfkörper ohne Mineralwolle

Eine Möglichkeit für die Validierung der numerischen Simulation bietet die Untersuchung der Lage der Eigenfrequenzen. [COMSOL] bietet die Möglichkeit, die Eigenfrequenzen der modellierten Struktur durch Lösen der homogenen Differentialgleichungen des Gleichungssystems direkt zu berechnen. Diese Methode bietet sich für Strukturen mit einer geringen Modendichte an, da hierbei die Modenformen von Messung und Simulation eindeutig zugeordnet werden können. Bei dem hier verwendeten Prüfkörper ist dies bei der gemessenen Situation ohne Mineralwolle der Fall. Die Eigenfrequenzen werden in der Situation mit allen in den vorherigen Kapiteln ermittelten Parametern berechnet, wobei ein direkter Vergleich mit Simulationen auf Basis von Daten aus Datenblättern gezogen wird.

Abbildung 7.1 zeigt einen Vergleich der numerisch und experimentell ermittelten Resonanzfrequenzen bei Verwendung verschiedener Materialparameter für den Planziegel ohne Mineralwolle. An den Achsen des Diagramms sind die Eigenfrequenzen der Simulationen (x-Achse) und jene der Messungen (y-Achse) aufgetragen. Die diagonale Linie stellt die vollständige Übereinstimmung der Frequenzen dar. Über die Schnittpunkte der Linien sind die Abweichungen erkennbar. Es ist klar ersichtlich, dass die Verwendung von Parametern exklusiv aus Datenblättern nicht die gewünschten Ergebnisse liefern. Infolge der in dieser Arbeit geschilderten Vorgehensweise kann die mittlere Abweichung<sup>1</sup> von der Messung und von der Simulation (Basis = Messung) von 3,54[%] auf 1,89[%] vermindert werden, was die Präzision der Darstellung durch das Simulationsmodell deutlich erhöht.



Mode #	Resonanzfrequenzen [Hz]			Abweichung [%]	
	$f_{res,meas}$	$f_{res,FEM,D}$	$f_{res,FEM,Exp}$	$f_{res,FEM,D}$	$f_{res,FEM,Exp}$
1	527	488,08	505,23	-7,39	-4,13
2	549	552,78	569,35	0,69	3,71
3	762	747,91	769,87	-1,85	1,03
4	998	948,89	977,80	-4,92	-2,02
5	1198	1163,14	1198,29	-2,91	0,02
6	1627	1571,65	1620,19	-3,46	-0,42

Abbildung 7.1: Übereinstimmung der Eigenfrequenzen von Messungen und Simulationen

<sup>1</sup>Arithmetischer Mittelwert der Beträge der prozentualen Abweichungen

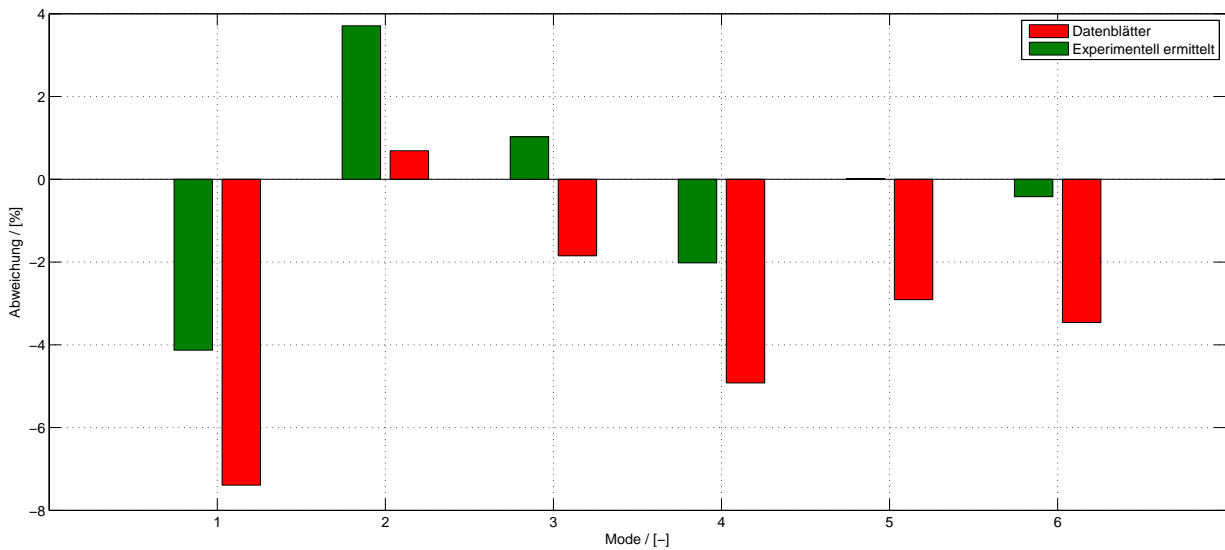


Abbildung 7.2: Validierung: Prozentuale Abweichung der Eigenfrequenzen von Messungen und Simulationen

Materialparameter	Mittlere Abweichung [%]
Herstellerangaben	3,54
Experimentell ermittelt	1,89

Tabelle 7.1: Gesamtabweichung der Simulation bei verschiedenen Materialparametern

Bei diesem Vergleich ist ersichtlich, dass sich bei der ersten Mode bei  $527[Hz]$  starke Abweichungen von mehr als  $4[\%]$  einstellen. Dieser Umstand könnte darauf zurückzuführen sein, dass es sich hierbei um eine Torsionsmode handelt, daher wird auch der Untergrund - also die Lagerung - bei der Betrachtung miteinbezogen. Die Messgröße erfährt anscheinend aufgrund der Rückwirkung der elastischen Lagerung eine Verschiebung der Frequenz. Dadurch, dass dieser Effekt nicht in der numerischen Simulation implementiert ist, ergibt sich diese beobachtete Abweichung.



## 7.2 Lage der Eigenfrequenzen - Prüfkörper mit Mineralwolle

Im Zuge der Berechnungen der Eigenfrequenzen werden in der Simulation die homogenen Lösungen des Gleichungssystems ermittelt. Die Eigenfrequenzen haben eine definierte Form, jedoch eine undefinierte Amplitude (siehe auch [28, S.151]). Es wird somit jede Resonanz miteinbezogen, unabhängig von ihrem Beitrag zum Gesamtschwingungsverhalten. Wird die Wolle berücksichtigt, entsteht eine Vielzahl an zusätzlichen Systemresonanzen, welche jedoch praktisch keine Bedeutung haben. Abbildung 7.3 zeigt derartige Resonanzen.

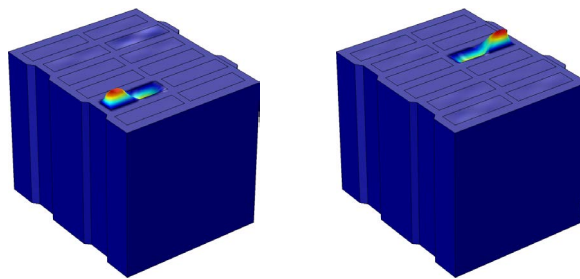


Abbildung 7.3: Lochresonanzen aufgrund der Einbeziehung der Wolle (rund  $505[Hz]$ )

Aufgrund der hohen Modendichte wären mehrere tausend Eigenfrequenzen zu berechnen, um den gesamten interessierenden Frequenzbereich abzudecken. In weiterer Folge ist eine eindeutige Zuordnung der Schwingungsformen nicht praktikabel und aufwandsadäquat.

Alternativ besteht die Möglichkeit, Übertragungsfunktionen aus der Simulation zu extrahieren, um sie dann entsprechend der in Kapitel 4.2.2.3 beschriebenen Vorgehensweise zu analysieren. Es werden die exakten Positionen für Anregepunkt und Aufnahmepunkt in der Simulation implementiert, wie auch alle sonstigen bei den experimentellen Modalanalysen gewählten Randbedingungen. Im Falle der Simulation ist es jedoch praktikabler, an einem Punkt anzuregen und die Systemantwort an den interessierenden Punkten auszuwerten. Unter Annahme eines linearen und reziproken Systems (siehe auch Kapitel 2.3.2) erscheint diese Vorgehensweise legitim.

Es zeigte sich, dass auch diese Methode nicht effizient ist, in erster Linie aufgrund der sehr hohen Berechnungszeiten von  $14 : 04 : 27[h : min : sec]$ . Weiters müssen die Moden und die Modalparameter einzeln analysiert und ausgewertet werden. Die Mineralwolle führt zu einer Erhöhung der modalen Dämpfung und somit zur Verminderung der Güte, wodurch keine derart ausgeprägten Amplitudenspitzen wie in Abbildung 4.10 entstehen, was die Analyse zusätzlich erschwert.

---

Zur Validierung der Werte der Mineralwolle kann aber auch das in Kapitel 9 ermittelte Schalldämm-Maß herangezogen werden. Die Mineralwolle hat Einfluss auf die Strukturschwingungen und erhöht sehr stark die Dämpfung, was einen entsprechenden Einfluss im Schalldämm-Maß hat. Wie in Abbildung 5.2 klar ersichtlich ist, ergeben sich dabei nur sehr geringe Abweichungen von den experimentellen Messungen. Das Modell kann somit als validiert angesehen werden.

Teil IV

Anwendung

# Kapitel 8

## Interpretation der Schwingungsformen

### 8.1 Vorgehensweise

Die experimentelle Modalanalyse eignet sich sehr gut zur Bestimmung des Schwingverhaltens einer bestimmten Struktur. Parameter wie die Resonanzfrequenzen oder die modale Dämpfung können direkt bestimmt werden. Bei einfachen Geometrien wie z.B. Platten können mit ausreichend theoretischen Wissen auch ohne Probleme die Modenformen und die entsprechenden Wellenlängen ermittelt werden (siehe auch Kapitel 4.2.3). Mit zunehmender Komplexität der Struktur steigt jedoch der Messaufwand wie auch die Gefahr der Fehlinterpretation der erhaltenen Daten stark an.

Ein entsprechendes Finite-Elemente-Simulationsmodell kann hierbei Abhilfe schaffen, indem die jeweilige Messsituation in der virtuellen Umgebung implementiert wird. Hierbei können die Wellenformen entlang der virtuellen Messlinien extrahiert und mit den experimentell ermittelten Daten verglichen werden. Bei einer entsprechenden Übereinstimmung der Daten wird eine eindeutige Zuordnung der Schwingungsformen ermöglicht.

In diesem Kapitel werden die Details dieser Vorgehensweise wie auch deren Vor- und Nachteile anhand einer ausgewählten Schwingungsform erörtert. Hierbei erweisen sich die umfassenden Messungen am gesamten Prüfkörper als sehr hilfreicher Aspekt.

Um einen ersten Überblick über die Schwingungsformen entlang der Messlinie zu erhalten werden die Daten der Messungen für die Darstellung in einem Wasserfalldiagramm aufbereitet.

In Abbildung 4.10 war bereits klar ersichtlich, dass sich bis rund  $500[\text{Hz}]$  keine Resonanzen ausbilden. Daher wird im Wasserfalldiagramm dieser Bereich ausgeblendet, um die übrigen Kurven übersichtlicher darstellen zu können. Zur besseren grafischen Trennung der Moden wird eine lineare Skalierung der Frequenzachse gewählt:

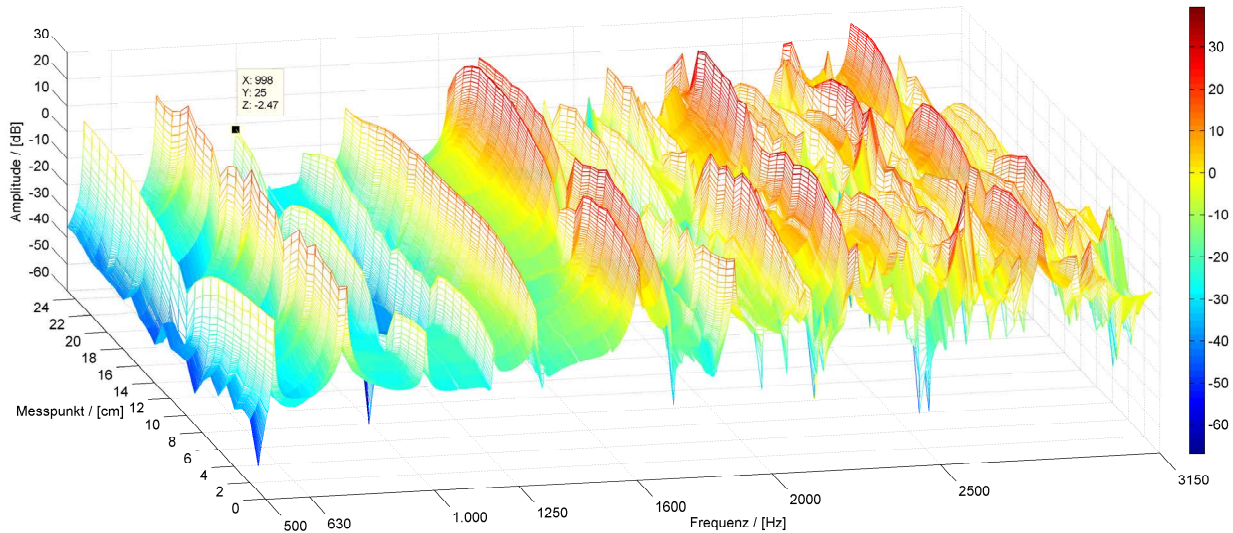


Abbildung 8.1: Wasserfalldiagramm der Messung [Frontal - Horizontal/Mitte - ohne Mineralwolle]

Diese Darstellung ermöglicht bereits eine erste Übersicht über das Schwingverhalten entlang der Struktur. Entsprechend der interessierenden Resonanzen können nun passende Übertragungsfunktionen für eine weitere Analyse ausgewählt werden. Hierzu wird beispielsweise die Resonanz bei  $998[\text{Hz}]$  näher untersucht.

