



Alexander Venus, BSc

**Analysen zur Momentanwertmessung
mit einem hydrodynamischen Viskosimeter
bei Verwendung eines Wirbelstromsensors**

MASTERARBEIT

zur Erlangung des akademischen Grades

Diplom-Ingenieur

Masterstudium Telematik

eingereicht an der

Technischen Universität Graz

Betreuer

Priv.-Doz. Dr.techn. Dipl.-Ing. Gerald Steiner

Institut für Elektrische Messtechnik
und Messsignalverarbeitung

in Kooperation mit Anton-Paar GmbH

EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

AFFIDAVIT

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt, und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommenen Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladene Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources/resources, and that I have explicitly indicated all material which has been quoted either literally or by content from the sources used. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis.

Datum / Date

Unterschrift / Signature

Abstract

This thesis is dedicated to the improvement of the measurement principle of a hydrodynamic viscometer, as to progress towards instantaneous measurement. The analysis focuses on the electronic precision distance measurement, which is realised by the use of an eddy current sensor with parallel resonance circuit in this device and represents a central part of the measurement chain to determine the viscosity value. In the first part of this thesis the worst-case deviation of the measurement value, caused by the influence of temperature and aging on the analogue components, is quantitatively estimated. Subsequently, within the scope of the second part of the thesis, digital measurement signal processing is analysed regarding its optimization by the use of theory on the concept 'digital lock-in amplifier', reviewed within this project. As a result of the considerations regarding optimisation the 'projection method' is presented, which enables the extraction of additional information from the analogue system, utilizing signal phase measurement as well as multi frequency excitation of the parallel resonance circuit, in order to reduce the influence of dynamic component drifts on the measurement signal.

Keywords: viscosity measurement; viscometer; eddy current sensor; projection method; lock-in amplifier; phase measurement; multi frequency measurement.

Kurzfassung

Diese Arbeit widmet sich der Verbesserung des Messprinzips eines hydrodynamischen Viskosimeters, um in Richtung einer Momentanwertmessung zu gelangen. Im Fokus steht dabei die Analyse der elektronischen Präzisionsabstandsmessung, welche bei diesem Messgerät mithilfe eines Wirbelstromsensors mit Parallelschwingkreis realisiert wird und zentraler Teil der Messkette zur Bestimmung des Viskositätswertes ist. Im ersten Teil der Arbeit erfolgt eine quantitative Abschätzung der, durch die Quereinflüsse von Temperatur und Alterung auf die analogen Bauteile verursachten, worst-case Abweichungen des Messwertes, um anschließend, im zweiten Teil der Arbeit, mithilfe von im Rahmen des Projekts aufgearbeiteter Theorie zum Konzept 'digitaler Lock-In Verstärker', die digitale Messsignalverarbeitung hinsichtlich ihrer Optimierbarkeit zu untersuchen. Im Zuge der Überlegungen zur Optimierung wird die 'Projektionsmethode' entwickelt, welche es, basierend auf der Messung der Signalphase sowie der Anregung des Parallelschwingkreises bei mehreren Signalfrequenzen, ermöglicht, zusätzliche Information aus dem Analogsystem zu extrahieren, um die Quereinflüsse von dynamischen Bauteiländerungen auf das Messsignal zu reduzieren.

Schlüsselwörter: Viskositätsmessung; Viskosimeter; Wirbelstromsensor; Projektionsmethode; Lock-In Verstärker; Phasenmessung; Mehrfrequenzmessung.

Inhaltsverzeichnis

1	Einführung	1
1.1	Hintergrund	1
1.2	Mechanisches Messprinzip	2
1.3	Elektrotechnisches Messprinzip	3
1.3.1	Wirbelstromsensor	3
1.3.2	Schwingkreis	6
1.4	Digitales Messkonzept	7
1.5	Problemstellung	9
2	Analyse des Einflusses von Fehlerquellen im Analogbereich auf das Mess-	13
	signal	
2.1	Modellierung des analogen Signalweges	14
2.1.1	Eingangsbereich - Signalgenerator	15
2.1.2	Sensorbereich - Schwingkreis mit Wirbelstromsensor	19
2.1.3	Ausgangsbereich - Signalmessung	25
2.2	Analyse von Bauteildrifts	29
2.3	Simulation der Messspannungsabweichung	31
3	Theoretische Betrachtung des Digitalen Lock-In Verstärkers	39
3.1	Einfacher Lock-In Verstärker	39
3.2	Erweiterung: Doppel Lock-In Verstärker	42
3.3	Digitaler Lock-In Verstärker	43
4	Theoretische Optimierungsansätze	50
4.1	Analysen zur Optimierung der Rauschunterdrückung des FIR-Filters	50
4.2	Analysen zur Rauschunterdrückung durch Überabtastung	54
4.3	Projektions-Ansatz	59
5	Praktische Implementierung des Projektions-Ansatzes	75
5.1	Überlegungen zur Implementierbarkeit im FPGA	75
5.1.1	Grundprinzip – 1-Frequenz-Betrags-Messung	76
5.1.2	Betrags-Phasen-Messung	80
5.1.3	2-Frequenz-Messung	81
5.2	Evaluierung des Modellverhaltens	87
5.2.1	Messaufbau	87

5.2.2 Resultate	94
---------------------------	----

6 Diskussion	98
---------------------	-----------

1 Einführung

1.1 Hintergrund

Die Bestimmung rheologischer Parameter wie der dynamischen Viskosität η hat sich im Laufe der letzten Jahrzehnte zu einem wichtigen Kriterium für die moderne Prozesskontrolle in zahlreichen Industriegebieten entwickelt. Zu diesen zählen unter anderem die Nahrungsmittelindustrie und Farbmanufaktur, wo die Viskosität ein wichtiges Qualitätsmerkmal darstellt sowie die Kohle- und Mineralindustrie, wo Rheologie zum Erreichen eines optimalen Mahleffektes sowie hocheffizienter Trennung verwendet wird [4].

Die dynamische Viskosität η wird durch das Verhältnis aus Schubspannung τ und der Geschwindigkeitsänderung über die Mediumstiefe $\delta v/\delta y$, welche oft als Schergeschwindigkeit D bezeichnet wird, definiert (siehe dazu Abbildung 1 ¹):

$$\eta = \frac{\tau}{D} \quad (1)$$

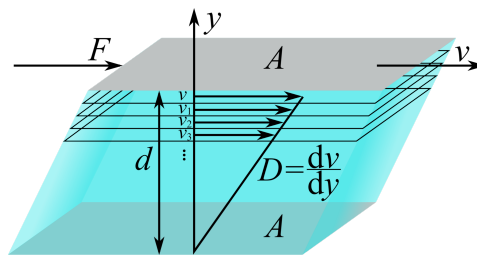


Abbildung 1: Definition der dynamischen Viskosität

Vor 1980 wurde Viskositätsmessung vor allem durch klassische Rotationsviskosimeter durchgeführt, bei denen ein Rotor innerhalb der untersuchten Flüssigkeit durch einen Motor mit einer definierten Winkelgeschwindigkeit ω angetrieben und das dazu benötigte Drehmoment M z.B. über die Stromaufnahme i_M des Motors gemessen wird [11]. Dabei gilt

$$\tau \sim \omega \quad i_M \sim M \sim D \quad (2)$$

Für den Laborbereich existieren neben dem klassischen Rotationsviskosimeter auch noch diverse andere Messprinzipien, wie zum Beispiel Kapillarviskosimeter, Stabinger-Viskosimeter oder Fallkörperviskosimeter.

¹entnommen von <http://de.wikipedia.org>

In der modernen Prozessrheologie, bei der die Messungen in der Regel 'inline', das heißt innerhalb der Prozessanlage erfolgt, treten jedoch zusätzliche Anforderungen wie die Beständigkeit des Sensors gegenüber hohem Druck sowie hoher Temperatur auf, denen klassische Viskosimeter aus unterschiedlichen Gründen nicht standhalten [17].

1.2 Mechanisches Messprinzip

Aufgrund der oberhalb genannten Anforderungen wurde von der Anton Paar GmbH im Jahre 2010 ein neues Rotationsviskosimeter eingeführt, welches die Bestimmung der dynamischen Viskosität ohne eine direkte Messung des Drehmoments ermöglicht. Dadurch wird unter anderem die Aussparung von bewegten Teilen am Sensor selbst ermöglicht, welche aufgrund der notwendigen Dichtungen die Druckbeständigkeit von klassischen Rotationsviskosimetern stark einschränken.

Dieses neue Messinstrument bestimmt die Viskosität eines Mediums mithilfe des in Abbildung 2 gezeigten Messkopfs, welcher über einen Flansch direkt im Flussbereich des Mediums versenkt, d.h. innerhalb der Prozessanlage positioniert wird.

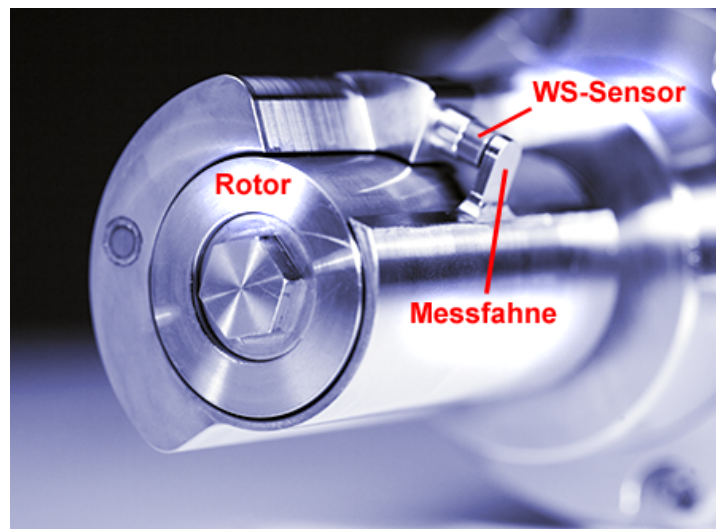


Abbildung 2: Messkopf des L-Vis 520 der Anton-Paar GmbH
(entnommen und modifiziert aus [17])

Die vorbeiströmende Probe wird über den Rotor in den Messspalt gezogen. Es ergibt sich ein Druckgradient, welcher den elastischen, unfixierten Teil des äußeren Rohres nach außen ablenkt. Dadurch wird die Messfahne, welche am Ende jenes elastischen

Teils befestigt ist, vom Sensor, welcher am anderen Ende des Rohres fix gelagert ist, entfernt, d.h. der Abstand s zwischen Sensor und Messfahne ändert sich.

Es kann gezeigt werden, dass für jenen Abstand s gilt

$$s \sim \frac{n \cdot \eta \cdot d^2}{h^2}, \quad (3)$$

wobei n die Drehzahl des Motors, d der Messkörperdurchmesser und h die mittlere Spalthöhe des Messspalts darstellt. Nach der Wahl einer genau definierten konstanten Drehzahl des Motors, ist die dynamische Viskosität η des Mediums daher eine lineare Funktion des Sensorabstandes und kann mithilfe vorheriger Kalibration des Messgerätes bestimmt werden.

Dieses neue Verfahren erlaubt dabei eine Proben temperatur von -5 °C bis 200 °C und einen Proben-Druckbereich von 0 bis 10 bar.²

Für Weiterführendes zum mechanischen Konzept sei an dieser Stelle auf [17] verwiesen.

1.3 Elektrotechnisches Messprinzip

1.3.1 Wirbelstromsensor

Um den Sensorabstand s , der, wie Gleichung 3 zeigt, proportional zur dynamischen Viskosität η ist, messtechnisch erfassen zu können wird ein sogenannter Wirbelstromsensor eingesetzt. Der Vorzug eines Wirbelstromsensors gegenüber anderen Sensoren (wie z.B. Kapazitätsmessung) ist vor allem dadurch begründet, dass Wirbelstromsensoren

- sehr robust gegenüber äußeren Einflüssen (Temperatur, Druck) sind.
- mit geeigneter Elektronik hoch genaue Messungen (μm Bereich) ermöglichen [18].

Der Messeffekt des Wirbelstromsensors besteht darin, dass in einem elektrisch leitenden Objekt, welches sich im Magnetfeld B_1 einer von Wechselstrom durchflossenen Spule befindet, Wirbelströme induziert werden. Durch diese Wirbelströme werden drei verschiedene physikalische Rückwirkungen auf die Spule hervorgerufen, welche die Spulenimpedanz $\mathbf{Z} = R_L + j\omega L$ der realen Spule verändern [7]:

²Daten entnommen aus dem Datenblatt 'L-Vis 520 Technical Data'.

Effekt 1: Die Wirbelströme erzeugen wiederum ein magnetisches Feld B_2 , welches dem Feld der Spule gemäß der Lenz'schen Regel entgegengerichtet ist und die Induktivität L der Spule verringert.

Effekt 2: Abhängig von spezifischen Widerstand ρ des leitenden Objekts (Messfahne), wird nach dem Joule'schen Gesetz Wärme erzeugt. Diese Wärmeverluste wirken sich in Form einer Erhöhung des Spulenwiderstands R_L aus.

Effekt 3: Besteht das Objekt aus einem ferromagnetischen Material, vergrößert sich die wirksame Permeabilität der Spule signifikant, was zu einer Erhöhung der Induktivität L führt.

Dieses Verhalten wird in der Literatur ([13], [19]) auch oftmals mithilfe des in Abbildung 3 dargestellten Transformator Ersatzschaltbildes beschrieben.

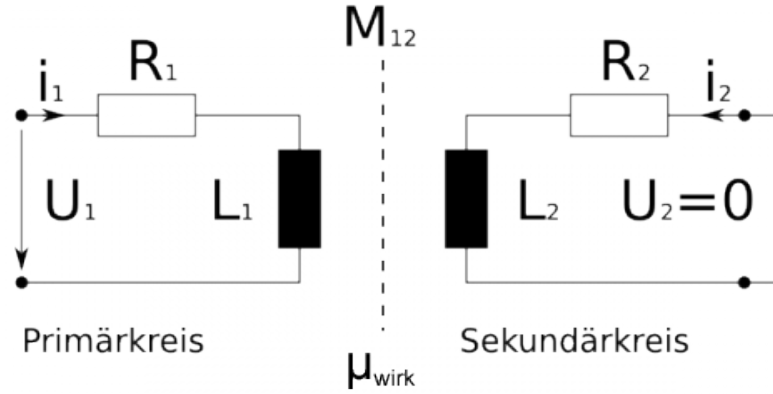


Abbildung 3: Transformator Ersatzschaltbild für Wirbelstromsensor (entnommen aus [13])

Stellt man für dieses Modell die Maschengleichungen für Primär- bzw. Sekundärkreis auf erhält man

$$R_1 \mathbf{i}_1 + j \mu_{wirk}(s) \omega L_1 \mathbf{i}_1 + j \omega M_{12}(s) \mathbf{i}_2 = \mathbf{u}_1 \quad (4)$$

bzw.

$$R_2 \mathbf{i}_2 + j \omega L_1 \mathbf{i}_1 + j \omega M_{12}(s) \mathbf{i}_1 = 0 \quad (5)$$

Damit lässt sich die Impedanz der Primärspule als

$$\mathbf{Z}(s) = \frac{\mathbf{u}_1}{\mathbf{i}_1} = \underbrace{R_1 + R_2 \frac{\omega^2 M_{12}(s)^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2}}_{R_L} + j \underbrace{(\mu_{wirk}(s) \omega L_1 - \omega L_2 \frac{\omega^2 M_{12}(s)^2}{R_2^2 + \omega^2 L_2^2})}_L \quad (6)$$

berechnen.

Wie man an Gleichung 6 leicht erkennen kann, wird bei einer Annäherung der Messfahne, die eine Vergrößerung der Gegeninduktivität M_{12} mit sich zieht, der Realteil der Spulenimpedanz R_L größer (Effekt 2). Der Imaginärteil der Spulenimpedanz L wird durch die zwei komplementären Effekte 1 und 3 bestimmt, da hier bei einer Annäherung der Messfahne sowohl die Erhöhung der Gegeninduktivität M_{12} als auch die Erhöhung der wirksamen Permeabilität μ_{wirk} zu tragen kommt. Welcher dieser Effekte dominiert, ist abhängig vom Messfahnenmaterial [18].

Es sei an dieser Stelle jedoch angemerkt, dass dieses Modell die Messfahne als eine Flachspule mit einer einzelnen, in sich geschlossenen Windung betrachtet. Dies ist für die oberhalb beschriebene phänomenologische Betrachtung des Zusammenhangs zwischen Abstand s und Spulenimpedanz \mathbf{Z} ausreichend, stellt jedoch eine zu starke Vereinfachung für eventuelle quantitative Simulationen dar [18].

Empirische Analysen sowie Simulationen die in [18] mit komplexeren Spulenmodellen durchgeführt wurden, zeigen, dass zwischen Weg s und Realteil R_L sowie Imaginärteil L der Spulenimpedanz generell ein nichtlinearer Zusammenhang herrscht. Wie ebenfalls in [18] nachzulesen ist, kann der Zusammenhang für kleine Abstandsänderungen $\Delta s \ll 1$ mm, wie sie im Zuge der Viskositätsmessung mit dem L-Vis 520 auftreten, jedoch ausreichend durch eine **lineare Funktion** beschrieben werden.

Des Weiteren konnte im Rahmen der praktischen Analysen dieser Arbeit in Kapitel 5.2.2 gezeigt werden, dass die Änderung der wirksamen Permeabilität beim verwendeten Messfahnenmaterial einen weitaus geringeren Einfluss auf die Spuleninduktivität hat, als die Wirbelstrom-induzierten Gegenmagnetfelder. Dies deckt sich mit den Resultaten aus [18], die jedoch unter Verwendung eines nicht-ferromagnetischen Messfahnenmaterials durchgeführt wurden. Bei Annäherung der Fahne, d.h. bei Verringerung des Messabstandes, gilt daher, dass die Spuleninduktivität aufgrund der **Dominanz von Effekt 1** gegenüber Effekt 3 verkleinert wird, während der Realteil der Spulenimpedanz R_L durch Effekt 2 vergrößert wird.

Bei den oberhalb beschriebenen Bedingungen gilt also zusammenfassend:

$$L \sim s \quad \frac{1}{R_L} \sim s \quad (7)$$

Aufgrund von bereits erfolgten Arbeiten in diesem Bereich, wie zum Beispiel [19, S.7], wurde zu Beginn dieses Projektes außerdem angenommen, dass Effekt 2, das bedeutet die Joule'schen Wärmeverluste, beim verwendeten Messfahnenmaterial eine um Größenordnungen geringere Auswirkung hat als das Zusammenspiel aus Effekt 1 und 3, d.h. die Induktivitätsänderung aufgrund der Wirbelstrom-induzierten Magnetfelder und die Änderung der wirksamen Permeabilität. Aus diesem Grund wurde im Rahmen der folgenden Analysen eine Änderung des Imaginärteils der Spulenimpedanz und somit eine **Änderung der Induktivität L als primäre Ursache für das Messsignal angenommen**. Siehe dazu Abschnitt 5.2.2.

1.3.2 Schwingkreis

Um die Änderung der Spulenimpedanz \mathbf{Z} , deren Komponenten, wie im vorherigen Kapitel 1.3.1 beschrieben wurde, abhängig vom Sensorabstand des Wirbelstromsensors sind, in eine Spannungsänderung transformieren zu können, wird die Spulenimpedanz in einen Parallelschwingkreis eingebracht. Dies wird in Abbildung 4 veranschaulicht. Der Schwingkreis wird dabei über eine sinusförmige Spannung U_{in} angeregt und die Ausgangsspannung U_{out} gemessen. Man spricht von einer erzwungenen Schwingung.

Betrachtet man den Parallelschwingkreis als unbelasteten komplexen Spannungsteiler ergibt sich für die Anregung mit einer harmonischen Schwingung folgender Zusammenhang (Darstellung der Spannungen als komplexer Zeiger):

$$\mathbf{U}_{out} = \frac{1}{1 + R_v \mathbf{Y}} \mathbf{U}_{in}, \quad (8)$$

wobei

$$\mathbf{Y} = j \omega C + \frac{1}{\mathbf{Z}} = j \omega C + \frac{1}{j \omega L + R_L}. \quad (9)$$

Wie aufgrund der obigen Gleichung leicht nachzuvollziehen ist, führt eine Änderung der komplexen Spulenimpedanz sowohl zu einer Änderung des Betrags, als auch der Phase der Ausgangsspannung U_{out} . Bei der aktuellen Implementierung des L-Vis 520 wird jedoch nur die Betragsinformation verwendet.

Die Wahl des Arbeitspunktes, das heißt der Parameter von Gleichungen 8 und 9, erfolgt dabei so, dass das Zusammenspiel aus Frequenz und Bauteilparametern eine möglichst

starke Empfindlichkeit des Betrages der Mess- bzw. Ausgangsspannung $|U_{out}|$ auf eine Änderung der Spuleninduktivität L ergibt.

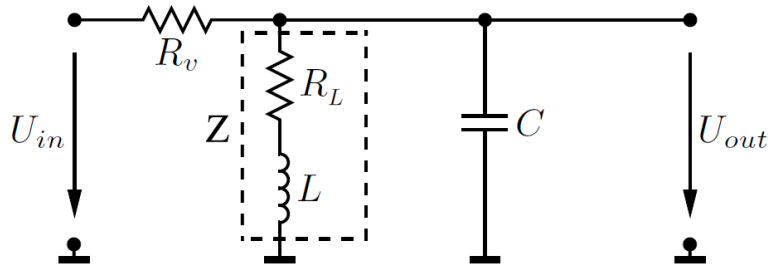


Abbildung 4: Parallelschwingkreis Ersatzschaltbild

Um eine möglichst einfache Kalibrierung der Messung zu ermöglichen, wird bei der Wahl des Arbeitspunktes außerdem die differentielle Linearität berücksichtigt. Ist diese ausreichend, kann bei kleinen Änderungen von L (bzw. von R_L) ein lineares Verhältnis zum Betrag der Ausgangsspannung angenommen werden:

$$|\Delta U_{out}| \sim \Delta L_{(AP)} \quad (\Delta |U_{out}| \sim \Delta R_{L (AP)}) \quad (10)$$

Weiterführende Untersuchungen zur realen Implementierung des Schwingkreises erfolgen im Zusammenhang mit den Messfehleranalysen in Abschnitt 2.1.

1.4 Digitales Messkonzept

Um die Viskosität η nun praktisch ermitteln zu können, muss der im vorherigen Abschnitt 1.3.2 beschriebene Schwingkreis mit einer sinusförmigen Spannung U_{in} angeregt und die Spannung U_{out} mithilfe geeigneter elektronischer Beschaltung ausgelesen und verarbeitet werden.

Die dazu verwendeten Hardwarekomponenten sowie der elektrische Signalfluss wurden schematisch in Abbildung 5 dargestellt.

Wie zu erkennen ist, stellt ein FPGA (Field Programmable Gate Array) die zentrale Einheit der Messsignalverarbeitung dar. Die verwendete Programmstruktur besteht dabei aus diversen Blöcken, die sowohl als Signalgenerator für das Anregungssignal U_{in} , als auch zur Filterung und Verarbeitung der Ausgangsspannung U_{out} dienen. Der Signalgenerator wird im Wesentlichen durch eine Look-Up-Table (LUT) bestehend aus

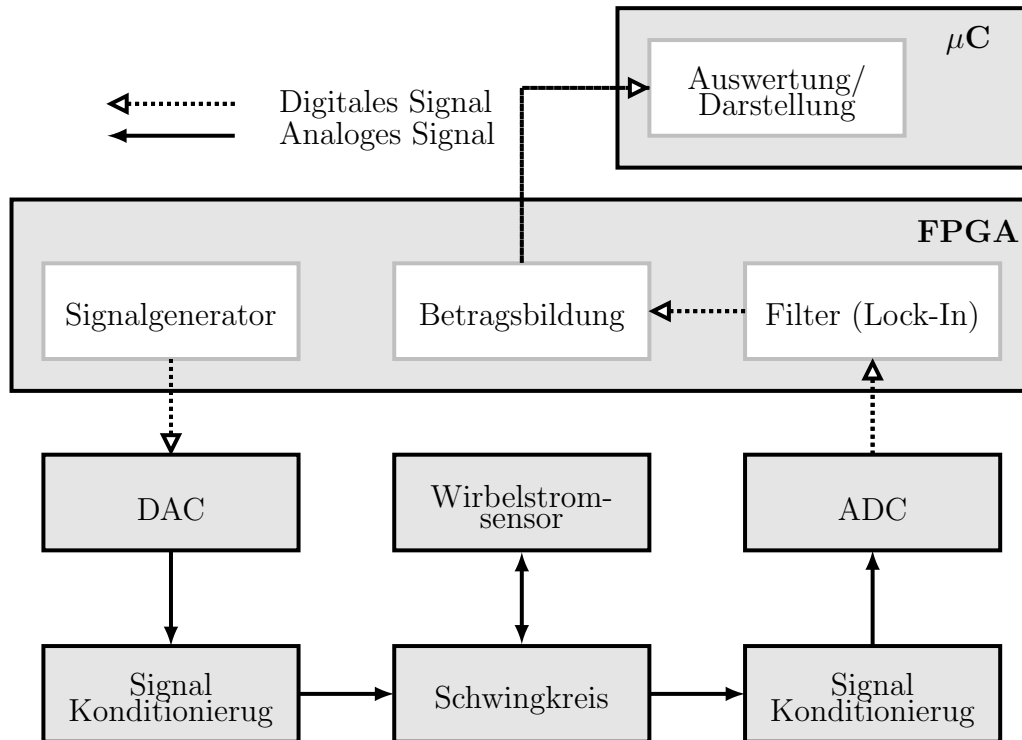


Abbildung 5: Schematische Darstellung des Signalfusses und der Hardware-Komponenten

quantisierten Sinuswerten dargestellt, welche zyklisch durchlaufen wird. Die codierten Digitalwerte werden dann durch einen geeigneten Digital-Analog-Konverter (DAC) ausgegeben und das entstehende Spannungssignal mithilfe von Analogelektronik verstärkt und geglättet, bevor es schließlich den Schwingkreis speist (U_{in}). Das ausgelesene Signal (U_{out}) wird ebenfalls durch Analogelektronik angepasst, um anschließend durch einen Analog-Digital-Umsetzer in codierte Digitalwerte umgewandelt und an den FPGA übergeben zu werden. Dieser nutzt nun das Prinzip eines digitalen Lock-In Verstärkers (Synchrondemodulator) um eine online Bandpass-Filterung sowie Demodulation des Signals durchzuführen und den Betragswert $|U_{out}|$ zu ermitteln. Die Filterung des Signals ist notwendig, da durch die begrenzte Drehzahl n des Motors bei realen mechanischen Gegebenheiten nur sehr geringe Veränderungen des Sensorabstandes Δs bewirkt werden können. Dies hat zur Folge, dass in der Praxis sehr geringe Spannungsänderungen detektiert werden müssen, welche stark vom Rauschen der elektronischen Komponenten (Widerstandsrauschen, Verstärkerrauschen) überlagert sind. Eine detaillierte Analyse der Funktion des digitalen Lock-IN Verstärkers, dessen Filterkonzept im Zentrum der Analysen dieser Arbeit steht, findet sich in Kapitel 3. Schließlich wird das prozessierte

bzw. aufbereitete Signal mithilfe eines SPI (Serial Peripheral Interface) Kommunikationsbusses an einen Mikrocontroller übergeben, welcher die endgültige Auswertung des Messwertes vornimmt. Diese Auswertung erfolgt mithilfe eines linearen Fits, welcher im Zuge eines Kalibrationsprozesses ermittelt wird.

Der entscheidende Vorteil der Verwendung eines FPGAs für die Signalverarbeitung im Vergleich zur Nutzung eines Mikrocontrollers (muC) ist dabei nicht nur seine Kostengünstigkeit in Verbindung mit hohen Taktfrequenzen, sondern vor allem die Tatsache, dass ein FPGA im Gegensatz zur klassischen sequenziellen Programmabarbeitung eines Mikrocontrollers im Prinzip ein programmierbares Netzwerk aus Logik-Gattern darstellt. Daher können die unterschiedlichen Aufgaben (Signalgenerierung und Verarbeitung des Messsignals) zeitgleich erfolgen.

Eine detaillierte Beschreibung der im Rahmen dieses Kapitels schematisch beschriebenen Komponenten erfolgt Schritt für Schritt im Zuge der Kapitel 2 und 5.

1.5 Problemstellung

Wie in den vorhergehenden Kapiteln Schritt für Schritt beschrieben wurde, steht die dynamische Viskosität η unter definierten Bedingungen in einem linearen Zusammenhang zur Schwingkreis-Ausgangsspannung $|U_{out}|$, welche mithilfe von geeigneter Messelektronik in ein Digitalsignal umgewandelt und anschließend mithilfe von Kalibrationsdaten ausgewertet wird.

Dieser eindeutige Zusammenhang gilt jedoch nur unter Optimalbedingungen. In der Praxis treten vor allem zwei Probleme auf:

1. Überlagerung des Signals mit Rauschen
2. starker Drift des Signals aufgrund von Temperatureinflüssen und Bauteilalterung

Wie im vorherigen Unterkapitel 1.4 erläutert, erfordert Problem 1, das heißt das Messdatenrauschen, eine Filterung des Signals, welche in der aktuellen Messhardware in Form eines digitalen Lock-IN Verstärkers realisiert wurde.

Laut Datenblatt erreicht das L-Vis 520 einen Viskositäts-Messbereich von 1 mPas bis zu 50 Pas. Um dies zu erreichen, wird bei der verwendeten mechanischen Konfiguration eine Spannungsauflösung von mindestens $6 \mu\text{V}$ benötigt. In der Arbeit [19] wurde eine theoretische Rauschabschätzung des Verstärkerrauschens durchgeführt. Ohne Lock-IN

Verstärker ergab sich eine effektive Rauschspannung von etwa 3,5 mV. Eine statistische Schätzung der gesamten Rauschvarianz (Verstärkerrauschen, Widerstandsrauschen, Quantisierungsrauschen ...) anhand des über 160 s aufgezeichneten Hintergrundsignals ergab eine effektive Rauschspannung von ca. 10 mV (Maximum Likelihood Schätzung). Bei der im Originalaufbau verwendeten Abtastfrequenz von ca. 555,6 kHz und der Verwendung eines Mittelwertfilters ergibt das eine Messdauer von mindestens

$$T_m = \frac{N}{f_s} = \frac{U_{ist}^2}{U_{soll}^2} = \frac{(10 \text{ mV})^2}{(7 \mu\text{V})^2} \approx 5 \text{ s} \quad (11)$$

für die Ermittlung eines einzelnen Wertes³. Man vergleiche dazu die aufgrund der elektronischen Beschaltung theoretisch mögliche Abtastzeit von

$$t_{theoretisch} = \frac{1}{555,5 \text{ kHz}} \approx 1,8 \mu\text{s} \quad (12)$$

Um das zweite der genannten Probleme, also den Signaldrift aufgrund der Bauteilalterung sowie der Temperatureinflüsse auf die Messschaltung zu kompensieren, werden in der aktuellen Version des L-Vis 520 zwei Verfahren angewendet:

1. Temperaturkompensation
2. Differenzwertmessung

Unter Temperaturkompensation versteht man die nachträgliche Korrektur der Auswirkung von Temperaturschwankungen auf den aus der Messung resultierenden Viskositätswert. Große Temperaturänderungen sind beim L-Vis 520 vor allem innerhalb des Probenbereiches zu erwarten. Gemäß Datenblatt sind hier Werte von $-5 \text{ }^\circ\text{C}$ bis $200 \text{ }^\circ\text{C}$ erlaubt. Dementsprechend kann sich der Kupferwiderstand (Gleichstromwiderstand) der Sensorspule stark ändern. Im Modell aus Abbildung 4 bedeutet das eine Änderung von R_L , was sich direkt auf das Messsignal auswirkt. Unter der Annahme der Unkorreliertheit von Viskositätssignal und Temperatursignal wird im Rahmen der Gerätekalibration eine lineare Regressionskurve erstellt. Durch Online-Messung der Temperatur wird deren Einfluss zur Laufzeit mithilfe des aufgenommenen Fits korrigiert. Dieses Verfahren wurde jedoch bereits detailliert in der Arbeit [19] analysiert und soll im Rahmen dieses Projektes nicht weiter betrachtet werden.

³Für die Berechnung wurde die Rauschunterdrückung des Mittelwertfilters, entsprechend der aktuellen Implementierung im L-Vis 520 verwendet. Eine detaillierte Betrachtung der Rauschunterdrückung von FIR-Filtern erfolgt im Zuge von Abschnitt 4.2.

Trotz der Anwendung des oberhalb erläuterten Verfahrens zeigten praktische Analysen, welche im Vorfeld dieser Arbeit durchgeführt wurden, dass der Einfluss von Temperaturänderungen und Bauteildrifts auf die Messkette immer noch zu Drifts des Messsignals führen, welche den errechneten Viskositätswert stark verfälschen.

Um Abhilfe für dieses Problem zu schaffen wurde das Verfahren der Differenzmessung eingeführt. Die simple Idee hinter diesem Verfahren ist es, anstatt der Messung eines einzelnen absoluten Digitalwertes W , die Differenz ΔW aus zwei Werten zu bilden.

Wie in den vorhergehenden Kapiteln (Gleichungen 3 bis 10) erläutert wurde, gilt

$$W \sim |U_{out}| \sim s \sim \eta n \quad (13)$$

und folglich ist

$$\Delta W = W_2 - W_1 \sim \eta_2 n_2 - \eta_1 n_1. \quad (14)$$

Sofern η **konstant** ist, gilt $\eta = \eta_1 = \eta_2$ und daher

$$\Delta W \sim \eta (n_2 - n_1) = \eta \Delta n \sim \eta. \quad (15)$$

Führt man also zwei Messungen bei verschiedenen Motordrehzahlen n durch, ist die Differenz der Messwerte ΔW proportional zur dynamischen Viskosität η , sofern diese für beide Messungen konstant ist.

Eine solche Messung hat im Vergleich zu einer absoluten Messung $W = f(\eta)$ den entscheidenden Vorteil, dass die Differenz der Messwerte ΔW im Prinzip der **Steigung der ursprünglichen Messfunktion** $\frac{\Delta W}{\Delta n} = f(\eta)$ entspricht, welche ein weitaus stabilerer Messparameter ist. Das bedeutet, dass sich kleine Parameteränderungen innerhalb dieser sehr komplexen Messkette (siehe zum Beispiel Gleichung 8) weitaus signifikanter auf den Funktionswert an sich, als auf die Steigung der Funktion auswirken.

Da dieser Zusammenhang bisher jedoch nur qualitativ durch empirische Versuche analysiert wurde, beschäftigt sich der erste Teil dieser Diplomarbeit mit einer theoretischen Analyse des relativen Messfehlers bei der Messung der Viskosität η mithilfe eines absoluten Messwertes W sowie eines Differenzwertes ΔW . Siehe Kapitel 2.

Die Durchführung von zwei Messungen bei verschiedenen Drehzahlen bringt jedoch auch zahlreiche Nachteile mit sich:

- Erneute Verlängerung der ohnehin schon großen Messzeit durch die Notwendigkeit von 2 Messungen sowie die Beschleunigungszeit des Motors.
- Notwendigkeit der Annahme von konstanten Temperatur- und Druckbedingungen während des langen Messvorgangs, da die dynamische Viskosität η eine Funktion der Proben temperatur T sowie des Probedrucks ρ ist.
- Mehrbelastung der mechanischen Komponenten durch die notwendigen Drehzahlwechsel.
- Einschränkung der Messung auf newtonsche Fluide, da die Viskosität η bei nicht newtonschen Fluiden eine Funktion der Scherrate D und somit der Drehzahl n des Motors ist.

Daher widmet sich der zweite Teil dieser Arbeit der Analyse von Möglichkeiten zur Verbesserung des Messkonzeptes, mit dem Ziel, die Durchführung einer 'Momentanwertmessung' zu ermöglichen. Dies bedeutet die Entwicklung von Konzepten zur

- Reduktion der notwendigen Messzeit.
- Reduktion des relativen Messfehlers, welcher aufgrund von parasitären Parameterdrifts verursacht wird, um nicht mehr auf das Prinzip der Differenzwertmessung angewiesen zu sein.

Siehe dazu Kapitel 4 und in weiterer Folge Kapitel 5.

Es sei darauf hingewiesen, dass sich die durchgeführten Analysen aufgrund des enormen Umfangs der einzelnen Facetten dieses Messgerätes auf die Optimierung der Abstandsmessung mithilfe des Wirbelstromsensors durch Konzepte der **digitalen Signalverarbeitung** fokussieren.

Betrachtungen bzw. Optimierung der mechanischen Konzepte dieses Gerätes sind nicht Teil der Arbeit.

2 Analyse des Einflusses von Fehlerquellen im Analogbereich auf das Messsignal

Wie im Abschnitt 1.5 dargelegt wurde, beschäftigt sich dieses Kapitel mit der quantitativen Analyse der Robustheit bzw. Stabilität des Messsignals bezüglich parasitärer Einflüsse bei Verwendung von Absolutwerten W sowie Differenzwerten ΔW zur Bestimmung der dynamischen Viskosität η .

Untersucht wurden Einflüsse auf die analoge Messkette, das heißt, auf den Wirbelstromsensor an sich, die Schwingkreis Elemente sowie die gesamte analoge Speise- und Auswerteelektronik (siehe dazu Abbildung 5 - Analoges Signal).