Bei diesem Anwendungsbeispiel zeigt sich, dass die resultierende Wellenform entlang der Messlinien unabhängig von den verwendeten Materialparametern ist. Letztere haben lediglich Einfluss auf die resultierende Resonanzfrequenz, deren Kenntnis in diesem Anwendungsbeispiel jedoch nicht maßgeblich ist. Vorausgesetzt die Geometrie wurde ausreichend genau implementiert, reichen übliche Werte für die verwendeten Materialien - beispielsweise aus der softwareinternen Materialbibliothek - aus, um die Formen zu bestimmen.

Hierfür kann eine Eigenfrequenz - Studie verwendet werden. Zu beachten ist jedoch, dass die Ergebnisse eine undefinierte Amplitude liefern. Diese ist somit nicht mit denen der Messung vergleichbar und muss für eine direkte, grafische Gegenüberstellung entsprechend skaliert werden.

Abbildung 8.2 zeigt die resultierenden Wellenformen bei einer Resonanzfrequenz von  $998[Hz]$  von Messung und Simulation. Verwendet wurde hierbei der Datensatz [Frontal - Horizontal/Mitte - Ohne Füllung]. Weiters ist hierbei der Diskretisierungsfehler sehr gut ersichtlich (siehe auch Kapitel 2.4). Aufgrund der diskreten Abtastung der Messlinie bei der experimentellen Modalanalyse im Abstand von  $1[cm]$  wird das eigentliche Minimum der Wellenform nicht exakt erfasst (bei rund  $5,5[cm]$ ). Dieses wird erst in der Simulation klar ersichtlich.

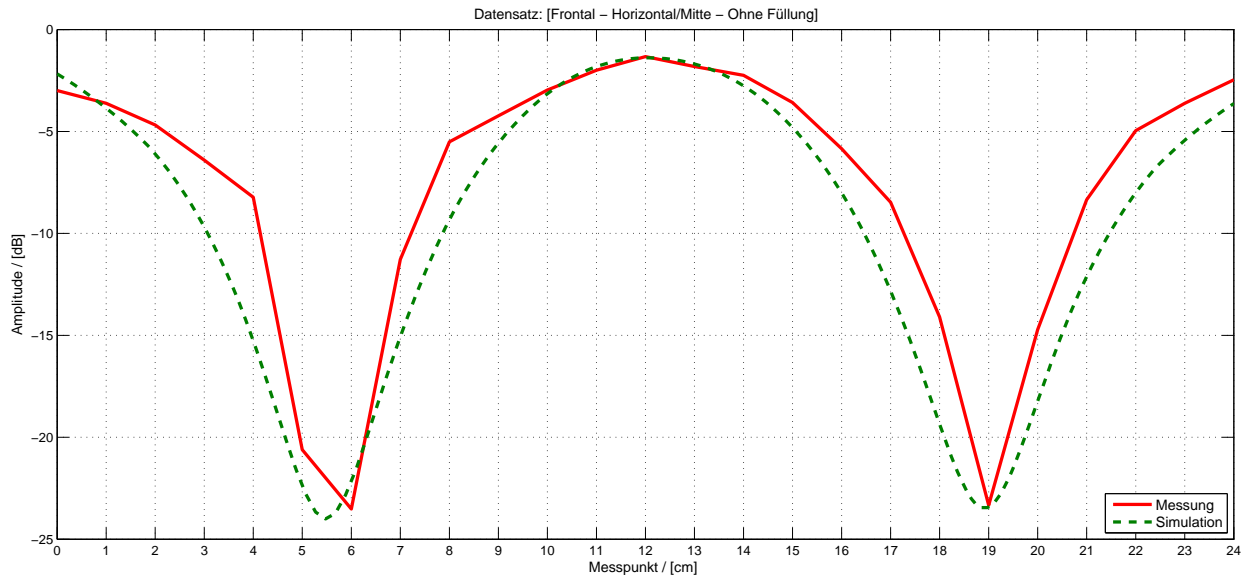


Abbildung 8.2: Resultierende Wellenformen bei  $998[Hz]$  von Messung und Simulation

Die Ähnlichkeit der beiden Wellenformen ist sofort ersichtlich. Wird eine derartigen Übereinstimmung festgestellt, kann eindeutig auf die Schwingungsform der Struktur zurückgeschlossen werden, welche in Abbildung 8.3 dargestellt ist.

Ist eine derartige Zuordnung nicht eindeutig, kann diese Vorgehensweise weiterführend auf anderen Messlinien angewendet werden, bis eine sichere Übereinstimmung gefunden wird. Dies war bei den durchgeführten Untersuchungen beispielsweise bei der ersten Mode - einer Torsionsmode - notwendig (siehe auch Kapitel 9).

Die übrigen Interpretationen sind im Anhang D angeführt.

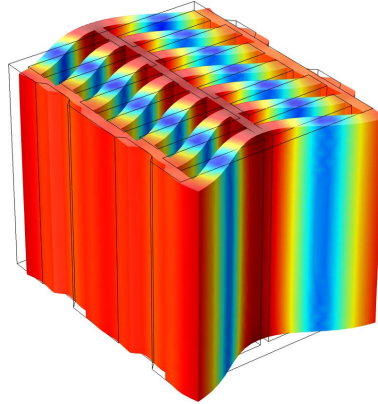


Abbildung 8.3: Resultierende Schwingungsform der Struktur bei  $998[Hz]$

Für dieses Anwendungsbeispiel ist nun ein entscheidender Vorteil zu nennen: Neben der Ersparnis einer eigenständigen, kommerziellen<sup>1</sup> Software zur Analyse erlaubt diese Vorgehensweise die direkte Weiterverarbeitung des analysierten Prüfobjekts für weiterführende Berechnungen, beispielsweise für die Bestimmung des Schalldämm-Maßes. Eine derartige Anwendung wird im weiteren Verlauf dieser Arbeit in Kapitel 9 vorgestellt.

## 8.2 Grenzen der Methode

Diese Methode ermöglicht einen sehr vertieften Einblick in das Schwingungsverhalten der Struktur. Es sind dieser Vorgehensweise jedoch Grenzen gesetzt. Ab einer bestimmten Frequenz können die einzelnen Wellenformen aufgrund der hohen Modendichte nicht klar voneinander separiert werden.

Bei dem hier verwendeten Prüfkörper ist dies ab einer Frequenz von etwa  $1800[Hz]$  der Fall. Abbildung 8.4 soll verdeutlichen, wie schwierig hier eine eindeutige Zuordnung ist.

---

<sup>1</sup>Eine Anschaffung solcher Lösungen ist zumeist mit sehr hohen Kosten verbunden.

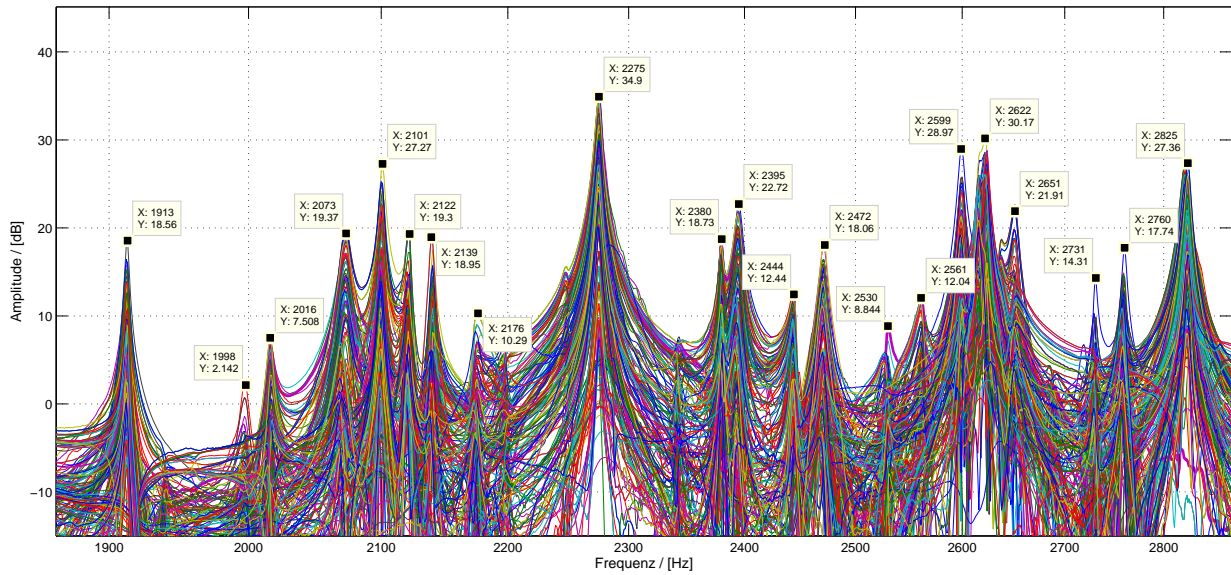


Abbildung 8.4: Spektrum hoher Modendichte

Die Schwingungsformen sind dabei sehr unterschiedlich, es treten die verschiedensten Kombinationen von Schwingungen der Ziegel-Wandplatten auf. Einige dieser Formen sind in Abbildung 8.5 dargestellt.

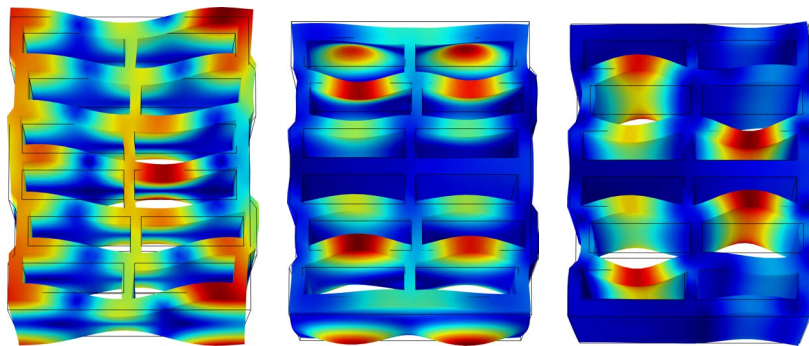


Abbildung 8.5: Hochfrequente Modenformen



## Kapitel 9

# Berechnung des Schalldämm-Maßes einer Wandstruktur

### 9.1 Vorgehensweise

Eine weitere Anwendungsmöglichkeit für ein detailliertes FEM-Simulationsmodell stellt die Berechnung des Schalldämm-Maßes des Prüfkörpers dar. Hierbei wird nach [5] jeweils ein virtueller Raum für die Anregung des Prüfkörpers und für die Auswertung der übertragenen Energie implementiert. Die Konzipierung der Softwareumgebung geschieht weitgehend nach der entsprechenden Norm. Somit werden alle Raumabmessungen sowie die Mindestabstände von Anregepunkt bzw. Auswertebereiche zu den Wänden nach [5] berücksichtigt. Die geforderten „kontinuierlichen Mikrofone“ (siehe auch [5, S.7]) für die Messungen der Schallpegel im Raum werden durch ihre Bewegungskreise realisiert, der Schalldruck entlang des Kreisbogens integriert, und auf die Bogenlänge normiert. In weiterer Folge wird die Differenz der so gemittelten Schalldrücke in Sende- und Empfangsraum für jede einzelne Frequenz ermittelt. Die Bandbreite der Untersuchungen reicht von  $89[Hz]$  bis  $3536[Hz]$  in  $1[Hz]$ -Schritten um für eine entsprechende Bewertung der Simulationsdaten eine Terzbandmitteilung zu ermöglichen. Als Resultat ergibt sich ein Einzahlwert für das bewertete Schalldämm-Maß, welcher mit praktischen Messungen vergleichbar ist.

Für einen direkten Vergleich der erhaltenen Daten wird ein Prüfbericht der „Staatlichen Versuchsanstalt TGM“ herangezogen [6, Beilage 2]. Als Prüfkörper wurde hierbei eine Wand, bestehend aus mehreren Exemplaren des in dieser Arbeit vorgestellten Planziegels mit einer Gesamtfläche von

10,4[m<sup>2</sup>] verwendet. Auf diese Wand wurde zusätzlich auf einer Seite ein Kalk-Gipsputz mit einer Stärke von 1,8[cm] und einer Trockenrohddichte von rund 1420[kg/m<sup>3</sup>] aufgetragen.

Im Simulationsmodell wird dieser Prüfkörper - also die Wand mit einer Putzschicht - zwischen den beiden Räumen implementiert. Die Rohddichte des Kalkputzes ist aus dem Bericht ersichtlich, die restlichen Parameter werden einschlägiger Literatur entnommen. Nach [10, S.261] ergeben sich für der Elastizitätsmodul 44[GPa] und für den Verlustfaktor 0,03[-]. Für die Poissonzahl wird ein Wert von 0,25[-] angenommen.

In Kapitel 8 wurde festgestellt, dass hochfrequente Resonanzen aufgrund der Lochung des Planziegels entstehen. Ab einer Frequenz von rund 800[Hz] wirkt somit der Einzelziegel als bestimmender Faktor für die Schalldämmung.

Ein weiterer zu beachtender Aspekt ist die Tatsache, dass für eine Berechnung über das gesamte bauakustisch relevante Spektrum die höchste Frequenz (3536[Hz]) herangezogen werden müsste (siehe auch Kapitel 3.5 ). Dies hätte ein extrem dichtes Netz und somit eine sehr hohe Anzahl an Freiheitsgraden zur Folge, was weiters zu einer extrem langen Berechnungszeit führt.

Aus diesen Gründen wird die zur Berechnung herangezogene Wand ab einer Terzmittenfrequenz von 800[Hz] auf drei Einzelziegel reduziert. Weiters werden die zu den Terzmittenfrequenzen gehörenden Bandbreiten in einzelnen Arbeitsschritten berechnet, wobei die Netzdichte der Vernetzung von der höchsten Frequenz in der jeweiligen Bandbreite bestimmt wird. Durch diese Vorgehensweise kann die Dauer der Berechnung deutlich von 18[h]14[min]30[s] bei 899377[-] *DOF* auf insgesamt 8[h]31[min]10[s] bei 81395 – 899377[-] *DOF* (variabel) gesenkt werden.

Auch in Bezug auf die Terzbandmittelung galt es einige Effekte zu berücksichtigen. In Simulationen mit den drei Einzelziegeln wurden im hochfrequenten Spektrum vereinzelt unnachvollziehbare Resonanzeinbrüche in der Schalldämmung mit negativen Werten beobachtet. Da dies nicht mit physikalischen Überlegungen übereinstimmt (der Schallpegel im Empfangsraum müsste dann höher sein als jener im Senderraum), wird hierbei für die Mittelung der Median herangezogen, wodurch diese Effekte keinen Einfluss in das Mittelungsergebnis haben. Bei Simulationen mit der gesamten Wand - also bis zu einer Mittenfrequenz von 800[Hz] - entsteht ein nachvollziehbares Spektrum mit zu erwartenden Einbrüchen. Hierbei wird für die Mittelung der arithmetische Mittelwert herangezogen. Mittelungen über den Median sind dabei zu vermeiden, da in diesem Fall aufgrund der geringen Modendichte die Möglichkeit besteht, einzelne (für das Bauteil charakteristische) Eigenschwingungen auszuschließen und die Berechnungen somit maßgeblich zu verfälschen.

Die Abmessungen der Räume wie auch der Wände sind in Anhang E angeführt. Als Randbedingung wurden die Enden der Wände jeweils als frei schwingend angenommen, also ohne feste Verbindung mit dem Prüfstand.

Abbildung 9.1 zeigt die bewerteten Schalldämm-Maße von Messung und Simulation. Hierbei sind die Beiträge der Strukturresonanzen, welche in den vorherigen Kapitel behandelt wurden, sehr schön ersichtlich. Dabei gilt zu beachten, dass die Resonanzverteilung stark von den gewählten Randbedingungen abhängt, eine frei stehende Wand ohne Belastung an den Rändern verhält sich anders als der selbe Prüfkörper mit entsprechenden Randeinspannungen. Die Kurven der Messung und der Simulation zeigen eindeutig einen ähnlichen Verlauf. Es gilt jedoch zu beachten, dass eine derartige Simulation nur bedingt für absolute Aussagen bezüglich des Schalldämm-Maßes - also der Einzahlangabe - herangezogen werden kann. Für relative Untersuchungen ist sie jedoch bestens geeignet. Eine der üblichen Praktiken in der bauakustischen Optimierung ist, die Struktur derart zu verändern, dass tieffrequente Einbrüche in der Schalldämmung (Resonanzerscheinungen) unterhalb und hochfrequente Einbrüche (Resonanzerscheinungen, Koinzidenzeffekt) oberhalb der Bewertungskurve verschoben werden, wodurch das bewertete Schalldämm-Maß positiv beeinflusst wird. Da die Frequenzverteilung dieser Einbrüche bei Messung und Simulation klar übereinstimmen ( $100[Hz]$ ,  $200[Hz]$ ,  $1600[Hz]$ ) und sich nur gering im Betrag unterscheiden, wäre eine derartige Simulationsumgebung für eine mögliche Optimierung geeignet.

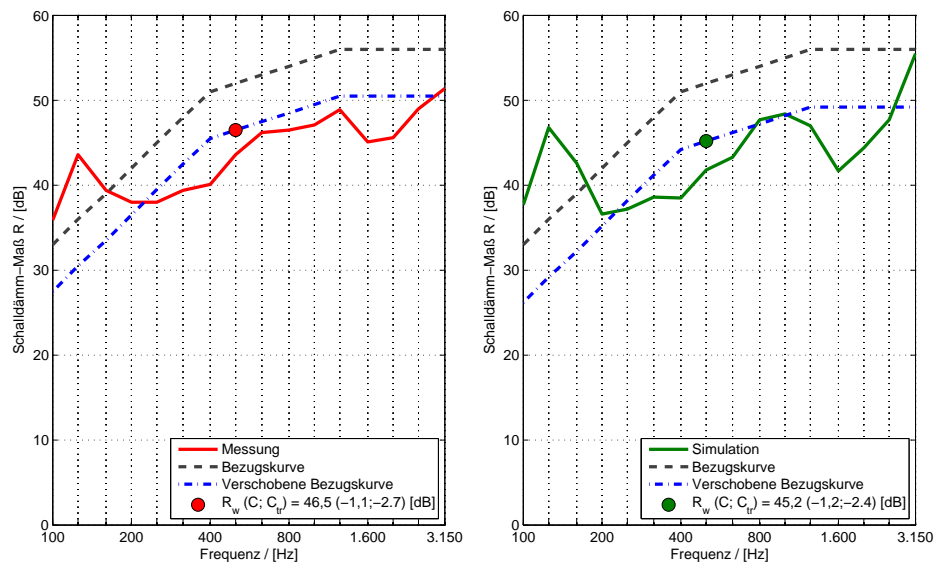


Abbildung 9.1: Bewertetes Schalldämm-Maß: Messung (links) und Simulation (rechts)

Um einen einfachen Vergleich zwischen der Messkurve und den Werten der Simulation über einen Einzahlwert zu ermöglichen, wird der sogenannte *Root Mean Square Error (RMSE)* herangezogen. Dieser ist über folgenden mathematischen Zusammenhang definiert [9][24]:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_{1,i} - x_{2,i})^2}{n}} \quad (9.1)$$

Dabei ist:

- $x_{1,i}$  die Amplitude der Messdaten bei den jeweiligen Frequenzen  $i$  [dB]
- $x_{2,i}$  die Amplitude der FEM-Berechnung bei den jeweiligen Frequenzen  $i$  [dB]

Abbildung 9.2 zeigt einen derartigen Vergleich der Daten. Der zuvor eingeführte *RMSE* beträgt hier über den gesamten Frequenzbereich lediglich 2,09[dB].

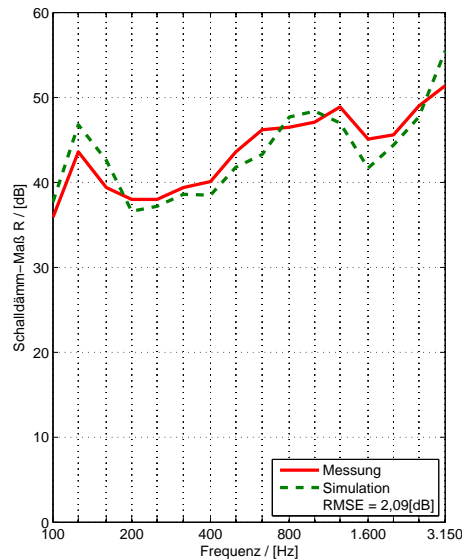


Abbildung 9.2: Anwendungsbeispiel: Vergleich der Schalldämm-Maße von Messung und Simulation

## 9.2 Alternative Methoden

Eine alternative Möglichkeit der Berechnung der Schalldämmung besteht darin, ebenen Wellen zu generieren, welche in Winkeln in äquidistanten Schritten von  $0[^\circ]$  bis  $90[^\circ]$  zur Oberflächennormale auf den Prüfkörper einfallen. Analysen über den gesamten, bauakustisch relevanten Frequenzbereich benötigen aber extrem hohe Rechenzeiten. Diese Methode eignet sich jedoch sehr gut, um spezielle (winkelabhängige) Effekte wie z.B. den *Spuranpassungseffekt*<sup>1</sup> zu untersuchen.

## 9.3 Zusammenfassung

Abschließend gilt hier nochmals zu erwähnen, dass die simulierten Werte nur in den seltensten Fällen absolute Aussagen rechtfertigen, da diese oftmals stark von den miteinbezogen Randbedingungen abhängen. Hierbei besteht die Gefahr, bei einer Wahl der falschen Bedingungen wichtige physikalische Effekte unberücksichtigt zu lassen, was sich in weiterer Folge stark auf die resultierenden Ergebnisse auswirken kann. Des weiteren sind auch die Referenzen - also die experimentellen Messungen - in geringem Maße fehlerbehaftet<sup>2</sup>, was die Abweichungen von den verglichenen Kurven gegebenenfalls erhöhen können. Derartige Simulationen ermöglichen vielmehr relative Aussagen und können dazu dienen, diverse, messtechnisch ansonsten schwierig erfassbare Vorgänge zu untersuchen und gegebenenfalls unerwünschten Effekten entgegenzuwirken.

Für den interessierten Leser wird auf [16] verwiesen. Hier werden in Kapitel 21 - „Praktische Anwendungsbeispiele aus dem Bereich der Numerischen Akustik“- interessante Anwendungen, unter anderem aus den Bereichen Elektroakustik, Fahrzeugakustik und Messtechnik, vorgestellt.

---

<sup>1</sup>Auch *Koinzidenzeffekt* bezeichnet, siehe [10, S.258]

<sup>2</sup>z.B. Rückwirkung der Messgeräte auf die Messgröße

## Teil V

# Zusammenfassung und Ausblick

# Kapitel 10

## Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde aufgezeigt, wie die Einbindung von Computer-Simulationen auf Basis der Finite-Elemente-Methode Analysen von bauakustisch relevanten Aspekten ermöglicht. Dabei lag der Schwerpunkt der Arbeit auf der Implementierung eines Computermodells und der Ermittlung der hierfür notwendigen Materialparameter, wobei ein konkreter Prüfkörper als Referenz herangezogen wurde. Ziel war es, ein leistungsfähiges, effizientes und vertrauenswürdiges Berechnungsmodell als Basis für die Analyse und Optimierung des Produkts bereitzustellen, wobei die Optimierung aufgrund des Umfangs und der Komplexität nicht Bestandteil der Arbeit war. Aus dieser Zielsetzung ergaben sich mehrere analytische, experimentelle und numerische Untersuchungen, um Randbedingungen zu schaffen, die einem derartigen Verwendungszweck - einer Optimierung - gerecht werden.

**Teil I** dieser Arbeit befasste sich mit einer Einführung in die Thematik.

Hierbei wurde in **Kapitel 1** die Motivation und die Zielsetzung, die zu dieser Arbeit führten, umfassend erörtert. Neben der Gliederung der Arbeit wurden auch die verwendeten Softwarelösungen vorgestellt.

In **Kapitel 2** wurden die theoretischen Grundlagen für die Arbeit diskutiert. Man erhielt einen Einblick in die Grundzüge der Finite-Elemente-Methode, wie auch in die wichtigsten Relationen der Elastizitätstheorie. Wellenformen in Festkörpern und Fluiden wurden vorgestellt, der Fokus lag hierbei auf der Biegewellenausbreitung in Platten. Die experimentelle Modalanalyse wurde behandelt, ebenso wie verschiedene Aspekte bezüglich der Verifizierung und Validierung von Simulationsmodellen.

**Teil II** dieser Arbeit befasste sich mit der Implementierung eines konkreten Prüfkörpers in der FEM-Simulationssoftware *COMSOL-Multiphysics*.