Der Fokus der Untersuchung lag dabei auf der Beurteilung des Einflusses von Temperaturänderungen, da große Schwankungen von Probertemperatur aber auch Umgebungstemperatur im Prozessbereich allgemein üblich sind. Zusätzlich wurde, sofern im Rahmen dieses Projektes entsprechende Daten verfügbar waren, eine Analyse der möglichen Auswirkungen von Bauteilalterungen miteinbezogen.

Um ein möglichst aussagekräftiges Ergebnis zu erhalten, wurde versucht, ausschließlich worst-case Werte für die Berechnungen zu verwenden. Außerdem ist anzumerken, dass die folgenden Betrachtungen unter der Annahme der Verwendung von Präzisionselementen (z.B. Präzisionswiderstände, Präzisionsoszillator) durchgeführt wurden, um die Möglichkeiten aber auch Beschränkungen des elektronischen 'State-Of-The-Art' gut aufzeigen zu können.

Um dies zu bewerkstelligen waren drei eigenständige Schritte notwendig:

1. die Aufstellung eines mathematischen Modells für den gesamten analogen Signalweg
2. die Analyse von möglichen Abweichungen der einzelnen Gleichungsparameter anhand von physikalischen Modellen und Datenblättern
3. die Simulation von Messungen nach den zwei Prinzipien Absolut- und Differenzwertmessung und Betrachtung des entstehenden Messfehlers

Diese Schritte werden durch die drei folgenden Unterkapitel beschrieben.

2.1 Modellierung des analogen Signalweges

Dieses Unterkapitel dient der Aufstellung eines mathematischen Modells für den gesamten analogen Signalpfad. Dieser wurde dazu aus dem original Schaltplan des L-Vis 520 extrahiert und ist in schematischer Form in der folgenden Abbildung 6 dargestellt.

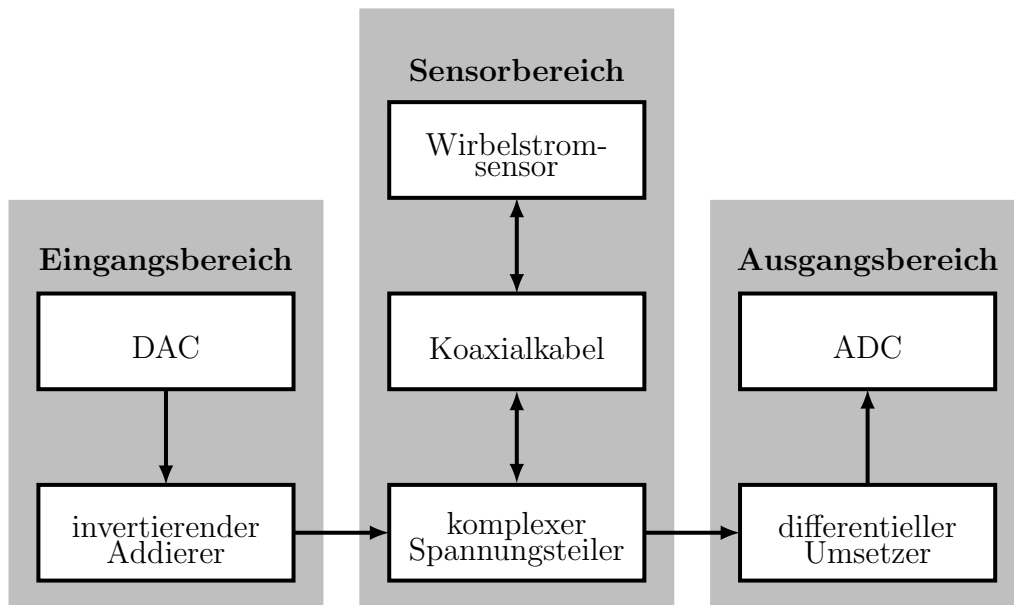


Abbildung 6: Schematische Darstellung des analogen Signalpfades des L-Vis 520

Wie in jener Abbildung zu erkennen ist, kann der Signalweg in drei separate Bereiche aufgeteilt werden:

1. In den Eingangsbereich, welcher das Sinussignal zur Anregung des Schwingkreises mithilfe eines DACs aus einem vom FPGA erzeugten Digitalsignal generiert.
2. In den eigentlichen Schwingkreis, welcher über ein Koaxialkabel mit der Messspule des Wirbelstromsensors verbunden ist.
3. In den Ausgangsbereich, welcher die Ausgangsspannung so anpasst, dass es vom ADC in ein messbares Digitalsignal umgesetzt werden kann, welches vom FPGA weiterverarbeitet wird.

Diese werden in den folgenden drei Abschnitten Schritt für Schritt betrachtet.

2.1.1 Eingangsbereich - Signalgenerator

Das Hauptelement des in Abbildung 6 gezeigten Eingangsbereiches, stellt der ADC 'AD5242' von Analog Devices dar. Es handelt sich um einen dual gewichteten, unipolaren 8-Bit ADC, welcher durch ein als Stromteiler betriebenes R-2R Netzwerk realisiert ist.

Dieser wird gemäß der Standardbeschaltung im Datenblatt, welche in Abbildung 7 gezeigt wird, mit einem als invertierenden Verstärker beschalteten Operationsverstärker (OPV) betrieben.

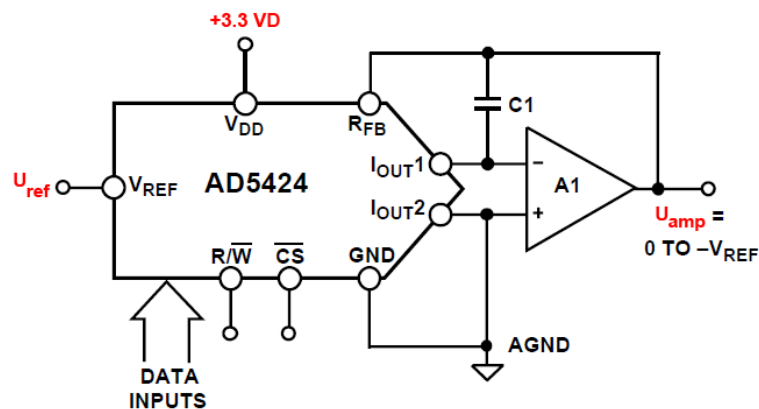


Abbildung 7: Standardbeschaltung des verwendeten ADC 'AD5242'

Dies wurde mithilfe des ICs LT6203 von Linear Technology realisiert. Die Referenzspannung

$$U_{ref} = 2,5 \text{ V} \quad (16)$$

wird dabei über eine geeignete Präzisionsspannungsquelle erzeugt, die jedoch, wie sich im folgenden zeigen wird, nicht weiter von Bedeutung für die durchgeführten Analysen ist und daher hier nicht näher betrachtet wird.

Gemäß des Datenblattes ergibt sich bei der vorgegebenen Beschaltung für die Ausgangsspannung⁴.

$$U_{amp} = -U_{ref} \frac{D_{in}}{2^N}, \quad (17)$$

wobei $N = 8$ Bit und $D_{in} = [0...255]$.

⁴Diese Formel lässt sich durch das interne R-2R Netzwerk ableiten. Da dies für die weitere Fehleranalyse jedoch unerheblich ist, soll an dieser Stelle auf eine detailliertere Betrachtung verzichtet werden. Es sei auf das Datenblatt des DAC sowie auf [5] verwiesen.

Mit der vom DAC erzeugten Spannung U_{amp} wird nun im zweiten Teil der Eingangsbeschaltung ein als invertierender Addierer beschalteter OPV (zweiter OPV des ICs LT6203) gespeist, welcher mit einer zusätzlichen Parallelkapazität versehen ist. Diese in Abbildung 8 dargestellte einfache Schaltung, erzeugt die finale Schwingkreis Eingangsspannung U_{in} und hat folgende Übertragungsfunktion:

$$U_{in} = -\mathbf{Z}_p \left(\frac{U_{amp}}{R_{amp}} + \frac{U_{ref}}{R_{ref}} \right), \quad (18)$$

wobei

$$\mathbf{Z}_p = \frac{R_p}{j\omega R_p C_p + 1}. \quad (19)$$

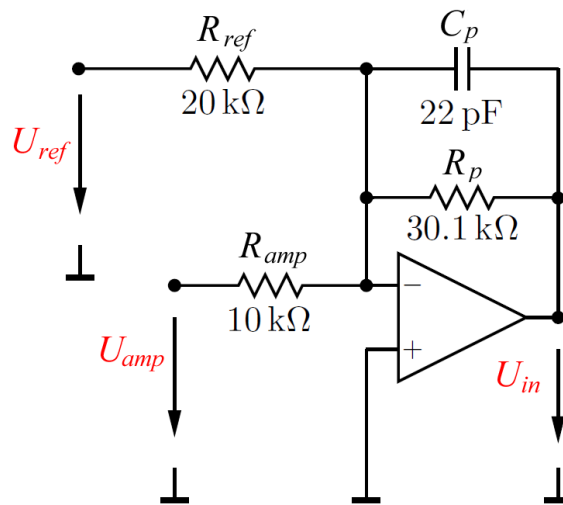


Abbildung 8: Modell des invertierenden Addierers im Eingangsbereich

Der Hauptgrund für die Verwendung dieser Beschaltung ist die Umwandlung des unipolaren DAC Signals in ein reines Wechselsignal. In der FPGA Originalsoftware des L-Vis 520 wird die in Abbildung 9 gezeigte Abfolge an Digitalcodes D zyklisch mit einer Samplefrequenz von $f_{DAC} = 2222$ kHz ausgegeben. Dadurch ergibt sich bei 16 Samples pro Periode eine Signalfrequenz von

$$f_0 = f_{DAC}/16 \approx 138,8 \text{ kHz}. \quad (20)$$

Wie man in Abbildung 9 erkennen kann, besteht das ausgegebene unipolare Signal

aus einer Wechselsignalamplitude von $D_{in}^{AC} = 120$ und eine Gleichsignalamplitude von $D_{in}^{DC} = 128$.

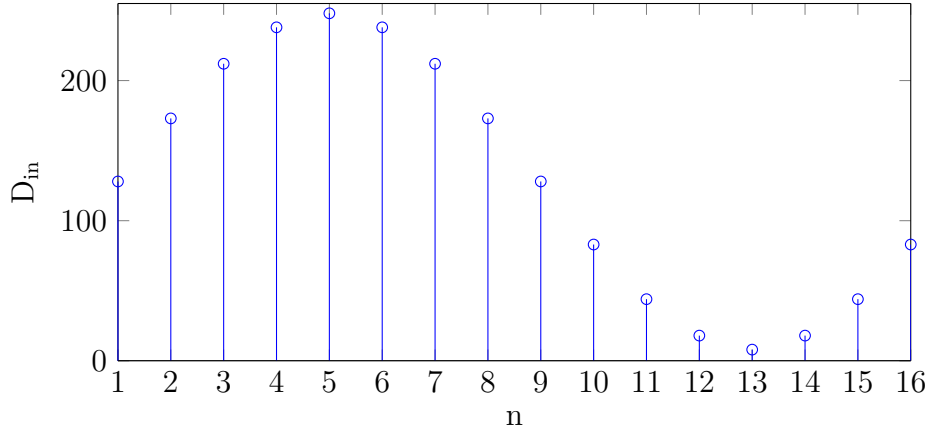


Abbildung 9: Darstellung einer Periode der vom FPGA ausgegebenen zyklischen Abfolge an Digitalcodes D_{in}

Damit ergibt sich unter Optimalbedingungen für den Gleichanteil des Schwingkreis-Eingangssignals

$$\begin{aligned}
 U_{in}^{DC} &= -\mathbf{Z}_p \left(\frac{U_{ref}}{R_{ref}} + \frac{U_{amp}^{DC}}{R_{amp}} \right) = \mathbf{Z}_p \left(\frac{U_{ref}}{R_{ref}} - \frac{D_{in}^{DC}}{2^N} \right) \\
 &= \mathbf{Z}_p \left(\frac{2,5 \text{ V}}{20 \text{ k}\Omega} - \frac{2,5 \text{ V} \cdot \frac{128}{256}}{10 \text{ k}\Omega} \right) = \mathbf{Z}_p \cdot 0 \text{ V} = 0 \text{ V}.
 \end{aligned}$$

Da diese Gleichung unabhängig von \mathbf{Z}_p ist, kann mithilfe von R_p die Verstärkung der OPV Schaltung bei Bedarf angepasst werden.

Wie durch Gleichung 19 leicht zu erkennen ist, wirkt der OPV durch den Kondensator C_p außerdem als (aktiver) Tiefpass mit einer Grenzfrequenz von

$$f_g = \frac{1}{2\pi R_p C_p} = \frac{1}{2\pi \cdot 3010 \Omega \cdot 220 \text{ pF}} \approx 240 \text{ kHz}.$$

Dieser wurde in die Schaltung eingefügt, um eine Glättung des Schwingkreis Eingangssignals U_{in} zu erreichen, welches durch die endliche Samplezeit des DAC zeitlich quantisiert ('Sample and Hold') ist, und dadurch störende Oberwellen zu unterdrücken.

Wie in [14, S. 221f.] nachzulesen ist, kann das Spektrum des durch den DAC ausgege-

benen Signals $X_o(j\omega)$ mathematisch wie folgt dargestellt werden⁵:

$$X_o(j\omega) = f_{DAC} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(j(\omega - k \cdot 2\pi f_{DAC})) H_0(j\omega). \quad (21)$$

Dabei ist $X_a(j\omega)$ das ideale Analogspektrum des Ausgangssignals und $H_0(j\omega)$ die Übertragungsfunktion des 'Zero-Order-Hold' (siehe [14, S. 219]).

Da in unserem Fall $x_a(t) = D_{in}^{AC} \cos(2\pi f_0 t)$ gilt, ergibt sich durch die Fouriertransformation

$$X_a(j\omega) = \pi (\delta(\omega + 2\pi f_0) + \delta(\omega - 2\pi f_0)), \quad (22)$$

wobei $\delta(\omega)$ das bekannte Kronecker-Delta darstellt. Man kann daher schlussfolgern, dass

$$X_o(f) = 0 : f \neq k \cdot f_{DAC} \pm f_0 \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \quad (23)$$

wobei mit Formel 20 gilt $f_0 = f_{DAC}/16$.

Wie in Abschnitt 5.1.1 nachzulesen ist, fallen die Oberwellen, das heißt alle Frequenzen bei $k \neq 0$, exakt in die Einbruchstellen der Side-Lobes des im FPGA realisierten digitalen Lock-In Verstärkers, was die Tiefpass Schaltung des aktuellen Schaltplans bei der Annahme von schaltungstechnischen Optimalbedingungen⁶ vernachlässigbar macht. Da durch den Kondensator C_p , wie die weiteren Analysen in Abschnitt 2.3 zeigen werden, jedoch zusätzliche parasitäre Effekte hervorgerufen würden, wird dieser für eine optimale Messschaltung als nicht vorhanden angenommen und es gilt für die weiteren Betrachtungen

$$\mathbf{Z}_p = R_p. \quad (24)$$

Wie in Kapitel 3 gezeigt wird, werden Gleichspannungen vom digitalen Lock-In Verstärker der Theorie nach ebenfalls perfekt unterdrückt und können somit für das finale Modell von U_{in} ignoriert werden. Dadurch ergibt sich:

$$U_{in}^{AC} = \frac{R_p}{R_{ref}} \cdot U_{ref} \cdot \frac{D_{in}^{AC}}{2^8}. \quad (25)$$

⁵Es sei angemerkt, dass durch diese Darstellung das Verhalten einer idealen 'Sample and Hold' Schaltung betrachtet wird. Das Quantisierungsrauschen des realen DAC wird hier vernachlässigt, da es für die vorgenommenen Betrachtungen nicht von Bedeutung ist.

⁶Das heißt, keine elektrostatischen Aufladungen, Netzbrummen, Störeinkopplungen von außen usw.

2.1.2 Sensorbereich - Schwingkreis mit Wirbelstromsensor

Die zentrale Komponente der Messschaltung stellt der analoge Parallelschwingkreis dar, welcher in Abbildung 6 als Sensorbereich bezeichnet ist. Die theoretische Funktion dieser Komponente wurde bereits im Einführungsabschnitt 1.3.2 genau erklärt. Das in Abbildung 4 gezeigte vereinfachte Ersatzschaltbild muss für eine fundierte Betrachtung der parasitären Analogeffekte jedoch erst validiert werden. Zu diesem Zweck wurde die reale Schaltung aus dem original Schaltplan des L-Vis 520 extrahiert und in Abbildung 10 dargestellt.

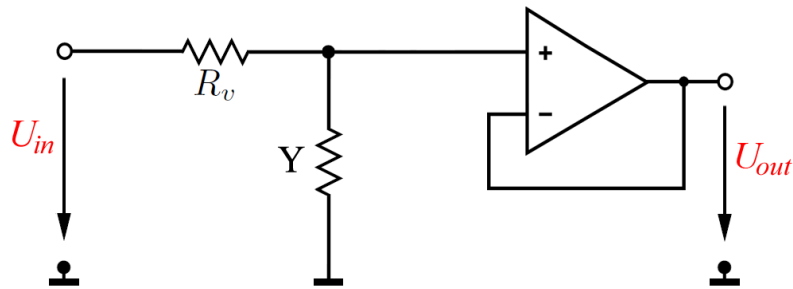


Abbildung 10: Komplexer Spannungsteiler

Man erkennt die im vorherigen Abschnitt beschriebene Schwingkreis-Eingangsspannung U_{in} , welche einen komplexen Spannungsteiler speist. Dieser besteht aus dem reellen Vorwiderstand R_v , der in der aktuellen Beschaltung des L-Vis 520 mit 3010Ω gewählt wurde, und der Admittanz \mathbf{Y} . Die an \mathbf{Y} abfallende Messspannung U_{out} wird über einen als Spannungsfolger beschalteten OPV⁷ entkoppelt, dessen großer Eingangswiderstand ($M\Omega$ Bereich) eine relevante Belastung des Spannungsteilers durch die Ausgangsbeschaltung verhindert. Das Verhalten dieses Bereiches kann also unabhängig von der Ausgangsbeschaltung durch Gleichung 8 beschrieben werden.

Entscheidendes Problem ist nun die Modellierung der Admittanz \mathbf{Y} . Wie im Schaltplan in Abbildung 6 angedeutet ist, besteht diese aus einer Schaltungskapazität C , welche über ein Koaxialkabel K parallel mit dem verwendeten Wirbelstromsensor verbunden ist. Der Wirbelstromsensor kann, wie in Abschnitt 1.3.2 erklärt wurde, durch eine Serienschaltung aus Spuleninduktivität L und Spulenwiderstand R_L modelliert werden. Es ergibt sich das Ersatzschaltbild in Abbildung 11.

⁷Wie schon im vorherigen Abschnitt, findet auch hier der IC LT6203 von Linear Technology Verwendung.

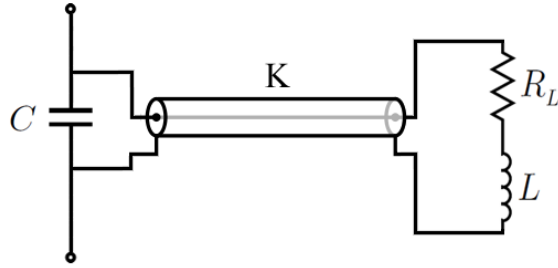


Abbildung 11: Ersatzschaltbild der Schwingkreisadmittanz \mathbf{Y} mit Koaxialkabel \mathbf{K}

Wie in nachrichtentechnischer Grundlagenliteratur [8] [3] nachgelesen werden kann, kann Ausbreitung von elektrischen Wellen auf Leitungen mithilfe einer unendlichen Wiederholung des differentiellen Leitungsstückes aus Abbildung 12 beschrieben werden. Stellt man die Maschen- und Knotengleichungen für das differentielle Element auf, erhält man für die Spannungsausbreitung eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die bekannte Telegraphengleichung. Da eine solche Beschreibung die Komplexität des mathematischen Modells jedoch um ein Vielfaches erhöhen und den Umfang der Arbeit damit bei weitem sprengen würde, wurde versucht, das Ersatzschaltbild zu vereinfachen.

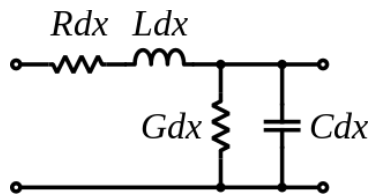


Abbildung 12: Modell des differentiellen Längenabschnittes einer verlustbehafteten Übertragungsleitung (entnommen aus [21])

Eine Lösung, die in bekannten Elektronik-Simulationsprogrammen wie PSPICE (Cadence Design Systems), oder LTSPICE (Linear Technology) Verwendung findet, ist das sogenannte 'Bulk-Modell'. Dabei wird vom differentiellen Längenelement zur Simulation auf eine endliche Anzahl an Leitungsstücken übergegangen ($\delta x \rightarrow \Delta x$).

Für die Wahl der Anzahl an Leitungsstücken existiert folgende Faustformel [12]:

$$\Delta z \ll \lambda \quad (26)$$

Wobei λ der Wellenlänge innerhalb der Leitung entspricht und als

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta} \quad (27)$$

definiert ist [8], wobei β der Imaginärteil der komplexen Ausbreitungskonstante der Wellengleichung ist und daher gilt

$$\beta = \text{Im} \left\{ \sqrt{(R_L + j \omega L_L)(G_L + j \omega C_L)} \right\}. \quad (28)$$

Um λ ermitteln zu können, müssen die Leitungsbelags-Parameter also bekannt sein. Da der Leitfähigkeitsbelag G_L in der Praxis verschwindend klein ist, kann diese vernachlässigt werden [9, 12, 21]:

$$G_L = 0 \text{ S/m}. \quad (29)$$

Der Kapazitätsbelag des Kabels kann direkt aus dem Datenblatt des verwendeten Koaxialkabels der Firma Habiatron, welches in Abbildung 13 dargestellt ist, entnommen werden.

$$C_L = 94 \text{ pF/m}. \quad (30)$$

Über den im Datenblatt angegebenen Geschwindigkeitsfaktor VP ('Velocity of signal Propagation') hängt der Induktivitätsbelag mit dem Kapazitätsbelag des Kabels zusammen, da aus diesem Wert die spezifische Dielektrizitätskonstante des Kabeldielektrikums (PTFE) berechnet werden kann [21]:

$$\epsilon_r = \frac{1}{VP^2} = \frac{1}{0,72} \approx 2,04. \quad (31)$$

Damit folgt mithilfe der Vakuumlichtgeschwindigkeit c_0 :

$$L_L = \frac{\epsilon_r}{c_0^2 \cdot C} = \frac{2,04}{(2,99779 \cdot 10^8 \text{ m/s}^2)^2 \cdot 94 \text{ pF/m}} \approx 245 \text{ nH/m}. \quad (32)$$

Da der Widerstand des Außenleiters ('Braid') in der Praxis weitaus geringer ist als der des Innenleiters ('Conductor') [12], konnte der Widerstandsbelag des Kabels mithilfe des spezifischen Widerstandes ρ^8 und den geometrischen Abmessungen⁹ des inneren Leiters abgeschätzt werden. Für eine Normaltemperatur von 20 °C ergibt sich [1]:

$$R_L = \rho(20^\circ\text{C}) \frac{1}{A} = \rho(20^\circ\text{C}) \frac{1}{r^2 \pi} = 4,40 \cdot 10^{-8} \Omega\text{m} \cdot \frac{1}{(0,15 \text{ mm})^2 \pi} = 0,6221 \Omega/\text{m}. \quad (33)$$

Damit kann nun die Wellenlänge innerhalb der Leitung mithilfe der Signalfrequenz f_0

⁸Dieser wurde im Rahmen der Arbeit mithilfe des Datenblatts "Copper Clad Steel Conductor Wire" der Firma FISK berechnet.

⁹Siehe Abbildung 13.

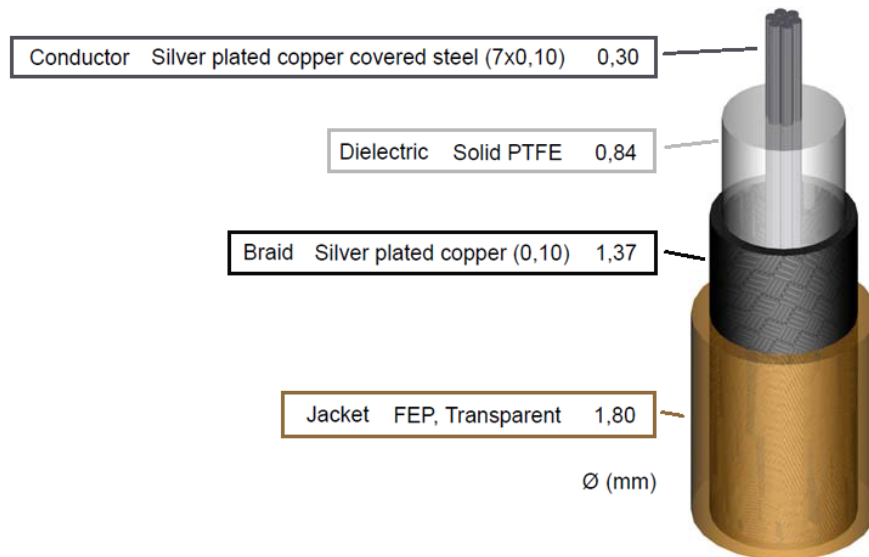


Abbildung 13: Mechanisches Modell des verwendeten Koaxialkabels Habiatron RG 178 B/U

(siehe Gleichung 20) als

$$\lambda = \frac{2\pi}{\text{Im} \left\{ \sqrt{(R_L + j2\pi f_0 L_L)(G_L + j2\pi f_0 C_L)} \right\}}$$

$$= \frac{2\pi}{\text{Im} \left\{ \sqrt{(0,6221 \Omega/\text{m} + j 2\pi \cdot 138,8 \text{ kHz} \cdot 245 \text{ nH}/\text{m}) (j 2\pi \cdot 138,8 \text{ kHz} \cdot 94 \text{ pF}/\text{m})} \right\}}$$

$$\approx 1000 \text{ m}$$

abgeschätzt werden.

Da das verwendete Koaxialkabel eine Kabellänge von $l = 1 \text{ m}$ aufweist, sollte daher nach Formel 26 ein einzelner 'Bulk' mit einer Bulk-Länge von $\Delta z = 1 \text{ m}$ zur Modellierung des Kabelverhaltens ausreichen.

Dies erlaubt eine Vereinfachung des Ersatzschaltbildes für die Admittanz \mathbf{Y} aus Abbildung 11 zu jenem in Abbildung 14. Es ist leicht ersichtlich, dass in diesem Fall Kabelwiderstand R_K und Spulenwiderstand R_L , Kabelinduktivität L_K und Spuleninduktivität L sowie Schaltungskapazität C und Kabelkapazität C_K jeweils additiv zu einem Ge-

samtelement (R_G, L_G, C_G) zusammengefasst werden können. Es gilt:

$$\mathbf{Y} = j \omega C_G + \frac{1}{j \omega L_G + R_G} = j \omega (C + C_K) + \frac{1}{j \omega (L + L_K) + (R_L + R_K)}. \quad (34)$$

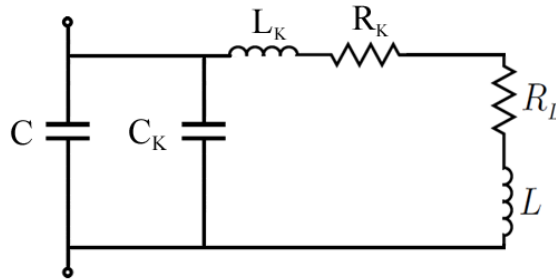


Abbildung 14: Vereinfachtes Ersatzschaltbild der Schwingkreisadmittanz \mathbf{Y}

Nichtsdestotrotz handelt es sich bei Formel 26 um eine grobe Faustformel. Da im Rahmen dieser Analyse sehr kleine Bauteiländerungen betrachtet werden, die nur minimale Schwankungen der Messspannung um den Arbeitspunkt bewirken, war die Gültigkeit der Formel für diese Größenordnungen zu hinterfragen.

Den endgültigen Beweis der Validität des Modells erbringt Abbildung 15. Hier wurde mithilfe des bereits erwähnten Simulationsprogrammes LTSPICE von Linear Technology die Abweichung der resultierenden Betrags- sowie Phasen-Änderung der Schwingkreis Ausgangsspannung U_{out} bei einer Änderung der Kabelparameter gemäß einer Änderung der Koaxiakabeltemperatur von $1 \text{ }^\circ\text{C}^{10}$ unter Verwendung des einfachen RLC-ESBs sowie eines vom Programm automatisch erstellten komplexeren ESBs¹¹, welches als gültiges Referenzmodell angesehen wurde, simuliert. Die Differenz der Änderung von U_{out} wurde dazu als Funktion der Messfrequenz f rund um die Resonanzfrequenz des Schwingkreises bei Änderung des Spuleninduktivität L um $\pm 1 \text{ } \mu\text{H}$ um den Arbeitspunkt simuliert¹².

Man kann erkennen, dass die maximale Abweichung der vorhergesagten Spannungsänderungen der zwei verschiedenen Modelle bei einer Frequenz von etwa 132 kHz auftritt. Dies entspricht der Resonanzfrequenz des Schwingkreises (Siehe Formel 37). Wie sich im folgenden Kapitel 2.1.3 zeigen wird, liegt selbst die maximale Abweichung mit ca. $2,4 \text{ } \mu\text{V}$

¹⁰Die Parameteränderungen wurden gemäß den Werten aus Tabelle 2 eingestellt. Siehe dazu Abschnitt 2.2.

¹¹Verwendet wurde der LTRA ('Lossy Transmission Line') Baustein von LTSPICE. Dieser basiert auf einer komplexeren Form des 'Bulk'-Modells.

¹²Wie die Resultate in in Kapitel 5.2.2 zeigen, ist diese Änderung viel größer als der zu erwartende Messausschlag.

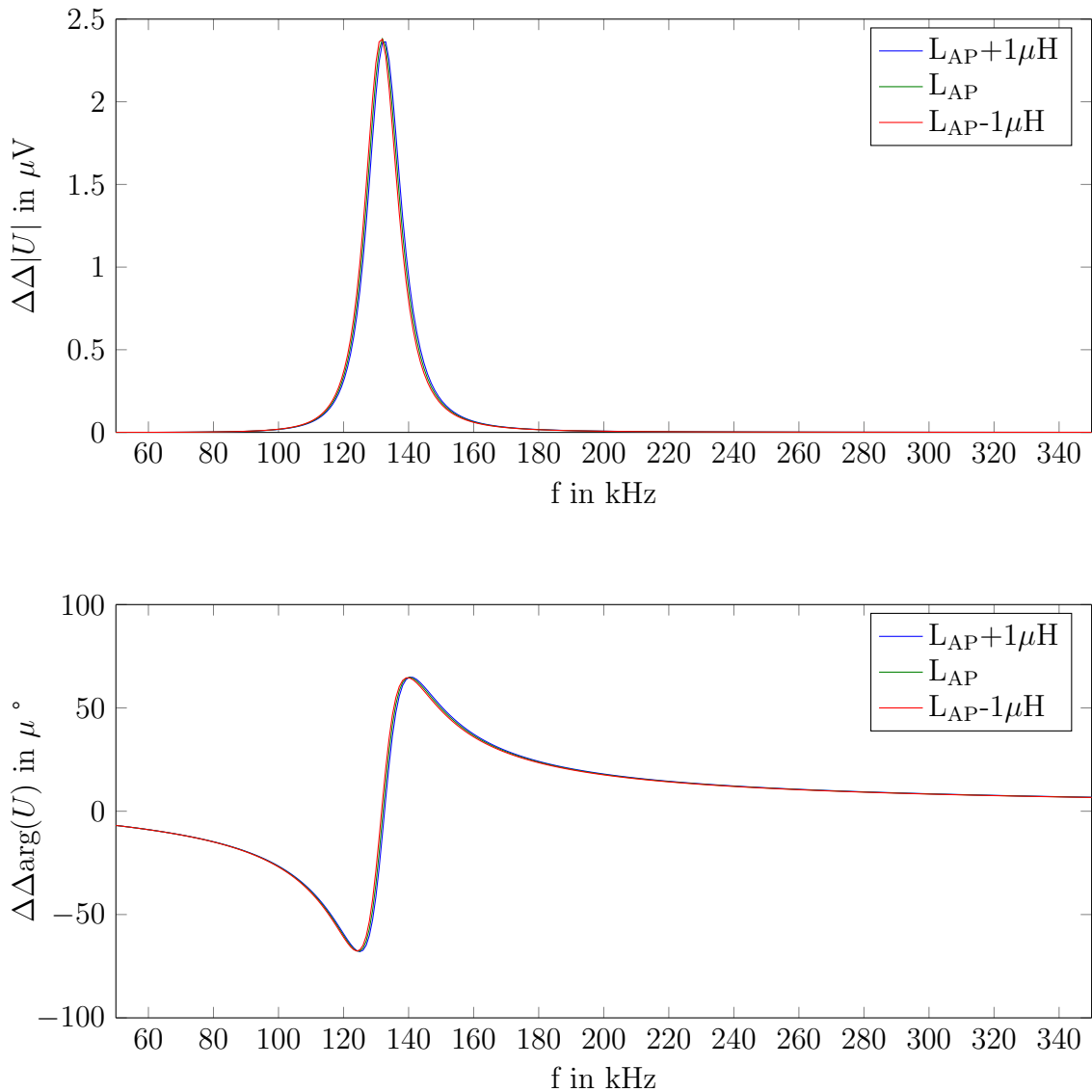


Abbildung 15: Analyse der Differenz der vorhergesagten Änderung der Ausgangsspannung U_{out} bei einer Änderung der Koaxiakabeltemperatur von 1°C unter Verwendung des 'Bulk'-Modell ESB bzw. des einfachen RLC-ESB innerhalb des vermuteten Dynamikbereichs der Induktivität L als Funktion der Messfrequenz f

noch deutlich unter der Auflösung des Digital-Analog-Konverters (DAC), womit das vereinfachte Modell in Abbildung 14 als ausreichend für die folgenden Analysen angenommen werden darf. Das verwendete LTSPICE Script mit dem Namen `koax_sim.zip` findet sich in der Beilage dieser Arbeit.

Laut dem original L-Vis 520 Schaltplan wurde für die Kapazität C ein Normalwert von

10 nF gewählt. Dies ergibt somit eine Gesamtkapazität von etwa

$$C_G = 10,1 \text{ nF}. \quad (35)$$

Der Gesamtwiderstand R_G sowie die Gesamtinduktivität L_G wurden direkt durch Messungen am Platinenstecker des Koaxialkabels ermittelt¹³. Dazu wurde das Multimeter 'FLUKE 179' bzw. die Messbrücke 'LCR HiTESETER 3532-50' von Hioki verwendet. Es ergaben sich folgende Werte:

$$R_G = 7 \Omega \quad L_G = 144 \mu\text{H} \quad (36)$$

Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass die nominelle Resonanzfrequenz des Schwingkreises nun mithilfe der Gesamtwerte L_G und C_G eindeutig definiert ist:

$$f_{res} = \frac{1}{2\pi L_G C_G} = \frac{1}{2\pi \cdot 144 \mu\text{H} \cdot 10,1 \text{ nF}} \approx 132 \text{ kHz}. \quad (37)$$

2.1.3 Ausgangsbereich - Signalmessung

Das Hauptelement des Ausgangsbereiches, der in Abbildung 6 blau umrahmt ist, stellt die Integrierte Schaltung 'AD7982' von Analog Devices dar. Es handelt sich dabei um einen bipolaren 18-Bit Analog Digital Umsetzer (ADC). Dieser arbeitet im Wägeverfahren ('Successive Approximation'), welches mithilfe eines erdsymmetrischen Switched-Capacitor Netzwerkes realisiert wird.

Dieser ADC muss gemäß der Standardbeschaltung im Datenblatt, welche in Abbildung 16 gezeigt wird, mit einem erdsymmetrischen Signal, dargestellt durch U_{op} und U_{on} , gespeist werden. Beide Speisungspfade werden gemäß der Standardbeschaltung durch einen Tiefpass (gestrichelte Box) gefiltert. Dieser optionale Tiefpass ist zur Unterdrückung von hochfrequenten Störeinkopplungen gedacht, besitzt eine Grenzfrequenz im Megahertzbereich und wird daher im Folgenden nicht weiter betrachtet.

Versorgt wird der ADC über eine 2,5 V Referenzspannungsquelle (+2,5 VD). Die ADC Referenzspannung U_{ref} entspricht jener, die auch im Eingangsbereich verwendet wird (siehe Formel 16).

¹³Eine solche Messung ist unter Voraussetzung der Gültigkeit des vereinfachten Admittanz-Ersatzschaltbildes in Abbildung 14 korrekt.