Zuerst wurden in **Kapitel 3** der verwendete Prüfkörper - ein spezieller Hochlochziegel - wie auch die Vorgehensweise bei der Programmierung des Modells vorgestellt. Neben eines dreidimensionalen Gesamtmodells des Prüfkörpers wurden auch mehrere Submodelle implementiert. Es zeigte sich, dass besonders bei Analysen über den gesamten, interessierenden Frequenzbereich teils sehr lange Rechenzeiten zu erwarten sind.

In **Kapitel 4** wurden verschiedene experimentelle Messungen beschrieben. Es wurden Messgrößen ermittelt, welche in weiterer Folge als Berechnungsbasis für die in Kapitel 5 analytisch ermittelten Materialparameter dienten. Dabei wurden aus Teilen des eigentlichen Prüfkörpers Subsysteme bzw. neuerliche Prüfkörper erstellt, deren physikalisches Verhalten und Randbedingungen über bekannte analytische Zusammenhänge beschreibbar waren. Die Analyse der Messergebnisse wurde eingehends diskutiert. Es zeigte sich, dass die Formgebungen der einzelnen Prüfkörper, die gewählten Randbedingungen - wie beispielsweise die Lagerungen bei den Messungen - wie auch die verwendeten Messgeräte einen deutlichen Einfluss auf die Messgrößen und somit auch auf weitere Berechnungen der Materialparameter haben können. Weitere Messungen wurden für die spätere Validierung der Simulation durchgeführt.

Aus den in Kapitel 4 ermittelten Messgrößen der Subsysteme konnten in **Kapitel 5** über passende, analytische Zusammenhänge die erforderlichen Materialparameter bestimmt werden. Es wurden verschiedenste Berechnungsmethoden untersucht und in Bezug auf die Anwendbarkeit im vorliegenden Fall evaluiert. Bereits bei den Messungen in Kapitel 4 wurde bemerkt, dass bereits geringe Abweichungen zu den Idealbedingungen weitreichende Folgen haben. Die unterschiedlichen Varianten und Versuchsaufbauten wurden somit in Kapitel 4 analysiert und evaluiert.

**Teil III** dieser Arbeit befasste sich mit der Verifizierung und Validierung des implementierten Simulationsmodells.

In **Kapitel 6** wurde Aspekte bezüglich der Verifizierung diskutiert. Da in allen Simulationsmodellen eine viel höhere Anzahl an *DOF* als die in Kapitel 3.5 berechneten Mindestwerte verwendet wurden, konnte von einem minimalen Diskretisierungsfehler ausgegangen werden. Es wurde explizit auf Computersystemen mit 64[*Bit*] Architektur gearbeitet, bei denen die Rechenoperationen der Finite-Elemente-Software stets in voller Präzision durchgeführt wurden. Somit konnte davon ausgegangen werden, dass sich auch der numerische Fehler in akzeptablen Grenzen hielt.



In **Kapitel 7** wurden der Modellierungs- und der Parameterfehler im Zuge einer Validierung des Simulationsmodells untersucht. Diese stellen allgemein die bestimmenden Größen im Bezug auf den Gesamtfehler der numerischen Simulation dar. Es wurden die numerisch ermittelten Eigenschwingungen mit den am realen Prüfkörper gemessenen Werten verglichen und evaluiert. Wie jedes industriell hergestellte Produkt unterliegt auch der vorliegende Prüfkörper einer geringen Schwankungsbreite bezüglich der Geometrie und der Werte der Materialparameter infolge der Fertigung. Geringe Abweichungen der Werte der Materialparameter von den Angaben in Datenblättern haben keinerlei Auswirkungen bei der Planung und Umsetzung eines Bauwerks. Das Schwingungsverhalten erwies sich jedoch sehr empfindlich auf derartige Abweichungen, was zu einer großen Differenz von simulierten und gemessenen Daten führen kann. Im Zuge der Validierung zeigte sich somit, dass die Präzision des Simulationsmodells signifikant verbessert werden konnte, indem die Materialparameter wie in dieser Arbeit beschrieben am entsprechenden, realen Prüfkörper ermittelt wurden.

**Teil IV** dieser Arbeit widmete sich der Vorstellung einiger möglicher Anwendungsbeispiele für das implementierte Simulationsmodell.

Durch eine Kombination aus experimenteller Modalanalyse und einer Eigenfrequenzanalyse am Simulationsmodell konnte in **Kapitel 8** das Schwingverhalten des Prüfkörpers eingehends analysiert werden. Dies ermöglicht einen vertieften Einblick in den Ursprung dieser Phänomene.

In **Kapitel 9** wurde weiters die Schalldämmung einer Wand aus mehreren der implementierten Prüfkörpern berechnet. Es wurde ein virtueller Prüfstand entsprechend den Normvorgaben erstellt. Eine Gegenüberstellung der Ergebnisse mit vergleichbaren Messdaten zeigte, dass das Modell sehr nahe an die Realität herankommt. Es galt jedoch zu beachten, dass eine derartige Simulation nur bedingt für absolute Aussagen bezüglich des Schalldämm-Maßes - also den resultierenden Endwert - herangezogen werden kann. Für relative Bewertungen - also einem Vergleich einer alternativen Lochgeometrie mit dem Ausgangszustand - ist die Simulationsumgebung eindeutig geeignet.

Abschließend gilt zu erwähnen, dass die simulierten Ergebnisse jederzeit kritisch hinterfragt und bekannten physikalischen Tatsachen gegenübergestellt werden müssen, um vertrauenswürdige Ergebnisse zu erhalten. Für makroskopische Untersuchungen wie z.B. der Analyse des Schwingverhaltens und der Bewertung des Schalldämm-Maßes sind die in dieser Arbeit beschriebenen Vorgehensweisen definitiv anwendbar. Die Methoden erreichen aber ihre Grenzen bei kleinen Prüfkörperabmessungen und mikroskopischen Untersuchungen, da hier innerstrukturelle Verhältnisse wie z.B. die Porosität starke Auswirkungen haben können (siehe Kapitel 5.1.2).

# Kapitel 11

## Ausblick

Im Zuge dieser Arbeit wurde ein vertieftes Verständnis für das Schwingverhalten des Prüfkörpers gewonnen, wodurch die Basis für eine bauakustische Optimierung der Struktur geschaffen werden konnte.

Durch eine geschickte Wahl der Lochgeometrie ist es möglich, die Resonanzerscheinungen zu beeinflussen, deren Auswirkungen zu minimieren und ausserhalb des bewerteten Bereichs für das Schalldämm-Maß zu verschieben. Im 3D-Modell des Prüfkörpers können die durch das neue Lochdesign veränderten Schwingungsformen ermittelt und evaluiert werden. Weiters kann der Einfluss der Mineralwolle bzw. eine Verwendung alternativer Materialien in den Löchern des Ziegels analysiert werden. In erster Linie wird hierbei die Dämpfung der Wellenerscheinungen verändert, weiters beeinflusst das Füllmaterial auch die Schwingformen des gesamten Objekts.

Wie der Name der FEM-Simulationssoftware *COMSOL-Multiphysics* bereits sagt, sind neben akustischen auch andere physikalische Untersuchungen wie thermische Analysen möglich. Im Zuge eines Optimierungsprozesses wäre es denkbar, parallel die Wärmedämmwirkung zu analysieren, um Auswirkungen auf die derzeit sehr guten thermischen Eigenschaften des Prüfkörpers auszuschließen.

Im virtuellen Prüfstand aus Kapitel 9 können abschließend die verschiedenen Designvarianten auf eine Verbesserung der Schalldämmwirkung untersucht werden. Dies minimiert stark den Aufwand bei experimentellen Messungen, da bereits im Vorfeld Konzepte geringer Wirksamkeit ausgeschlossen und die optimalen Designs ausgewählt werden können. Daraus folgen erhebliche Einsparungsmöglichkeiten von zeitlichen und finanziellen Ressourcen.

Teil VI

Anhang

# Anhang A

## Details zu den Materialdaten aus Datenblättern

In Produktdatenblättern von Herstellern sind eine Vielzahl von Materialdaten zu finden. Es ist naheliegend, diese Daten für FEM - Simulationen zu verwenden, um den messtechnischen Aufwand zu reduzieren. In der nachfolgende Tabelle sind einige Daten aus den verschiedensten Quellen aufgeführt, welche hierbei herangezogen werden können:

<b>ZIEGELSCHERBE</b>		
<b>PARAMETER</b>	<b>WERT</b>	<b>PRÜFNORM</b>
<b>DICHTE</b>	1325[ $kg/m^3$ ]	EN 771 – 1
<b>ELASTIZITÄTSMODUL</b>	5434, 5[ $N/mm^2$ ]	EN 1052 – 1
<b>POISSONZAHL</b>	nicht angegeben	nicht angegeben
<b>VERLUSTFAKTOR</b>	nicht angegeben	nicht angegeben

<b>MINERALWOLLE</b>		
<b>PARAMETER</b>	<b>WERT</b>	<b>PRÜFNORM</b>
<b>DICHTE</b>	70[ $kg/m^3$ ][6]	nicht angegeben
<b>ELASTIZITÄTSMODUL</b>	nicht angegeben	nicht angegeben
<b>POISSONZAHL</b>	nicht angegeben	nicht angegeben
<b>VERLUSTFAKTOR</b>	nicht angegeben	nicht angegeben

Tabelle A.1: Ziegel: Ausgewählte Materialdaten des Produktes aus Prüfbericht [7]

Unter anderem wurde hierbei ein Prüfbericht des Bautechnischen Institutes Linz herangezogen [7]. Der hier geprüfte Ziegel stimmt mit den geometrischen Daten des in dieser Arbeit verwendeten Prüfkörpers überein. Der Ziegel aus dem Datenblatt erreicht ein Trockengewicht von  $11,9[kg]$ , der vorliegende Prüfkörper hat ein Gesamtgewicht von  $12,04[kg]$ , somit sind die beiden Prüfkörper direkt vergleichbar. Bezüglich des Elastizitätsmoduls können nur Werte aus Aufbauten von kompletten Prüfweilern herangezogen werden, wobei Dünnbettmörtel als Verbindung der Ziegel verwendet wurde. Als E-Modul wurde der festgestellte Mittelwert aus 6 Weilern unter „zyklischer Belastung“ verwendet. Werte für die Poissonzahl wurden nicht angegeben.

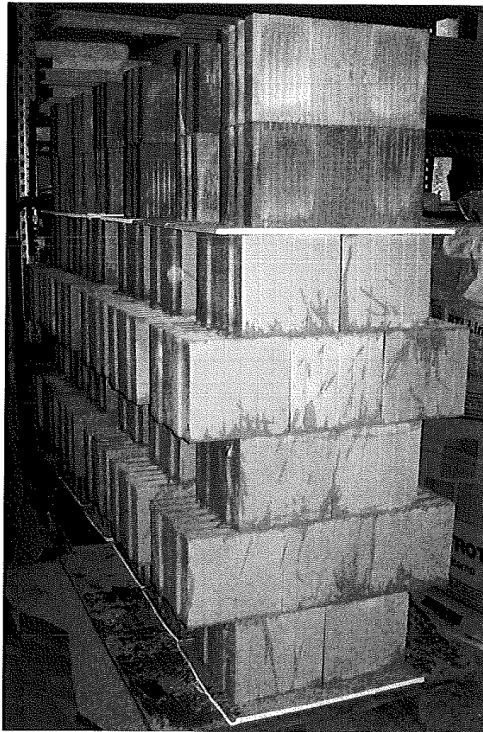


Abbildung A.1: Prüfweiler für statische Untersuchungen

Für den Verlustfaktor wurde ein Prüfbericht der Staatlichen Versuchsanstalt TGM Wien herangezogen. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass zusätzlich zum Rohziegel diverse mineralische Putze aufgetragen worden sind, welche die Gesamtdicke des Wandaufbaus um gesamt  $5[cm]$  erhöhten. Werte für einen Einzelziegel bzw. für eine unverputzte Wand lagen leider nicht vor.