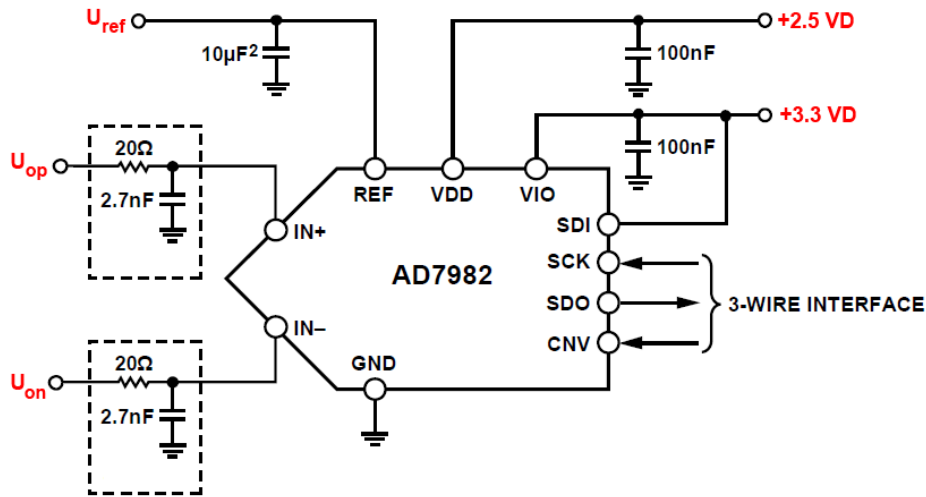


Abbildung 16: Standardbeschtung des verwendeten ADCs 'AD7982' von Analog Devices

Um die Schwingkreisausgangsspannung U_{out} in ein differentielles Signal zu konvertieren wird der ADC Treiber 'ADA4941' von Analog Devices verwendet. Ein Ersatzschaltbild für die äußere Beschtung sowie den inneren Aufbau dieser integrieren Schaltung ist in Abbildung 17 dargestellt.

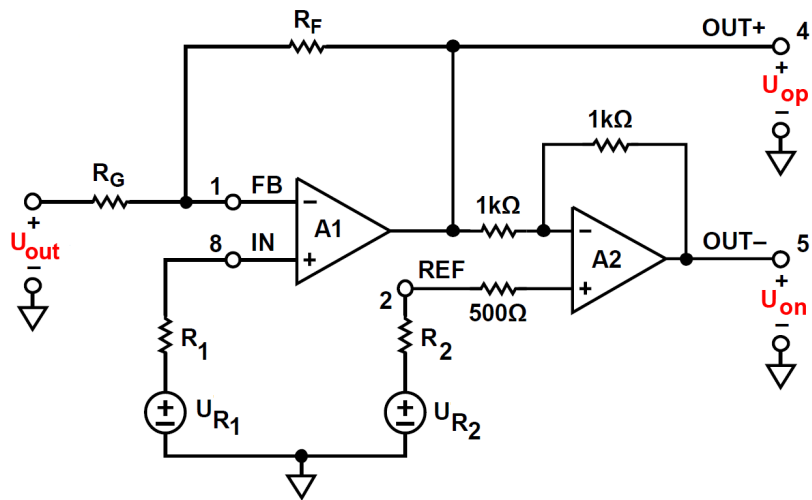


Abbildung 17: Modell der Beschtung des ADC Treibers ADA4941 von Analog Devices im Ausgangsbereich

Für die positive ADC Spannung U_{op} ergibt sich gemäß Abbildung 17

$$U_{op} = -\frac{R_F}{R_G}(U_{out} - U_{R1}). \quad (38)$$

Für die negative ADC Spannung U_{on} kann man ableiten, dass

$$U_{on} = -U_{op} + U_{R2} = -\frac{R_F}{R_G}(U_{out} - U_{R1}) + U_{R2}, \quad (39)$$

wobei $R_F = R_G = 1 \text{ k}\Omega$ gewählt wurde, um eine Verstärkung von 1 zu erreichen. Anzumerken ist hierzu, dass die Widerstände R_1 und R_2 keine nennenswerte Auswirkung auf die Ausgangsspannungen haben, da diese aufgrund des sehr großen Eingangswiderstandes der OPVs A1 und A2 von einem vernachlässigbar kleinen Strom durchsetzt werden.

Damit ergibt sich für die differentielle ADC Messspannung

$$U_{adc} = -2U_{out} + 2U_{R1} - U_{R2}. \quad (40)$$

Gemäß des Datenblattes ergibt sich durch die interne Beschaltung des ADCs die in Abbildung 18 dargestellte Kennlinie¹⁴. Diese kann mathematisch wie folgt beschrieben werden:

$$D_{out}(U_{adc}) = \begin{cases} 2^{17} - 1 & U_{adc} > U_{ref} - U_{LSB} \\ \text{round}\left\{\frac{U_{adc}}{U_{LSB}}\right\} & -U_{ref} \leq U_{adc} \leq U_{ref} - U_{LSB} \\ -2^{17} & U_{adc} < -U_{ref} \end{cases} \quad (41)$$

Die 'Least Significant Bit'-Spannung U_{LSB} des ADCs kann durch Abbildung 18 wie folgt beschrieben werden:

$$U_{LSB} = \frac{U_{ref} - 1,5U_{LSB} - (-U_{ref} + 0,5U_{LSB})}{2^{18}}.$$

Durch umformen erhält man:

$$U_{LSB} = \frac{U_{ref}}{2^{17} + 1} = \frac{2,5 \text{ V}}{2^{17} + 1} \approx 19 \mu\text{V}. \quad (42)$$

Setzt man nun voraus, dass sich das ADC Messsignal U_{adc} innerhalb des dynamischen Bereiches um den Arbeitspunkt so verhält, dass der gemessene Digitalwert D_{out} zu jeder

¹⁴Diese Kennlinie kann unter Betrachtung des internen Switched-Capacitor Netzwerkes abgeleitet werden. Da dies für die weitere Fehleranalyse jedoch unerheblich ist, soll an dieser Stelle auf eine detailliertere Betrachtung verzichtet werden. Es sei auf das Datenblatt des ADCs sowie auf [5] verwiesen.

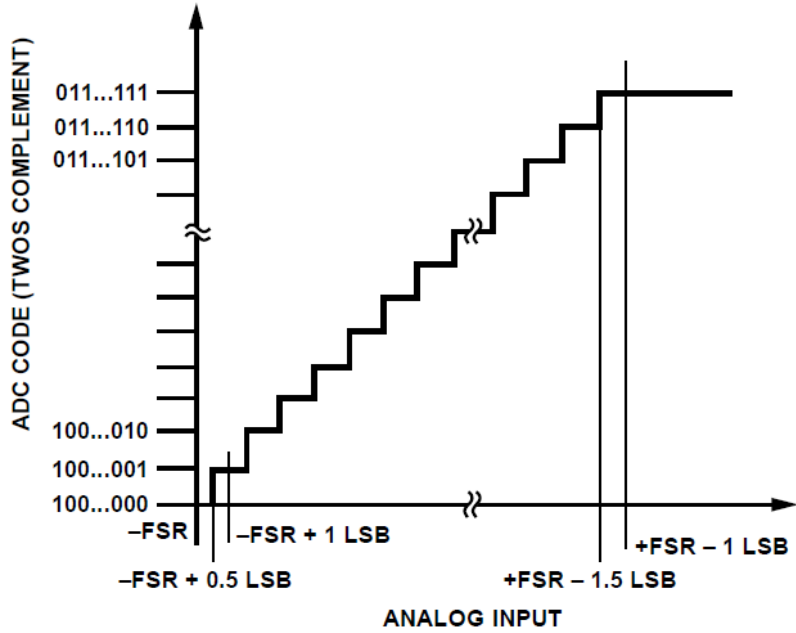


Abbildung 18: Ideale Kennlinie des Verwendeten ADCs AD7982 von Analog Devices im Ausgangsbereich ($FSR = U_{ref}$, $ANALOG\ INPUT = U_{adc}$)

Zeit im linearen Bereich von Gleichung 41 bleibt, was bei der vorgegebenen Dimensionierung der Fall ist, erhält man unter *Vernachlässigung des Quantisierungsrauschens*¹⁵.

$$D_{out} = \frac{U_{adc}}{U_{ref}} F, \quad (43)$$

wobei $F = 2^{17} + 1$ gilt.

Wie in Abschnitt 5.1.1 diskutiert wird, werden Gleichspannungen vom im FPGA realisierten digitalen Lock-In Verstärker (bei entsprechender Wahl der Sampleanzahl) theoretisch perfekt unterdrückt und können somit für die ADC Messspannung U_{adc} ignoriert werden. Dadurch ergibt sich als finale Modellgleichung für die Fehleranalyse:

$$D_{out} = -2 \frac{R_F}{R_G} \frac{U_{out}}{U_{ref}} F. \quad (44)$$

¹⁵Das Quantisierungsrauschen wird in Gleichung 41 durch den Rundungs-Operator dargestellt

2.2 Analyse von Bauteildrifts

Wie in der Einführung dieses Kapitels beschrieben, lag der Fokus der im Rahmen dieses Abschnitts durchgeführten Untersuchungen auf der Beurteilung des Einflusses von Temperaturänderungen auf die analoge Messkette.

Es wurde versucht, eine Abschätzung der maximalen zu erwartenden (worst-case) Temperaturabweichungen der einzelnen Komponenten bzw. Parameter der Messkette bezogen auf eine Temperaturänderung von 1 °C zu erstellen.

Wie ebenfalls schon in der Einführung des Kapitels erwähnt ist, wurden dazu optimale Bauteile (z.B. Präzisionswiderstände, Präzisionsoszillator) verwendet, sofern dies keine größeren schaltungstechnischen Änderungen notwendig machte, um die Möglichkeiten aber auch Beschränkungen des elektronischen 'State-Of-The-Art' gut aufzeigen zu können.

Das Ergebnis dieser Analyse ist in den Tabellen 1 und 2 dargestellt.

Typ	Name	Firma	Temperaturdrift $\pm X \text{ ppm} / ^\circ\text{C}$
Widerstand	VFCP Series	Vichay	1,6
Widerstandsarray	PRA073	Vichay	1
Kondensator	SC C0G	Vichay	30
Oszillator	SiT5003	SiTime	0,004
DAC Gain	AD5424	Analog Devices	5 *
ADC Treiber Gain	AD4941-1	Analog Devices	5 (von FSR) *
Spulenwiderstand	L-Vis Coil	Anton-Paar	3936 **
Koaxialkabel	RG 178 B/U	Habiatron	siehe Tabelle 2 **

Tabelle 1: Im Rahmen der Fehleranalyse ermittelte worst-case Temperaturabweichungen der toleranzoptimierten Bauteile bei 1°C Temperaturdifferenz

	Normalparameter	Abweichung $X / m / ^\circ\text{C}$
C_K	94 pF/m	4,1 fF
R_K	0,622 Ω /m	3,4 m Ω
L_K	245 nH/m	66,2 pH
G_K	0 S/m	0 S
l	1 m	-

Tabelle 2: Parameter des verwendeten Koaxialkabels, d.h. Normalparameter und zu erwartende Temperaturabweichung

Anzumerken ist, dass Gleichspannungsänderungen, wie in den einzelnen Modellierungsabschnitten bereits erwähnt wurde, durch die nachträgliche digitale Filterung beinahe **keine Auswirkung** auf das Messsignal haben. Daher wurden für Tabelle 1 sämtliche Parameter, die ausschließlich Gleichspannungspfade beeinflussen, vernachlässigt¹⁶. Dies führt unter anderem zur Vernachlässigung der verwendeten OPVs (LT6203 von Analog Devices) für weitere Untersuchungen, da hier laut den Datenblättern nur eine relevante Temperaturabhängigkeit der Offsetspannung zu erwarten ist, die sich als Gleichspannungsänderung im Ausgangssignal auswirkt¹⁷.

Ein weiterer zu erwähnender Punkt sind Widerstandsarrays. Diese sind monolithisch aufgebaut und können zur Reduktion des Temperaturdrifts verwendet werden, falls die entsprechenden Widerstände innerhalb der Signalgleichung in einem divisiven Verhältnis zueinander stehen. Ist dies der Fall, kann davon ausgegangen werden, dass sich die Bauteile bis auf eine gewisse Verhältnis-Toleranz ('Ratio-Tolerance'), die in Tabelle 1 für den Temperaturdrift angegeben wurde, gleichsinnig verändern.

Zu den mit * markierten Bauteilen ist anzumerken, dass hier vom Hersteller nur der typische Temperaturdrift, das heißt eine Schätzung des Erwartungswertes, angegeben wurde. Da jedoch keine weiteren statistischen Parameter vorhanden sind, ist eine Berechnung des Maximalwertes unmöglich und es musste für die weiteren Analysen der typische Wert verwendet werden.

Für die mit ** markieren Bauteile sind keine statistischen Analysen vorhanden. Es musste daher eine deterministische Abschätzung mittels eines physikalischen Modells vorgenommen werden:

Für die Modellierung der Temperaturabhängigkeit des Spulen-Gleichstromwiderstandes wurde analog zur Vorarbeit [19] ein quadratisches Temperaturmodell gewählt. Mit den Temperaturkoeffizienten $\alpha_{Cu} = 3,93 \cdot 10^{-3} 1/K$ und $\beta_{Cu} = 0,6 \cdot 10^{-6} 1/K^2$ [10] ergibt sich als erwartete relative Temperaturabweichung bei 1°C:

$$\frac{\Delta R_L}{R_L} = \alpha_{Cu} (T - T_0) + \beta_{Cu} (T - T_0)^2 = 3,93 \cdot 10^{-3} + 0,6 \cdot 10^{-6} = 3936 \text{ ppm} \quad (45)$$

Für eine Abschätzung der Temperaturabhängigkeit der Koaxialkabel-Komponenten wurden Werte aus der Arbeit [9] verwendet, in der das Temperaturverhalten von Leitungen

¹⁶Als Beispiel sei R_{ref} in Abbildung 8 genannt.

¹⁷Eine schwache Temperaturabhängigkeit des ohnehin schon marginalen Eingangsruhestroms ist vernachlässigbar.

der Firma Habiatron anhand eines ähnlichen Kabelmodells analysiert wird.

Die aus der Arbeit [9] extrahierten Werte für die Temperaturabhängigkeit des Widerstandsbelages R_K weichen zudem nur um 0,1 m Ω von der mithilfe des linearen Temperaturkoeffizienten von 'Copper Clad Steel' $\alpha_{CCS} = 1,667 \cdot 10^{-3} 1/K^{18}$ (siehe Abbildung 13) abgeschätzten Temperaturabweichung von

$$\Delta R_L(T) = R_L(T_0) \cdot \alpha \cdot (T - T_0) = 0,662 \Omega \cdot 1,667 \cdot 10^{-3} \approx 3,5 \text{ m}\Omega. \quad (46)$$

Wie ebenfalls bereits in der Einführung dieses Kapitels dargelegt ist, wurde, sofern im Rahmen des Projektes entsprechende Daten verfügbar waren, eine zusätzliche Analyse der möglichen Auswirkungen von Bauteilalterungen durchgeführt. Die verfügbaren Daten sind in Tabelle 3 dargestellt.

Hierbei handelt es sich ausschließlich um Maximalwerte des relativen Drifts. Um die Werte auf die Zeitspanne von einem Jahr umzurechnen, musste jedoch ein linearer Trend der Alterung über das Jahr angenommen werden. Die wahren Abweichungsmaxima sollten daher unter den verwendeten Werten liegen.

Bei COG Kapazitäten wird Alterungsfreiheit garantiert.

Typ	Name	Firma	Alterung $\pm X \text{ ppm} / a$
Widerstand	VFCP Series	Vichay	90
Kondensator	SC COG	Vichay	0
Oszillator	SiT5003	SiTime	1

Tabelle 3: Im Rahmen der Fehleranalyse ermittelte worst-case Werte für die Bauteilalterung über 1 Jahr.

2.3 Simulation der Messspannungsabweichung

Im letzten Schritt der Fehlerquellenanalyse werden nun die mathematischen Modelle aus Abschnitt 2.1 vereinigt, um mit deren Hilfe den Einfluss der in Abschnitt 2.2 ermittelten parasitären Bauteilabweichungen auf das Messsignal zu bestimmen.

¹⁸Dieser wurde im Rahmen der Arbeit mithilfe des Datenblatts "Copper Clad Steel Conductor Wire" der Firma FISK berechnet.

Durch Kombination von Gleichung 8, 25 und 44 ergibt sich für das Gesamtmodell:

$$D_{out} = -D_{in} \frac{R_p}{R_{amp}} \frac{R_F}{R_G} \frac{F_N}{1 + R_V \cdot \mathbf{Y}}, \quad (47)$$

mit \mathbf{Y} entsprechend Gleichung 34 und dem Auflösungsfaktor $F_N = \frac{2^{17}+1}{2^7}$.

Als entscheidende Vereinfachung ist an dieser Stelle die Kürzung von U_{ref} im Rahmen der Kombination anzumerken, die elektrotechnisch durch die Versorgung von ADC und DAC durch dieselbe Referenzspannungsquelle zu begründen ist. Parasitäre Effekte der Spannungsreferenz haben daher **keinen Einfluss** auf das Messsignal.

Mithilfe des Gesamtmodells aus Gleichung 47 wurde nun ein Matlab (MathWorks Inc., Natick, USA) Script erstellt, welches die Durchführung einer Absolutwertmessung sowie einer Differenzmessung simuliert.

Dazu ist anzumerken, dass, wie im Einführungsabschnitt 1.3.2 erklärt wurde, im Rahmen der hier untersuchten aktuellen Implementierung des L-Vis 520 ausschließlich die Betragsinformation des komplexen Ausgangssignals, das heißt $|D_{out}|$, bei der Standard Messfrequenz f_0 (Gleichung 20) verwendet wurde.

Wie in Abschnitt 1.3.1 der Einführung erläutert wurde, wurde zu Beginn dieser Arbeit angenommen, dass eine Änderung der Viskosität η und damit des Wirbelstromsenso- rabstandes s eine reine Induktivitätsänderung hervorruft. Entsprechend des Vorprojek- tes [19] wurde außerdem eine maximale Induktivitätsänderung von $\Delta L_{max} = 0,5\mu H$ als Messsbereich des Viskosimeters¹⁹ angenommen. Innerhalb dieses Arbeitsbereiches wird der Induktivitätswert im Zuge des Scripts mit einer Auflösung von $R = 10000$ Simula- tionenpunkten vom Arbeitspunkt variiert und so eine Referenzkurve erstellt.

Abbildung 19 liefert dazu eine graphische Veranschaulichung der Arbeitsbereiches, das heißt der erstellten Referenzkurve, im Vergleich zur gesamten Resonanzkurve.

Anschließend werden sämtliche Gleichungsparameter entsprechend den Werten aus Ta- belle 1 und 3 sukzessive variiert und die resultierende Messabweichung $E^{abs/dif}$ von der Referenzkurve an jedem der R Simulationspunkte bestimmt.

Diese gesamte Prozedur wird im Script sowohl für Absolutwertmessung als auch für Diffe- renzmessung (sowie für die in Abschnitt 4.3 beschriebene Projektionsmethode) gleicher-

¹⁹Siehe Abschnitt 1.5.

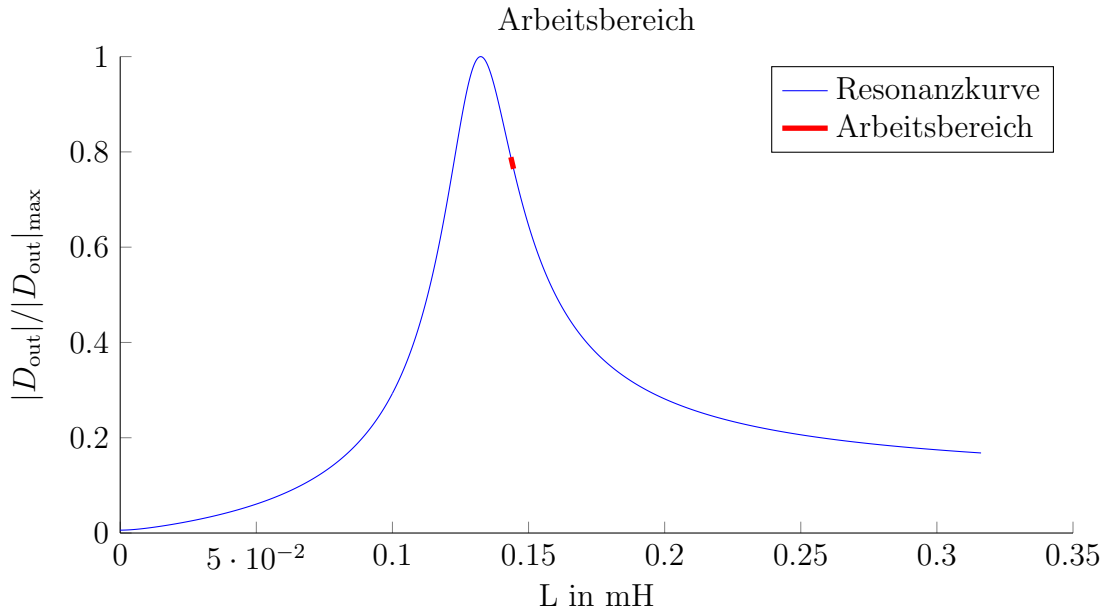


Abbildung 19: Veranschaulichung des Arbeitsbereichs auf der Induktivitäts-Resonanzkurve.

maßen durchgeführt. Vom Betrachtungswinkel des Simulationsalgorithmus verändert sich lediglich die Modellfunktion.

Entsprechend der aktuellen Implementierung im L-Vis 520 wurde die Differenzmessung nach der Vor-Rücklauf Methode simuliert. Dies bedeutet eine Invertierung der Drehrichtung bei gleicher Drehzahl ($-n$, $+n$). Da gemäß Gleichungen 3 bzw. 7 die Spuleninduktivität direkt proportional zum Produkt aus Drehzahl n und Viskosität η ist, war für die Simulation davon auszugehen, dass die Messpunkte bei Differenzmessung mit der Vor-Rücklauf-Methode symmetrisch um den Arbeitspunkt liegen ($-\Delta L$, $+\Delta L$). Das heißt jeder Differenzwert $|D_{out}|^{dif}(\Delta L)$ kann wie folgt aus einem Absolutwert $|D_{out}|(\Delta L)$ ermittelt werden:

$$|D_{out}|^{dif} = |D_{out}|(\Delta L) - |D_{out}|(-\Delta L). \quad (48)$$

Genauer zur Implementierung ist der Codedokumentation des erstellten Matlab-Scripts mit dem Namen `fehlerabschaetzung.m` zu entnehmen. Dieses findet sich in der Beilage dieser Arbeit.

Die Ergebnisse der Simulationen zu Absolutwert- und Differenzmessung finden sich in Abbildung 20 und 21, wo die Messabweichungen für die verschiedenen parasitären Bauteiländerungen $E^{abs/dif}$ als Funktion der auf den Arbeitspunkt bezogenen Induk-

tivitätsänderung ΔL_{AP} aufgetragen wurden.

Da absolute Abweichungen an sich jedoch nicht sehr aussagekräftig sind, wurden für beide Messprinzipien 2 Subplots erstellt, welche die relative Abweichung bezogen auf den aktuellen Messwert ΔD_{out_AP} bzw. auf den maximalen Quantisierungsfehler des verwendeten ADCs q_{max} zeigen.

Der maximale Quantisierungsfehler kann mit Gleichung 42 wie folgt bestimmt werden:

$$q_{max} = \frac{U_{LSB}}{2} = \frac{19 \mu V}{2} = 9,5 \mu V. \quad (49)$$

Mithilfe der absoluten Abweichung $E^{abs/dif}$ berechnet sich die relative Abweichung bezogen auf den maximalen ADC Quantisierungsfehler als q_{max}

$$E_Q^{abs/dif} = \frac{E^{abs/dif}}{q_{max}}. \quad (50)$$

Für den relativen Fehler bezogen auf den aktuellen Messwert ΔD_{out_AP} gilt

$$E_M^{abs/dif} = \frac{E^{abs/dif}}{\Delta D_{out_AP}}. \quad (51)$$

Aufgrund der stark unterschiedlichen Größenordnungen der relativen Abweichungen wurde für Abbildung 20 und 21 außerdem eine logarithmische Darstellung gewählt.

Zur Legende der Abbildungen ist hinzuzufügen,

- dass 'R/R' für die Parameter R_p/R_{amp} und R_F/R_G steht, die beide mithilfe eines Widerstandsarrays (siehe Abschnitt 2) des gleichen Typs realisiert wurden und sich folglich aufgrund ihrer identischen Position in Gleichung 47 genau gleich auf den digitalen Messwert D_{out} auswirken.
- dass Gain für die Verstärkungsdrifts des ADC bzw. des DAC Treibers steht, die laut Tabelle 1 die selbe relative Abweichung besitzen, jeweils als Drift des Faktors F_N simuliert werden können und sich daher ebenfalls genau gleich auf den digitalen Messwert D_{out} auswirken.
- dass alle Werte die nicht mit 'AGE' markiert sind, Temperaturabweichungen nach Tabelle 1 bezogen auf eine Temperaturänderung von 1°C darstellen.

- dass mit 'AGE' markierte Werte Alterungssimulationen gemäß Tabelle 3 bezogen auf 1 Jahr darstellen.
- dass alle hier nicht explizit genannten Parameter gemäß ihrer klar ersichtlichen Position in Gleichung 47 mit den entsprechenden Standardbauteilen aus Tabelle 1 und Tabelle 3 simuliert wurden.

Bei der Betrachtung der Abbildungen 20 und 21 fällt auf, dass aufgrund der unterschiedlichen Messprinzipien unterschiedliche Abhängigkeiten des Fehlers vom Messwert auftreten. Während bei Absolutmessung der auf einen konstanten Wert bezogene Relativfehler E_Q^{abs} *annähernd*²⁰ konstant bleibt und der wahre Relativfehler E_M^{abs} daher linear mit der Messwertgröße abnimmt, ist bei Differenzmessung der wahre, auf den Messwert bezogene Relativfehler E_M^{dif} *annähernd* konstant, was zu einer linearen Zunahme des unechten Relativfehlers E_Q^{abs} mit der Messwertgröße führt. Dies ist ein fundamentaler Vorteil der Differenzmessung, da bei messtechnischen Geräten in der Regel eine prozentuale Maximalabweichung des Messwertes gewünscht wird!

Will man beide Verfahren quantitativ bewerten, muss daher ein, für den verwendeten Viskositätsmessbereich²¹ typischer, differentieller Induktivitätsausschlag ΔL_{typ} zur Auswahl einer typischen auf q_{max} bezogenen relativen Messabweichung $E_{Q_{typ}}^{dif}$ aus Abbildung 21(a) verwendet werden. Analysen, die im Vorfeld dieser Arbeit durchgeführt wurden, zeigten bei der aktuellen Version des L-Vis 520 einen durchschnittlichen differentiellen Induktivitätsausschlag von $\Delta L_{typ} = 0.01\mu H^{22}$.

Der resultierende typische Relativfehler $E_{Q_{typ}}^{dif}$ sowie die Maxima der *annähernd* konstanten Werte E_Q^{abs} und E_M^{dif} werden in Tabelle 4 veranschaulicht.

Es ist klar erkennbar, dass der Messwert-bezogene relative Messfehler E_M^{dif} , mit Ausnahme vom Temperaturdrift von R_L , deutlich unter 1% des Messwertes liegt. Dies entspricht in etwa der Aussage der Werte des auf q_{max} bezogenen typischen Messfehlers $E_{Q_{typ}}^{dif}$, da diese, mit Ausnahme von R_L , ebenfalls unter 0,1% des maximalen Quantisierungsrauschens q_{max} bleiben.

Die signifikanten Fehlergrößen bei Absolutmessung, das heißt jene, bei denen der worst-case Absolutfehler größer als das maximale Quantisierungsrauschen q_{max} ist, wurden in

²⁰Die minimalen Änderungen sind für die Fehlerabschätzungen dieser Arbeit vernachlässigbar.

²¹Siehe Abschnitt 1.5.

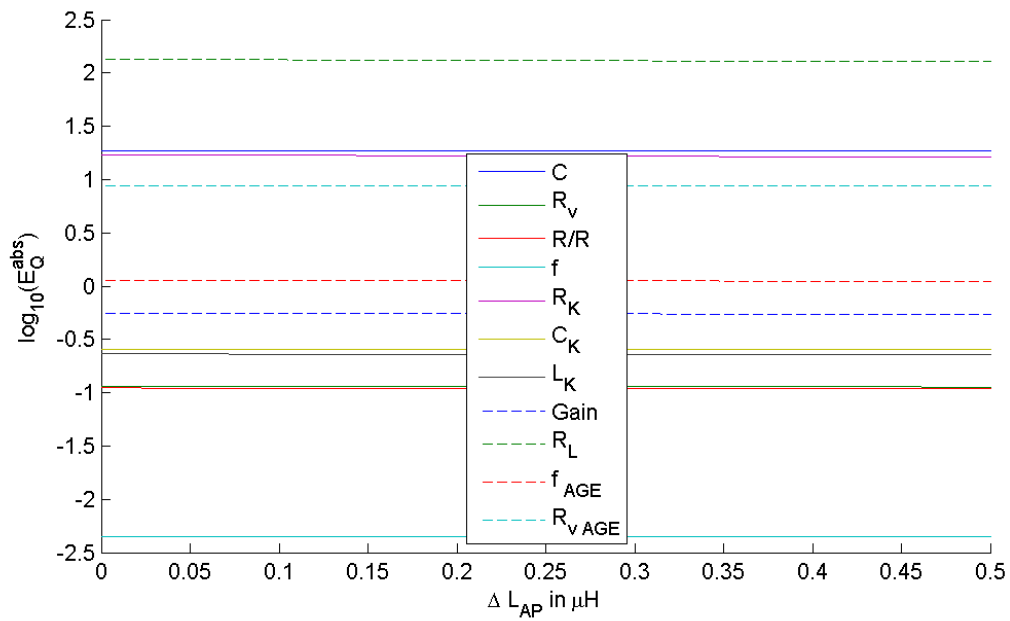
²²Hierbei ist anzumerken, dass dieser Wert unter der im Abschnitt 1.5 beschriebenen Annahme der Vernachlässigbarkeit der Änderung des Wirkanteils der Spulenimpedanz R_L berechnet wurde. Siehe dazu außerdem Abschnitt 5.2.2.

	Temperaturdrift bei 1 °C									Alterung über 1 a	
	C	R_V	R/R	f	R_K	C_K	L_K	Gain	R_L	f	R_V
E_Q^{abs}	19	0,1	0,1	4E-3	18	0,3	0,2	0,6	142	1,1	8,8
E_{Q-typ}^{dif}	9E-3	3E-5	7E-5	2E-6	0,04	1E-4	1E-4	3E-4	0,3	5E-4	2E-3
E_{M-ppm}^{dif}	100	0,4	1	0,03	500	1	2	5	4000	8	30

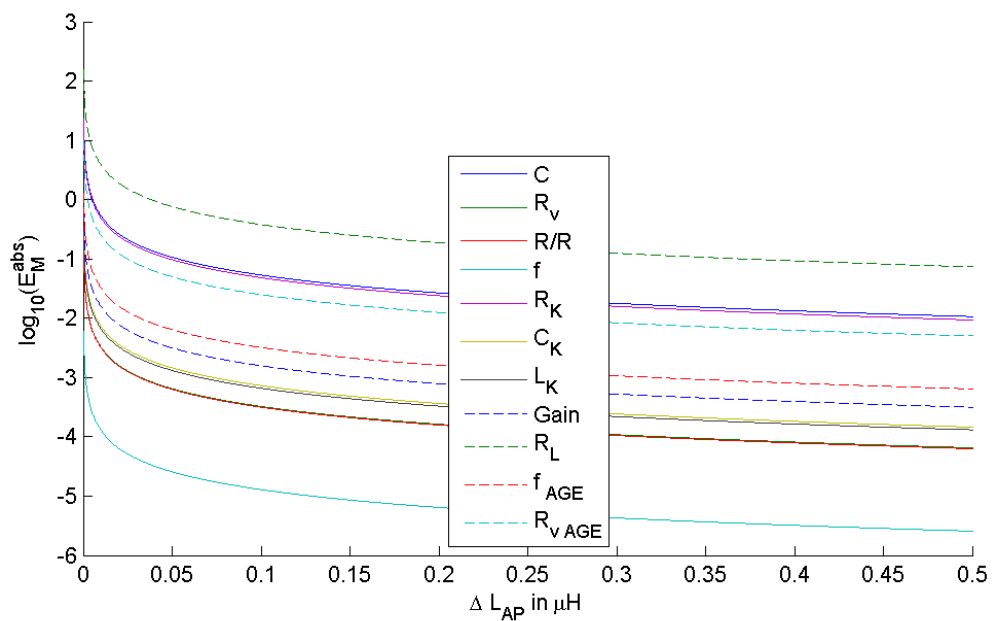
Tabelle 4: Zusammenfassung der Maximalwerte der annähernd konstanten relativen Messabweichungen aus Abbildung 20 (a) und 21 (b) sowie einer typischen relativen Messabweichung aus 21 (a) bei $\Delta L_{typ} = 0.01\mu H$.

Tabelle 4 fett markiert.

Bei der Betrachtung der Temperaturabweichungen ist in diesem Zusammenhang jedoch zu beachten, dass die simulierte Temperaturschwankung von 1°C für eine gut temperierte Schaltung zwar im Bereich des Möglichen liegt, für das Koaxialkabel (Parameter R_K, L_K, C_K) sowie für die Messspule (Parameter R_L, L), welche sich bei realen Messungen im Prozessbereich befinden, aber um ein Vielfaches höher sein wird. Zur großen relativen Abweichung des Spulenwiderstands R_L ist wiederum anzumerken, dass hier die im Einführungsabschnitt 1.5 besprochene Temperaturkompensation eine signifikante Reduktion bewirken sollte, im Rahmen der Simulation aber nicht berücksichtigt wurde. Auch auf den vom Kabelwiderstand R_K erzeugten relativen Fehler sollte die Temperaturkompensation einen positiven Einfluss haben. Dabei muss jedoch aufgrund der Kabellänge ein signifikanter Temperaturgradient über den Kabelverlauf angenommen werden.

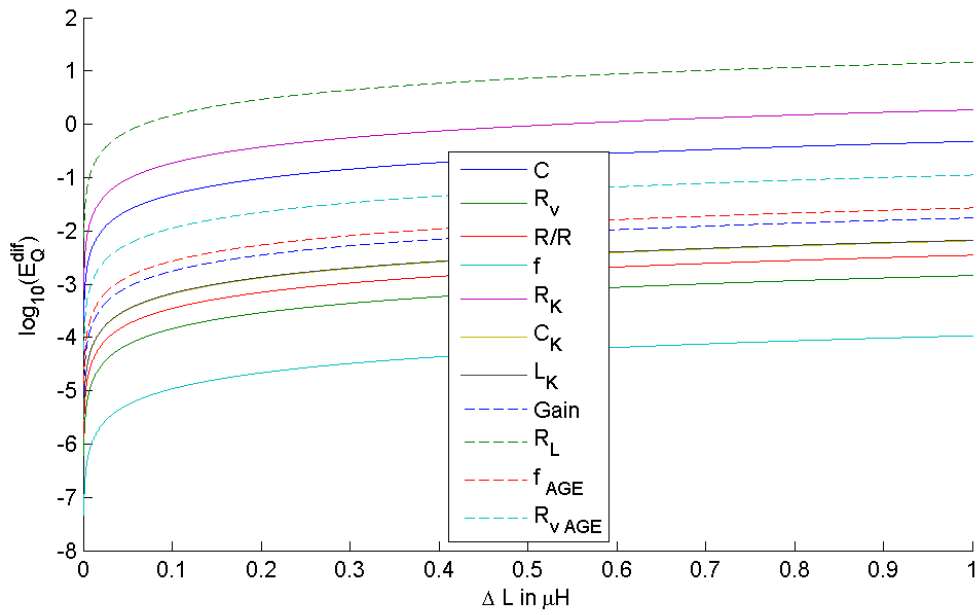


(a) bezogen auf den maximalen ADC Quantisierungsfehler q^{max}

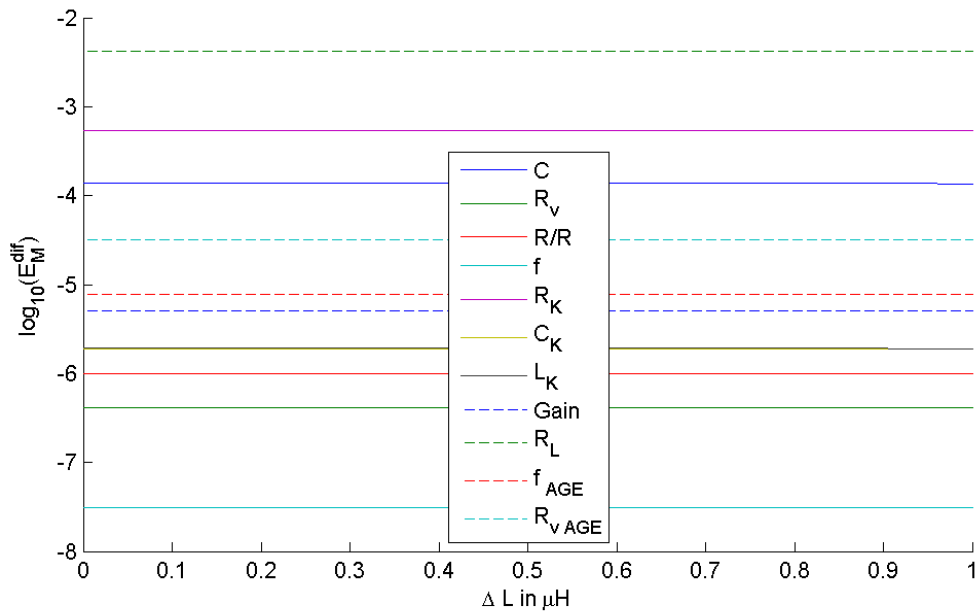


(b) bezogen auf den momentanen Messausschlag ΔU_{AP}

Abbildung 20: Darstellung der relativen Messabweichung bei **Absolutwert-Messung** verursacht durch die ermittelten maximal Drifts der Modellelemente bei 1°C Temperaturänderung bzw. 1 a Alterung ('AGE') als Funktion des Messwertes ΔL .



(a) bezogen auf den maximalen ADC Quantisierungsfehler q^{max}



(b) bezogen auf den momentanen Messausschlag ΔU

Abbildung 21: Darstellung der relativen Messabweichung bei **Differenzmessung** verursacht durch die ermittelten maximal Drifts der Modellelemente bei 1°C Temperaturänderung bzw. 1 a Alterung ('AGE') als Funktion des Messwertes ΔL .

3 Theoretische Betrachtung des Digitalen Lock-In Verstärkers

Der digitale Lock-In Verstärker basiert auf einer nachrichtentechnischen Idee, welche aus der analogen Signalverarbeitung stammt und mittlerweile ein populäres Konzept zur Messung von sehr kleinen Wechselspannungssignalen darstellt.

Dieses in die Digitaltechnik portierte Konzept steht, wie in Kapitel 1.5 beschrieben wurde, im Zentrum der digitalen Signalverarbeitung der aktuellen Implementierung des L-Vis 520 inline Viskosimeters und wurde mithilfe eines FPGAs realisiert.

Da auf dem Konzept 'digitaler Lock-In Verstärker' basierende Optimierungen im Zentrum des zweiten Teils dieser Arbeit standen, wird im folgenden Kapitel sowohl eine Analyse des mathematischen Hintergrundes aus der Analogtechnik (Abschnitt 3.1 und 3.2) als auch eine detaillierte Analyse der Eigenheiten der Portierung in die Digitaltechnik (Abschnitt 3.3) durchgeführt.

3.1 Einfacher Lock-In Verstärker

Die Grundidee für alle folgenden Betrachtungen stellt das simple Prinzip des einfachen Lock-In Verstärkers dar, das in Abbildung 22 dargestellt ist.

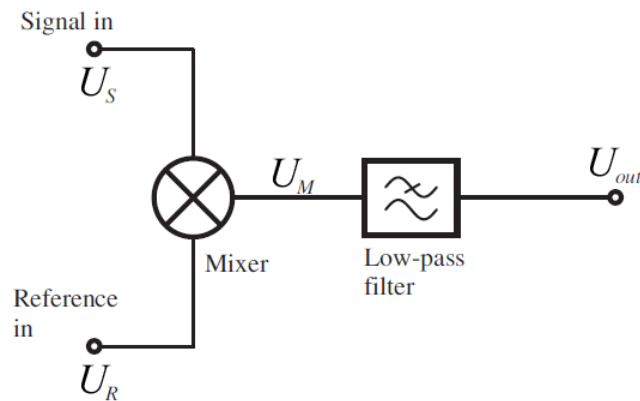


Abbildung 22: Modell des einfachen Lock-In Verstärkers
(Entnommen und modifiziert aus [16])

Man erkennt in dieser Graphik zwei Eingänge: Einer für das möglicherweise bereits vorverstärkte Messsignal U_S und ein Zweiter für das Referenzsignal U_R . Diese beiden Signale werden über einen Mixer zum Signal U_M multipliziert und schließlich über einen analogen Tiefpass gefiltert, um das Signal U_{out} zu erhalten.

Das Messsignal U_S sei für diese grundlegenden Betrachtungen eine sinusförmige Spannung mit Frequenz f_S und Messamplitude \hat{U}_S :

$$U_S(t) = \hat{U}_S \cos(2\pi f_S t + \phi_S). \quad (52)$$

Das Referenzsignal U_R ist idealerweise ebenfalls eine sinusförmige Spannung mit der Frequenz f_R und einer Amplitude von 1. Es sei daher

$$U_R(t) = \cos(2\pi f_R t + \phi_R). \quad (53)$$

Mithilfe der trigonometrischen Grundbeziehung [2]

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)) \quad (54)$$

ergibt sich für das modulierte Signal

$$U_M(t) = U_S(t) \cdot U_R(t) = \frac{\hat{U}_S}{2} (\cos(2\pi t (f_S + f_R) + \phi_S + \phi_R) + \quad (55)$$

$$\cos(2\pi t (f_S - f_R) + \phi_S - \phi_R)). \quad (56)$$

Um eine ideale Funktion des Lock-In Verstärker-Konzepts zu ermöglichen muss die Frequenz des Referenzsignals exakt identisch zur Frequenz des Nutzsignals sein $f_R = f_S$:

$$U_M(t) = \frac{\hat{U}_S}{2} (\cos(2\pi t 2 f_S + (\phi_S + \phi_R)) + \cos(\phi_S - \phi_R)). \quad (57)$$

Nimmt man nun an, dass es sich beim verwendeten Tiefpass-Filter um einen idealen Tiefpass handelt, der eine Grenzfrequenz $f_g \ll 2 \cdot f_s$ besitzt und Gleichsignale ungedämpft passieren lässt, ergibt sich für das Ausgangssignal

$$U_{out} = \frac{\hat{U}_S}{2} \cos(\phi_S - \phi_R). \quad (58)$$

Wie man leicht erkennen kann, erhält man unter der Bedingung von Phasensynchronität ($\phi_S = \phi_R$) ein Gleichsignal, dessen Amplitude jener des Messsignals, gewichtet mit einem Faktor von $1/2$, entspricht.

Ist das Signal von additivem weißen Rauschen überlagert, welches, wie allgemein bekannt ist, durch einen Zufallsprozess mit uniformer spektraler Leistungsdichte (PSD) charakterisiert wird, hat die Modulation mit dem Referenzsignal keine Auswirkung auf das Spektrum, da diese lediglich eine Frequenzverschiebung verursacht. Entsprechend der Bandbreite des Tiefpassfilters werden jedoch hohe Rauschfrequenzen unterdrückt und die SNR verbessert. Dieses Prinzip wird in Abbildung 23 dargestellt²³.

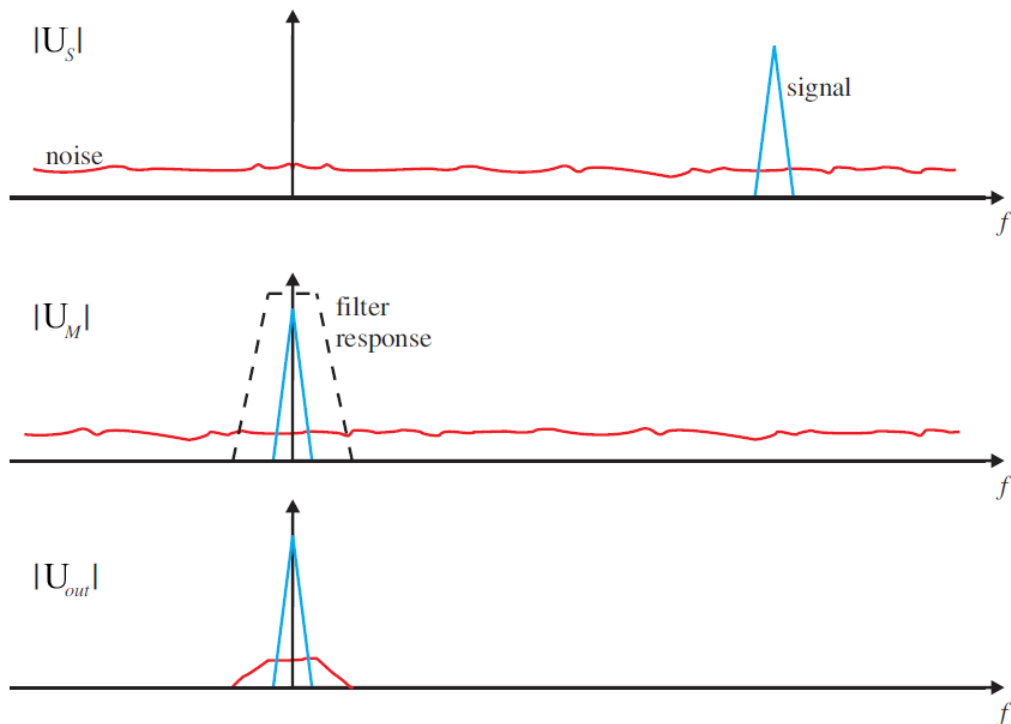


Abbildung 23: Funktionsprinzip eines Lock-In Verstärkers im Frequenzbereich
(Entnommen und modifiziert aus [16])

Die Hauptfunktion des Lock-In Verstärkers ist daher die Unterdrückung von Rauschen bzw. die Erhöhung der SNR ('Signal to Noise Ratio') des Signals.

Natürlich kann der Lock-In Verstärker auch zur Unterdrückung von Störfrequenzen genutzt werden. Hier ist bei analogen Systemen gemäß Gleichung 55 darauf zu achten,

²³Eine quantitative Analyse der Rauschunterdrückung, die allerdings auf die im Rahmen dieses Projekts verwendete digitale Variante des Lock-In Verstärkers abzielt, erfolgt in Abschnitt 4.1.

dass die demodulierten Störfrequenzen über der Grenzfrequenz des Tiefpassfilters liegen $f_g \ll |f_R - f_S|$.

Der Vorteil dieses Verfahrens gegenüber klassischen Filtern ist die Demodulation des Nutzsignals zu einem Gleichsignal und die dynamische Auswahlmöglichkeit des Nutzfrequenzbandes über die einfache Änderung der Referenzfrequenz.

3.2 Erweiterung: Doppel Lock-In Verstärker

Eine Verbesserung des Prinzips aus Abschnitt 3.1 stellt der Doppel Lock-In Verstärker dar. Wie in Abbildung 24 zu sehen ist, handelt es sich hierbei um die Kombination aus zwei einzelnen Einfachen Lock-In Pfaden, wobei für eine der beiden Komponenten ein um -90° phasenverschobenes Referenzsignal verwendet wird.

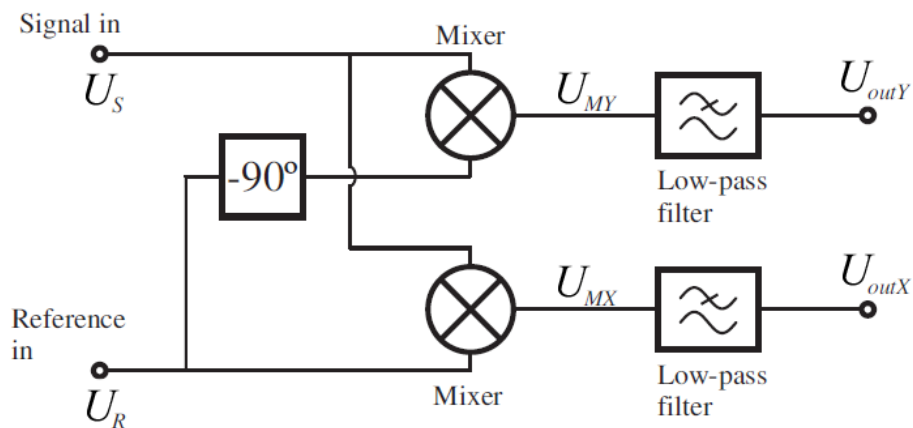


Abbildung 24: Modell des doppelten Lock-In Verstärkers
(Entnommen und modifiziert aus [16])

Geht man von den gleichen Eingangssignalen wie in Abschnitt 3.1 aus, gilt

$$U_{outX} = U_{out}. \quad (59)$$

Mit den trigonometrischen Beziehungen [2] $\cos(\alpha - 90^\circ) = \sin(\alpha)$ und

$$\cos(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\beta - \alpha)). \quad (60)$$

gilt

$$U_{outY} = \frac{\hat{U}_S}{2} \sin(\phi_S - \phi_R). \quad (61)$$

Betrachtet man diese Signale als Real- und Imaginärteil eines fiktiven komplexen Ausgangssignals U_{outC} erhält man

$$|U_{outC}| = \sqrt{U_{outX}^2 + U_{outY}^2} \quad (62)$$

$$= \sqrt{\left(\frac{\hat{U}_S}{2} \cos(\phi_S - \phi_R)\right)^2 + \left(\frac{\hat{U}_S}{2} \sin(\phi_S - \phi_R)\right)^2} = \frac{\hat{U}_S}{2} \quad (63)$$

und

$$\arg\{U_{outC}\} = \arctan\left(\frac{U_{outY}}{U_{outX}}\right) = \arctan\left(\frac{\frac{\hat{U}_S}{2} \sin(\phi_S - \phi_R)}{\frac{\hat{U}_S}{2} \cos(\phi_S - \phi_R)}\right) = \phi_S - \phi_R \in (-\pi; \pi] \quad (64)$$

Dieser Ansatz erlaubt daher im Gegensatz zum Einfachen Lock-In Verstärker eine getrennte Messung von Betrag und Phase des Nutzsignals. Dies ist von signifikantem Vorteil, selbst wenn keine Phasenmessung erwünscht ist, da damit die Notwendigkeit der Phasensynchronität $\phi_S - \phi_R = 0$ als möglicher Instabilitätsfaktor entfällt.

3.3 Digitaler Lock-In Verstärker

Aufgrund der erhöhten Störanfälligkeit sowie des großen Implementierungsaufwandes und der erschwerten Wartung von Analogfiltern wird man in modernen Systemen immer häufiger versucht auf Analogkomponenten zu verzichten und diese durch digitale Konzepte zu ersetzen. In diesem Sinne wurde die mathematische Idee hinter dem Analogkonstrukt Lock-In Verstärker im Rahmen der digitalen Signalverarbeitung übernommen.

Während das Grundprinzip des digitalen Lock-In Verstärkers daher identisch zu jenem des analogen Pendanten ist, soll im Rahmen dieses Kapitels nun ein genauerer Blick auf die Eigenheiten der Digitalkonzepte geworfen und eine quantitative Betrachtung des Filterverhaltens durchgeführt werden. Dazu wird in Abbildung 25 ein graphisches Modell des digitalen Lock-In Verstärkers gezeigt.

Wie zu erwarten ist, muss das analoge Messsignal $u_s(t)$ im ersten Schritt mithilfe eines ADC digitalisiert werden.

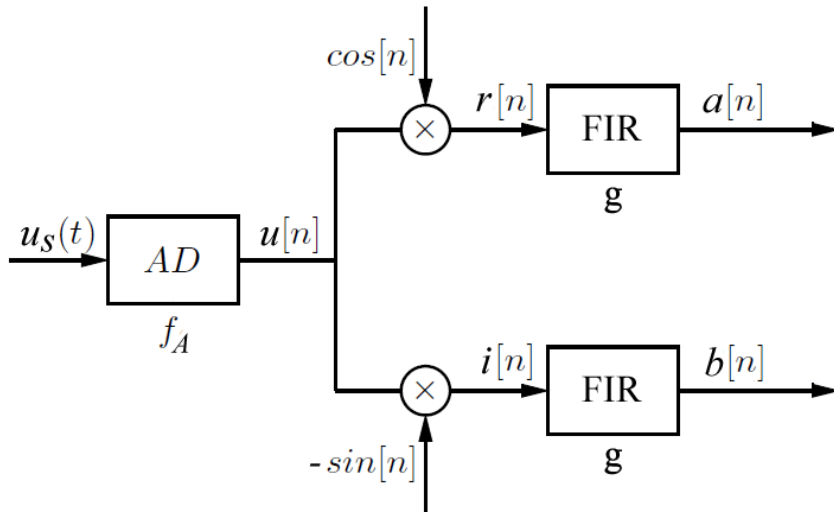


Abbildung 25: Modell des digitalen Lock-In Verstärkers

Bei einer idealen Umsetzung²⁴ des Analogsignals ergibt sich, sofern das Nyquist-Theorem [15] $f < f_A/2$ für alle vorkommenden Frequenzen erfüllt ist, für das Digitalsignal

$$u[n] = u_s(n \Delta T) = u_s\left(\frac{n}{f_A}\right). \quad (65)$$

Die eigentlichen Verarbeitungsschritte des Lock-In Konzeptes können im Digitalbereich durch einfache mathematische Operationen realisiert werden.

Die Modulation mit der sinusförmigen Referenzfrequenz wird durch Multiplikation der Werte mit den Werten einer idealen Kosinusfunktion $\cos[n] = \cos(2\pi \frac{f_R}{f_A} n)$ bzw. Sinusfunktion $\sin[n] = \sin(2\pi \frac{f_R}{f_A} n)$ erreicht.

Diese werden bei einer FPGA Implementierung in der Regel unter Voraussetzung der Kenntnis der Abtastfrequenz f_A in Form einer Look-Up-Table (LUT) abgespeichert. Die Tiefpassfilterung wird in der Praxis mithilfe eines einfach zu implementierenden FIR-Filters²⁵ realisiert.

Um das Übertragungsverhalten des digitalen Lock-In Verstärkers anschaulich beschreiben zu können, führen wir, wie schon im vorherigen Kapitel, zwei fiktive komplexe

²⁴Vernachlässigung des Quantisierungsrauschens

²⁵'Finite Impulse Response': Filter mit endlicher Impulsantwort

Signale $x[n]$, $y[n]$ ein, die wie folgt zusammengesetzt sind:

$$x[n] = r[n] + j i[n] \quad \text{und} \quad y[n] = a[n] + j b[n]. \quad (66)$$

Durch Anwendung der Euler'schen Identität erhält man

$$x[n] = \cos[n] \cdot u[n] + j (-\sin[n]) \cdot u[n] \quad (67)$$

$$= \cos\left(2\pi \frac{f_R}{f_A} n\right) \cdot u[n] + j \left(-\sin\left(2\pi \frac{f_R}{f_A} n\right)\right) \cdot u[n] \quad (68)$$

$$= \cos\left(-2\pi \frac{f_R}{f_A} n\right) \cdot u[n] + j \sin\left(-2\pi \frac{f_R}{f_A} n\right) \cdot u[n] \quad (69)$$

$$= u[n] \cdot e^{-j 2\pi \frac{f_R}{f_A} n}. \quad (70)$$

Für die DTFT (Zeitdiskrete Fouriertransformation) gelten folgende Beziehungen [14]:

$$e^{j \omega_0 n} \quad \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \quad 2\pi \delta_{2\pi}(\omega - \omega_0), \quad (71)$$

$$q[n] \cdot w[n] \quad \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \quad \frac{1}{2\pi} (Q * W)(\omega) \quad (72)$$

wobei $\delta_{2\pi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$ mit der Diracschen Deltadistribution $\delta(t)$.

Damit erhält man für das Spektrum von $x[n]$:

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(\lambda) 2\pi \delta_{2\pi}\left(\omega - \lambda - 2\pi \frac{f_R}{f_A}\right) d\lambda = U\left(\omega - 2\pi \frac{f_R}{f_A}\right). \quad (73)$$

Dies zeigt, dass der Modulationsvorgang nichts anderes als eine Verschiebung des Signalspektrums des Eingangssignals $u[n]$ bewirkt²⁶.

Ein FIR-Filter kann im Zeitbereich durch seine Impulsantwort g_n mit der Filterlänge N charakterisiert werden:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g_k x[n - k]. \quad (74)$$

²⁶Es sei an dieser Stelle angemerkt, dass im Rahmen dieser Betrachtungen eine negative Sinuswelle (+90° Phasenverschiebung) verwendet wurde, um eine Linksverschiebung des Spektrums, d.h. eine Demodulation der **positiven** Frequenzkomponente, zu erhalten, da dies für die folgenden Analysen günstig ist. Für die Praxis ist es irrelevant ob die positive oder negative Frequenzkomponente demoduliert wird.

Für die Implementierung wird in der Praxis beinahe immer ein einfacher Mittelwertfilter verwendet. Das heißt

$$g_k = 1/N \quad \forall k. \quad (75)$$

Der Hintergrund dieser Wahl ist jedoch nicht alleine die Möglichkeit der unkomplizierten Implementierung dieser trivial anmutenden Form des FIR-Filters durch simple Addition der Zahlen, sondern durch die optimale Rauschunterdrückung des Mittelwertfilters zu begründen. Dies wird im Zuge von Kapitel 4.1 genau analysiert.

Mit dem Verschiebungssatz der DTFT [14]

$$x[n - n_0] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(\omega) \quad (76)$$

erhält man für das Spektrum von $y[n]$

$$Y(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} X(\omega) := G(\omega) \cdot X(\omega), \quad (77)$$

wobei $G(\omega)$ die Übertragungsfunktion des Mittelwertfilters darstellt.

Mithilfe der geometrischen Reihe [2] $\sum_{k=0}^{N-1} q^k = \frac{q^N - 1}{q - 1}$ kann $G(\omega)$ wie folgt umgeformt werden:

$$G(\omega) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\omega k} = \frac{1}{N} \frac{e^{-j\omega N} - 1}{e^{-j\omega} - 1} \quad (78)$$

$$= \frac{1}{N} \frac{e^{-j\omega N/2} - e^{j\omega N/2}}{e^{-j\omega/2} - e^{j\omega/2}} e^{-j\omega N/2} = \frac{1}{N} \frac{\sin(N\omega/2)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega N/2} \quad (79)$$

Wie man aus dem Endergebnis von Gleichung 79 erkennen kann, handelt sich also um einen linearphasigen Filter, mit der Gruppenlaufzeit $\delta\varphi/\delta\omega = N/2$.

Für die Übertragungsfunktion des gesamten digitalen Filters kann man nun durch Kombination von Gleichung 73 und 77 folgendes erhalten:

$$Y(\omega) = G(\omega) U\left(\omega + 2\pi \frac{f_R}{f_A}\right). \quad (80)$$

Substituiert man mit $\omega' = \omega + 2\pi \frac{f_R}{f_A}$ erhält man

$$Y_{Mod}(\omega') := Y(\omega' - 2\pi \frac{f_R}{f_A}) = G(\omega' - 2\pi \frac{f_R}{f_A}) U(\omega') := H(\omega') \cdot U(\omega'), \quad (81)$$

mit

$$H(\omega') = \frac{1}{N} \frac{\sin(N(\omega'/2 + \pi \frac{f_R}{f_A}))}{\sin(\omega'/2 + \pi \frac{f_R}{f_A})} e^{-jN(\omega'/2 + \pi \frac{f_R}{f_A})}, \quad (82)$$

wobei $H(\omega')$ somit die Übertragungsfunktion des Gesamtsystems, unter **Vernachlässigung der Demodulation der Zielfrequenz** f_R zu einem Gleichsignal, symbolisiert. Diese Darstellung wurde gewählt, da sie eine sehr anschauliche Demonstration des Bandpass-Filterverhaltens des Gesamtsystems ermöglicht.

Um von der zeitdiskreten Übertragungsfunktion $H(\omega')$ auf ein zeitkontinuierliches Spektrum $H(f)$ zu gelangen, kann man aufgrund der Gleichheit $2\pi = f_A$ wie folgt substituieren:

$$\omega' = 2\pi \frac{f}{f_A}. \quad (83)$$

Damit erhält man für die Übertragungsfunktion schließlich

$$H(f) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\pi \frac{N}{f_A} (f - f_R))}{\sin(\pi \frac{1}{f_A} (f - f_R))} e^{-j\pi \frac{N}{f_A} (f - f_R)}, \quad (84)$$

mit dem Betragsspektrum

$$|H(f)| = \frac{1}{N} \left| \frac{\sin(\pi \frac{N}{f_A} (f - f_R))}{\sin(\pi \frac{1}{f_A} (f - f_R))} \right|. \quad (85)$$

In Abbildung 26 wurden die Betrags-Übertragungsfunktionen $|H(f)|$ und $|G(f)|$ für allgemeine Werte dargestellt, wobei die Variable T für die Gesamtmesszeit steht, die durch die Abtastfrequenz f_A und die Anzahl der verwendeten Signalsamples N definiert ist:

$$T = N \cdot \Delta T = \frac{N}{f_A}. \quad (86)$$

Zusätzlich wurde die Einhüllende von $|H(f)|$ eingezeichnet. Diese lässt sich durch die

simple Betrachtung der Faktoren des Produktes in Gleichung 84 wie folgt bestimmen:

$$\text{Env}\{|H(f)|\} = \frac{1}{N} \left| \frac{1}{\sin(\pi \frac{1}{f_A} (f - f_R))} \right|, \quad (87)$$

wobei Formel 87, wie Abbildung 26 zeigt, nur für

$$\{ f \mid f \in \mathbb{R} \setminus] f_R - 0,5/T ; f_R + 0,5/T [\} \quad (88)$$

gültig ist.

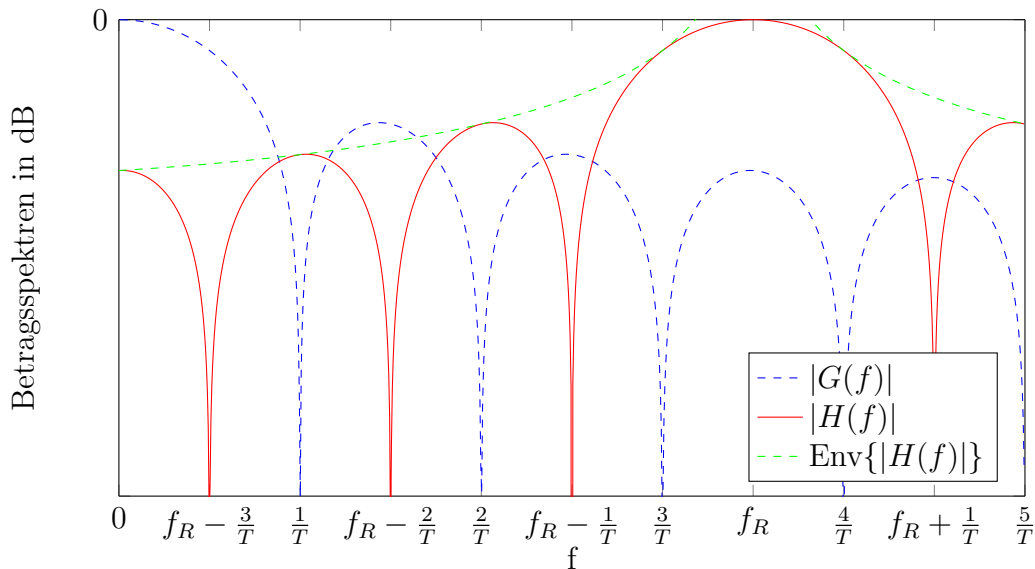


Abbildung 26: Frequenzgang des digitalen Lock-In Verstärkers

Mithilfe von Abbildung 26 können nun folgende Aussagen über das Filterverhalten des digitalen Lock-In Verstärkers mit einfachem Mittelwertfilter getroffen werden:

- Die Modulation mit $\sin[n]$ bzw. $\cos[n]$ bewirkt nichts anderes als eine Frequenzverschiebung des Signalspektrums um f_R .
- Vernachlässigt man die Demodulation des Ausgangssignalspektrums $Y(\omega)$, kann der digitale Lock-In Verstärker als schmalbandiger Bandpassfilter mit Übertragungsfunktion $H(f)$ gemäß Gleichung 84 betrachtet werden.
- Die Referenzfrequenz f_R verbleibt vollständig ungedämpft (0 dB).
- Eine optimale Unterdrückung von Störfrequenzen tritt in den Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(f)$ auf.

- Die Nullstellen der Übertragungsfunktion $H(f)$ liegen bei $f_R \pm k/T : k \in \mathbb{N}$.
- Die Mindestunterdrückung tritt an den Maxima der Nebenkeulen der Betrags-Übertragungsfunktion $|H(f)|$ auf.
- Die Maxima der Nebenkeulen der Betrags-Übertragungsfunktion $|H(f)|$ liegen bei $f_R \pm (0,5 + k)/T : k \in \mathbb{N}$.
- Die Mindestunterdrückung kann durch die Einhüllende der Übertragungsfunktion $Env\{|H(f)|\}$ aus Gleichung 87 berechnet werden.

4 Theoretische Optimierungsansätze

Wie im Einführungsabschnitt 1.5 beschrieben wurde, widmet sich dieses Kapitel der Analyse von Möglichkeiten der digitalen Signalverarbeitung zur Verbesserung des Messkonzeptes des L-Vis 520, mit dem Ziel, die Durchführung einer 'Momentanwertmessung' zu ermöglichen. Darunter versteht man die Suche nach Ansätzen zur

- Reduktion der minimalen Messzeit, welche zur Rauschunterdrückung für jede einzelne Messung notwendig ist.
- Reduktion der signifikanten relativen Messfehler bei Absolutmessung (siehe Kapitel 2), um nicht mehr auf das Prinzip der Differenzwertmessung angewiesen zu sein.

4.1 Analysen zur Optimierung der Rauschunterdrückung des FIR-Filters

Ein naheliegender Ansatz zur Reduktion der für die Rauschunterdrückung notwendigen Minimal-Messzeit ist der Versuch, den FIR-Filter²⁷ hinsichtlich des Rauschsignals zu optimieren, um die minimal notwendige Filterlänge N des FIR-Filters zu verkürzen.

Für die folgenden Betrachtungen sei dabei abermals das Modell aus Abschnitt 3.3 verwendet.

Zusätzlich sei nun das digitalisierte Eingangssignal $u[n]$ als

$$u[n] = 2 A \cos\left(2\pi \frac{f_R}{f_A} n\right) + \eta[n] \quad (89)$$

definiert, wobei A die zu messende Amplitude des Nutzsymbols und $\eta[n]$ additives weißes Rauschen mit Rauschvarianz σ_n ist. Der Rauschanteil $\eta[n]$ wird im Rahmen dieses Kapitels als normalverteilter stochastischer Prozess $\mathcal{N}(0, \sigma_n)$ betrachtet²⁸.

Nimmt man an, dass das Nyquist-Theorem [15] $f < f_A/2$ für alle vorkommenden Frequenzen erfüllt ist, lässt sich zeigen, dass die spektrale Leistungsdichte (PSD) von $\eta[n]$ durch die Modulation im ersten Verarbeitungsschritt des digitalen Lock-In Verstärkers unverändert bleibt.

²⁷Siehe Kapitel 3.3.

²⁸Für die statistischen Grundlagen zu stochastischen Prozessen sei auf [6] verwiesen.

Der mathematische Beweis zu dieser Aussage kann wie folgt erbracht werden:

Wie allgemein bekannt ist, wird weißes Rauschen durch seine Autokorrelationsfunktion $r_{\eta\eta}[m]$ definiert:

$$r_{\eta\eta}[m] = \delta[m] \cdot \sigma_{\eta}^2. \quad (90)$$

$\delta[m]$ stellt, wie schon in Kapitel 2, das Kronecker-Delta dar.

Gemäß dem Wiener-Chintschin-Theorem gilt für die PSD:

$$S_{\eta\eta}(\omega) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{\eta\eta}[m] e^{-j\omega m} = \sigma_n \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta[m] e^{-j\omega m} = \sigma_n. \quad (91)$$

Da es sich hierbei um eine Konstante und daher nicht um eine Funktion von ω handelt, hat eine Frequenzverschiebung gemäß Gleichung 73 keine Auswirkung auf das Eingangssignal $u[n]$.

Damit ergibt sich für das Zwischensignal $x[n]$ analog zu Gleichung 57:

$$x[n] = A + A \cos\left(2\pi \frac{2f_R}{f_A} n\right) + \eta[n]. \quad (92)$$

Setzt man nun außerdem voraus, dass die Messzeit so gewählt wurde, dass die nicht demodulierte Kosinuskomponente des Eingangssignals genau in eine Nullstelle des FIR-Filters fällt und daher im weiteren Prozess perfekt unterdrückt wird²⁹, kann $x[n]$ als

$$x[n] = \underbrace{A}_{x_0[n]} + \underbrace{\eta[n]}_{x_1[n]} \quad (93)$$

geschrieben werden.

Zur Analyse des FIR Filters soll Gleichung 74 nun als Skalarprodukt zweier Vektoren geschrieben werden:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} g_k x[n-k] = \mathbf{g}^T \mathbf{x}[n]. \quad (94)$$

Dafür muss gelten, dass

$$\mathbf{g} = [g_0 \ g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{N-1}] \quad (95)$$

$$\mathbf{x}[n]^T = [x[n] \ x[n-1] \ x[n-2] \ \dots \ x[n-N+1]]^T. \quad (96)$$

²⁹siehe Ende von Kapitel 3

Für den deterministischen Gleichanteil des Signals $x_0[n]$ ergibt sich damit am Ausgang des FIR Filters

$$y_0[n] = \mathbf{g}^T \mathbf{x}_0[n] = A \mathbf{g}^T \mathbf{1} = A \sum_{k=0}^{N-1} g_k. \quad (97)$$

Der stochastische Prozess am Ausgang des Filters $y_1[n]$ kann durch seine statistischen Parameter beschrieben werden³⁰.

Für den Mittelwert μ_y von $y_1[n]$ ergibt sich mit dem Erwartungswert $E\{\bullet\}$ [6]

$$\mu_y = E\{y_1[n]\} = E\{\mathbf{g}^T \mathbf{x}_1[n]\} = \mathbf{g}^T E\{\mathbf{x}_1[n]\} = \mathbf{g}^T \mathbf{0} = 0. \quad (98)$$

Dieses Resultat ist phänomenologisch auch dadurch zu begründen, dass Rauschen am Eingang eines LZI-Systems (linearen zeit-invarianten Systems) Rauschen am Ausgang des Systems bewirkt³¹.

Für die Varianz σ_y^2 von $y_1[n]$ ergibt sich mithilfe des Satzes von Steiner [2]

$$\sigma_y^2 = Var\{y_1[n]\} = E\{y_1[n]^2\} = E\{y_1[n]^2\} - \underbrace{E\{y_1[n]\}^2}_{\mu_y=0} \quad (99)$$

$$= E\{(\mathbf{g}^T \mathbf{x}_1[n])^2\} = \mathbf{g}^T E\{\mathbf{x}_1[n]^T \mathbf{x}_1[n]\} \mathbf{g} = \mathbf{g}^T \underbrace{\mathbf{R}_{\eta\eta}}_{\mathbf{I} \sigma_\eta^2} \mathbf{g} \quad (100)$$

$$= \mathbf{g}^T \mathbf{g} \sigma_\eta^2 = \|\mathbf{g}\|^2 \sigma_\eta^2 = \sigma_\eta^2 \sum_{k=0}^{N-1} |g_k|^2, \quad (101)$$

wobei $\mathbf{R}_{\eta\eta}$ die Autokorrelationsmatrix des Eingangssignals $x_1[n]$ ist, die die Werte der Autokorrelationsfunktion $r_{\eta\eta}[m]$ in Töplitz-Form [14] beinhaltet und daher mithilfe von Gleichung 90 für weißes Rauschen zu $\mathbf{I} \sigma_\eta^2$ reduziert werden kann, wobei \mathbf{I} die Einheitsmatrix darstellt. Der resultierende Ausdruck $\|\mathbf{g}\|^2$ wird in der statistischen Signalverarbeitung gerne als Rauschverstärkung ('Noise Gain') bezeichnet.

Damit kann die SNR des Ausgangssignals als Verhältnis von Signalleistung P_S und Rauschleistung P_N wie folgt berechnet werden:

³⁰Es sei angemerkt, dass für die Betrachtungen im Rahmen dieses Kapitels Ergodizität sowie schwache Stationarität des stochastischen Prozesses, gemäß der gängigen Praxis für statistischen Untersuchungen im Rahmen der Signalverarbeitung, angenommen werden.

³¹Das heißt mit anderen Worten, besitzt das Eingangssignal keinen Gleichanteil, wird auch das Ausgangssignal keinen Gleichanteil besitzen.

$$\text{SNR}_y := 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{P_S}{P_N} \right) = 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{x_0[n]^2}{\sigma_\eta^2} \right) \quad (102)$$

$$= 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A \mathbf{g}^T \mathbf{1}}{\sigma_\eta \|\mathbf{g}\|} \right) = \underbrace{20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A}{\sigma_\eta} \right)}_{\text{SNR}_x} + \underbrace{20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\mathbf{g}^T \mathbf{1}}{\|\mathbf{g}\|} \right)}_{\Delta \text{SNR}}. \quad (103)$$

Schreibt man die SNR Veränderung ΔSNR als Summengleichung, erhält man

$$\Delta \text{SNR} = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} g_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |g_k|^2}} \right). \quad (104)$$

Um die SNR Zunahme ΔSNR mithilfe des FIR Filters \mathbf{g} zu maximieren, ist also folgende Aufgabe zu lösen:

$$\arg \max_{\mathbf{g}} \Delta \text{SNR}. \quad (105)$$

Zur einfachen Lösung dieses Problems bringen wir Formel 104 erneut in Vektorform. Da der Logarithmus keinen Einfluss auf das Optimierungsergebnis hat, schreiben wir

$$\arg \max_{\mathbf{g}} \Delta \text{SNR} = \arg \max_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{1}}{\|\mathbf{g}\|}. \quad (106)$$

Durch Umformung erhält man

$$\arg \max_{\mathbf{g}} \frac{\mathbf{g}^T \mathbf{1}}{\|\mathbf{g}\|} = \arg \max_{\mathbf{g}} \frac{\sum_{k=0}^{N-1} g_k}{\|\mathbf{g}\|} = \arg \max_{\mathbf{g}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{g_k}{\|\mathbf{g}\|} \quad (107)$$

$$= \arg \max_{\mathbf{g}} \sum_{k=0}^{N-1} g_{0k} = \arg \max_{\mathbf{g}} \mathbf{g}_0^T \mathbf{1}, \quad (108)$$

wobei \mathbf{g}_0 den Einheitsvektor in Richtung \mathbf{g} darstellt.