<b>Frequenz [Hz]</b>	<b>Verlustfaktor [-]</b>
100	0,027
125	0,019
165	0,020
200	0,031
315	0,026
400	0,027
500	0,027
630	0,03
800	0,044
1000	0,032
1250	0,027
1600	0,019
2000	0,018
2500	0,017
3150	0,014
Arithmetischer Mittelwert	0,025

Tabelle A.2: Verlustfaktoren aus entsprechenden Prüfberichten

# Anhang B

## Berechnungen und Auswertungen zu den Kapiteln

### B.1 Kapitel 3.3.2: Ermittlung der Abmessungen des Prüfkörpers

Messpunkt	Länge [m]	Breite [m]	Dicke [m]
1	0.249	0.09984	0.01915
2		0.0997	0.01911
3		0.10046	0.0193
4		0.10037	0.01928
5		0.09978	0.01929
6		0.09979	0.01902
7			0.0193
8			0.018
9			0.01884
10			0.01866
<b>arithmetischer Mittelwert</b>	0.249	0.09999	0.018995

Tabelle B.1: Ziegelscherbe: Ermittlung der Abmessungen des Prüfkörpers

## B.2 Kapitel 3.5: Vernetzung - Mindestanzahl an Freiheitsgraden

Simulationsmodell	Volumen [ $m^3$ ]	Mindestanzahl an Freiheitsgraden [-]
Hauptmodell, ohne Füllung	$9,072 \cdot 10^{-3}$	5351
Hauptmodell, mit Füllung	$18,36 \cdot 10^{-3}$	10830
Ziegelscherbenplatte	$4,482 \cdot 10^{-3}$	264

Tabelle B.2: Vernetzung: Mindestanzahl an Freiheitsgraden ( $\lambda_{min=3150[Hz]} = 14,3[cm]$ )

## B.3 Kapitel 4.1: Berechnung der Rohdichte von Ziegelscherbe und Mineralwolle

Ziegelscherbe:

$$\rho_{R,Z} = \frac{m_{d,Z}}{V_{K,Z}} \quad \text{wobei:} \quad V_{K,Z} = V_{P,mF} - V_F \quad ; \quad V_F = \frac{m_F}{\rho_{R,F}} \quad ; \quad m_F = m_{P,mF} - m_{d,Z}$$

Dabei ist:

- $\rho_{R,Z}$  die Rohdichte der Ziegelscherbe [ $kg/m^3$ ]
- $m_{d,Z}$  die Trockenmasse des Prüfkörper ohne Polyethylen-Folie [ $kg$ ]
- $V_{K,Z}$  das Kornvolumen inklusive des Volumens der Kornporen ohne PE-Folie [ $m^3$ ]
- $V_{P,mF}$  das gemessene Volumen des Prüfkörpers mit Polyethylen-Folie [ $m^3$ ]
- $V_F$  das Volumen der Polyethylen-Folie [ $m^3$ ]
- $m_F$  die Masse der Polyethylen-Folie [ $kg$ ]
- $\rho_{R,F}$  die Rohdichte der Polyethylen-Folie [ $kg/m^3$ ] [16, S.114]
- $m_{P,mF}$  die Masse des Prüfkörpers mit Polyethylen-Folie [ $kg$ ]



Formelzeichen	Einheit	Wert
$m_{d,Z}$	[kg]	$31,322 \cdot 10^{-3}$
$m_{P,mF}$	[kg]	$31,393 \cdot 10^{-3}$
$m_F$	[kg]	$7,188 \cdot 10^{-6}$
$\rho_{R,F}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	900
$V_F$	[m <sup>3</sup> ]	$7,987 \cdot 10^{-9}$
$V_{P,mF}$	[m <sup>3</sup> ]	$22,819 \cdot 10^{-6}$
$V_{K,Z}$	[m <sup>3</sup> ]	$22,811 \cdot 10^{-6}$
$\rho_{R,Z}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	1373,065

Tabelle B.3: Rohdichte der Ziegelscherbe: Berechnungsdaten und Ergebnisse

### Mineralwolle:

$$\rho_{R,M} = \frac{m_{d,M}}{V_{K,M}} \quad \text{wobei :} \quad V_{K,M} = L_P \cdot B_P \cdot D_P$$

Dabei ist:

- $\rho_{R,M}$  die Rohdichte der Mineralwolle [kg/m<sup>3</sup>]
- $m_{d,M}$  die Trockenmasse (arithmetischer Mittelwert) der Prüfkörper [kg]
- $V_{K,M}$  das Kornvolumen inklusive des Volumens der Kornporen des Prüfkörpers [m<sup>3</sup>]
- $L_P$  die Länge des Prüfkörpers [m]
- $B_P$  die Breite des Prüfkörpers [m]
- $D_P$  die Dicke des Prüfkörpers [m]

Prüfkörper Nummer	Einheit	Wert
1	[kg]	$37,680 \cdot 10^{-3}$
2	[kg]	$39,720 \cdot 10^{-3}$
3	[kg]	$40,250 \cdot 10^{-3}$
4	[kg]	$39,010 \cdot 10^{-3}$
5	[kg]	$40,090 \cdot 10^{-3}$
6	[kg]	$41,840 \cdot 10^{-3}$
<i>arithm.Mittelwert</i>	[kg]	$39,765 \cdot 10^{-3}$

Tabelle B.4: Bestimmung der Trockenmasse mehrerer Prüfkörper und Mittelung der Ergebnisse

Formelzeichen	Einheit	Wert
$L_P$	[m]	0,245
$B_P$	[m]	0,1
$D_P$	[m]	0,03
$m_{d,M}$	[kg]	$39,765 \cdot 10^{-3}$
$V_{K,M}$	[m <sup>3</sup> ]	$735 \cdot 10^{-6}$
$\rho_{R,M}$	[kg/m <sup>3</sup> ]	54,102

Tabelle B.5: Rohdichte der Mineralwolle: Berechnungsdaten und Ergebnisse

#### B.4 Kapitel 4.2.3.1: Massenverhältnis von Aufnehmer und Prüfkörper - Balken

Formelzeichen	Einheit	Wert
$M$	[kg]	$100,835 \cdot 10^{-3}$
$n$	[-]	2
$m$	[kg]	$1,681 \cdot 10^{-3}$

Tabelle B.6: Maximalgewicht des Aufnehmers - Balken

### B.5 Kapitel 4.2.3.3: Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den ermittelten Moden einer allseitig gelenkig gelagerten Ziegelscherbenplatte

Daten des Prüfkörpers		
Formelzeichen	Einheit	Wert
$\rho$	$[kg/m^3]$	1373,065
$\mu$	$[-]$	0,2
$h$	$[m]$	$18,995 \cdot 10^{-3}$
$l_x$	$[m]$	$249 \cdot 10^{-3}$
$l_y$	$[m]$	$99,999 \cdot 10^{-3}$
$m''$	$[kg/m^3]$	34,186

Biegesteifigkeit $B'$		
Mode #	Einheit	Wert
1	$[Nm^2]$	3601,727
2	$[Nm^2]$	3050,262

Elastizitätsmodul $E$		
Mode #	Einheit	Wert
1	$[GPa]$	6,054
2	$[GPa]$	5,127

Abbildung B.1: Prüfkörperdaten, Zwischenwerte (Biegesteifigkeit) und Auswertungen des Elastizitätsmoduls

## B.6 Kapitel 5.2: Bestimmung des Elastizitätsmoduls aus den ermittelten Resonanzfrequenzen verschiedener SDOF-Systeme

Daten der Prüfkörpers					
Formelzeichen	Einheit	Eisenblock		Sperrholzplatte	
		einfach	doppelt	einfach	doppelt
$S$	$[m^2]$	0,04	0,04	0,04	0,04
$l_P$	$[m]$	$29,488 \cdot 10^{-3}$	$58,975 \cdot 10^{-3}$	$29,488 \cdot 10^{-3}$	$58,975 \cdot 10^{-3}$
$m$	$[kg]$	8,08	8,08	0,365	0,365
$F_{statisch}$	$[Pa]$	1981,620	1981,620	89,408	89,408
$f_R$	$[Hz]$	16,531	12,906	34,063	21,438

Elastizitätsmodul $E$		
Variante	Einheit	Wert
Eisenblock, einfach	$[kPa]$	64,261
Eisenblock, doppelt	$[kPa]$	78,336
Sperrholzplatte, einfach	$[kPa]$	12,310
Sperrholzplatte, doppelt	$[kPa]$	9,752

Dynamische Steifigkeit $s'$		
Variante	Einheit	Wert
Eisenblock, einfach	$[MN/m^3]$	2,179
Eisenblock, doppelt	$[MN/m^3]$	2,657
Sperrholzplatte, einfach	$[MN/m^3]$	0,418
Sperrholzplatte, doppelt	$[MN/m^3]$	0,331

Tabelle B.7: Prüfkörperdaten und Berechnungen der Resonanzfrequenz verschiedener Varianten

# Anhang C

## Details zu Körperschall-Nachhallzeit und Verlustfaktor

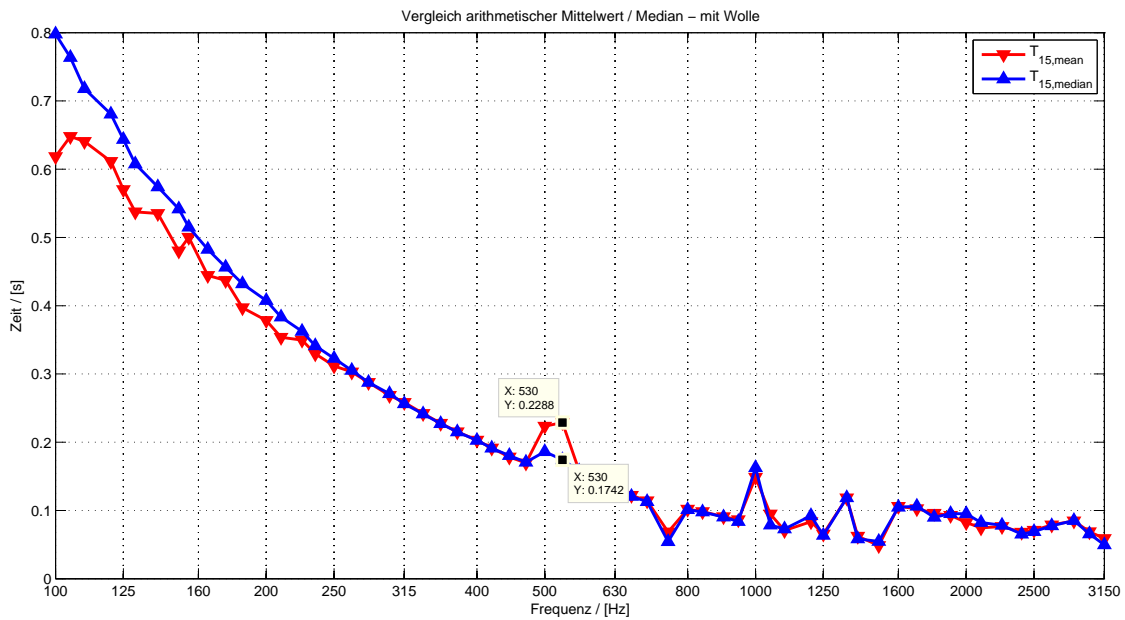


Abbildung C.1: Vergleich Nachhallzeit: arithmetischer Mittelwert / Median mit Wolle