Die geometrische Interpretation dieses Optimierungsproblems besagt daher, dass das \mathbf{g} so gewählt werden muss, dass das Skalarprodukt zwischen dem Eins-Vektor und dem Einheitsvektor in Richtung \mathbf{g} , das heißt \mathbf{g}_0 , maximal wird. Da das Skalarprodukt als Projektion des Einheitsvektors \mathbf{g}_0 auf den Eins-Vektor interpretiert werden kann, ist dieses maximal, wenn beide in die selbe Richtung zeigen, das heißt mit anderen Worten, wenn alle Koeffizienten g_k des Filters die gleiche Größe besitzen.

Dieses Ergebnis bedeutet, dass FIR-Filter mit konstanten Koeffizienten

$$g_i = g_j \quad \forall i, j \in \{0; 1; 2 \dots N-1\} \quad (109)$$

im Fall von Gleichsignalen³² bei additivem weißem Rauschen die **größtmögliche SNR Zunahme** erzeugen.

Diese SNR Zunahme ergibt sich, wie aus der Literatur bekannt ist [14], zu

$$\Delta \text{SNR}_{max} = 20 \cdot \log_{10} (\mathbf{g}_0^T \mathbf{1}) = 20 \cdot \log_{10} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{\sqrt{N}} \right) = 10 \cdot \log_{10} (N). \quad (110)$$

Soll der Nutzanteil des Signals $x_0[n]$ mit 0 dB verstärkt werden, muss \mathbf{g} gemäß Gleichung 75 als Mittelwertfilter realisiert werden. Ist dies der Fall, ergibt sich mit Gleichung 101 eine Rauschunterdrückung von

$$\frac{\sigma_y}{\sigma_x} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} |g_k|^2} = \sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{N^2}} = \sqrt{N}. \quad (111)$$

4.2 Analysen zur Rauschunterdrückung durch Überabtastung

Dieser Abschnitt widmet sich einer Idee zur Reduktion der minimal notwendigen Messzeit, die im Zuge der Analyse des Rauschverhaltens des digitalen Lock-In Verstärkers entstanden ist, und an dieser Stelle aufgrund der theoretischen Signifikanz des Ergebnisses betrachtet werden soll.

Dieser Ansatz basiert auf den Überlegungen aus Kapitel 4.1.

³²Man beachte, dass durch die Demodulation bzw. Frequenzverschiebung des Nutzsignals im ersten Lock-In Verarbeitungsschritt am Eingang des FIR-Filters (Signal $x[n]$) das Nutzsignal immer als Gleichsignal vorliegt.

Die Rauschspannung U_N , die der Standardabweichung des stochastischen Prozesses σ_η entspricht (siehe Kapitel 4.1), wird in der Praxis wie folgt angegeben:

$$U_N = \sigma_\eta = U_{\sqrt{f}} \cdot \sqrt{B}. \quad (112)$$

$U_{\sqrt{f}}$ entspricht dabei der spektralen Rauschspannungsdichte und ist eine Bauteilkonstante.

B stellt die effektive bzw. äquivalente Rauschbandbreite des verwendeten Tiefpassfilters dar (Anti-Aliasing Filter beim ADC), die wie folgt definiert ist [20]:

$$B = \frac{1}{2|Q_{max}|^2} \int_{-\infty}^{\infty} |Q(f)|^2 df = {}^{33} \int_0^{\infty} |Q(f)|^2 df, \quad (113)$$

wobei $Q(f)$, die Übertragungsfunktion des Tiefpassfilters darstellt.

Für reguläre Analogfilter kann jedoch gezeigt werden, dass $B = K \cdot f_g$ gilt, wobei $K > 1$ einen konstanten Faktor darstellt und f_g die $-3dB$ Grenzfrequenz des Tiefpassfilters darstellt³⁴

Betrachten wir nun das Beispiel des Mittelwertfilters gemäß Gleichung 75, der, wie in Abschnitt 4.1 gezeigt wurde, der optimale FIR-Filter für die Rauschunterdrückung beim Lock-In Verstärker ist. Durch Kombination von Gleichung 103, 110 und 112 ergibt sich als SNR-Formel für das Filterausgangssignal $y[n]$

$$SNR_y = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A \sqrt{N}}{U_{\sqrt{f}} \sqrt{B}} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A}{U_{\sqrt{f}}} \right) + 10 \cdot \log_{10} \left(\frac{T f_A}{K f_g} \right) \quad (114)$$

mit $N = T \cdot f_A$.

Laut dieser Formel kann die SNR über 4 Parameter erhöht werden:

- Über eine Senkung der Grenzfrequenz f_g , die eine Verkleinerung der Rauschbandbreite und damit eine Senkung der Rauschleistung bewirken würde. Es ist jedoch anzunehmen, dass eine solche Senkung bei einem gut dimensionierten Eingangstiefpass nicht möglich ist.

³³Für $|Q_{max}| = 1$ und $|Q(f)| = |Q(-f)|$.

³⁴Zum Beispiel gilt $B = \frac{\pi}{2} f_g$ für einen Tiefpass erster Ordnung.

- Über eine Erhöhung der Messzeit T , die eine Erhöhung der Anzahl an aufgenommenen Signalsamples N und damit eine Verminderung der Auswirkung des mittelwertfreien stochastischen Rauschprozesses bewirkt. Diese soll jedoch im Rahmen dieser Analyse vermindert werden.
- Über die Verminderung des Faktors K , das heißt die Verwendung eines Tiefpasses höherer Ordnung. Hier sind jedoch nur kleine Verbesserungen zu erwarten, da $K > 1$ gilt. Des Weiteren würden die zusätzlichen Analogbauteile den Messfehler negativ beeinflussen.
- Über eine Erhöhung der Abtastfrequenz f_A , die ebenfalls **eine Erhöhung der Anzahl an aufgenommenen Signalsamples bewirkt und daher auf den ersten Blick plausibel erscheint**.

Weiterführende mathematische Analysen zeigen jedoch das Problem des vierten Ansatzes auf. Ein Blick auf Gleichung 101 ruft in Erinnerung, dass hier die Autokorrelationsmatrix aufgrund der Annahme von weißem Rauschen am Eingang zu $\mathbf{I}\sigma_\eta$ reduziert wurde. Diese entscheidende Annahme ist bei gleichzeitiger Voraussetzung von idealer Abtastung gemäß des Nyquist-Kriteriums (das heißt $f_A/2 = f_g$) korrekt, für die Überlegungen dieses Kapitels jedoch nur bedingt richtig.

Der entscheidende Punkt ist dabei folgender: Um Aliasing zu vermeiden und damit eine unverzerrte Digitalisierung der Signale zu ermöglichen, ist ein analoger Eingangstiefpass unerlässlich. Wird nun Überabtastung durchgeführt, das heißt die Abtastfrequenz so gewählt, dass $f_A/2 > f_g$, werden die aufgenommenen Signalsamples N aufgrund dieses Tiefpasses, dessen Grenzfrequenz nun tiefer als die maximale aufgrund des Sample-Vorgangs noch darstellbare Signalfrequenz $f_A/2$ liegt, untereinander korreliert. Die Grunddefinition von weißem Rauschen ist nicht mehr erfüllt.

Dies lässt sich mathematisch durch die Neudefinition des Rauschanteils $\eta[n]$ des Eingangssignals $u[n]$ aus Gleichung 89 als die Faltung des stochastischen Prozesses $\xi(t)$ mit der Impulsantwort des Tiefpassfilters $h_{TP}(t)$ zeigen, wobei $\xi(t)$ nun das tatsächliche weiße Rauschen am Analogeingang darstellt:

$$\eta[n] = \xi\left(\frac{n}{f_A}\right) * h_{TP}\left(\frac{n}{f_A}\right). \quad (115)$$

Wie in [14, S. 67f] nachzulesen ist, gilt nun für die AKF von $\eta[n]$

$$r_{\eta\eta}[m] = (c_{hh} * r_{\xi\xi})\left(\frac{m}{f_A}\right) = \int_{-\infty}^{\infty} c_{hh}(\lambda) r_{\xi\xi}\left(\frac{m}{f_A} - \lambda\right) d\lambda. \quad (116)$$

mit der zeitkontinuierlichen AKF des weißen Rauschens $r_{\xi\xi}(\tau) = \delta(\tau) \sigma_{\eta}^2$.

Weiters gilt, dass

$$c_{hh}(\tau) = FT^{-1} \{|H_{TP}(f)|^2\}, \quad (117)$$

wobei FT für die zeitkontinuierliche Fouriertransformation steht.

Nimmt man für $H_{TP}(f)$ einen idealen Tiefpass mit

$$|H_{TP}(f)| = \begin{cases} 1 & |f| \leq f_g = B \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad (118)$$

an, gilt $|H_{TP}(f)| = |H_{TP}(f)|^2$ und $c_{hh}(\tau)$ kann unkompliziert mithilfe der zeitkontinuierlichen Fouriertransformation als

$$c_{hh}(\tau) = \frac{\sin(2\pi f_g \tau)}{2\pi f_g \tau} = \text{sinc}(2 f_g \tau) \quad (119)$$

bestimmt werden.

Dadurch erhält man mithilfe von Gleichung 116 für die AKF von $\eta[n]$

$$r_{\eta\eta}[m] = \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(2 f_g \lambda) \delta\left(\frac{m}{f_A} - \lambda\right) \sigma_{\eta}^2 d\lambda = \text{sinc}\left(2 \frac{f_g}{f_A} m\right) \sigma_{\eta}^2. \quad (120)$$

Im Falle von idealer Abtastung gemäß des Nyquist-Kriteriums gilt, wie oberhalb beschrieben wurde, $f_A/2 = f_g$. Damit ergibt sich gemäß Gleichung 120 für die AKF des Eingangssignals

$$r_{\eta\eta}[m] = \text{sinc}(1 \cdot m) \sigma_{\eta}^2 = \delta[m] \sigma_{\eta}^2 \quad \forall m \in \mathbb{N}. \quad (121)$$

Damit sind die Annahmen in Abschnitt 4.1 bestätigt.

Im Falle von Überabtastung muss Gleichung 101 jedoch revidiert werden. Für die tatsächliche SNR des Filter-Ausgangssignals $y[n]$ gilt

$$SNR_y = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{A \mathbf{g}^T \mathbf{1}}{\sqrt{\mathbf{g}^T \mathbf{R}_{\eta\eta} \mathbf{g}}} \right) = 20 \cdot \log_{10} \left(A \frac{\sum_{k=0}^{N-1} g_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} g_k g_m r_{\eta\eta}[m-k]}} \right), \quad (122)$$

wobei $r_{\eta\eta}[m-k] = \text{sinc}(2 \frac{f_g}{f_A} (m-k)) \sigma_{\eta}^2$.

Trennt man die Logarithmen und sondert die SNR des Ursprungssignals ab, erhält man für die tatsächliche SNR Änderung:

$$\Delta SNR = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sum_{k=0}^{N-1} g_k}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} g_k g_m \text{sinc}(2 \frac{f_g}{f_A} (m-k))}} \right). \quad (123)$$

Damit ergibt sich für das Beispiel des Mittelwertfilters

$$\Delta SNR = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{N}{\sqrt{\sum_{k=0}^{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \text{sinc}(2 \frac{f_g}{f_A} (m-k))}} \right). \quad (124)$$

Die Resultate der mit Gleichung 124 vorhergesagten SNR Änderung wurden in Abbildung 27 beispielhaft bei einer Messzeit von $T = 3s$ und einer Grenzfrequenz von $f_g = 128$ Hz als Funktion des Überabtastungsfaktors $k \doteq f_A/(2 f_g)$ dargestellt. Wie man erkennen kann, steigt das Signal-Rausch-Verhältnis bis zur idealen Abtastung $f_A = f_g/2$ linear an. Bei Überabtastung gleichen sich Zähler und Nenner von Gleichung 124 jedoch **ungefähr** aus³⁵.

³⁵Es sei angemerkt, dass die SNR zwar beinahe konstant ist, ein exakter analytischer Zusammenhang ist in diesem Bereich jedoch nicht gegeben!

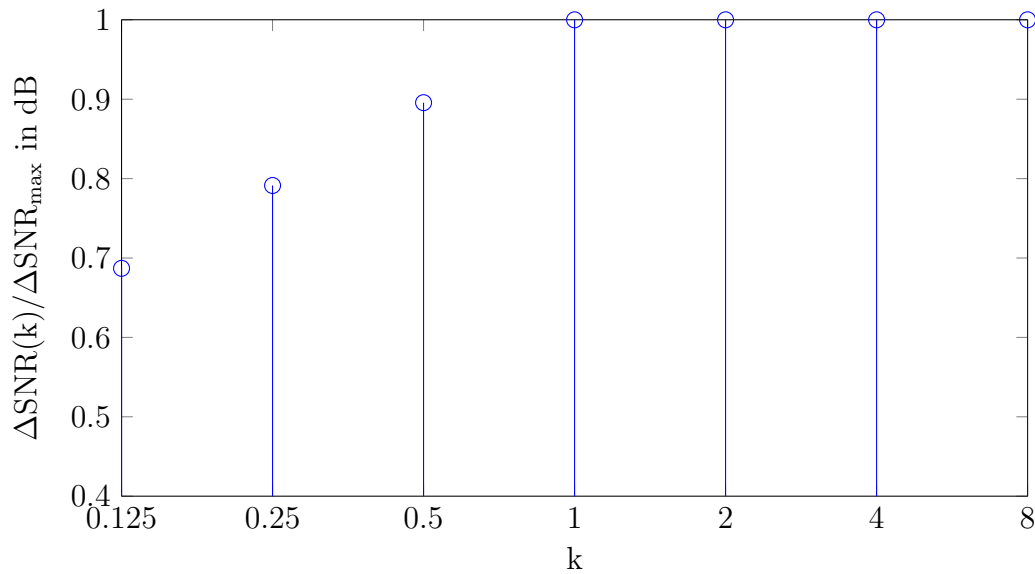


Abbildung 27: Relative SNR Zunahme ΔSNR bei $T = 3$ s und $f_g = 128$ Hz bezogen auf die SNR Zunahme bei idealer Abtastung ($f_A = f_g/2$) als Funktion des Überabtastungs-Faktors $k \doteq f_A/(2f_g)$ in logarithmischer Darstellung.

Wie oberhalb erklärt wurde bewirkt Überabtastung also eine Färbung des weißen Rauschens. Diese wirkt der SNR-Zunahme aufgrund der Vervielfachung der Signalsamples entgegen, sodass sich die entstehenden Effekte ausgleichen. Überabtastung hat daher keine positive Auswirkung auf die SNR.

Es sei abschließend bemerkt, dass hier das Rauschen der Analogbeschaltung betrachtet wurde. Zur Reduktion von Quantisierungsrauschen, welches nicht durch den Eingangstiefpass beeinflusst wird, kann Überabtastung bekannterweise erfolgreich angewendet werden [14].

4.3 Projektions-Ansatz

Dieser Ansatz zur Reduktion des relativen Messfehlers bei Absolutmessung entstand aus zwei unabhängigen Ideen, die im Zuge der theoretischen Optimierungsanalyse dieser Arbeit untersucht wurden:

- Der Versuch, die Empfindlichkeit durch Anpassung der Modellparameter aus Gleichung 47 zu maximieren.

- Der Idee, die im bisherigen Aufbau nicht genutzte Phaseninformation des Signals, die prinzipiell durch die einfache Anwendung von Formel 64 extrahiert werden kann, zu nutzen.

Um diese Ideen umzusetzen, wurde im Zuge der Arbeit das Modell aus Gleichung 47 und 34 verwendet:

$$D_{out} = -\frac{V}{1 + R_V \cdot (j \omega C_G + \frac{1}{j \omega L_G + R_G})}. \quad (125)$$

Anzumerken ist hierzu, dass $V = D_{in} \frac{R_p}{R_{amp}} \frac{R_F}{R_G} F_N$ all jene reellen Parameter, welche als Verstärkungsfaktor in der komplexen Gleichung auftreten, vereint. Diese Zusammenfassung wurde vorgenommen, da all diese Parameter an der selben Position der komplexen Gleichung auftreten und sich somit identisch auf das Ausgangssignal auswirken.

Bildet man durch analytische Berechnung den Betrag bzw. die Phase der Gleichungen³⁶, erhält man folgende Ergebnisse:

$$|D_{out}| = \frac{V}{\sqrt{(1 + \frac{R_v R_G}{R_G^2 + L_G^2 \omega^2})^2 + (C_G R_v \omega - \frac{L_G R_v \omega}{R_G^2 + L_G^2 \omega^2})^2}} \quad (126)$$

$$\arg\{D_{out}\} = \pi - \arctan\left(\frac{C_G R_v \omega - \frac{L_G R_v \omega}{R_G^2 + L_G^2 \omega^2}}{1 + \frac{R_v R_G}{R_G^2 + L_G^2 \omega^2}}\right) \quad (127)$$

Mit diesen Gleichungen konnten als nächster Schritt die Ableitungen der Betrags-, sowie Phasen-Übertragungsfunktion des Modells nach jedem Parameter analytisch bestimmt werden:

$$\frac{\delta |D_{out}|}{\delta X} ; \frac{\delta \arg\{D_{out}\}}{\delta X} \mid X = \{V, R_v, \omega, R_G, C_G, L_G\}. \quad (128)$$

Diese Ableitungen zeigen das Ausmaß sowie die Richtung der Auswirkung der Änderung des jeweiligen Parameters in jedem Punkt. Man spricht von der Empfindlichkeit des Systems auf die einzelnen Parameter.

Es handelt sich dabei, aufgrund der großen Komplexität der Ausgangsfunktionen, um sehr lange Gleichungen, die im Zuge der Arbeit unter Zuhilfenahme der 'Symbolic Toolbox' von Matlab bestimmt wurden. Da die Beschreibung dieser Gleichungen mehrere

³⁶Es sei angemerkt, dass $|a/b| = |a|/|b|$ bzw. $\arg\{a/b\} = \arg\{a\} - \arg\{b\}$ gilt, was die Berechnungsergebnisse maßgeblich vereinfacht.

Seiten füllen würde, sollen jene an dieser Stelle der Arbeit jedoch nicht explizit angegeben werden. Für die Resultate der Ableitungen sei auf das Matlab Script mit dem Namen `empfindlichkeitsanalyse.m` verwiesen. Diese findet sich in der Beilage dieser Arbeit.

Im Zuge des erwähnten Matlab-Scriptes wurden die erwähnten analytisch berechneten Empfindlichkeitsformeln genutzt, um die Betrags- und Phasenempfindlichkeit der einzelnen Parameter aus Formel 125 als Funktion der Messfrequenz f darzustellen. Das Ergebnis dieser Darstellung zeigt Abbildung 28. Dazu ist anzumerken, dass die um Größenordnungen abweichenden Maxima aller Kurven auf 1 normiert wurden. Als Betrachtungsbereich wurde die signifikante Region um die Resonanzfrequenz (siehe Gleichung 37) gewählt und in einer logarithmischen Skala dargestellt.

Wie Abbildung 28 zeigt, ist das nichtlineare Verhalten der Empfindlichkeiten des ausgelesenen Digitalwertes D_{out} auf die einzelnen Schwingkreisparameter stark unterschiedlich. Außerdem fällt auf, dass sich die einzelnen Empfindlichkeitskurven, im Bezug auf die Arbeitsfrequenz nicht nur in ihrer (relativen) Größe, sondern auch in ihrem Vorzeichen ändern.

Beispielsweise ist die Betragsempfindlichkeit auf die Verstärkungsparameter V immer positiv, das heißt, eine Vergrößerung dieser Parameterwerte bewirkt stets auch eine Vergrößerung des Betrages von D_{out} . Hingegen wechselt die Betragsempfindlichkeit auf die Gesamtinduktivität L_G , Gesamtkapazität C_G oder die Messfrequenz f das Vorzeichen abhängig vom Frequenz-Arbeitspunkt. Das heißt eine Vergrößerung dieser Parameter bewirkt unterhalb der Resonanzfrequenz eine Vergrößerung des Betrages von D_{out} , oberhalb eine Verkleinerung. Die maximale Auswirkung auf den Betrag hat eine Änderung von V bei der Wahl der Arbeitsfrequenz im unmittelbaren Bereich der Resonanzfrequenz. Bei L_G und C_G ist die Betragsempfindlichkeit im Bereich der Resonanzfrequenz hingegen beinahe Null.

Des Weiteren ist zu erkennen, dass Betrags- und Phasenempfindlichkeit der einzelnen Parameter einen stark differierenden Verlauf aufweisen, beziehungsweise, dass sich diese in einzelnen Frequenz-Arbeitspunkten bezogen auf die jeweiligen Parameter stark unterscheiden.

Die entscheidende Frage ist nun jene nach der Verwertung bzw. Nutzbarmachung dieser Erkenntnisse.

Das Fundament für aller weiteren Überlegungen ist die im Zuge von Kapitel 2 beleuchtete Tatsache, dass die relativen Messabweichungen der einzelnen Parameter und vor allem auch die zu erwartende Änderung des Messparameters L sehr gering bezogen auf die Normalwerte der Parameter sind. Diese Tatsache erlaubt, wie schon im Einführungsabschnitt 1.3.2 erwähnt wurde, die Annahme der Linearität der Messfunktion bzw. der Resonanzkurve im Arbeitsbereich **bei geeigneter Wahl des Arbeitspunktes**. Eine geeignete Wahl bedeutet in diesem Fall, dass die Krümmung der Resonanzkurve im gewählten Arbeitspunkt möglichst gering sein sollte. Wie ebenfalls schon im Zuge von Kapitel 1 erklärt wurde, ist die Linearität der Messfunktion innerhalb des Arbeitsbereiches notwendig, um bei der Fertigung des Gerätes eine unkomplizierte Kalibration mithilfe einer linearen Regressionskurve zu ermöglichen. Des Weiteren ermöglicht die Linearität der Messkurve die Annahme von konstanten Empfindlichkeiten³⁷ innerhalb des Arbeitsbereiches, was, wie sich zeigen wird, für die folgenden Betrachtungen unerlässlich ist.

Ein einfacher Gedanke wäre nun, zu versuchen die Empfindlichkeit auf L_G durch Wahl der optimalen Arbeitsfrequenz zu maximieren. In Abbildung 28 wurden dazu die Maxima der Funktionen kreisförmig markiert. Die entsprechenden Frequenzwerte wurden dazu außerdem in Tabelle 5 vermerkt.³⁸

X	L_G	C_G	R_v	f	R_G	V
$\frac{\delta D_{out} }{\delta X}$	128,53	137,40	136,14	128,23	132,74	132,74
$\frac{\delta \arg\{D_{out}\}}{\delta X}$	132,74	132,74	139,00	132,74	126,18	-

Tabelle 5: Frequenzen der Maximalwerte der Betrags- und Phasenempfindlichkeitskurven aus Abbildung 28. in **kHz**.

Wie zu erkennen ist kommen für eine hochempfindliche Messung der Spuleninduktivität daher nur drei Punkte infrage:

- Im Hinblick auf die Betragsmessung ist dies jener Messpunkt, an dem $f_{max}(C_G)$

³⁷d.h. einer konstanten ersten Ableitung

³⁸Es ist anzumerken, dass diese Maxima nur für den verwendeten Arbeitspunkt (Normalparameter von C_G, L_G, R_G usw. aus Kapitel 2) gültig sind. Um das globale Optimum zu finden, müsste, aufgrund der Korrelation der Auswirkungen der Einzelparameter, eigentlich eine mehrdimensionale Optimierung der Empfindlichkeit als Funktion aller Parameter des Arbeitspunktes durchgeführt werden. Wie Simulationen zeigten, bewirkt dieses Vorgehen jedoch keine signifikante Erhöhung der Empfindlichkeit mehr. Außerdem können die Parameter in der physikalischen Realität nicht beliebig gewählt bzw. aufgrund schaltungstechnischer Überlegungen teilweise nicht beliebig verändert werden. Daher wird im Rahmen dieser Arbeit ausschließlich der Frequenz-Arbeitspunkt optimiert.

und jener, an dem $f_{max}(L_G)$ liegt, das heißt die Schenkel der Resonanzkurve (siehe Abbildung 19).

- Im Hinblick auf die Phasenmessung ist dies jener, bei dem $f_{max}(L_G) \approx f_{max}(C_G)$ liegt. Dies entspricht ungefähr der Resonanzfrequenz f_{res} .

Da jedoch die Krümmung der Resonanzkurve im Resonanzpunkt für die Betragsmessung bezogen auf L_G, C_G und f sehr stark und damit die oberhalb geforderte Linearität der Kurve nicht ausreichend gegeben ist, ist der letzte Messpunkt unbrauchbar.³⁹ Im Gegenzug dazu ist die Krümmung der Phasen-Resonanzkurve an den Schenkelpunkten moderat, und lässt, wie die Simulationen in Abbildung 29 im Folgenden bestätigen werden, eine Linearisierung des Arbeitsbereiches zu.

Wie ein Blick auf Gleichung 20 zeigt, liegt jene Arbeitsfrequenz des Schwingkreises, die in der bisherigen Implementierung des L-Vis 520 verwendet wurde, etwas über dem oberen, hochempfindlichen Frequenzpunkt bei $f_{max}(C_G)$ und ist der mithilfe der Wahl der Messfrequenz erreichbaren Maximalempfindlichkeit bereits sehr nahe. Entscheidend ist außerdem, dass eine Vergrößerung der Empfindlichkeit auf L_G auch die Empfindlichkeit auf einige andere Schwingkreisparameter vergrößert (z.B. C_G), was sich wiederum negativ auf den relativen Messfehler, bezogen auf jene Parameter, auswirkt. Eine reine Optimierung der Empfindlichkeit auf die Induktivitätsänderung L_G ist daher für eine signifikante Verbesserung des relativen Messfehlers unzureichend.

Basierend auf den im Vorherigen dargelegten Überlegungen zur Empfindlichkeit, wurde im Rahmen dieser Arbeit daher ein Konzept gesucht, das es erlauben sollte, die in den Empfindlichkeitsfunktionen enthaltene, bei einer klassischen Betragsmessung mit einer einzelnen Arbeitsfrequenz nicht genutzte Information für eine Reduktion des relativen Messfehlers zu verwerten.

Dies führte zu der in Abbildung 29 gezeigten Idee der Erzeugung einer zweidimensionalen Ebene aus

- Betrag und Phase der Resonanzkurve an einem einzelnen der beiden verwendbaren, hochempfindlichen Arbeitsbereiche als Koordinaten.
- zwei Betragssignalen mit unterschiedlichen Frequenz-Arbeitsbereichen, die sich an den zwei verwendbaren hochempfindlichen Frequenzmesspunkten befinden, als Koordinaten.

³⁹Die Krümmung bezogen auf die einzelnen Parameter ist leicht durch die Steigung der Empfindlichkeitskurven, d.h. die Steigung der ersten Ableitung der Resonanzkurve, ersichtlich.

In Abbildung 29 ist zu erkennen, dass sich aufgrund des stark unterschiedlichen Verhaltens der Empfindlichkeiten der einzelnen Schwingkreisparameter an den gewählten Arbeitspunkten sowohl für die Betrag-Phasen-Messung als auch für die 2-Frequenz-(Betrags-)Messung stark differierende Bewegungsrichtungen auf der zweidimensionalen Ebene ergeben.

Es sei angemerkt, dass hier zur besseren Nachvollziehbarkeit die ADC Eingangsspannung U_{ADC} anstatt des digitalen Messwertes D_{out} dargestellt wurde. Während, wie in Kapitel 5.2.1 erläutert wird, die Phase dieser Signale identisch ist, wurde der Betrag von U_{ADC} mithilfe von Formel 168 durch D_{out} ermittelt.

Nimmt man, wie in Kapitel 2.3, eine Induktivitätsänderung von $0,5 \mu\text{H}$ als erwarteter Messbereich an, erhält man mithilfe des Simulationsmodells aus Gleichung 125 bei maximaler Empfindlichkeit eine Änderung von

$$\Delta U_{ADC}(\Delta L = 0,5 \mu\text{H}) \approx 30 \text{ mV}. \quad (129)$$

Da die zu erwartenden Auswirkungen der parasitären Parameter auf die Messspannung U_{ADC} um Größenordnungen geringer sind als der Gesamtmessbereich, bestätigt Abbildung 29 folglich die im vorherigen getroffene Annahme, dass sich die Resonanzkurve bezogen auf die einzelnen Parameter innerhalb des zu erwartenden Messbereiches annähernd linear verhält.

Dazu ist außerdem anzumerken, dass, wie sich im Zuge von Kapitel 5 zeigt, bei der praktischen Anwendung ein weitaus geringerer Induktivitätsmessbereich als die angenommenen $0,5 \mu\text{H}$ zu erwarten ist. Dies hat unter anderem mit der bereits im Einführungskapitel erwähnten Fehlannahme einer reinen Änderung der Induktivität L als Ursache für das Messsignal zu tun. Siehe dazu Abschnitt 5.2.2.

Um die geometrische Information der 2D-Ebene aus Abbildung 29 nun für die Erzeugung eines Messwertes mit verringertem Relativfehler verwenden zu können, wurde im Rahmen dieser Arbeit die Methode der Projektion des zweidimensionalen Messpunktes auf eine geeignete Zielgerade angewendet. Eine geometrische Projektion kann mathematisch über das Skalarprodukt zweier Vektoren realisiert werden [2]. Mit anderen Worten ausgedrückt, kann die Länge der Projektion eines Vektors \mathbf{a} in Richtung eines Vektors \mathbf{b} , durch das Skalarprodukt des Vektors \mathbf{a} mit dem Einheitsvektor in Richtung \mathbf{b} erreicht

werden, d.h.

$$p = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}^T \mathbf{b}_0 = \mathbf{a}^T \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}. \quad (130)$$

In diesem Fall muss also das Skalarprodukt des Auslenkungsvektors, der vom 2D-Arbeitspunkt **AP** zum aktuellen 2D-Messpunkt **MP** zeigt, mit dem Einheitsvektor in Richtung der Zielgerade \mathbf{z}_0 berechnet werden:

$$W_{pr} = (\mathbf{MP} - \mathbf{AP}) \cdot \mathbf{z}_0. \quad (131)$$

Eine exemplarische Veranschaulichung dieses geometrischen Ansatzes liefert Abbildung 30 bei einer Kombination mit 2-Frequenz-(Betrags-)Messung. Es sei jedoch unterstrichen, dass dieser gleichermaßen für beide der im vorherigen genannten Koordinaten-Konzepte⁴⁰ angewendet werden kann. Zur Veranschaulichung wurden als Messpunkte 20 mV Auslenkungen entlang der Idealachse eines jeden Parameters verwendet. Gezeigt werden zwei Plots, in denen auf unterschiedliche Zielgeraden projiziert wird.

Im oberen Plot wurde, gemäß der klassischen 1-Frequenz-Betrags-Messung, eine Projektion in die 137 kHz-Betrags-Richtung durchgeführt. Dies entspricht einer Messung nach dem herkömmlichen, bereits im L-Vis 520 implementierten Messprinzip.

Im unteren Plot wurde als Zielgerade die theoretische Idealgerade für eine reine Induktivitätsauslenkung verwendet. Wie man leicht erkennen kann, wirkt sich die 20 mV-Induktivitätsänderung in Relation zu den parasitären 20 mV-Änderungen der anderen Parameter nun bei weitem stärker aus, was zu einer Reduktion des relativen Messfehlers führt.

Für die Wahl der Zielgeraden ist jedoch auch ein anderes Konzept denkbar. Anstatt der in Abbildung 30 gezeigten Maximierung der Auswirkung des Messparameters ist auch die gezielte Unterdrückung eines signifikanten Störparameters durch Ausrichtung der Zielgeraden im rechten Winkel zur Auslenkungsrichtung möglich.

Die maximale Reduktion des relativen Fehlers kann theoretisch durch Kombination dieser beiden Ideen erreicht werden. Dies ist jedoch nur möglich, wenn die Achse des Messparameters und des Störparameters exakt normal aufeinander stehen. Dann kann durch Wahl der Zielgerade in Richtung des Messparameters gleichzeitig jener Störparameter optimal unterdrückt werden. Ein Blick auf Abbildung 29 zeigt, dass diese Forderung für

⁴⁰das heißt Betrag und Phase bei einer Frequenz bzw. Betrag bei zwei Frequenzen

die im gezeigten Beispiel gewählten Arbeitspunkte sowohl bei Betrag-Phasen-Messung als auch bei 2-Frequenz-Betrags-Messung für keinen der Parameter exakt erfüllt ist. Diese Optimalsituation kann erreicht werden, in dem die Frequenzarbeitspunkte in Abbildung 28 so verschoben werden, dass sich die Empfindlichkeiten des Störparameters bezogen auf die Linearkombination mit dem aktuell verwendeten Zielvektor ausgleichen. Die Bestimmung dieses Frequenzpunktes stellt mathematisch jedoch ein nichttriviales Problem dar, da mit der Verschiebung des Frequenzarbeitspunktes auch die Richtung des Messparameters, d.h. der Zielgerade in der 2D-Ebene verändert wird.

Zur Demonstration der mithilfe dieser Ansätze erreichbaren Reduktion des relativen Messfehlers, wurde, identisch zu den Betrachtungen zur Absolutwert- bzw. Differenzwertmessung in Abschnitt 2.3 der Arbeit, eine Simulation der Auswirkung der einzelnen parasitären Bauteilabweichungen bei Verwendung der Projektionsmethode durchgeführt.

Dazu wurden bei unterschiedlichen Frequenzarbeitspunkten sowohl die Projektionsmethode mit 2-Frequenz-Betrags-Messung als auch mit Betrag-Phasen-Messung getestet. Die Resultate sind in Abbildung 31 und Abbildung 32 dargestellt und werden im Zuge des bereits in Abschnitt 2.3 erwähnten Matlab Scripts dem Namen `fehlerabschaetzung.m` berechnet. Dieses findet sich in der Beilage dieser Arbeit. Wie im vorherigen, wurde auch hier als Messsignal eine Änderung der Spuleninduktivität L bei einem Arbeitsbereich von $0,5 \mu\text{H}$ angenommen.

Vergleicht man diese Darstellungen mit Abbildung 20, welche die normale Absolutmessung, das heißt eine 1-Frequenz-Betrags-Messung darstellt, erkennt man folgendes:

- Die Stärke der Fehlerunterdrückung hängt, wie in Abbildung 30 gezeigt wurde, von der Auslenkungsrichtung des parasitären Effektes ab.
- Bei Parametern, deren Auslenkungsvektor nicht in annähernd normal auf die Zielgerade steht, ist die Unterdrückung des absoluten Fehler bzw. des auf den konstanten maximalen Quantisierungsfehler bezogenen Relativfehlers $E_Q^{pr-2f/ph}$, konstant.
- Bei Parametern, deren Auslenkungsvektor annähernd normal auf die Zielgerade steht, ist die Unterdrückung von $E_Q^{pr-2f/ph}$ an einem infinitesimalen Punkt innerhalb des Arbeitsbereiches sehr stark, nimmt jedoch mit dem zunehmenden Abstand von diesem Idealpunkt stark ab.

Bei sehr kleinen Abweichungen des Auslenkungsvektors von der optimalen Unterdrückungsrichtung hat die minimale Nichtlinearität des Arbeitsbereiches folglich eine signifikante Auswirkung auf die Reduktion des Messfehlers.

Zu den Abbildungen ist außerdem anzumerken, dass die Frequenz-Arbeitspunkte für Abbildung 31 und 32 auf empirische Weise so gewählt wurden, dass bei 2-Frequenz-Betrags-Messung der Punkt der maximalen Unterdrückung für V und bei Betrags-Phasen-Messung der Punkt der maximalen Unterdrückung für R_G innerhalb des Arbeitsbereiches liegt. Dies wurde getan um die maximale sowie die herkömmliche Unterdrückungsleistung des Konzeptes analysieren zu können.

Um den Einbruch des Messfehlers schön darstellen zu können, wurden die Frequenz-Arbeitspunkte dabei so gewählt, dass die Einbruchstellen nicht exakt in der Mitte des Arbeitspunkts zentriert sind.

Dies ist in Abbildung 31 durch den Einbruch des vom Widerstandsarray R/R bzw. des vom ADC/DAC Verstärkungsdriifts $Gain$ verursachten Fehlers bei $0,28 \mu\text{H}$ und in Abbildung 32 durch den Einbruch des von den Außenwiderständen R_L und R_K verursachten Fehlers bei $-0,01 \mu\text{H}$ zu erkennen.

Um eine genaue quantitative Darstellung der Unterdrückungsleistung des Projektionskonzeptes zu ermöglichen, wurden in Tabelle 6 und 7 die auf den maximalen Quantisierungsfehler bezogenen relativen Abweichungen, die durch die verschiedenen parasitären Effekte aus Kapitel 2 hervorgerufen werden, logarithmisch dargestellt⁴¹. Gezeigt werden jeweils die Messabweichung bei Absolutmessung E_Q^{abs} sowie die maximale $E_Q^{pr-ph/2f}$ und minimale $e_Q^{pr-ph/2f}$ relative Messabweichung bei Verwendung der Projektionsmethode. Außerdem wird der maximale sowie minimale Fehlerreduktionsfaktor, das heißt $E_Q^{abs}/e_Q^{pr-ph/2f}$ bzw. $E_Q^{abs}/E_Q^{pr-ph/2f}$, beider Methoden im Vergleich zur Absolutmessung gezeigt.