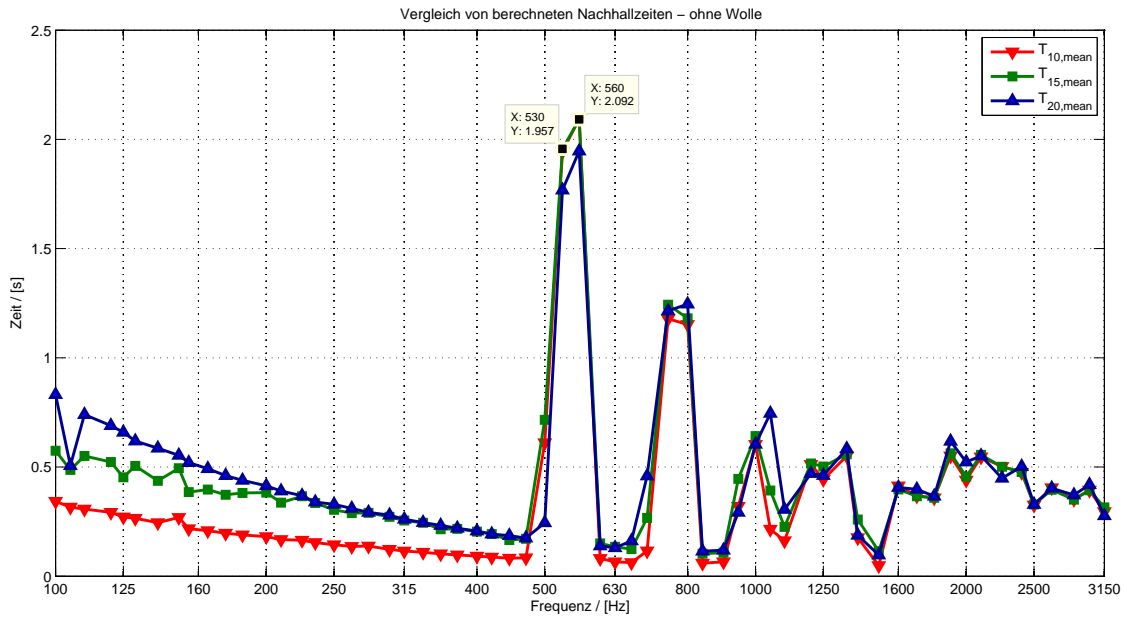


Abbildung C.2: Vergleich von Berechnungen der Körperschall-Nachhallzeit

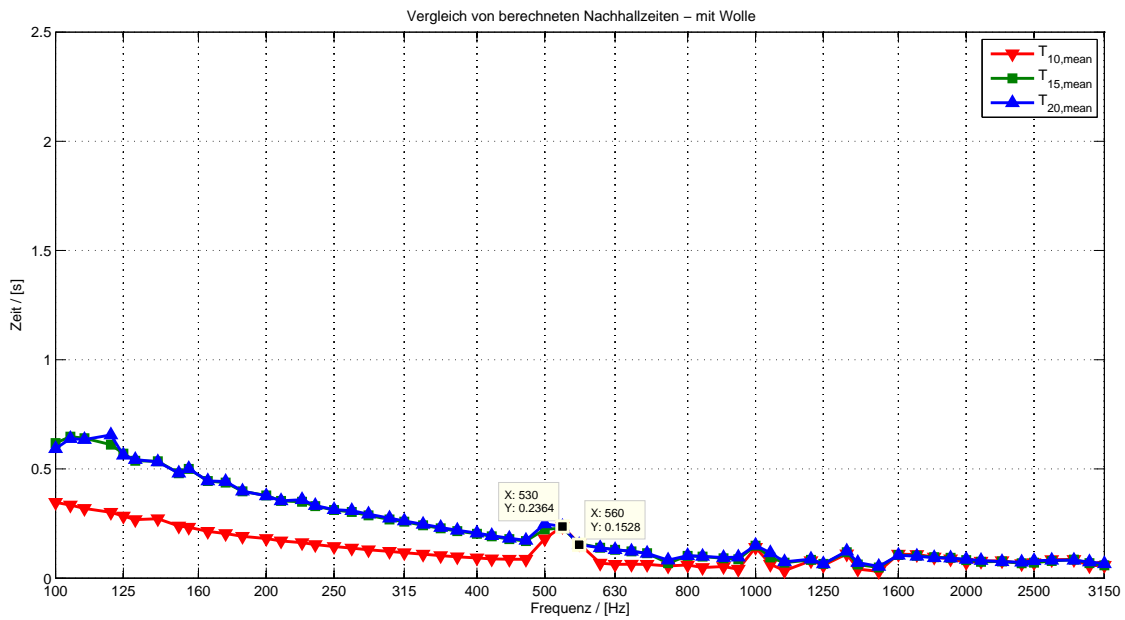


Abbildung C.3: Vergleich von Körperschall-Nachhallzeiten - mit Wolle

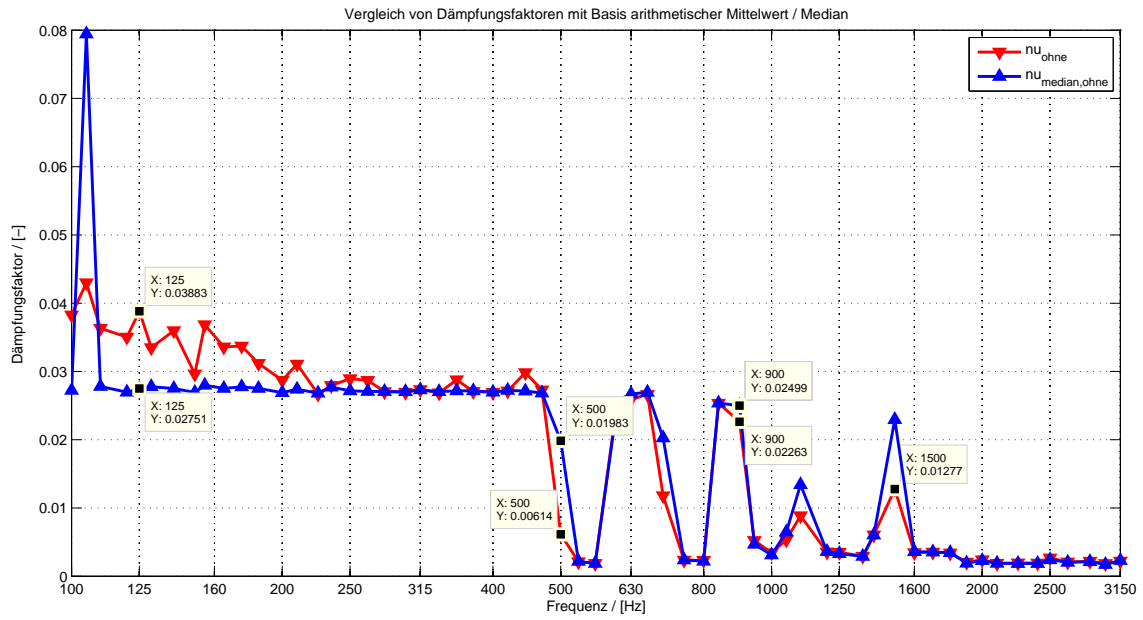


Abbildung C.4: Vergleich Dämpfung: arithmetischer Mittelwert / Median ohne Wolle

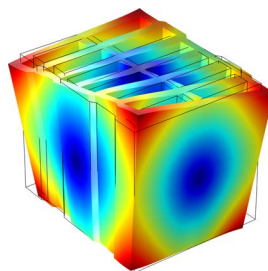
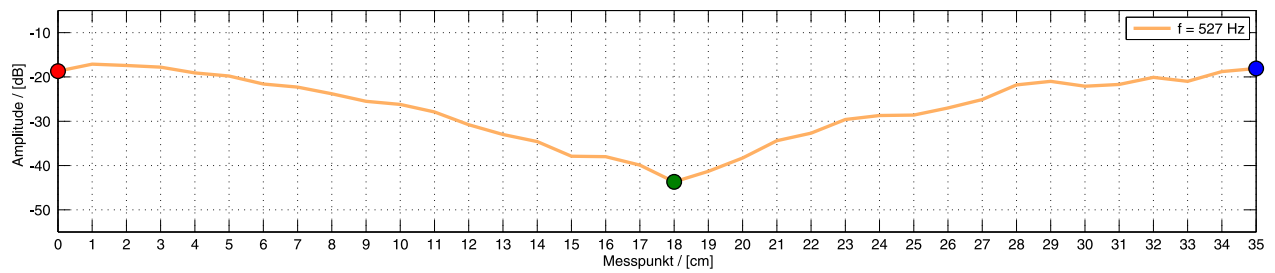
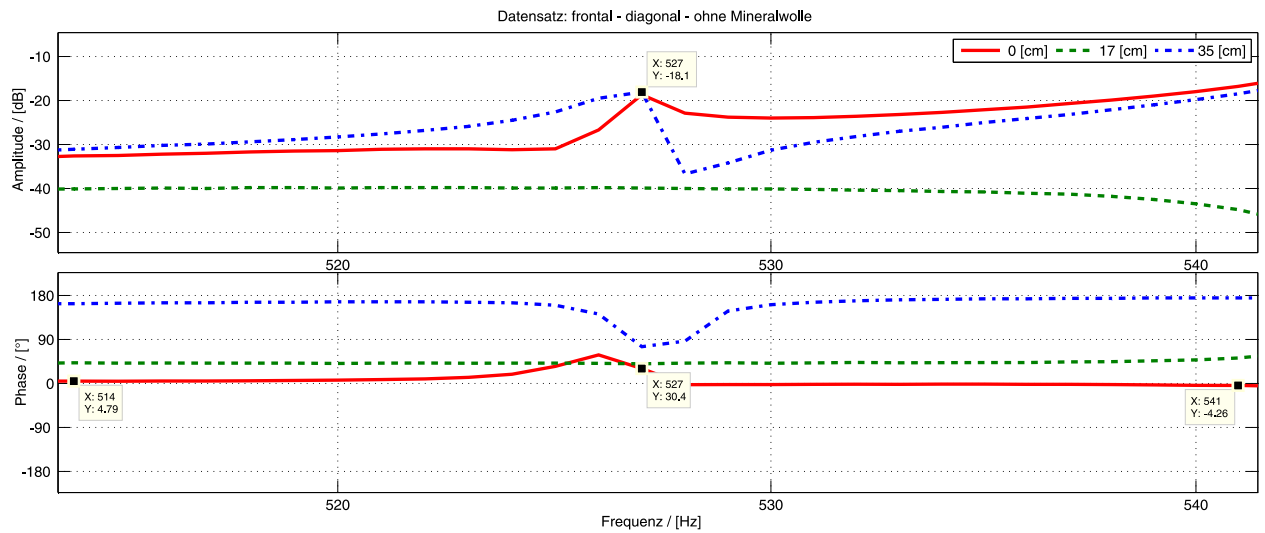
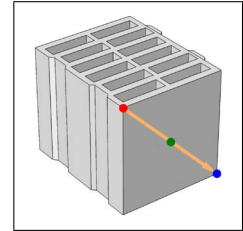
## Anhang D

### Die Moden im Detail: Modenformen ohne Mineralwolle



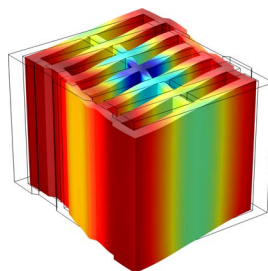
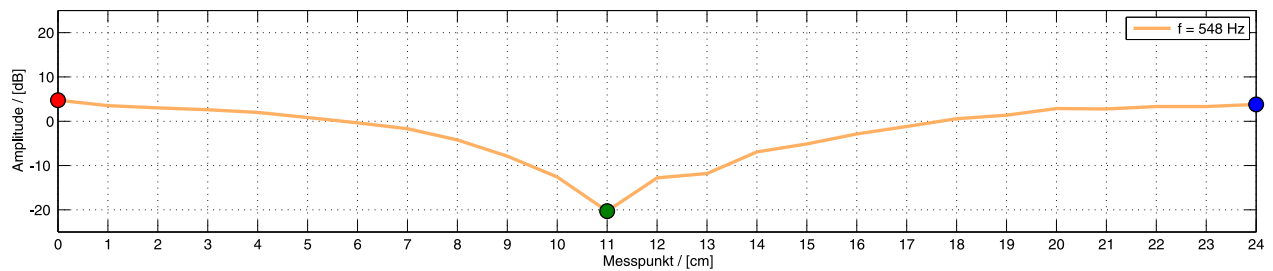
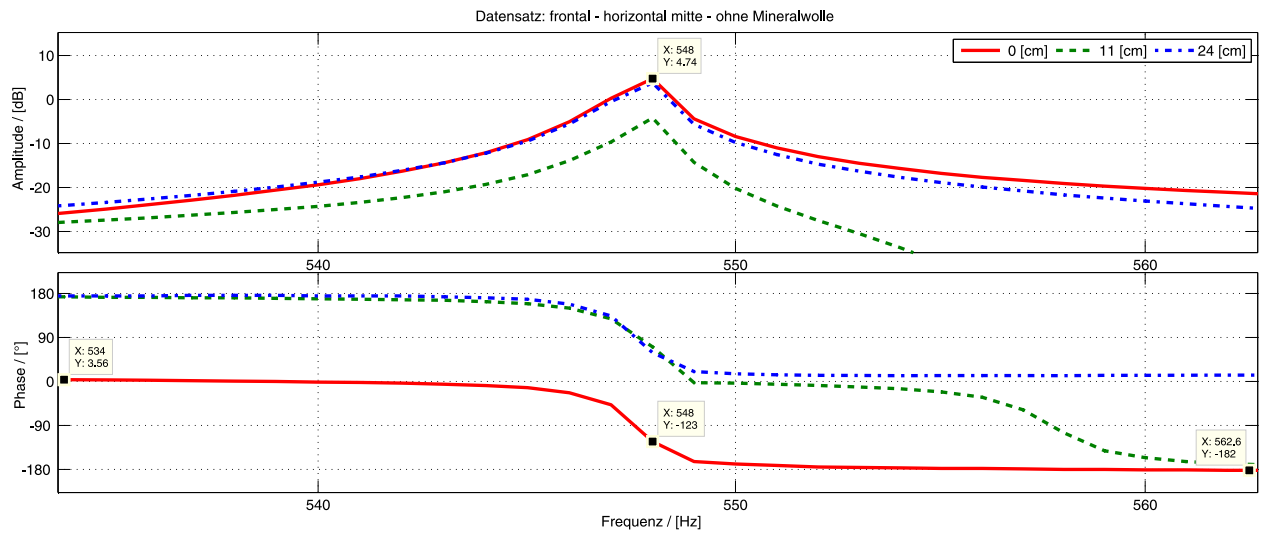
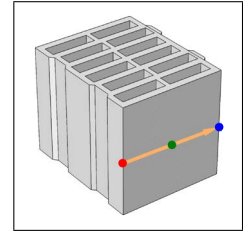
### D.1 Mode #1

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	527
Halbwertsbreite	[Hz]	1,249
Güte	[-]	847,5
Dämpfung	[-]	0,00118