Man erkennt eine signifikante Maximalunterdrückung der normal zur Zielgeraden gewählten Parameter von mehr als Faktor 10^5 ! Auch die minimale Reduktion der Messabweichungen, die unproblematisch über den gesamten Arbeitsbereich erreicht werden kann, beläuft sich in beiden Koordinaten-Typen beinahe auf einen Faktor von 20. Bei den Parametern, welche annähernd parallel zur Zielgerade \mathbf{z}_0 stehen, kann jedoch, wie zu erwarten war, nur eine schwache Unterdrückung der Messabweichungen erreicht werden. Im Extremfall kann sogar eine minimale Verstärkung des Relativfehlers verursacht

⁴¹Man vergleiche außerdem Tabelle 4.

werden. Man betrachte dazu die relative Messabweichung aufgrund der Kapazität C in Tabelle 7.

Zusammenfassend können folgende Fakten über die Verwendung der Projektionsmethode gegeben werden:

Es wurden zwei Verfahren zur Bildung einer 2D-Ebene eingeführt:

1. Betrag-Phasen-Messung
2. 2-Frequenz-Betrags-Messung

Diese Verfahren sind aus theoretischer Sicht gleichermaßen verwendbar. Die Stärke der Fehlerreduktion ist vom jeweiligen Parameter abhängig.

Es wurden 3 Ansätze bezüglich der Wahl der Zielgeraden vorgeschlagen:

Ansatz 1: Ausrichtung der Zielgeraden parallel zur Richtung des Messparameters.

Ansatz 2: Ausrichtung der Zielgeraden normal zur Richtung eines gezielt zu unterdrückenden Störparameters.

Ansatz 3: Kombination dieser Ideen durch Wahl der Arbeitsfrequenzen so, dass Messparameter und zu unterdrückender Störparameter exakt normal aufeinander stehen.

Wie an den Werten jener Parametern in Tabelle 7 und 6, welche nicht annähernd normal zur Zielgerade stehen, erkannt werden kann, bringt die Verwendung von Ansatz 1 jedoch keine ausreichende Reduktion der relativen Messfehler mit sich⁴².

Theoretisch könnte der im vorherigen beschriebenen maximale Fehlerreduktionsfaktor durch die Verwendung von Ansatz 3 für einzelne Störparameter erreicht werden. Dies erfordert jedoch eine sehr präzise Kenntnis des Arbeitspunktes und daher der einzelnen Bauteilwerte sowie eine sehr präzise Wahl der Messfrequenz, was im Zuge der praktischen Realisierung nur schwer möglich ist.

Bezogen auf praktische Überlegungen ist daher die Verwendung von Ansatz 2 anzuraten, mit dem, bei geeigneter Kalibrierung des Systems, ein signifikanter Fehlerreduktionsfaktor erreichbar sein sollte. Siehe dazu Kapitel 6.

⁴²Dies ist mathematisch durch die Natur der trigonometrischen Funktionen zu begründen.

	Temperatur bei 1 °C									Alterung über 1 a	
	C	R _V	R/R	f	R _K	C _K	L _K	Gain	R _L	f	R _v
E_Q^{abs}	19	0,1	0,1	4,6E-3	18	0,3	0,2	0,6	141	1,1	8,8
$E_Q^{\text{pr-2f}}$	16	0,01	2,7E-3	4,2E-3	7,2	0,2	0,2	0,01	56,8	1,1	0,8
$e_Q^{\text{pr-2f}}$	15	0,01	9,0E-8	3,9E-3	5,3	0,2	0,2	4,5E-7	41	1,0	0,7
$\frac{E_Q^{\text{abs}}}{E_Q^{\text{pr-2f}}}$	1,3	13	1,3E6	1,2	3,4	1,3	1,0	1,3E6	3,4	1,2	13
$\frac{E_Q^{\text{abs}}}{e_Q^{\text{pr-2f}}}$	1,2	12	42	1,1	2,5	1,2	1,0	42	2,5	1,1	12

Tabelle 6: Vergleich der annähernd konstanten relativen Messabweichungen bei Absolutmessung (Abbildung 20 (a)) mit der maximalen (**E**) und minimalen (**e**) relativen Messabweichung bei Verwendung der Projektionsmethode mit **2-Frequenz-Betrags-Messung** (Abbildung 31 (a))

	Temperatur bei 1 °C									Alterung über 1 a	
	C	R _V	R/R	f	R _K	C _K	L _K	Gain	R _L	f	R _v
E_Q^{abs}	19	0,1	0,1	4,6E-3	18	0,3	0,2	0,6	142	1,1	8,8
$E_Q^{\text{pr-ph}}$	32	0,03	0,01	8,4E-3	1,1	0,4	0,5	0,1	8,3	2,1	1,9
$e_Q^{\text{pr-ph}}$	31	0,02	0,01	8,3E-3	7,2E-5	0,4	0,5	0,1	2,7E-4	2,1	1,7
$\frac{E_Q^{\text{abs}}}{E_Q^{\text{pr-ph}}}$	0,6	5,3	8,6	0,5	2,5E5	0,6	0,5	8,6	5,3E5	0,5	5,3
$\frac{E_Q^{\text{abs}}}{e_Q^{\text{pr-ph}}}$	0,6	4,6	8,6	0,5	17	0,6	0,5	8,6	17	0,5	4,6

Tabelle 7: Vergleich der annähernd konstanten relativen Messabweichungen bei Absolutmessung (Abbildung 20 (a)) mit der maximalen (**E**) und minimalen (**e**) relativen Messabweichung bei Verwendung der Projektionsmethode mit **Betrag-Phasen-Messung** (Abbildung 32 (a))

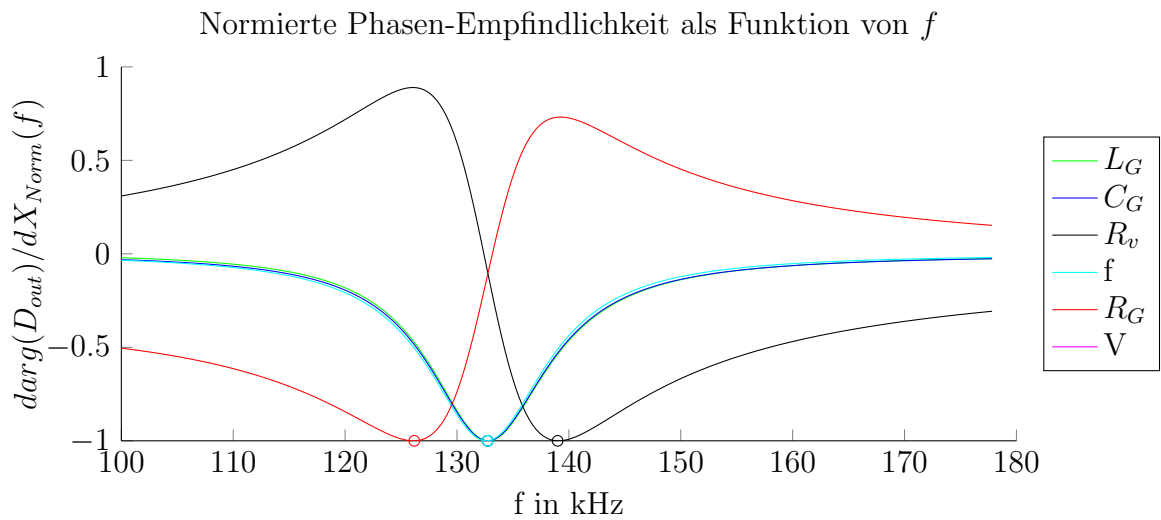
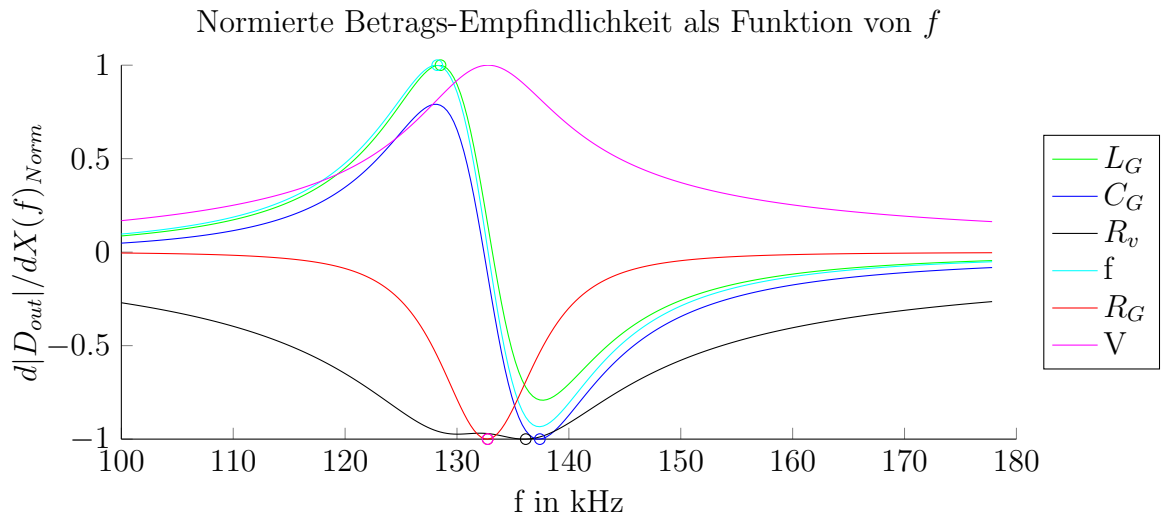


Abbildung 28: Normierte Betrags- und Phasenempfindlichkeiten im Bezug auf die Parameter des analogen Signalpfades als Funktion der Messfrequenz f_0

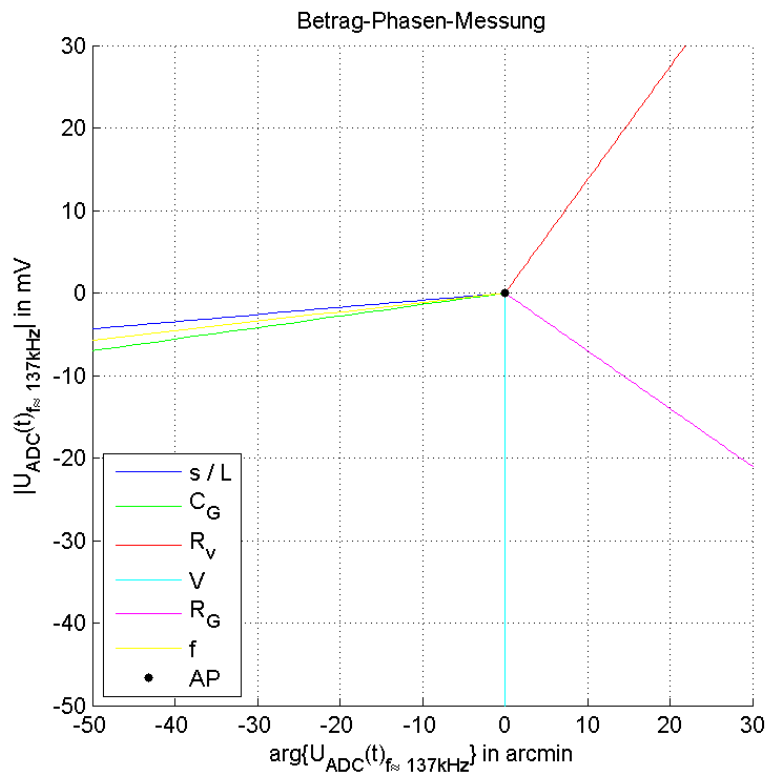
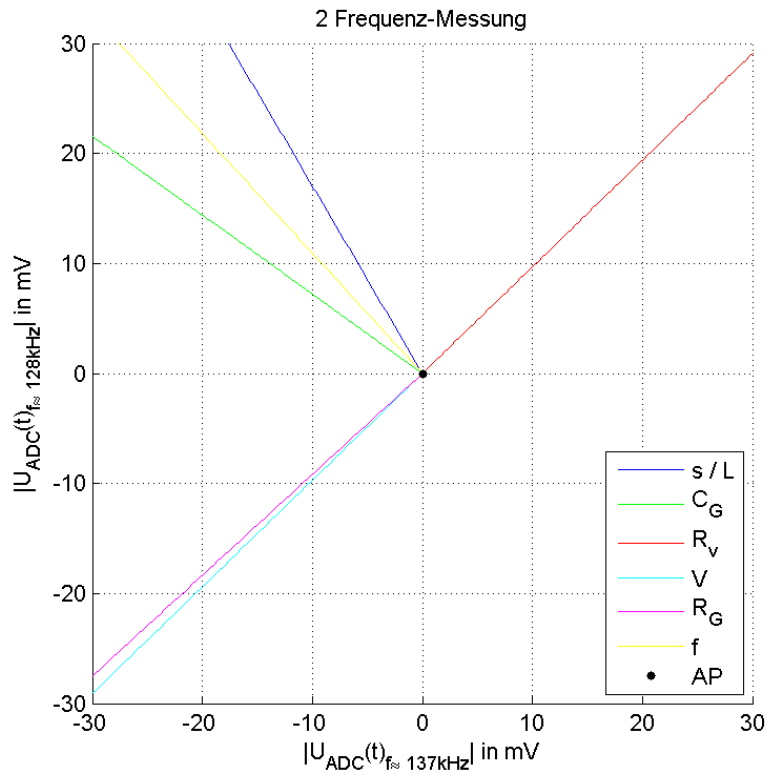


Abbildung 29: Graphische Veranschaulichung der Auswirkungen der Änderungen der verschiedenen Schwingkreisparameter auf die ADC-Spannung U_{ADC} in der 2D-Ebene bei 2-Frequenz-Messung sowie Betrag-Phasen-Messung.

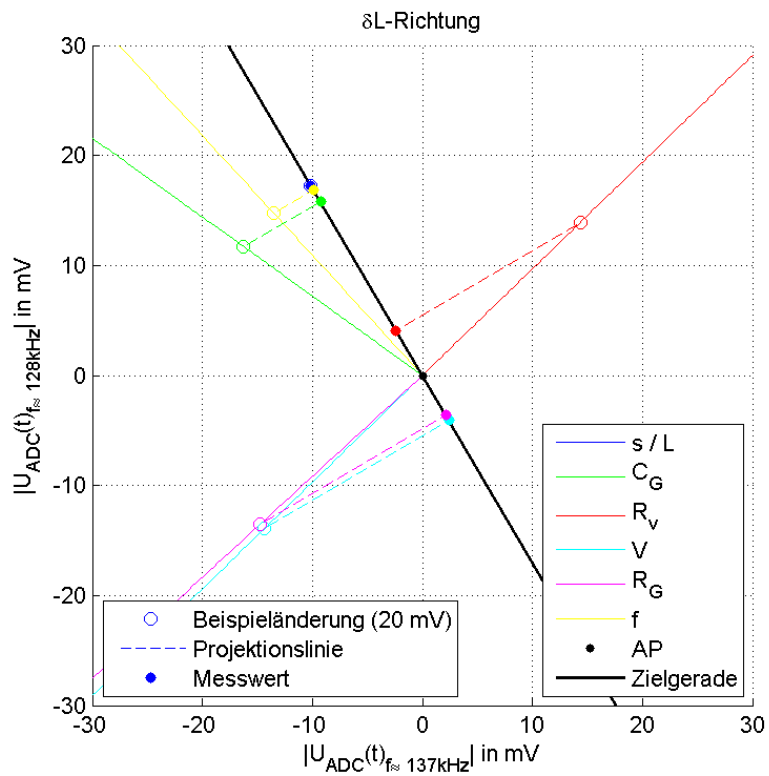
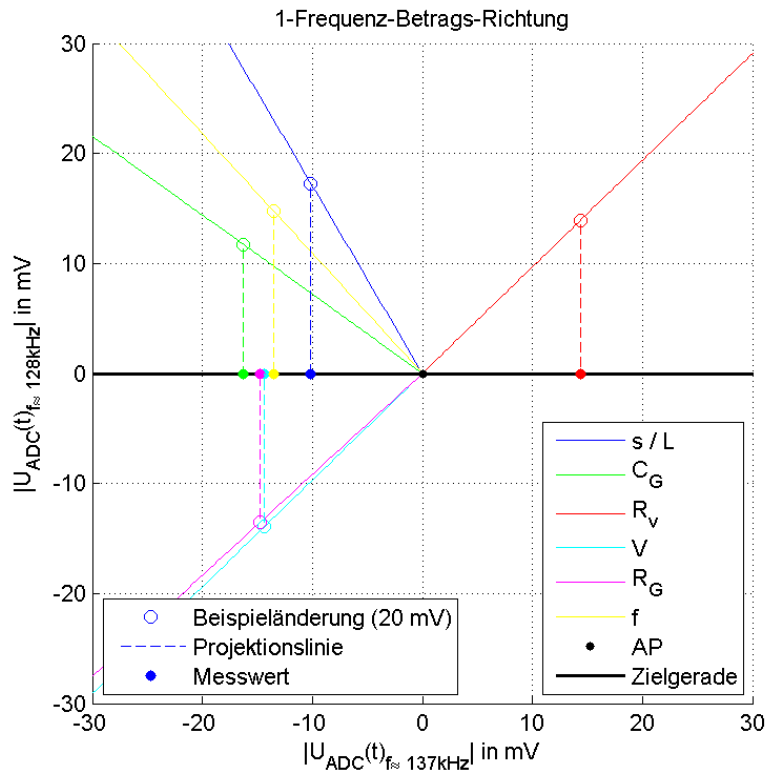
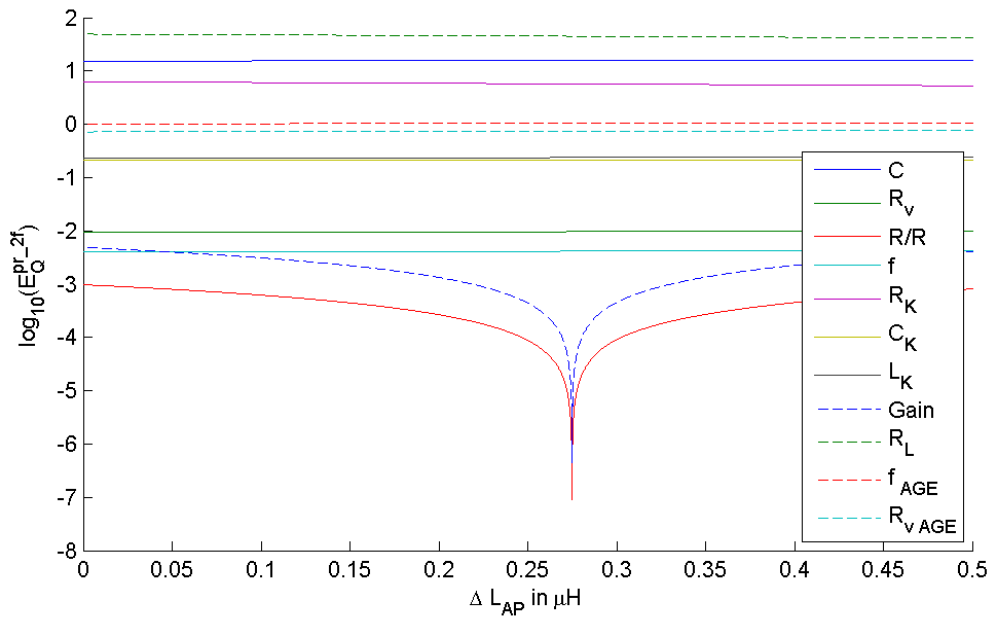
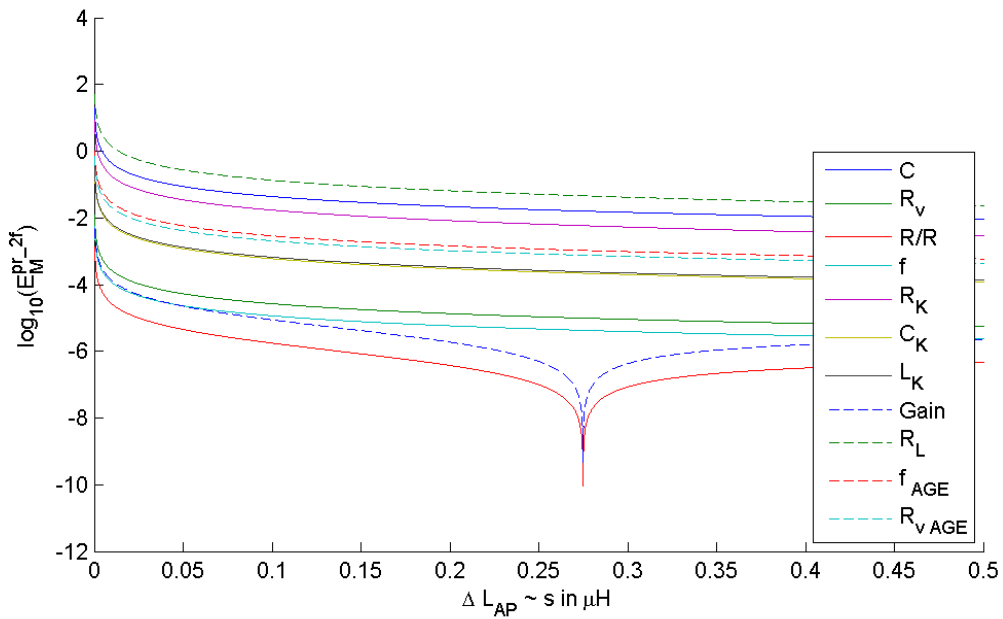


Abbildung 30: Graphische Demonstration der Projektionsmethode mit Zweifrequenzmessung Anhand des Vergleichs der Projektion in die klassische 1-Frequenz-Betrags-Richtung, sowie die δL -Richtung.

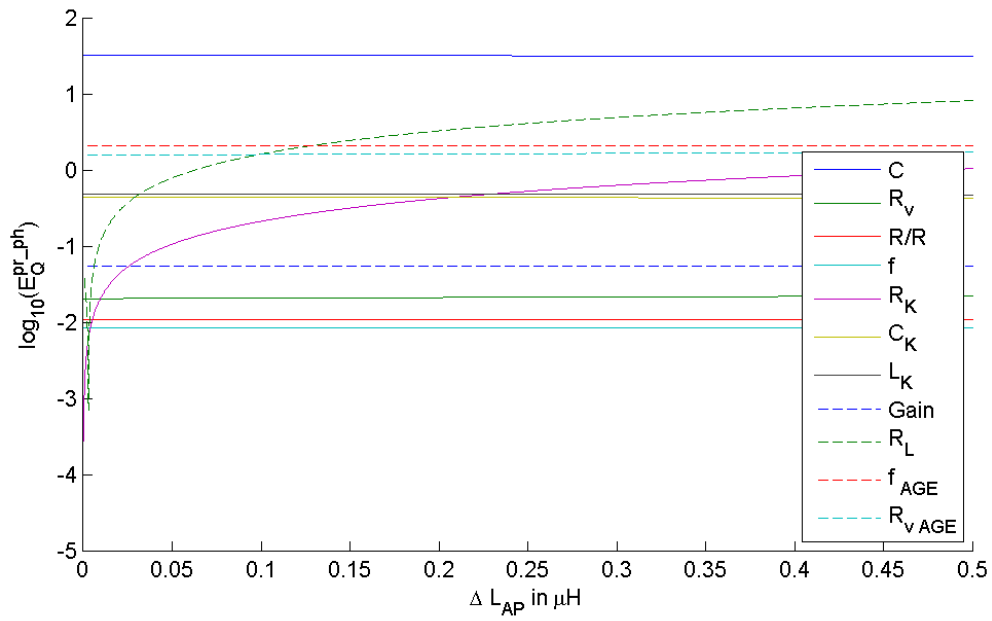


(a) bezogen auf den maximalen ADC Quantisierungsfehler q^{max}

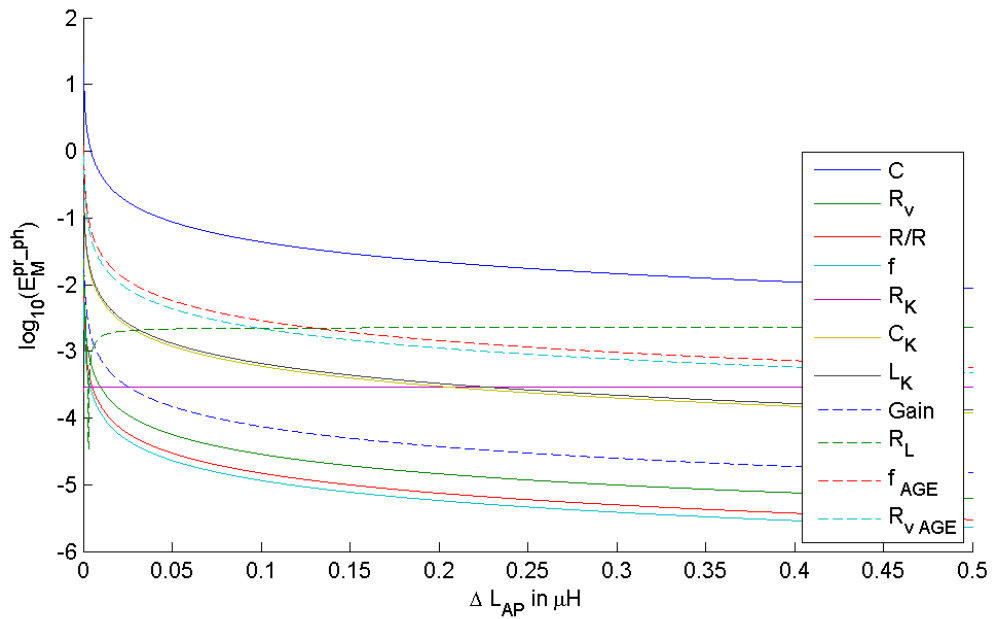


(b) bezogen auf den momentanen Messausschlag ΔU_{AP}

Abbildung 31: Darstellung der relativen Messabweichung bei Verwendung der Projektionsmethode mit **Zwei-Frequenz-Betrags-Messung** mit $f_1 = 125,9$ kHz und $f_2 = 135,6$ kHz verursacht durch die ermittelten maximal Drifts der Modellelemente bei 1°C Temperaturänderung bzw. 1 a Alterung ('AGE') als Funktion des Messwertes ΔL .



(a) bezogen auf den maximalen ADC Quantisierungsfehler q^{max}



(b) bezogen auf den momentanen Messausschlag ΔU_{AP}

Abbildung 32: Darstellung der relativen Messabweichung bei Verwendung der Projektionsmethode mit **Betrag-Phasen-Messung** mit $f_1 = 134$ kHz verursacht durch die ermittelten maximalen Drifts der Modellelemente bei 1°C Temperaturänderung bzw. 1 a Alterung ('AGE') als Funktion des Messwertes ΔL .

5 Praktische Implementierung des Projektions-Ansatzes

Zielsetzung dieses Kapitels ist die praktische Evaluierung der Validität bzw. Verwendbarkeit des in Abschnitt 4.3 beschriebenen Projektions-Ansatzes.

Dies bedeutet im Detail: Untersuchungen bezüglich der optimalen Implementierung bzw. der praktischen Einschränkungen bei Verwendung von

- klassischer 1-Frequenz-Betrags-Messung
- (1-Frequenz-)Betrags-Phasen-Messung
- 2-Frequenz-(Betrags-)Messung

sowie eine Evaluierung der Gültigkeit des in Kapitel 2 und 4.3 aufgestellten theoretischen Modells für den analogen Signalweg bzw. des damit vorhergesagten Verhaltens des digitalen Messwertes D_{out} in der zweidimensionalen Ebene⁴³.

Letzteres soll durch den Vergleich des Modellverhaltens mit der realen Antwort des digitalen Messwertes D_{out} beim gezielten Hervorrufen von Änderungen der Messgröße s bzw. der zahlreichen Störparameter bewerkstelligt werden.

5.1 Überlegungen zur Implementierbarkeit im FPGA

Im Zuge dieses Abschnitts wird unter Nutzung der Theorie zum Lock-In Verstärker aus Kapitel 3 eine Analyse bezüglich der optimalen Implementierung des Lock-In Verstärkers sowie der praktischen Beschränkungen bei der Auswahl der Messfrequenz f_0 bei Verwendung der verschiedenen Messansätze (siehe Einleitung dieses Kapitels) durchgeführt. Dazu wird im ersten Abschnitt notwendigerweise ein grober Überblick über die Hauptkomponenten des im FPGA implementierten digitalen Signalverarbeitungskonzepts des L-Vis 520 gegeben. Auf eine detaillierte Beschreibung des Programmcodes soll jedoch aufgrund der mangelnden Sinnhaftigkeit im Rahmen der Arbeit verzichtet werden.

⁴³Das heißt sowohl in der 1-Frequenz-Betrags-Phasen-Ebene als auch in der 2-Frequenz-Betrags-Ebene.

5.1.1 Grundprinzip – 1-Frequenz-Betrags-Messung

Wie in Abschnitt 1.5 erklärt wurde, wird in der aktuellen Version des L-Vis 520 die Messung des Betrags des digitalen Messwertes $|D_{out}|$ bei einer einzelnen Messfrequenz durchgeführt. Das grobe Messkonzept wurde bereits in Kapitel 1.4 beschrieben. Betrachtet man Abbildung 5, ergeben sich für den FPGA Code daher folgende Hauptbausteine:

Signalgenerator: Ausgabe der Signalsamples des Anregungssignals an den DAC.

Digitaler Lock-In Verstärker mit ADC-Konverter: Einlesen des ADC Signals und Filterung gemäß Abschnitt 3.3.

Entscheidend für die korrekte Funktionalität des FPGA Konzeptes ist die Taktsynchronität der gesamten Digitalschaltung. Dies bedeutet, dass die genannten Hauptbausteine sowie deren Hilfsbausteine mit demselben Taktsignal, das heißt von dem selben Präzisionsoszillator, versorgt werden. Dies ist für das Arbeitsprinzip des Lock-In Verstärkers unerlässlich, da, wie Matlab Simulationen im Zuge dieser Arbeit zeigten, schon Frequenzabweichungen zwischen Signalfrequenz f_0 und Lock-In Referenzfrequenz f_R in der Größenordnung von 1 Hz zu einem unbrauchbaren Messwert (sowohl hinsichtlich des Betrags als auch der Phase des Messsignals U_{ADC}) führen.

In der aktuellen Implementierung wird ein Präzisionsoszillator⁴⁴ mit einer Oszillationsfrequenz von $f_{osz} = 30$ MHz verwendet.

Das Anregungssignal wird, wie in Abschnitt 2.1 beschrieben wurde, mithilfe einer Look-Up-Table (LUT), welche zyklisch wiederholt wird, erzeugt. Dazu muss die Signalfrequenz f_0 notwendigerweise ein ganzzahliger Teiler der Signalgenerator-Taktfrequenz f_{gen} sein. Für die Realisierung der Modulation im Lock-In Baustein, das heißt die Multiplikation des abgetasteten Signals mit dem Referenzsignal (siehe Abschnitt 3.1), dessen Frequenz für eine optimale Extraktion identisch zur Signalfrequenz f_0 sein muss (d.h. $f_0 = f_R$), gilt diese Bedingung im Bezug auf die Abtastfrequenz f_A des Ausgangssignals natürlich analog.

⁴⁴siehe Tabelle 1

Gemäß der FPGA Implementierung des L-Vis 520 ergeben sich folgende Frequenz- bzw. Taktverhältnisse⁴⁵

$$f_{clk} = 18 \cdot f_{gen} = 72 \cdot f_A = 288 \cdot f_0. \quad (132)$$

Durch das ausgeklügelte Implementierungs-Konzept ist es nun möglich, allein durch das Abändern der Taktfrequenz f_{clk} , die Messsignalfrequenz f_0 , das heißt das vom Signalgenerator erzeugte Messsignal, synchron mit dem Algorithmus des Lock-In Bausteins beliebig zu verändern.

Um mit der Taktfrequenz f_{clk} nicht auf die Oszillatorfrequenz f_{osz} ⁴⁶ begrenzt zu sein, wurde im Rahmen des FPGA Konzepts eine Phasenregelschleife (kurz PLL für 'Phase-Locked-Loop') eingesetzt. Diese wird im Zuge der FPGA Bibliotheken als vorgefertigter Baustein angeboten.

Dieser Baustein ermöglicht es seine Eingangsfrequenz, das heißt im aktuellen Fall f_{osz} , über einen rationalen Faktor, auch PLL-Faktor genannt, zu verändern:

$$f_{clk} = \frac{N}{M} f_{osz}. \quad (133)$$

Abhängig von der notwendigen Komplexität des Bruches $\frac{N}{M}$ ist jedoch nicht jede beliebige Zielfrequenz, das heißt im aktuellen Fall nicht jede Taktfrequenz f_{clk} , realisierbar. Dies wird bei der automatischen Erstellung dieses Funktionsblockes durch einen internen 'Feasibility-Algorithmus' geprüft.

Zusammenfassend kann daher die Aussage getroffen werden, dass die Auflösung der praktisch wählbaren Signalfrequenzen f_0 **maßgeblich von der Realisierbarkeit des PLL Faktors abhängt**. Empirische Analysen zeigten, dass diese Realisierbarkeit sehr stark von der Größenordnung der gewählten Frequenz abhängig ist⁴⁷.

Ein weiterer wichtiger Punkt für die korrekte Funktion des Lock-In Verstärkers, der vor allem bei der Realisierung der 2-Frequenz Messung eine tragende Rolle spielt, ist neben der bereits besprochenen Taktsynchronität **die optimale Einstellung der Filterlänge** bzw. der Anzahl der für die Mittelung verwendeten Samples N .

⁴⁵Es handelt sich dabei um den zur Realisierung der ADC/DAC Kommunikationsschnittstellen minimal möglichen Taktverbrauch. Für weitere Details sei an dieser Stelle auf die Code-Dokumentation des beigelegten FPGA Programmes verwiesen.

⁴⁶und damit auf eine Signalfrequenz von $f_0 = \frac{f_{clk}}{288} = \frac{f_{osz}}{288} = \frac{30 \text{ MHz}}{288} = 104,17 \text{ kHz}$

⁴⁷Beispielsweise liegt die Auflösung bei der verwendeten Oszillatorfrequenz im Bereich 100 MHz bei etwa 1 MHz, wobei die Auflösung im 100 kHz bei etwa 10 Hz liegt.

Um eine optimale Unterdrückung der Störfrequenzen zu erreichen, muss gemäß Kapitel 3.3 für jede Störfrequenz f_{int} folgendes gelten⁴⁸:

$$f_{int} = f_R + \frac{k}{T} \quad : \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad (134)$$

Mit $T = \frac{N}{f_A}$ erhält man nach kurzer Umformung als Forderung für die Sampleanzahl

$$N \frac{f_{int} - f_R}{f_A} = k \quad : \quad k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}. \quad (135)$$

Das bedeutet, dass für optimale Unterdrückung gelten muss

$$N \frac{f_{int} - f_R}{f_A} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \forall f_{int}. \quad (136)$$

Diese Mathematische Aussage lässt sich mithilfe des Modulo-Operators zu

$$N \bmod \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| = 0 \quad \forall f_{int}. \quad (137)$$

umformen⁴⁹.

Um eine geschlossene Aussage für alle Störfrequenzen zu erhalten, kann in einem nächsten Schritt das kleinste gemeinsame Vielfache (kgV) verwendet werden. Damit ergibt sich als Gesamtforderung für die Wahl der Sampleanzahl N :

$$N \bmod \text{kgV}_{\forall f_{int}} \left\{ \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| \right\} = 0. \quad (138)$$

oder

$$N = m \text{ kgV}_{\forall f_{int}} \left\{ \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| \right\} \quad : \quad m \in \mathbb{N}. \quad (139)$$

Mithilfe dieser Formulierungen ist es nun möglich für den Fall der 1-Frequenz-Messung ein exaktes Kriterium für die Sampleanzahl N abzuleiten.

⁴⁸ $f_R = f_0$ bei 1-Frequenz-Messung.

⁴⁹Der Betrag ergibt sich aufgrund von $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ bzw. aufgrund der Symmetrie der Lock-In Übertragungsfunktion.

Für das in Kapitel 2 beschriebene Messprinzip ergeben sich folgende unbedingt zu unterdrückende Frequenzkomponenten:

1. Der Gleichanteil des Signals bei $f_{int} = 0$ Hz, dessen Unterdrückung, die im Abschnitt 2.1 an mehreren Stellen gefordert wurde, kritisch für das Ausmaß der relativen Messabweichung des Messwertes D_{out} ist.
2. Die notwendige zweite Frequenzkomponente des Sinus⁵⁰ des sinusförmigen Nutzsignals bei $f_{int} = -f_0$.
3. Die Oberwellen, welche beiden Frequenzkomponenten aufgrund der notwendigen zeitlichen Quantisierung des Anregungssignals U_{in} durch den DAC überlagert sind⁵¹.

Wir beginnen mit der Betrachtung des Effektes aus Punkt 3. Hierfür soll nun eine beliebige Frequenz $f_x = q f_A$ mit $q \in \mathbb{Q}^+$ betrachtet werden. Diese wird gemäß Gleichung 23 vom DAC zeitlich quantisiert. Es ergibt sich

$$f_{int} = f_x + k \cdot f_{DAC} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (140)$$

Berechnet man nun mithilfe der Frequenzbeziehungen in Gleichung 132

$$\frac{f_{int} - f_R}{f_A} = \frac{f_x + k \cdot f_{DAC} - f_0}{f_A} = \frac{q f_A + k \cdot 4 f_A - \frac{f_A}{4}}{f_A} = q + 4k - \frac{1}{4} \quad (141)$$

erhält man durch Gleichung 136 die Forderung

$$N q - N \frac{1}{4} + N \cdot 4k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \quad (142)$$

Wie zu erkennen ist, ist die Erfüllung dieser Forderung vom Ausdruck $N \cdot 4k$ unabhängig, da dieser für $N \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{Z}$ jederzeit ganzzahlig ist.

Dies führt zu dem Schluss, dass die durch die zeitliche Quantisierung entstehenden Oberwellen aufgrund der Wahl der Generatorfrequenz f_{gen} als Vielfaches der Abtastfrequenz f_A unabhängig von N optimal unterdrückt werden und daher vernachlässigbar sind.

Mit diesem Teilresultat kann nun die Betrachtung von Punkt 1 und 2 erfolgen:

⁵⁰Man beachte, dass diese durch die Demodulation auf die selbe Seite des Spektrums, wie das Nutzsinal verschoben wird (anti-analytisches Signal)!

⁵¹Siehe Abschnitt 2.1.1 mit Gleichung 23.

Mit Gleichung 138 und den in Gleichung 132 gezeigten Frequenzbeziehungen erhält man:

$$\text{kgV}_{\forall f_{int}} \left\{ \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| \right\} = \text{kgV} \left\{ \left| \frac{f_A}{0 - f_0} \right| ; \left| \frac{f_A}{-f_0 - f_0} \right| \right\} = \quad (143)$$

$$\text{kgV} \left\{ \left| \frac{f_A}{-\frac{1}{4} f_A} \right| ; \left| \frac{f_A}{-\frac{1}{2} f_A} \right| \right\} = \text{kgV} \{2; 4\} = 4. \quad (144)$$

womit als Bedingung für die Sampleanzahl folgt:

$$N \bmod 4 = 0. \quad (145)$$

Dies führt zu dem Gesamtergebnis, dass die Sampleanzahl bei 1-Frequenz-Messung ein ganzzahliges Vielfaches von 4 sein muss. Ist dies erfüllt erreicht man bei der aktuellen FPGA Implementierung unabhängig von der gewählten Signalfrequenz f_0 eine optimale Unterdrückung der Störfrequenzen.

5.1.2 Betrags-Phasen-Messung

Die praktische Realisierung der Phasen-Messung erwies sich hinsichtlich des FPGA Konzeptes als unkompliziert, da die im vorigen Kapitel geforderte Taktsynchronität implizit die Phasensynchronität der Hauptblöcke, das heißt der Referenzfrequenz f_R und der Signalfrequenz f_0 mit sich bringt.

Somit sind die praktischen Rahmenbedingungen für eine Phasenmessung erfüllt und die Signalphase kann unkompliziert mithilfe von Formel 64 berechnet werden.

Da, wie in Abschnitt 5.2.1 genau erklärt wird, die Berechnung von Betrag- und Phase des Signals für den Testaufbau offline mithilfe von Matlab erfolgte, war auch die Berechnung des Arcustangens kein Problem.

Für eine künftige online Berechnung innerhalb des FPGA müsste eine weitere LUT erstellt, oder aber die Berechnung innerhalb des Mikrocontrollers mithilfe einer standardmäßigen Mathematik-Bibliothek realisiert werden.

5.1.3 2-Frequenz-Messung

Für die praktische Implementierung der 2-Frequenz-Messung, mussten die Ideen des in Abschnitt 5.1.1 beschriebenen Konzepts grundlegend neu überdacht werden.

Wie in jenem Abschnitt genau beschrieben wurde, ist bei 1-Frequenz-Messung das gesamte Taktsystem so abgestimmt, dass die Messfrequenz f_0 stets in einem ganzzahligen Verhältnis zu sämtlichen anderen Takten steht. Eine solche Realisierung ist für die in Kapitel 4.3 beschriebene 2-Frequenz-Messung jedoch unmöglich, da dies zumindest eine Frequenz erfordern würde, die sehr weit von den verwendbaren hochempfindlichen Messpunkten an den Schenkeln der Resonanzkurve entfernt ist, was eine signifikante Fehlerreduktion unmöglich machen würde.

Bei 2-Frequenz Messung richtet sich das Taktsystem daher nur nach einer der gewählten Messfrequenzen, nämlich nach der größeren der beiden. Für diese größere Frequenz f_{0G} gelten nach wie vor die Beziehungen aus Abschnitt 5.1.1, das heißt $f_{0G} \equiv f_0$. Die Wahl der größeren Frequenz für die Bestimmung der restlichen Takte ist notwendig, da dadurch auch die Signalgeneratorfrequenz f_{gen} sowie die Abtastfrequenz f_A festgelegt werden, und folglich die Erfüllung des Nyquist Kriteriums für beide Messfrequenzen gesichert wird.

Für die korrekte Ausgabe und Messung der zweiten Messfrequenz f_{0K} müssen jedoch zusätzliche Überlegungen angestellt werden, die das Messsystem komplexer machen und im Vergleich zur 1-Frequenz Messung zu weiteren praktisch bedingten Einschränkungen führen.

Da jene Einschränkungen durch die im Zuge der Arbeit theoretisch abgeleiteten Beziehungen ohne Beispiel nicht greifbar sind, wird im Folgenden das Beispiel

$$f_{0G} = 137 \text{ kHz} \quad \text{und} \quad f_{0K} = 128 \text{ kHz} \quad (146)$$

betrachtet. Diese Frequenzen, entsprechen exakt jenen, die für die praktischen Messungen in Abschnitt 5.2 dieses Kapitels verwendet werden.

Um als ersten Schritt eine synchrone Erzeugung beider Frequenzen f_{0G} und f_{0K} zu ermöglichen, müssen nun vom DAC anstatt einer einzelnen Frequenz, zwei additiv superponierte Frequenzen ausgegeben werden.

Die einfachste Möglichkeit dies im FPGA zu realisieren war eine einzelne LUT mit den bereits vorberechneten Gesamtergebnissen der additiven Überlagerung der Einzelwerte

beider Frequenzen zu erstellen.

Wie schon bei der 1-Frequenz-Messung soll diese LUT, zur ununterbrochenen Ausgabe des Signals, in einer unendlichen Schleife durchlaufen werden. Dazu muss bei der 2-Frequenz-Messung jedoch beachtet werden, dass für die unverzerrte Ausgabe beider Frequenzen mit einer LUT-Schleife, ein Zeitintervall T_{LUT} gefunden werden muss, das genau ein ganzzahliges Vielfaches beider Signalperiodendauern T_{0G} und T_{0K} darstellt. Das bedeutet für die Gesamtsampleanzahl $N_{LUT} = T_{LUT} \cdot f_{gen}$ ergibt sich

$$N_{LUT} = \text{kgV} \{T_{0G} ; T_{0K}\} \cdot f_{gen} = \text{kgV} \left\{ \frac{1}{f_{0G}} ; \frac{1}{f_{0K}} \right\} \cdot f_{gen} \quad (147)$$

$$= \text{kgV} \left\{ 16 ; 16 \frac{f_{0G}}{f_{0K}} \right\} \cdot f_{gen} = 16 \cdot \text{kgV} \{1 ; c\}, \quad (148)$$

wobei c für alle weiteren Berechnungen als das Verhältnis der beiden Messfrequenzen, das heißt

$$c = \frac{f_{0G}}{f_{0K}} \quad \text{d.h.} \quad c \in \mathbb{Q}^+ \wedge c > 1 \quad (149)$$

definiert ist.

Für das Beispiel aus Gleichung 146 bedeutet das

$$N_{LUT} = 16 \cdot \text{kgV} \left\{ 1 ; \frac{137 \text{ kHz}}{128 \text{ kHz}} \right\} = 2192 \text{ Samples.} \quad (150)$$

Während die 16-stellige LUT bei 1-Frequenz-Messung (Abbildung 9) ohne Probleme 'händisch' programmiert werden konnte, wurde aufgrund der großen Komplexität der nun notwendigen LUT ein Matlab Script erstellt, welches bei Eingabe der Wunschfrequenzen f_{0G} und f_{0K} den FPGA Code automatisch generiert. Dieses Script mit dem Namen `sin_table_gen.m`, findet sich in der Beilage dieser Arbeit.

Die 2192 Werte der dabei entstehenden gesamt LUT sind in Abbildung 33 dargestellt.

Hat das generierte Signal den analogen Spannungspfad durchlaufen, müssen nun beide Messfrequenzen, als zweiter Schritt der digitalen Signalverarbeitung, mithilfe des Lock-In Verstärkers extrahiert werden. Dazu wird das vom DAC Konverter eingelesene Signal nun auf zwei separate Lock-In Funktionsblöcke aufgeteilt. Um das notwendige Prinzip der Taktsynchronität zu erfüllen, wurden diese Funktionsblöcke identisch aufgebaut und versorgt und besitzen daher dieselbe Abtastfrequenz f_A .

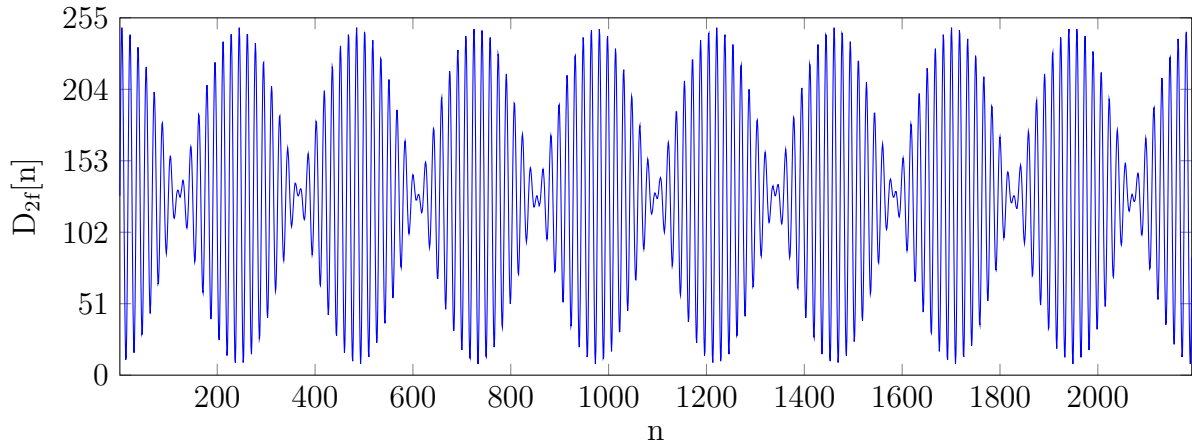


Abbildung 33: Darstellung einer Periode der vom FPGA ausgegebenen zyklischen Abfolge an Digitalcodes bei Zweifrequenzmessung D_{in} . Es ist anzumerken, dass es sich um diskrete Samples handelt, die aufgrund der großen Anzahl als durchgehende Linie dargestellt wurden.

Der einzige Unterschied dieser Blöcke besteht im Modulationsprozess des Lock-In Verstärkers. Dieser Modulationsprozess wurde im Rahmen der Arbeit so realisiert, dass für beide der ansonsten identisch aufgebauten Lock-In Bausteine eine eigene LUT verwendet wird, die, wie schon beim Signalgenerator-Block, zyklisch durchlaufen werden. Beide LUTs werden vom Matlab Script `lockin_table_gen.m`, das sich ebenfalls in der Beilage dieser Arbeit befindet, durch die Angabe von f_{0K} und f_{0G} automatisch erzeugt.

Während eine Periodendauer des Modulationssignals für f_{0G} wie in Gleichung 132 definiert ist, immer durch eine LUT mit $N_{0G} = 4$ Samples artefaktfrei abgebildet werden kann, ergibt sich für die Darstellung einer Periode von f_{0K} bei der Abtastfrequenz f_A (bzw. bei der Abtastzeit $T_A = \frac{1}{f_A}$) folgende minimal notwendige Sampleanzahl:

$$N_{0K} = \text{kgV} \{T_{0G}; T_A\} \cdot f_A = \text{kgV} \left\{ \frac{1}{f_{0G}}; \frac{1}{f_A} \right\} \cdot f_A \quad (151)$$

$$= \text{kgV} \left\{ 4 \cdot \frac{f_{0G}}{f_{0K}}; 1 \right\} = \text{kgV} \{4 \cdot c; 1\}. \quad (152)$$

Für das Beispiel aus Gleichung 146 bedeutet das

$$N_{0G} = \text{kgV} \left\{ 4 \cdot \frac{137 \text{ kHz}}{128 \text{ kHz}}; 1 \right\} = 137 \text{ Samples}. \quad (153)$$

Die LUTs der beiden abgetasteten Modulationssignale für dieses Beispiel sind in Abbil-

Abbildung 34 graphisch veranschaulicht⁵².

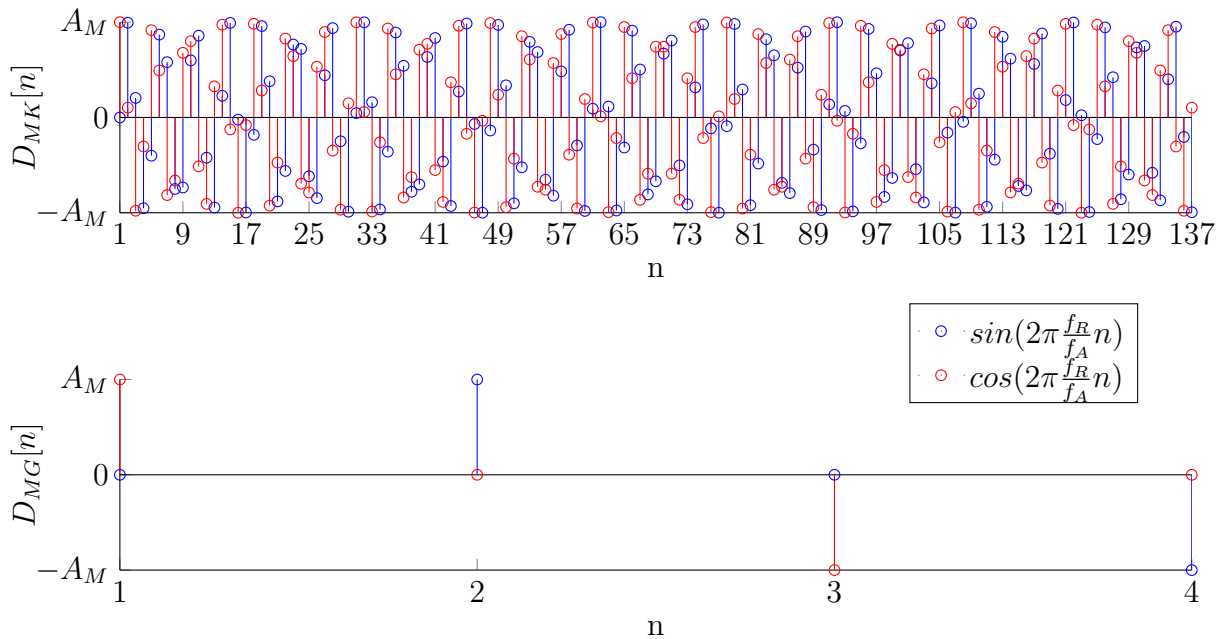


Abbildung 34: Darstellung einer Periode der Lock-In Modulations-LUT $D_{MG}[n]$ und $D_{MK}[n]$ für die Messfrequenzen f_{0G} bzw. f_{0K} .

Wie nun am Beispiel von Formel 150 und Formel 153 klar ersichtlich ist, kann ein kompliziertes Frequenzverhältnis c zu einer sehr großen minimal notwendigen LUT-Länge führen. Daher wird die erreichbare Auflösung bei 2-Frequenz-Messung zusätzlich durch die maximale Anzahl an Logikschaltungen im FPGA Code beschränkt.

Die letzte Überlegung, welche zur korrekten Implementierung der 2-Frequenz-Messung notwendig ist, ist die optimale Einstellung der Filterlänge N des Lock-In Mittelwertfilters.

Die dazu bereits im Zuge von Abschnitt 5.1.1 abgeleiteten allgemeinen Beziehungen 136 bis 138 behalten dabei ihre Gültigkeit.

Der entscheidende Unterschied bei 2-Frequenz-Messung ist jedoch, dass zusätzlich zu den bereits in Abschnitt 5.1.1 definierten, unbedingt zu unterdrückenden Frequenzen,

⁵²Es sei angemerkt, dass die Höhe der Amplitude ein empirisch ermittelter Wert ist, der so groß gewählt wurde, dass Quantisierungsfehler des Modulationssignal die Messung nicht beeinflusst, aber auch so klein, dass die Messwerte die möglichen 53 Bit der Floating-Point-Arithmetik von Matlab nicht übersteigen kann.

die positive und negative Frequenzkomponente, der jeweils anderen der zwei Messsignale, als zusätzliche Störfrequenz auftritt.

Da auch Gleichung 142 immer noch gültig ist, werden die durch die zeitliche DAC Quantisierung erzeugten Oberwellen nach wie vor für jedes $N \in \mathbb{N}$ optimal unterdrückt und können ignoriert werden.

Damit ergeben sich für die Messung von f_{0G} folgende zu unterdrückende Störfrequenzen

$$f_{intG} = \{0; -f_{0G}; f_{0K}; -f_{0K}\} \quad (154)$$

Setzt man diese in Gleichung 138 ein erhält man

$$\text{kgV}_{\forall f_{int}} \left\{ \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| \right\} = \quad (155)$$

$$\text{kgV} \left\{ \left| \frac{f_A}{0 - f_{0G}} \right|; \left| \frac{f_A}{-f_{0G} - f_{0G}} \right|; \left| \frac{f_A}{f_{0K} - f_{0G}} \right|; \left| \frac{f_A}{-f_{0K} - f_{0G}} \right| \right\} = \quad (156)$$

$$\text{kgV} \left\{ \left| \frac{1}{-\frac{1}{4}} \right|; \left| \frac{1}{-\frac{2}{4}} \right|; \left| \frac{1}{\frac{1}{4c} - \frac{1}{4}} \right|; \left| \frac{1}{-\frac{1}{4c} - \frac{1}{4}} \right| \right\} = \quad (157)$$

$$\text{kgV} \left\{ 4; 2; \frac{4}{1 - c^{-1}}; \frac{4}{1 + c^{-1}} \right\} = 4 \cdot \text{kgV} \left\{ 1; \frac{1}{1 - c^{-1}}; \frac{1}{1 + c^{-1}} \right\}. \quad (158)$$

Für die Messung von f_{0K} ergeben sich die Störfrequenzen

$$f_{intG} = \{0; -f_{0K}; f_{0G}; -f_{0G}\} \quad (159)$$

Mit Gleichung 138 erhält man

$$\text{kgV}_{\forall f_{int}} \left\{ \left| \frac{f_A}{f_{int} - f_R} \right| \right\} = \quad (160)$$

$$\text{kgV} \left\{ \left| \frac{f_A}{0 - f_{0K}} \right|; \left| \frac{f_A}{-f_{0K} - f_{0K}} \right|; \left| \frac{f_A}{f_{0G} - f_{0K}} \right|; \left| \frac{f_A}{-f_{0G} - f_{0K}} \right| \right\} = \quad (161)$$

$$\text{kgV} \left\{ \left| \frac{1}{-\frac{1}{4c}} \right|; \left| \frac{1}{-\frac{2}{4c}} \right|; \left| \frac{1}{\frac{1}{4} - \frac{1}{4c}} \right|; \left| \frac{1}{-\frac{1}{4} - \frac{1}{4c}} \right| \right\} = \quad (162)$$

$$\text{kgV} \left\{ 4c; 2c; \frac{4}{1 - c^{-1}}; \frac{4}{1 + c^{-1}} \right\} = 4 \cdot \text{kgV} \left\{ c; \frac{1}{1 - c^{-1}}; \frac{1}{1 + c^{-1}} \right\}. \quad (163)$$

Um die Messungen beider Lock-In Verstärker zu synchronisieren, soll ein N gefunden

werden, dass alle Bedingungen erfüllt. Es ergibt sich daher durch das kgV aus Gleichungen 158 und 163 die Gesamtbedingung

$$N \bmod \left(4 \cdot \text{kgV} \left\{ 1 ; c ; \frac{1}{1 - c^{-1}} ; \frac{1}{1 + c^{-1}} \right\} \right) = 0 \quad (164)$$

um eine optimale Unterdrückung aller Störfrequenzen bei 2-Frequenz-Messung zu erreichen.

Für das praktische Beispiel aus Gleichung 146 folgt daraus

$$4 \cdot \text{kgV} \left\{ 1 ; c ; \frac{1}{1 - c^{-1}} ; \frac{1}{1 + c^{-1}} \right\} = 4 \cdot \text{kgV} \left\{ 1 ; \frac{137}{128} ; \frac{1}{1 - \frac{128}{137}} ; \frac{1}{1 + \frac{128}{137}} \right\} \quad (165)$$

$$= 4 \cdot \text{kgV} \left\{ 1 ; \frac{137}{128} ; \frac{137}{9} ; \frac{137}{256} \right\} = 4 \cdot 137 = 548. \quad (166)$$

mit der Bedingung

$$N \bmod 548 = 0. \quad (167)$$

Dies zeigt, dass, bei 2-Frequenzmessung, ein kompliziertes Frequenzverhältnis c die zur perfekten Unterdrückung minimal notwendige Mittelungsdauer entscheidend beeinflussen kann. Dazu ist jedoch anzumerken, dass gemäß Gleichung 87 bei einer sehr langen Messdauer, d.h. bei einer sehr großen Sampleanzahl, die optimale Filterung unnötig werden kann, da, abhängig vom Abstand der Störfrequenzen zur Messfrequenz, auch die Dämpfung der Keulenmaxima bereits so stark werden kann, dass diese an sich schon ausreichend ist.

Unabhängig davon kann zusammenfassend gesagt werden, dass die praktisch mögliche Frequenzauflösung bei 2-Frequenz-Messung nicht nur durch den PLL-Faktor (siehe Abschnitt 5.1.1) sondern auch die Komplexität des Frequenzverhältnisses c , die sich wiederum auf die Länge der notwendigen LUTs, sowie auf die notwendige Mittelungsdauer auswirkt, entscheidend beeinflusst werden kann.

5.2 Evaluierung des Modellverhaltens

Wie in der Einführung dieses Kapitels beschrieben, sollte die Validität des in Kapitel 2 und 4.3 aufgestellten theoretischen Modells zur Beschreibung des Ausgangssignals in der zweidimensionalen Ebene im Zuge dieses Abschnitts praktisch evaluiert werden.

Dazu wurden mithilfe des im folgenden Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Messaufbaus gezielt Änderungen der Messgröße s bzw. der Störparameter herbeigeführt.

In Abschnitt 5.2.2 wird anschließend ein Vergleich des für die jeweiligen Parameter vorhergesagten Modellverhaltens mit der realen Antwort des digitalen Messwertes D_{out} durchgeführt.

5.2.1 Messaufbau

Im Rahmen des praktischen Teils dieser Arbeit, wurde der in Abbildung 36 schematisch dargestellte Messaufbau erstellt. Dieser besteht aus der in Abbildung 37 gezeigten Hauptplatte, die über die in Abbildung 38 gezeigte Versorgungsplatte gespeist wird.

Zentrales Element der Hauptplatte stellt die Hauptplatine dar. Um die digitale Messung zu ermöglichen, ist diese mit einem standard FPGA des Typs Altera Cyclone III (Altera Corporation, San José, USA) sowie der in Abschnitt 2.1 analysierten Analogelektronik ausgestattet. Für Auswertung und Darstellung der Messdaten ist außerdem der Mikrocontroller STM32F4 (STMicroelectronics, Genf, Schweiz) integriert.

Die 24V-Spannungsversorgung der Hauptplatine wurde durch ein Hutschienen-Netzteil gewährleistet, das aufgrund seiner großen Wärmeproduktion auf der separaten Versorgungsplatte positioniert wurde.

Wie im Abschnitt 5.1.2 erwähnt ist, wurde die FPGA Schaltung für die Messungen dieser Arbeit so angepasst, dass nur die Real- und Imaginärteile der beiden Messfrequenzen im FPGA ermittelt werden. Die bereits bestehende SPI Verbindung zwischen FPGA und Mikrocontroller wurde dabei als Kanal für den Abtransport dieser Daten genutzt. Nach dem Empfang im Mikrocontroller wurden diese dann in ASCII Code konvertiert und über den ebenfalls bereits bestehenden DEBUG-UART Ausgang, der einen RS-232 Bus realisiert, an den PC übertragen. Beim PC wurden die Treiber der 'Instrument Control Toolbox' von Matlab zum Empfang und Import der Daten genutzt. Die Auswertung, das heißt die Konvertierung der ASCII Daten und die Berechnung von Betrag und Phase,

sowie eine Online-Anzeige und Speicherung der Messdaten erfolgten dann aus Gründen der Einfachheit in Matlab.

Das verwendete Matlab Online-Script `record_data_rs232.m`, die verwendete FPGA Software für 1-Frequenz- sowie 2-Frequenz-Messung `vhd1_code.zip` und das Datensleusen Programm des Mikrocontrollers `stm42f_datagate.zip` befinden sich in der Beilage dieser Arbeit.

Dazu ist anzumerken, dass der Lock-In Verstärker zwingend innerhalb des FPGAs implementiert werden musste, da eine Übertragung der nicht-gemittelten und daher hochfrequenten Rohdaten aus Timing-Gründen über die RS232-Verbindung nicht möglich gewesen wäre.

Zur Berechnung des Betrages der tatsächlichen analogen Messspannung $|U_{ADC}|$ ist außerdem anzumerken, dass hier eine Konvertierung notwendig war, die sämtliche digitale Faktoren berücksichtigt. Die Gesamtbeziehung zwischen dem nach Formel 62 in Matlab erhaltenen Betragswert $|W|$ und $|U_{ADC}|$ ergibt sich zu

$$|U_{ADC}| = |W| \cdot \frac{U_{LSB} B_{shift}}{A_M N^{\frac{1}{2}}}. \quad (168)$$

Dabei stellt U_{LSB} die Least-Significant-Bit-Spannung nach Formel 42, N die Länge des Lock-In Mittelwertfilters, wie in Abschnitt 5.1 und $\frac{1}{2}$ die Halbierung der Ursprungsamplitude aufgrund der gefilterten Frequenzkomponente des Sinussignals bei $2 \cdot f_0$ dar.

Noch nicht definiert sind die Modulationsamplitude A_M (siehe Abschnitt 5.1.3, Anmerkung 52), die bei 2-Frequenz-Messung mit

$$A_M = 20^{18} - 8 \quad (169)$$

gewählt wurde sowie der Bitshiftfaktor $B_{shift} = 2^{30}$, der den Bitshift miteinbezieht, welcher zur Reduktion des großen Mittelungsergebnisses auf eine mit der bestehenden SPI Verbindung übertragbare Zahl $Z < 2^{64}$ verwendet wurde. Für genaueres dazu sei an dieser Stelle auf die Codedokumentation verwiesen.

Da die Phase, gemäß Formel 64 eine Verhältnisgröße darstellt, ist keine nachträgliche Anpassung notwendig.

Um die Korrektheit des in Abschnitt 2.1 aufgestellten Modells und damit die prinzipielle Möglichkeit der Durchführung des Projektionsansatzes zu validieren, wurden sowohl die

Auswirkungen des Messsignals als auch jene der parasitären Effekte überprüft.

Zur experimentellen Simulation einer Änderung des Messsignals, das heißt des Messfahnen Abstandes s (siehe Einführungsabschnitt 1.2), wurde auf der Hauptplatte ein Wirbelstromsensor, der exakt jenem des L-Vis 520 entspricht, mit einem Abstand von etwas unter 1 mm vor einem Piezoaktor positioniert und mittels des original Koaxialkabels des L-Vis 520 mit der Hauptplatine verbunden. Der verwendete Piezoaktor P-620.1CD der Firma PI (Physik Instrumente GmbH, Karlsruhe, Deutschland) ist ein horizontaler, einachsiger, Präzisionspositionierer, der unter Nutzung des Piezoeffektes über einen Bereich von 50 μm Bewegungen mit einer Wiederholgenauigkeit von 1 nm ausführen kann. Im Zuge der Tests wurde eine Auslenkung von 40 μm durchgeführt. Die Ansteuerung dieses Piezoaktors erfolgte dabei über einen geeigneten Piezo-Controller des Typs E-625 CR, der ebenfalls aus dem Hause PI kommt. Dieser Controller wird über einen RS-232 Bus mit einer proprietäre Treibersoftware der Firma PI angesteuert und wurde aufgrund seiner großen Wärmeproduktion auf der Versorgungsplatte positioniert.

Um eine Simulation der parasitären Effekte (siehe dazu Abschnitt 2.1) im Zuge der Messungen zu ermöglichen, wurden verschiedene Methoden angewandt. Es wurde dabei durch Vorsimulation darauf geachtet, dass die resultierenden Abweichungen in etwa in der selben Größenordnung liegen, um eine schöne Darstellung der Messergebnisse zu ermöglichen.

Zur Veränderung der Parallelkapazität C und des Vorwiderstands R_v wurde ein Schalterboard aus Kipp-Schaltern gebaut, welche in der 'ON' Position Störelemente in den Schwingkreis einbringen. Die entsprechende Messschaltung ist in Abbildung 35 dargestellt.

Die Parallelkapazität C wurde über einen der Kipp-Schalter parallel mit einem Zusatzkondensator mit einer Kapazität von $C_Z = 2,2 \text{ pF}$ verbunden. Da sich Kapazitäten bei Parallelschaltung addieren, ergibt das eine Kapazitätsänderung von

$$\Delta C = 2,2 \text{ pF}. \quad (170)$$

Der Vorwiderstand R_v des komplexen Spannungsteilers wurde über einen weiteren Kipp-Schalter parallel mit einem Zusatzwiderstand von $R_Z = 1 \text{ M}\Omega$ verbunden. Dies ergibt

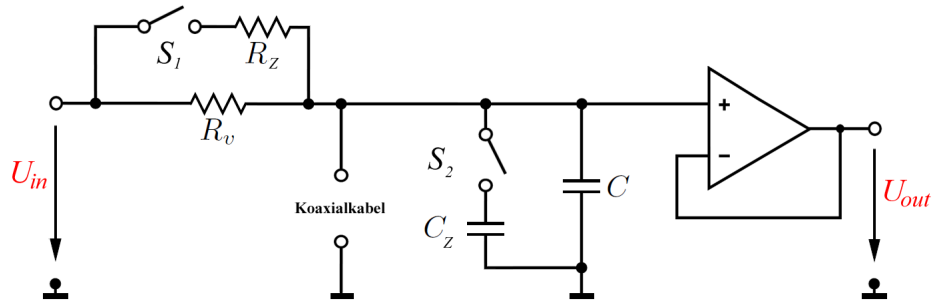


Abbildung 35: Messschaltung im Sensorbereich des analogen Signalpfades (vergleiche Abbildung 10).

eine Änderung des Vorwiderstandes von

$$\Delta R_v = \frac{R_v \cdot R_Z}{R_v + R_Z} - R_v = \frac{3010 \Omega \cdot 1 \text{ M}\Omega}{3010 \Omega + 1 \text{ M}\Omega} - 3010 \Omega \approx -9 \Omega. \quad (171)$$

Für die Simulation der Änderung des Spulenwiderstandes R_L wurde dessen starke Temperaturabhängigkeit ausgenutzt. Durch Erhitzung mittels eines Föhns wurde eine Temperaturerhöhung um etwa 10°C hervorgerufen, die zu einem Anstieg des Widerstandswertes gemäß Formel 45 führt⁵³.

Um einen Drift des Verstärkungsfaktors V (siehe Abschnitt 4.3) zu simulieren, wurde im FPGA-Code des Signalgenerators eine zweite LUT erstellt, deren Wechselspannungsamplitude im Vergleich zum originalen Digitalwert D_{in}^{AC} aus Abbildung 33 um einen Faktor von $F = \frac{255}{256}$ verkleinert ist. Dies ergibt eine Abweichung von

$$\Delta D_{in}^{AC} = D_{in}^{AC} \cdot F - D_{in}^{AC} = \frac{255}{256} \cdot 120 - 120 \approx -0,47. \quad (172)$$

Über den RESET-Button des Mikrocontrollers kann ohne Hardwareänderungen ein Signal zum FPGA gesendet werden. Dieses wurde als Trigger für das Umschalten zwischen den beiden LUTs genutzt.

⁵³Auch für eine Änderung des Spulenwiderstands R_L wurde, um definiertes Verhalten zu erreichen, der Parallelschaltungsansatz mit Kipp-Schalter getestet. Da aufgrund des sehr kleinen Grundwiderstandes aber nur eine minimale Widerstandsänderung im $\text{m}\Omega$ für eine bereits signifikante Änderung des Ausgangssignals notwendig ist, wurde dieser Aufbau durch die Eigenkapazität des Kipp-Schalters stark beeinflusst und zeigte kapazitives Verhalten in der komplexen Ebene.

Um die Messsignalauslenkungen aller Änderungen möglichst gut darstellen zu können, wurde für das im Rahmen dieser Arbeit erstellte FPGA-Programm versucht, die Messfrequenzen in der Nähe der hochempfindlichen Messpunkte gemäß Abschnitt 4.3 zu wählen. Um die Komplexität der Zahlen gering zu halten, wurden ganzzahlige kHz Frequenzen verwendet, das heißt

$$f_{0G} = 137 \text{ kHz} \quad \text{und} \quad f_{0K} = 128 \text{ kHz} \quad (173)$$

Diese Frequenzen entsprechen exakt jenen, die auch als Beispiel im Zuge von Abschnitt 5.1 verwendet wurden.

Die bei diesem Frequenzverhältnis entstehenden LUTs für Signalgenerator und Lock-In Modulation wurden daher bereits in Abschnitt 5.1.3 analysiert und in Abbildung 33 und 34 veranschaulicht.

Wie in Abschnitt 5.1.1 erklärt wurde, sind die tatsächlich auswählbaren Messfrequenzen durch die notwendige Komplexität des rationalen PLL-Faktors nach Gleichung 133 beschränkt. Gemäß Beziehung 132 ergibt das bei 2-Frequenz-Messung, bei der sich das Taktsystem, wie in Abschnitt 5.1.3 erläutert wurde, nach der größeren Messfrequenz $f_{0G} = 137 \text{ kHz}$ richtet:

$$f_{CLK}^{soll} = 137 \text{ kHz} \cdot 288 = 39456 \text{ kHz}. \quad (174)$$

Der interne Machbarkeits-Algorithmus des PLL-Blocks (siehe Abschnitt 5.1.1) liefert nach Gleichung 133 ein Verhältnis von

$$\frac{N}{M} = \frac{46}{35}. \quad (175)$$

Damit ergibt sich

$$f_{CLK}^{ist} = \frac{N}{M} f_{osz} = \frac{46}{35} 30 \text{ MHz} \approx 39428,57 \text{ kHz}. \quad (176)$$

und

$$f_{0G}^{ist} = \frac{f_{CLK}^{ist}}{288} \approx 136,904 \text{ kHz} \quad \text{und} \quad \frac{f_{CLK}^{ist}}{288} \cdot \frac{128}{137} \approx 127,911 \text{ kHz}. \quad (177)$$

Zur praktisch verwendeten Filterlänge N ist anzumerken, dass diese so gewählt wurde, dass eine ausreichende Rauschunterdrückung, gemäß der Abschätzung aus Gleichung 11

erreicht wurde. Es ergibt sich ein Minimalwert von

$$N_{min} = \sqrt{\frac{(10 \text{ mV})^2}{(7 \text{ } \mu\text{V})^2}} \approx 2 \cdot 10^6 \text{ Samples.} \quad (178)$$

Um die Forderung aus Gleichung 167 zu erfüllen, berechnet man

$$N = \left\lceil \frac{N_{min}}{N_{mod}} \right\rceil \cdot N_{mod} = \left\lceil \frac{2 \cdot 10^6}{548} \right\rceil \cdot 548 = 2000200 \text{ Samples.} \quad (179)$$

und erhält damit eine Sampleanzahl N , bei der sowohl eine ausreichende Rauschunterdrückung, als auch eine optimale Auslöschung aller vorkommenden Störfrequenzen gewährleistet werden kann.