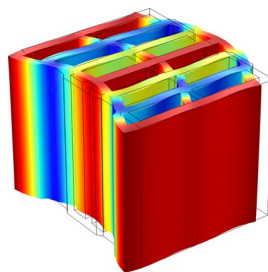
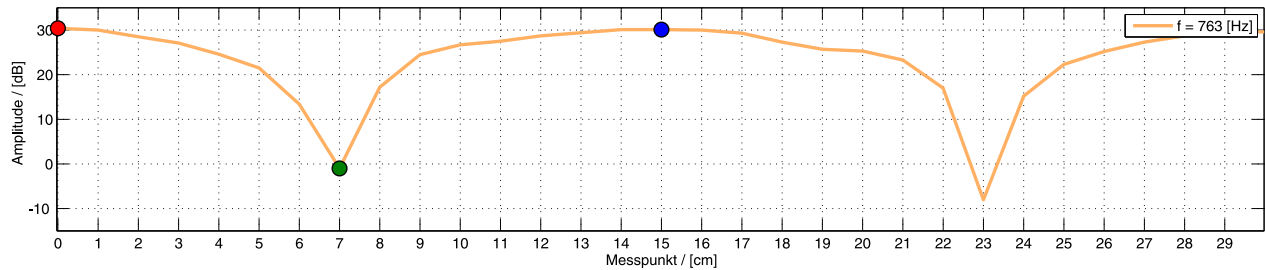
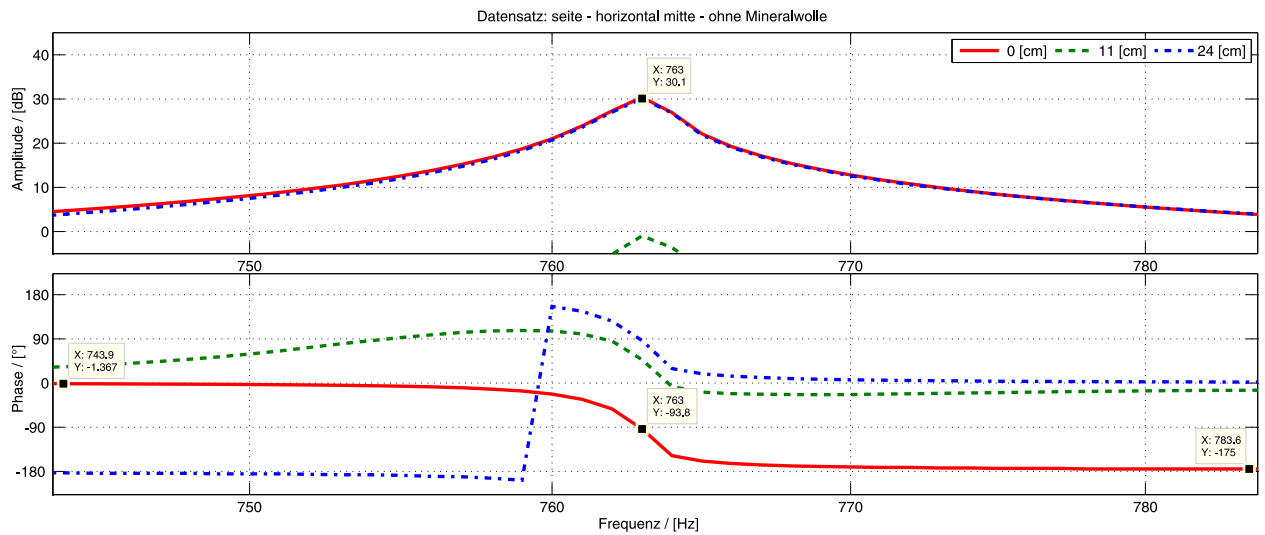
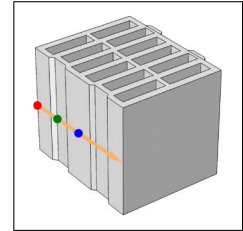
## D.2 Mode #2

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	548
Halbwertsbreite	[Hz]	1,144
Güte	[-]	961,54
Dämpfung	[-]	0,00104



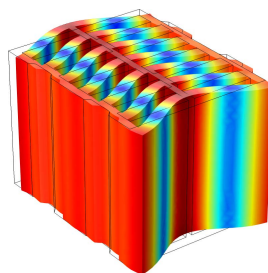
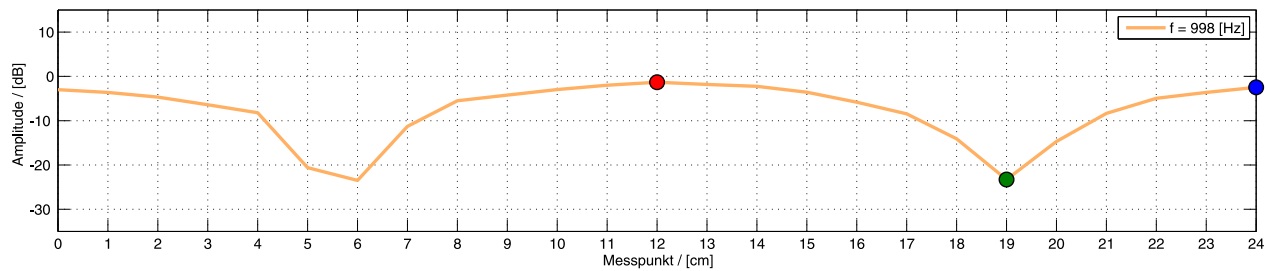
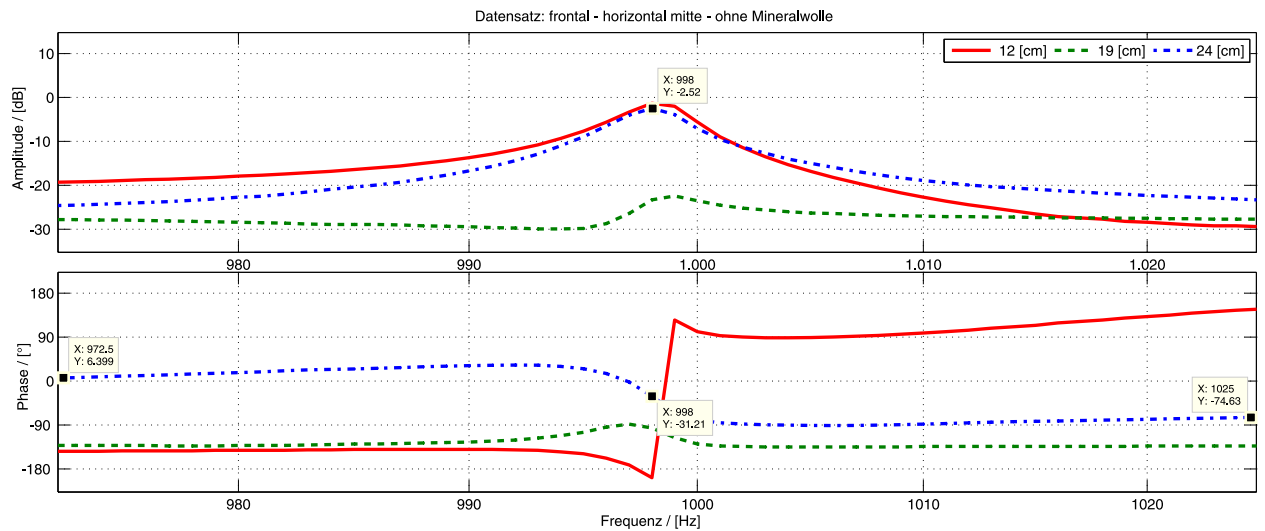
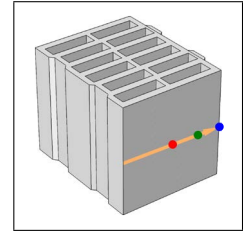
### D.3 Mode #3

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	763
Halbwertsbreite	[Hz]	2,042
Güte	[-]	746,29
Dämpfung	[-]	0,00134



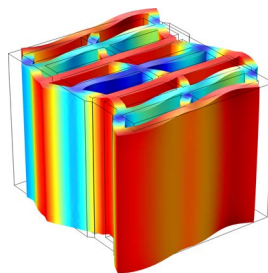
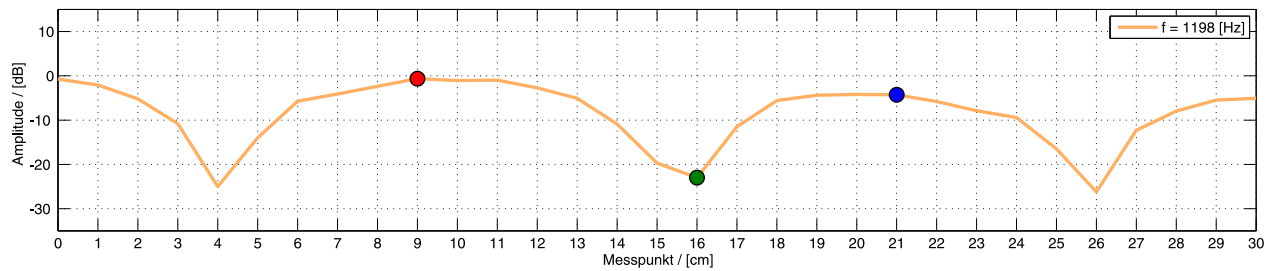
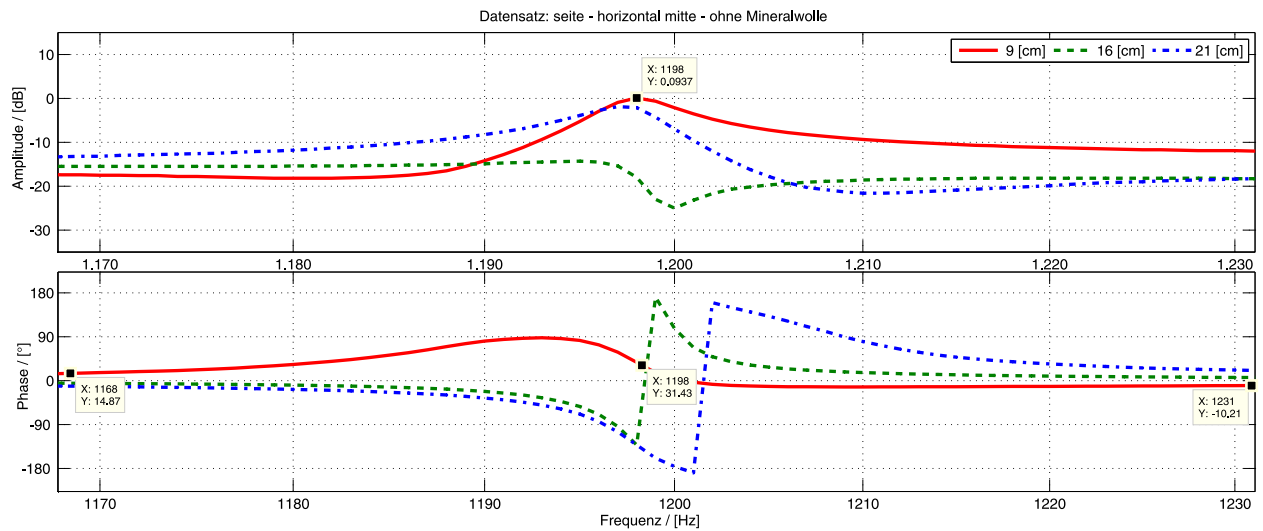
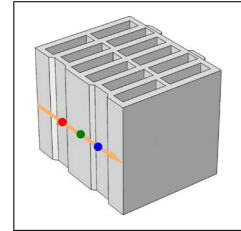
### D.4 Mode #4

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	998
Halbwertsbreite	[Hz]	3,253
Güte	[-]	613,50
Dämpfung	[-]	0,00163



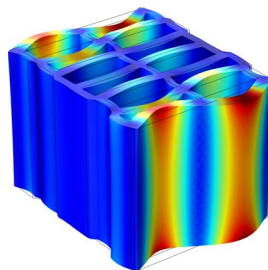
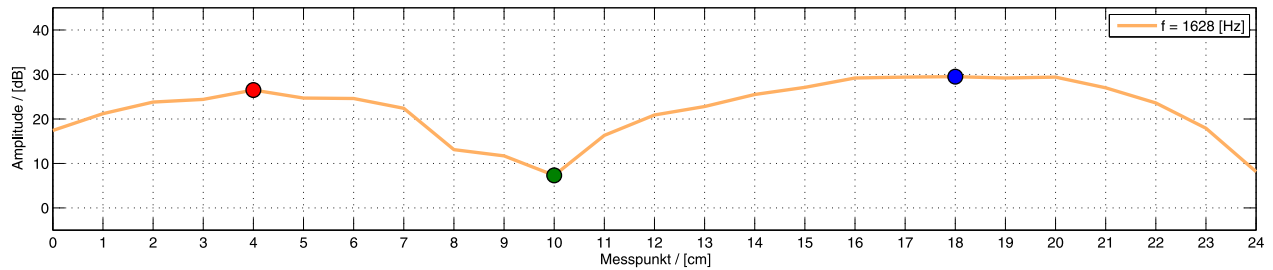
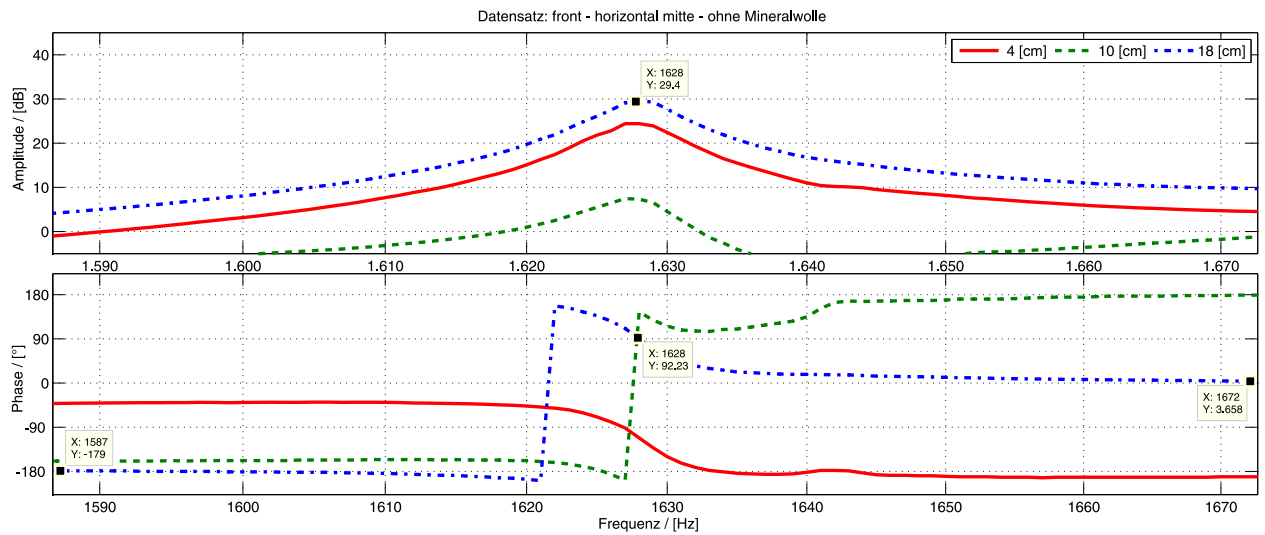
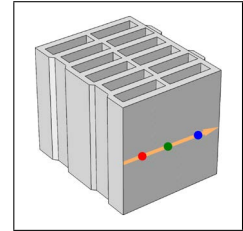
### D.5 Mode #5

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	1198
Halbwertsbreite	[Hz]	3,717
Güte	[–]	645,16
Dämpfung	[–]	0,00155



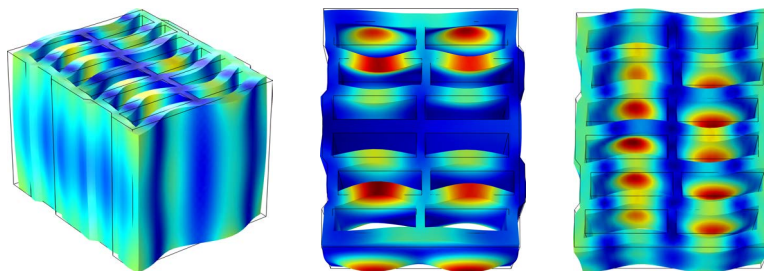
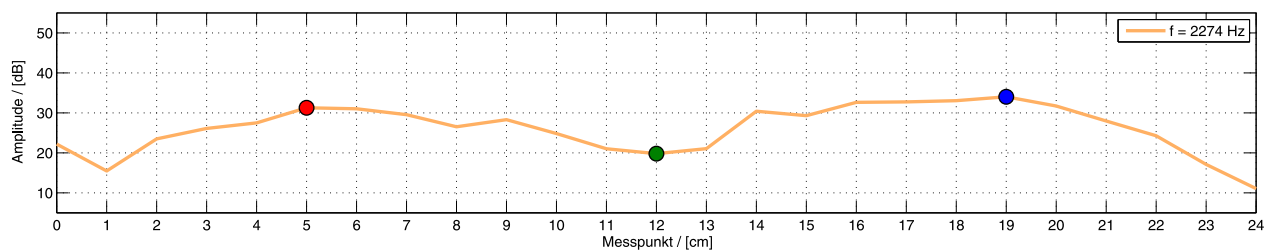
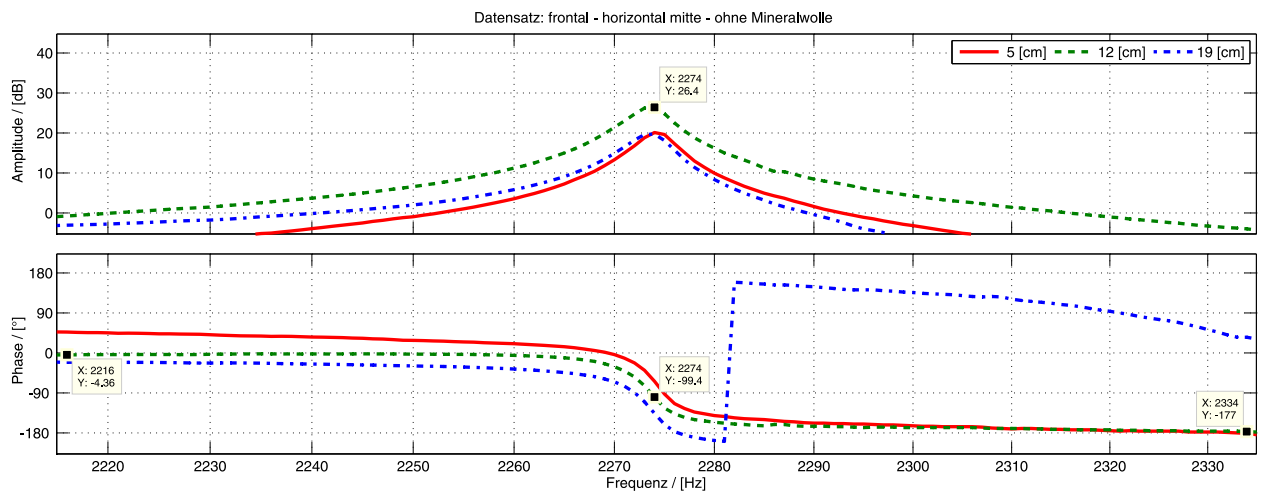
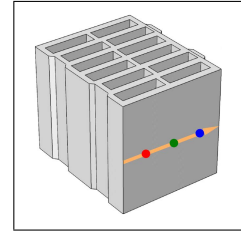
### D.6 Mode #6

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	1628
Halbwertsbreite	[Hz]	5,953
Güte	[-]	546,45
Dämpfung	[-]	0,00183



### D.7 Mode #7<sup>1</sup>

Parameter	Einheit	Wert
Frequenz	[Hz]	2274
Halbwertsbreite	[Hz]	4,389
Güte	[-]	1030,93
Dämpfung	[-]	0,00097



<sup>1</sup>Schwingungsform aufgrund hoher Modendichte nicht eindeutig zuordbar (siehe auch Kapitel 8.2)

## Anhang E

# Daten des virtuellen Prüfstands und der Prüfkörper

<b>Abmessung</b>	<b>Einheit</b>	<b>Wert</b>
Breite des Prüfstands	[m]	3,66
Raumtiefe - Senderraum	[m]	5,7
Raumtiefe - Empfangsraum	[m]	5
Wandbreite - gesamte Wand	[m]	3,66
Wandbreite - reduzierte Wand	[m]	0,732
Dicke der Wand	[m]	0,32

Tabelle E.1: Daten des virtuellen Prüfstands und der Prüfkörper



# Literaturverzeichnis

- [1] <http://www.ita-toolbox.org/>
- [2] *ÖNORM EN 29052-1: Akustik - Bestimmung der dynamischen Steifigkeit Teil 1: Materialien, die unter schwimmenden Estrichen in Wohngebäuden verwendet werden.* 1993
- [3] Guide for Verification and Validation in Computational Solid Mechanics. In: *The American Society of Mechanical Engineers* (2006)
- [4] *ÖNORM EN ISO 10846-1: Akustik und Schwingungsmesstechnik - Laborverfahren zur Messung der vibro-akustischen Transfereigenschaften elastischer Elemente Teil 1: Grundlagen und Übersicht.* 2008
- [5] *ÖNORM EN ISO 10140-4: Akustik - Messung der Schalldämmung von Gebäudeteilen im Prüfstand Teil 3: Messverfahren und Anforderungen.* 2010
- [6] TECHNOLOGISCHES GEWERBEMUSEUM - HÖHERE TECHNISCHE BUNDES-LEHR- UND VERSUCHSANSTALT: Prüfbericht TGM VA AB 11958: über die Luftschalldämmung einer rd. 30 cm dicken Massivwand aus Hochlochziegeln "Wienerberger POROTHERM 30 W.i Objekt Plan, Format: 30/24,8/24,9 cm"(Hochlöcher mit Steinwolle verfüllt), eine Wandseite mit Kalk- Gipsmörtel verputzt, zweite Wandseite mit diversen Verputz- bzw. Wärmedämmverbundsystemarten versehen. 2011. – Forschungsbericht
- [7] BAUTECHNISCHES INSTITUT LINZ: Druckfestigkeit und E-Modul gemäß ÖNORM EN 1052-1 von mit Dünnbettmörtel gemauerten Mauerwerksprobekörpern [RILEM] aus POROTHERM 30 W.i Objekt Plan der Fa. Wienerberger Ziegelindustrie GmbH. 2012. – Forschungsbericht
- [8] BABUSKA, I. ; TINSLEY ODEN, J.: Verification and validation in computational engineering and science: basic concepts. In: *Computer methods in applied mechanics engineering* 193 (2004), S. 4057–4066

- 
- [9] COZ DIAZ, J.J. del ; ALVAREZ RABANAL, F.P. ; GARCIA NIETO, P.J. ; SERRENO LOPEZ, M.A.: Sound transmission loss analysis through a multilayer lightweight concrete hollow brick wall by FEM and experimental validation. In: *Building and Environment* 45 (2010), S. 2373–2386
- [10] FASOLD, W. ; VERES, E.: *Schallschutz und Raumakustik in der Praxis*. HUSS-MEDIEN GmbH, 2003
- [11] HEISSERER, U.: *High order finite elements for material and geometric nonlinear finite strain problems*, Technische Universität München, Diss., 2007
- [12] HIEBEL, H.: *Analytische Berechnung der Schallabstrahlung des ebenen Biegewellenwandlers*, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 2005
- [13] HOFFMANN, J.: *Taschenbuch der Messtechnik*. Carl Hanser Verlag GmbH & Co. KG, 2010
- [14] JÄGER, W.: *Mauerwerk-Kalender 2009: Schwerpunkt: Ausführung, Instandsetzung, Lehmmauerwerk*. Ernst & Sohn, 2009
- [15] KUTTRUFF, H.: *Akustik - Eine Einführung*. S. Hirzel Verlag Stuttgart - Leipzig, 2004
- [16] LERCH, R. ; SESSLER, G. ; WOLF, D.: *Technische Akustik*. Springer, 2009
- [17] MAYDL, P. ; TRITTHART, J.: *Baustofflehre GL - Skriptum zur gleichnamigen Lehrveranstaltung*. Institut für Materialprüfung und Baustofftechnologie, Technische Universität Graz, 2012
- [18] MAYSENHÖLDER, W. ; HORVATIC, B.: Bestimmung elastodynamischer Eigenschaften von Baustoffen / Fraunhofer - Institut für Bauphysik IBP, Stuttgart. 1996. – Forschungsbericht
- [19] MÖSER, M.: *Messtechnik der Akustik*. Springer, 2010
- [20] MÖSER, M.: *Technische Akustik*. Springer, 2012
- [21] MÖSER, M. ; KROPP, W.: *Körperschall*. Springer, 2010
- [22] PETRITSCH, H.: *FEM - Simulationen mit COMSOL Multiphysics im Anwendungsbereich der Technischen Akustik*, Technische Universität Graz, Diplomarbeit, 2011
- [23] PRIEBSCHE, H.H.: *Akustik für Motor und Fahrzeug - Vorlesungsunterlagen zur gleichnamigen Lehrveranstaltung*. Technische Universität Graz, 2013
- [24] RABINOVICH, S.: *Measurement errors and uncertainties: theory and practice*. Springer, 2005
- [25] RABOLD, A.: *Anwendung der Finite Element Methode auf die Trittschallberechnung*, Technische Universität München, Diss., 2010

- 
- [26] RIEG, F. ; HACKENSCHMIDT, R. ; ALBER-LAUKANT, B.: *Finite Elemente Analyse für Ingenieure*. Hanser, 2012
- [27] SARRADJ, E.: *Hochfrequenter Körperschall in Strukturen*, Technische Universität Dresden, Diss., 1998
- [28] WESELAK, W.: *Technische Akustik - Skriptum zur gleichnamigen Lehrveranstaltung*. Technische Universität Graz, 2013
- [29] WESELAK, W. ; GRABER, G.: *Raumakustik - Skriptum zur gleichnamigen Lehrveranstaltung*. Technische Universität Graz, 2007
- [30] ZIENKIEWICZ, O.C. ; TAYLOR, R.L. ; ZHU, J.Z.: *The Finite Element Method, Its Basis & Fundamentals, 6th edition*. Verlag Butterworth-Heinemann, 2005