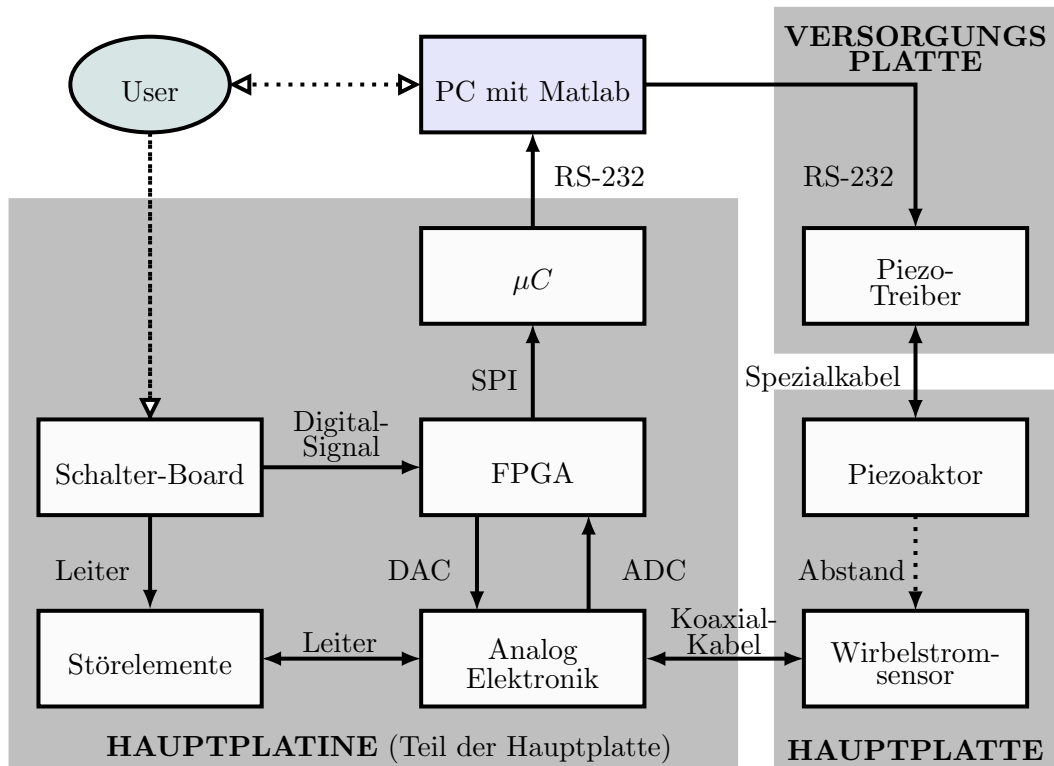


Abbildung 36: Schematische Darstellung des zur Validierung des Projektionsansatzes verwendeten Messaufbaus

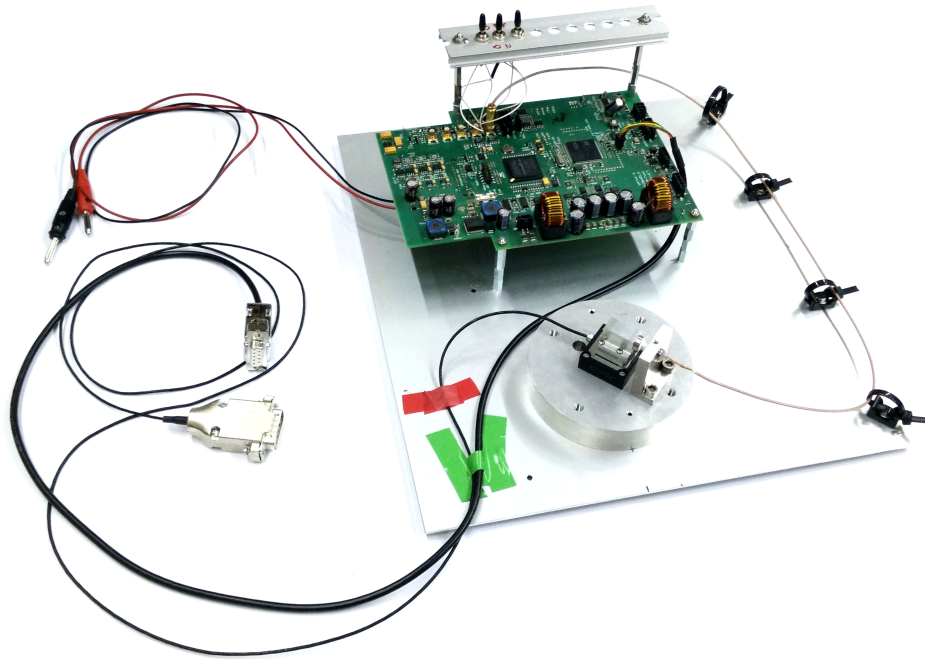


Abbildung 37: Hauptplatte des Messaufbaus mit Hauptplatine (Analoger Signalpfad, FPGA, Microcontroller), Wirbelstromsensor mit Piezoverschiebetisch und Schalter zur Parameterbeeinflussung.

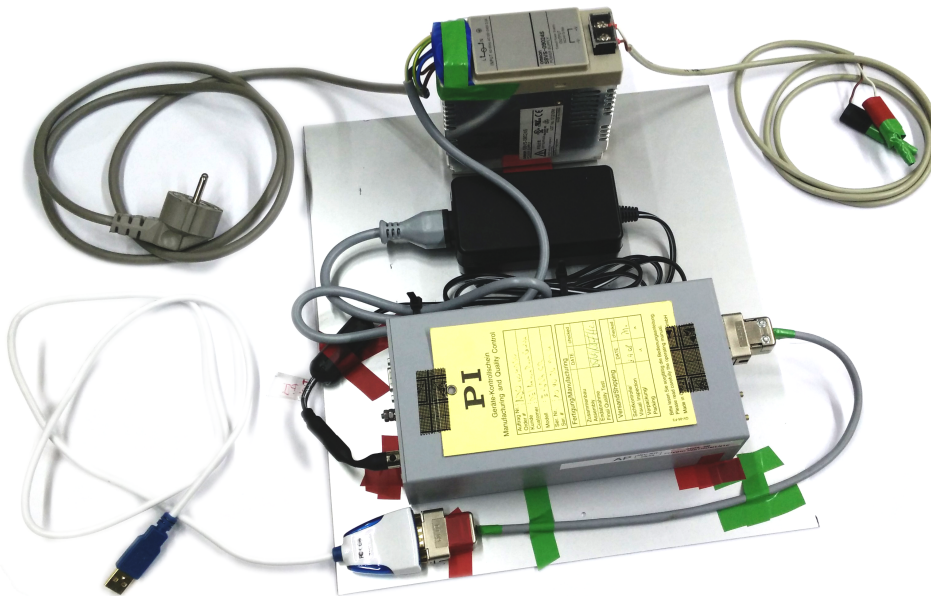


Abbildung 38: Versorgungsplatte mit 24V Hutschienen-Netzteil zur Versorgung der Hauptplatine und Steuerung/Treiber für den Piezoverschiebetisch.

5.2.2 Resultate

Unter Verwendung des im vorherigen Abschnitt 5.2.1 beschriebenen Messaufbaus wurden im Rahmen der praktischen Experimente dieser Arbeit Änderungen des Messfahnenabstandes s sowie der 4, in Abschnitt 5.2.1 beschriebenen, parasitären Elemente herbeigeführt.

Für jede dieser 5 Parameter-Änderungen wurde der zeitliche Verlauf des digitalen Messwertes D_{out} über eine Dauer etwa zwei Minuten aufgenommen. Während dieser zwei Minuten wurde mit kurzen Pausen eine sprunghafte Auslenkung mit anschließender Rückführung des Parameters verursacht.

Die Resultate dieses Experiments finden sich in Abbildung 39. Diese Abbildung beinhaltet 3 Plots, in denen die zeitlichen Verläufe

1. vom Betrag des Messsignals $|U_{ADC}|$ bei der Messfrequenz f_{0G}
2. von der Phase des Messsignals $arg\{U_{ADC}\}$ bei der Messfrequenz f_{0G}
3. vom Betrag des Messsignals $|U_{ADC}|$ bei der Messfrequenz f_{0K}

aller 5 Parameter überlagert dargestellt sind⁵⁴.

Es sei angemerkt, dass Betrag und Phase von U_{ADC} , wie in Abschnitt 5.2.1 erklärt ist, aus Betrag und Phase des digitalen Messwertes D_{out} ermittelt wurden.

Anschließend wurden diese Kurvenverläufe in Abbildung 40, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben⁵⁵, in der zweidimensionalen Ebene visualisiert und mit den, mithilfe vom Gesamtmodell in Gleichung 47 simulierten Änderungen, überlagert.

Um, wie in der Einführung dieses Kapitels beschrieben wurde, beide 2D-Methoden, das heißt 2-Frequenz-Messung sowie Betrag-Phasen-Messung, beurteilen zu können, wurde sowohl eine Darstellung in der 2-Frequenz-Betrags-Ebene als auch eine Darstellung in der 1-Frequenz-Betrag-Phasen-Ebene gegeben.

Beide Diagramme wurden mithilfe des Scripts `plot_records.m` erstellt, das in der Beilage dieser Arbeit zu finden ist.

Zur Größe der simulierten Parameteränderungen ist anzumerken, dass diese

⁵⁴Die Frequenzwerte sind in Gleichung 173 angeführt.

⁵⁵Man vergleiche Abbildung 29.

- für die Parameter C , R_v und D , wie in Abschnitt 1.2 berechnet, gewählt wurden.
- für die Parameter R_L und s , bei denen eine theoretische Berechnung nicht möglich war, rückwirkend auf den tatsächlichen Messausschlag angepasst wurden.

Wie bei der Analyse der Abbildungen zu erkennen ist, stimmen die Simulationsresultate in Richtung und Amplitude grundsätzlich mit den praktischen Messungen überein.

Auffällig sind jedoch folgende Punkte:

Die massive Abweichung der theoretischen Induktivitätsauslenkung L von der durch die Messfahnenänderung erzeugten Auslenkung. Dies ist, wie in Abschnitt 1.2 erwähnt wurde, dadurch zu erklären, dass die Annahme, dass die Änderung des Realteils der Spulenimpedanz R_L ⁵⁶ beim verwendeten Messfahnenmaterial um Größenordnungen geringer ist, als die Änderung der Spuleninduktivität L ⁵⁷, falsch ist. Wie die Messdaten zeigen, liegen diese Effekte in der Realität in derselben Größenordnung. Diese interessante Erkenntnis führt zwangsläufig zu einer leichten Diskrepanz zwischen den im Zuge dieser Arbeit berechneten Messabweichungen in Abschnitt 2.3 und 4.3 mit der Realität, stellt jedoch für eine praktische Anwendung der Projektionsmethode kein Hindernis dar!

Die Abweichung der Amplitude der Kapazitätsauslenkung zum theoretischen Wert. Diese kann jedoch durch die kleine parasitäre Schalterkapazität begründet werden, welche in Serie zur Zusatzkapazität C_Z liegt und deren Wert dadurch verkleinert.

Die leichte Abweichung der Auslenkung von R_L . Diese war jedoch ebenfalls zu erwarten, da die zur Auslenkung herbeigeführte Temperaturänderung sich zwar hauptsächlich auf den Spulenwiderstand auswirkt, aber aufgrund der Wärmedehnung des Materials auch den Imaginärteil der Spulenimpedanz beeinflussen kann.

Auffällig ist außerdem die exponentielle Abnahme der Auslenkung von R_L . Auch diese ist auf die Effekte der Temperaturänderung zurückzuführen. Die Spule wird spontan erhitzt und gibt die aufgenommene Wärmeenergie dann kontinuierlich über Wärmediffusion ab, die mathematisch durch eine gewöhnliche Differentialgleichung mit exponentiellem Lösungsansatz dargestellt werden kann.

⁵⁶Das heißt die Auswirkung der Joule'schen Wärmeverluste.

⁵⁷Das heißt die Auswirkung der Wirbelstrom-induzierten Gegenmagnetfelder bzw. der Änderung der wirksamen Permeabilität.

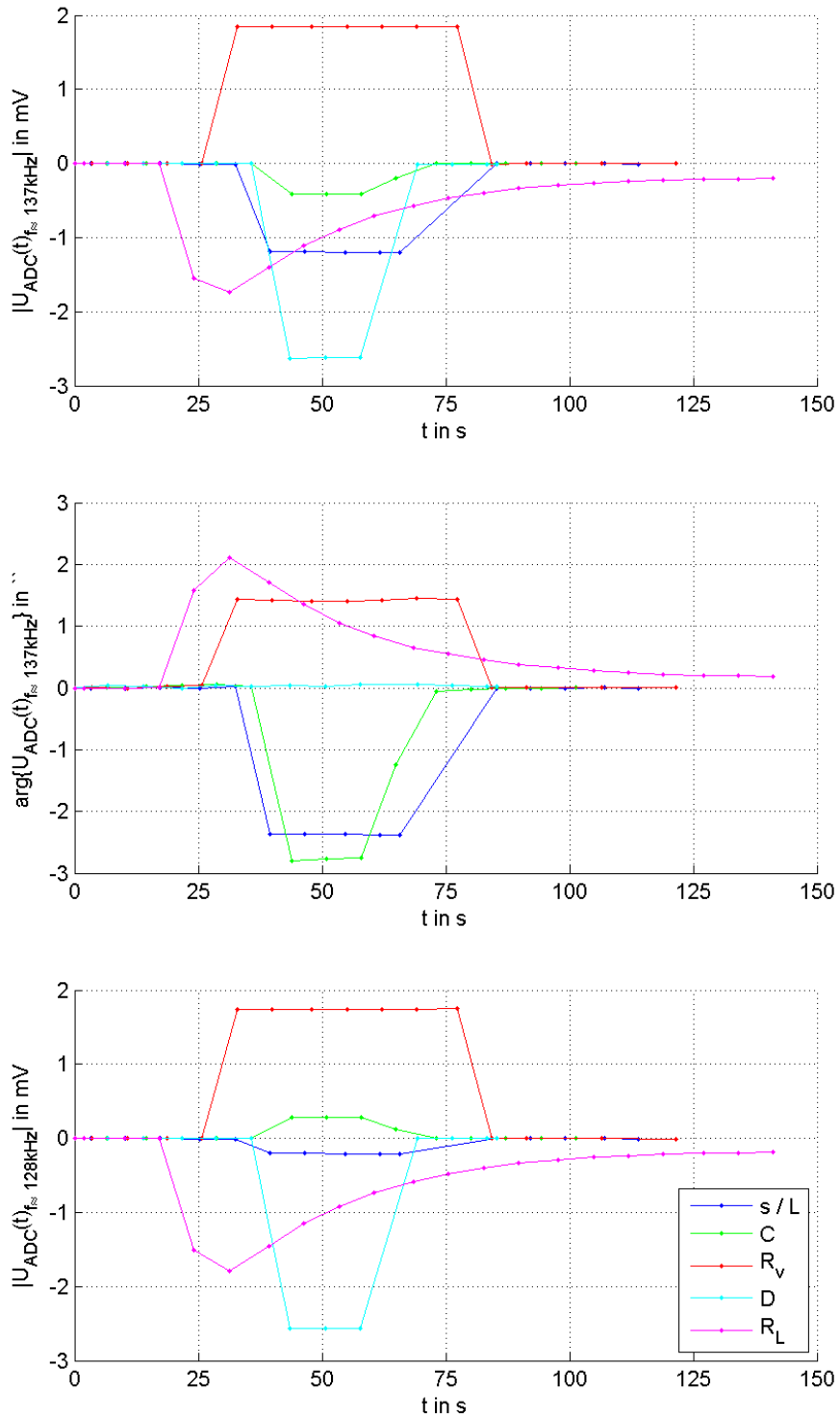


Abbildung 39: Mithilfe des Versuchsaufbaus ermittelte reale Änderungen von Amplitude und Phase der ADC Messspannung U_{ADC} als Funktion der Messzeit t bei $f_1 = 137$ kHz bzw. $f_2 = 128$ kHz.

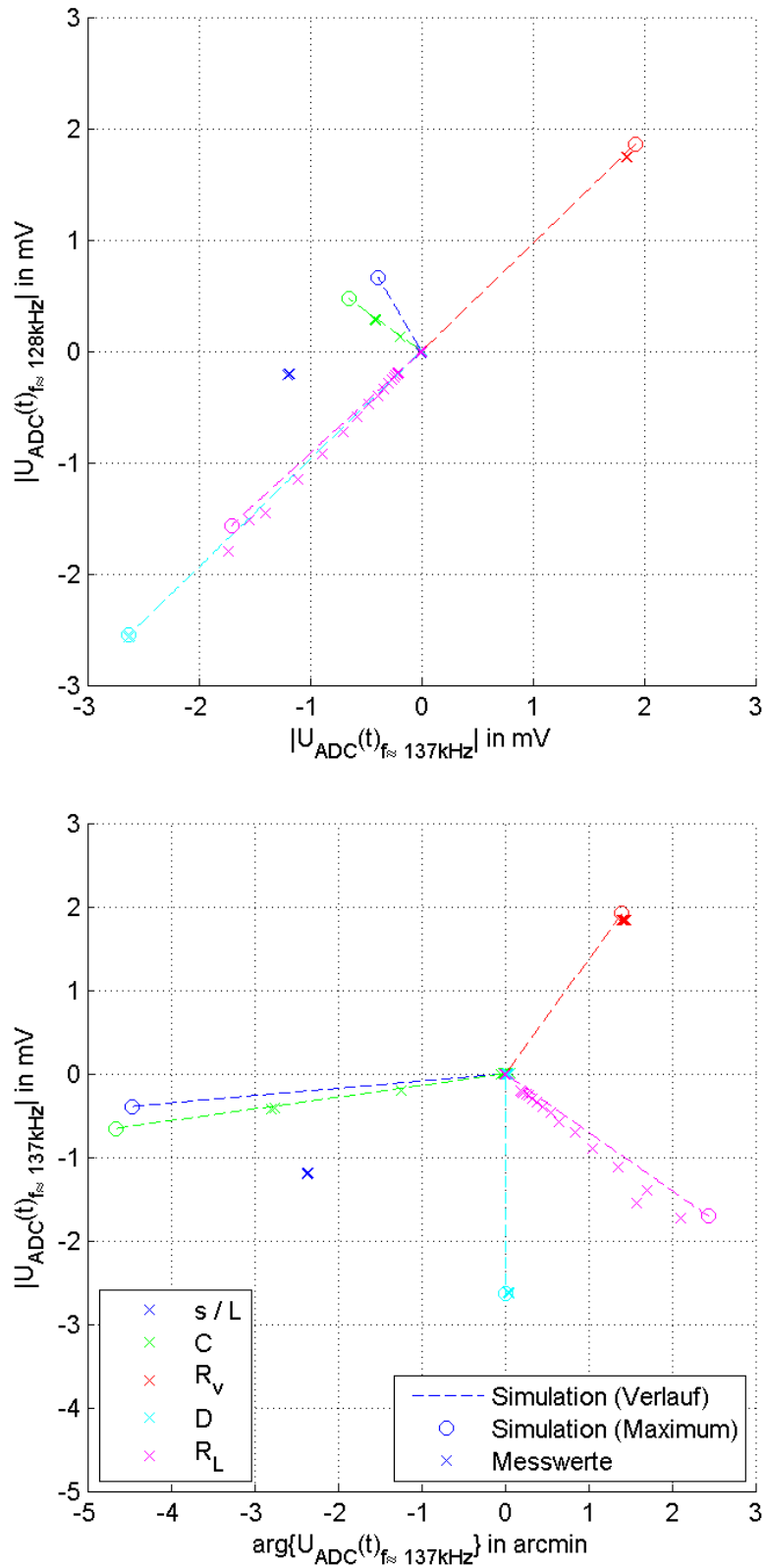


Abbildung 40: Superposition der durch Simulation bestimmten Modellkurven mit den mithilfe des Versuchsaufbaus ermittelten realen Daten in der zweidimensionalen Ebene.

6 Diskussion

Wie in der Definition der Problemstellung im Abschnitt 1.5 erläutert wurde, bestanden die zwei Hauptaufgaben dieser Arbeit in der

1. theoretischen Analyse des relativen Messfehlers, der bei der Bestimmung der Viskosität η mittels Absolutwertmessung sowie Differenzmessung auftritt.
2. Analyse von Ansätzen der Signalverarbeitung zur Verbesserung des Messkonzeptes, mit dem Ziel, die Durchführung einer 'Momentanwertmessung' zu ermöglichen. Dies bedeutet die Entwicklung von Konzepten zur
 - Reduktion der zur Rauschunterdrückung notwendigen Messzeit.
 - Reduktion des aufgrund von parasitären Parameterdrifts verursachten relativen Messfehlers.

Im Rahmen von Aufgabe 1 konnte in Kapitel 2 erfolgreich ein einfaches mathematisches Modell für den analogen Signalweg einschließlich des Wirbelstromsensors mit Koaxialkabel erstellt werden (Formel 125). Dieses wurde in Verbindung mit einer Erhebung der dynamischen Bauteildrifts bezogen auf Temperatur und Alterung durchgeführt. Das mathematische Modell wurde anschließend dazu genutzt, die aus diesen Bauteildrifts resultierenden Parameter-Abweichungen mittels einer Matlab Simulation in eine Abweichung des Messwertes $|D_{out}|$ umzurechnen. Dies wurde unter Anwendung beider Messprinzipien, Absolutwert-Messung und Differenzmessung durchgeführt. Anschließend wurde dazu aufgrund der größeren Aussagekraft der relative Messfehler bezogen auf den Messwert E_M sowie auf den maximalen Quantisierungsfehler E_Q berechnet (siehe Gleichungen 50 und 51).

Um eine fundierte Behandlung von Aufgabe 2 zu ermöglichen, erfolgte in Kapitel 3 eine theoretische Betrachtung des generellen Konzepts 'Lock-In Verstärker', mit Fokus auf die Eigenheiten der digitalen Realisierung. Mithilfe dieses Wissens wurden im Anschluss im Rahmen von Kapitel 4 theoretische Ansätze zur Reduktion der zur Rauschunterdrückung notwendigen Messzeit sowie Ansätze zur Reduktion des aufgrund von parasitären Parameterdrifts verursachten relativen Messfehlers analysiert.

Hinsichtlich der Reduktion der Messzeit wurde in Abschnitt 4.1 versucht den FIR Filter des digitalen Lock-In Verstärkers hinsichtlich seiner Rauschunterdrückung bei additivem weißem Rauschen im analogen Eingangssignal zu optimieren. Dies führte jedoch

zu keinem praktisch verwertbaren Ergebnis, da sich zeigte, dass der verwendete simple Mittelwertfilter bereits zu der Gruppe von Filtern mit der maximalen SNR Steigerung bei weißem Rauschen gehört.

In Abschnitt 4.2 wurde ebenfalls mit dem Ziel einer Reduktion der Messzeit der Ansatz untersucht, die Anzahl der verfügbaren Signalsamples durch Überabtastung, das heißt durch das Anheben der Abtastfrequenz über die durch das Abtasttheorem geforderte Minimalfrequenz hinaus, zu erhöhen und dadurch die SNR zu senken. Wie sich jedoch zeigte, werden die einzelnen Samples des an sich unkorrelierten weißen Rauschprozesses durch den notwendigen Anti-Aliasing-Filter korreliert. Wie statistisch abgeleitet werden konnte, gleicht diese Korrelation den theoretischen SNR Zugewinn aus und verhindert somit eine praktische Nutzung dieser Idee.

Im Zuge von Abschnitt 4.3 wurde schließlich ein Ansatz zur Reduktion des relativen Messfehlers eingeführt. Aus der Idee der Nutzung der Information, welche in der Verschiedenartigkeit der nichtlinearen Empfindlichkeitskurven der einzelnen Parameter enthalten ist, sowie der Verwendung der Phaseninformation des Signals entstand das Konzept der Projektionsmethode. Bei diesem Konzept wird eine zweidimensionale Ebene bestehend aus Betrags- und Phaseninformation aufgestellt und der Messwert durch die Projektion des zweidimensionalen Messausschlags auf eine Zielgerade berechnet. Zusätzlich wurden die Daten und Modelle aus Kapitel 2 dazu genutzt das Verhalten der relativen Fehler E_M und E_Q bei Verwendung der Projektionsmethode zu beurteilen.

Schließlich wurden in Kapitel 5 die mathematischen Anforderungen einer praktischen Implementierung der für Anwendung der Projektionsmethode notwendigen Phasen-Messung bzw. 2-Frequenz-Messung betrachtet und deren Machbarkeit theoretisch aufgezeigt. Mit diesem Wissen konnte anschließend eine Testimplementierung der Konzepte Phasen-Messung sowie 2-Frequenz-Messung erstellt und die Gültigkeit des in Kapitel 2 aufgestellten Modells des analogen Signalpfades erfolgreich praktisch bewiesen werden.

Um abschließend eine einfache Beurteilung bzw. Gegenüberstellung der relativen Messfehler bei Verwendung der drei verschiedenen Messmethoden Absolutwertmessung, Differenzmessung und Projektionsmethode zu ermöglichen, wurden die quantitativen Ergebnisse zu E_Q aus Tabelle 4, 6 und Tabelle 7 im Balkendiagramm in Abbildung 41 dargestellt.

Wie bereits in Abschnitt 2.3 diskutiert wurde, liegen die relativen Messfehler $E_{Q,typ}^{dif}$ bei Differenzwertmessung, mit Ausnahme des Spulenwiderstand-Temperaturdrifts R_L , unter dem 0,1-Fachen des maximalen Quantisierungsrauschens q_{max} und sind damit selbst

für große Temperaturschwankungen bzw. lange Gerätelebensdauer vernachlässigbar. Zusätzlich ergibt sich bei Verwendung der Differenzmessung der fundamentale Vorteil, dass der Messwert-bezogene Relativfehler E_M^{dif} über den gesamten Messbereich *annähernd* konstant ist, und, wie Tabelle 4 zeigt, mit Ausnahme von R_L , über den gesamten Messbereich unter 0,1% des Messwertes bleibt. Dies ist insbesondere für sehr kleine Messausschläge von großer Relevanz.

Aufgrund des signifikanten Einflusses von R_L wird, wie in Abschnitt 1.5 erklärt ist, im L-Vis 520 mittels der Messung der Sensortemperatur eine nachträgliche Temperaturkompensation des Messwertes durchgeführt. Damit kann die große Temperaturabhängigkeit von R_L auf die Messgenauigkeit des Temperatursensors reduziert werden.

Betrachtet man hingegen die relativen Messfehler bei Absolutwertmessung, liegen die Einflüsse mehrerer Parameter deutlich über dem maximalen Quantisierungsfehler q_{max} des ADC und könnten sich somit bei großen Temperaturänderungen bzw. einer langen Gerätelebensdauer kritisch auf den Messwert auswirken. Zu diesen signifikanten relativen Messfehlern gehört

- die Schwingkreiskapazität C mit dem 20 Fachen von q_{max} pro °C. Hier ist jedoch anzumerken, dass dieser Wert aus dem garantierten Maximalwert der Temperaturabhängigkeit bei C0G Kapazitäten stammt. Der Erwartungswert für die Temperaturabhängigkeit liegt hingegen bei Null. Da diese Kapazität auf der Hauptplatine positioniert ist, ist außerdem eine Temperierung der Schaltung denkbar.
- der Vorwiderstand R_v mit dem 10 Fachen von q_{max} pro Jahr. Dieses Problem könnte jedoch durch eine Neukalibrierung des Gerätes (Wartung) einfach gelöst werden.
- der Spulenwiderstand R_L mit dem 100 Fachen von q_{max} pro °C. Wie oberhalb erwähnt ist, wird hier die Temperaturkompensation jedoch eine maßgebliche Unterdrückung bewirken.
- der Kabelwiderstand R_K mit dem 20 Fachen von q_{max} pro °C. Auch hier ist ein positiver Einfluss der Temperaturkompensation zu erwarten. Jedoch ist aufgrund der Kabellänge sowie der Position des Koaxialkabels, das vom Sensor, welcher im Prozessbereich positioniert ist, zur Schaltplatine, welche im Außenbereich liegt, führt, mit einem sehr starken Temperaturgradienten über den Kabelverlauf zu rechnen.

Diese Überlegungen führen zu dem Schluss, dass der Kabelwiderstand R_K bei einfacher Absolutmessung den heikelsten Störparameter darstellt.

Für die in Abbildung 41 dargestellten Werte wurde aus diesem Grund die Projektions-Zielgerade so gewählt, dass eine bestmögliche Unterdrückung des Kabelwiderstandes R_v gewährleistet werden kann. Dazu sind die minimale sowie maximale Messabweichung bei Verwendung von 2-Frequenz-Messung e/E_Q^{pr-2f} sowie Betrag-Phasen-Messung e/E_Q^{pr-ph} dargestellt⁵⁸.

Dabei ist zu erwarten, dass die maximale Messabweichung, die in der Simulation über einen großen angenommenen Messbereich von $\pm 0,5 \mu\text{H}$ erreicht werden könnte, auch im Rahmen von praktischen Implementierungen unproblematisch gewährleistet werden kann. Wie in Abschnitt 4.3 erklärt wurde, kann die minimale Messabweichung aufgrund der minimalen Abhängigkeit der Empfindlichkeit vom Messwert nur innerhalb eines sehr kleinen Arbeitsbereiches erreicht werden. Es ist jedoch denkbar, dass im Falle einer zukünftigen Implementierung der Projektionsmethode vor Auslieferung des Messgerätes eine Kalibrierung der Zielgerade im Bezug auf die reale Auslenkungsrichtung von R_v erfolgt (möglicherweise durch gezieltes Erhitzen des Kabels).

Eine hoch genaue Kalibrierung könnte sich insbesondere auf den relativen Messfehler, bezogen auf die Messwertgröße E_M , stark positiv auswirken, da der Einbruchspunkt von E_M aufgrund der Projektionsmethode (siehe z.B. Abbildung 31) dann dadurch beim kleinsten Messwert den größten Einfluss hätte.

Unabhängig davon zeigt Abbildung 41, dass durch die Verwendung der Projektionsmethode eine sehr starke Fehlerreduktion, bezogen auf R_K , ermöglicht werden kann.

Keine eindeutige Empfehlung kann im Zuge dieser Arbeit zur Verwendung von 2-Frequenz-Betrags-Messung bzw. Betrag-Phasen-Messung gegeben werden. Wie Abbildung 41 erkennen lässt, ermöglichen beide dieser Verfahren eine gleichermaßen starke Reduktion von kritischen Fehlerparametern. Für Betrag-Phasen-Messung spricht die geringere Komplexität der Implementierung, da, wie die Ergebnisse aus Abschnitt 5.1.3 zeigen, bei 2-Frequenz-Messung zusätzliche Beschränkungen bezüglich der Wahl der Filterlänge und

⁵⁸Es ist anzumerken, dass die hier eingetragenen Messabweichungen zur 2-Frequenz-Messung nicht jenen aus Tabelle 6 entsprechen, da für diese Daten andere Frequenzmesspunkte ($f_{0G} = 136,9 \text{ kHz}$ $f_{0K} = 127,5 \text{ kHz}$) verwendet wurden. Dies hat den entscheidenden Grund, dass in Abschnitt 4.3 eine allgemeine Demonstration der verschiedenen Möglichkeiten zur Parameterunterdrückung gegeben werden sollte, wohingegen an dieser Stelle, aufgrund des hohen Fehlereinflusses des Kabelwiderstandes R_K , eine Darstellung der Unterdrückungsleistung bezogen auf diesen Parameter von Interesse ist.

der Messfrequenzen auftreten. Im Gegenzug dazu, weisen, wie Abbildung 29 zeigt, die Empfindlichkeitskurven von R_v , V und R_G bei 2-Frequenz-Messung ähnliche Richtungen auf, was die gleichzeitige starke Unterdrückung all dieser Parameter ermöglicht.

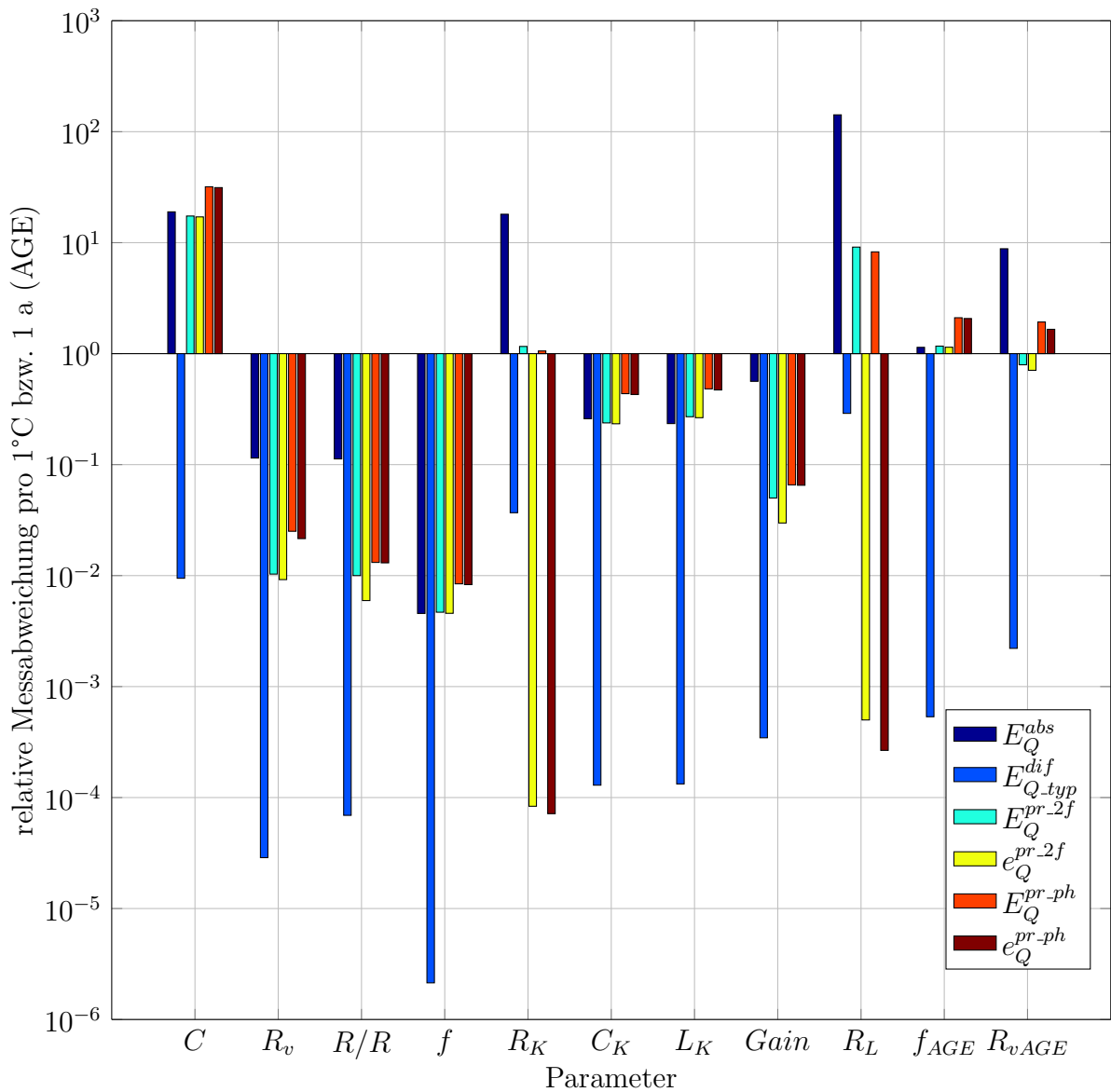


Abbildung 41: Graphische Darstellung der relativen Messabweichungen der Störparameter bezogen auf den maximalen Quantisierungsfehler bei Absolutmessung E_Q^{abs} (annähernd konstant), bei Differenzmessung $E_{Q,typ}^{dif}$ (bei einer typischen Auslenkung von $\Delta L_{typ} = 0.01\mu H$) sowie bei Verwendung der Projektionsmethode mit Betrag-Phasen-Messung E/e_Q^{pr-ph} und 2-Frequenz-Messung $E/e_Q^{pr.2f}$ (Maximal- und Minimalwerte über den gesamten Messbereich von $\Delta L_{max} = 0.5\mu H$). Für Genaueres zu diesen Größen siehe Abschnitt 2.3 und 4.3.

Literatur

- [1] M. Albach, *Grundlagen der Elektrotechnik. 1. Erfahrungssätze, Bauelemente, Gleichstromschaltungen*, Grundlagen der Elektrotechnik, Pearson Studium, 2008.
- [2] Hans-Jochen Bartsch, *Taschenbuch mathematischer Formeln*, vol. 19, Fachbuchverlag Leipzig im Carl Hanser Verlag, 2001.
- [3] Klaus Beuth, Stephan Breide, Christian F Lüders, Günter Kurz, and Richard Hanebuth, *Nachrichtentechnik*, Vogel Buchverlag, 2008.
- [4] P.J. Cullen, A.P. Duffy, C.P. O'Donnell, and D.J. O'Callaghan, *Process viscometry for the food industry*, Trends in Food Science & Technology **11** (2000), no. 12, 451 – 457.
- [5] H. Hartl, W. Pribyl, and Söser P., *Elektronische Schaltungstechnik: mit Beispielen in PSpice*, Elektrotechnik : Theoretische Elektrotechnik, Pearson Studium, 2008.
- [6] M Hofbauer and G Moschytz, *Adaptive Filter: eine Einführung in die Theorie mit Aufgaben und MATLAB-Simulationen*, Springer-Verlag, 2000.
- [7] D. Kohn, T. Plocher, and U. Maier, *Untersuchung eines induktiven Spiralsensors als Wegaufnehmer und Anwendung des Sensorelementes in Mikroelektronik-Systemen*, Fortschritt-Berichte VDI.: Mess-, Steuerungs- und Regelungstechnik, VDI-Verlag, 1986.
- [8] Otto Koudelka and Michael Trieb, *Nachrichtentechnik*, Skriptenreferat Hochschülerschaft TU Graz, 2006.
- [9] L Kurchaninov, *HEC Cold Cables. Signal Shape Analysis*, ATLASHEC Note-066, MPI Munich (1998).
- [10] David R Lide, *CRC handbook of chemistry and physics*, CRC press, 2004.
- [11] T.G. Mezger, *The Rheology Handbook: For Users of Rotational and Oscillatory Rheometers*, Coatings Compendien, Vincentz Network, 2006.
- [12] Hatem Mokhtari, Mosleh M. Alharthi, and Nadjim Merabtine, *PSPICE Model for a Coaxial Cable in High Frequency Domain Submitted to a Longitudinal Temperature Gradient Using Kelvin-Bessel Asymptotic Functions*, International Journal of Engineering and Technology (2012).

- [13] M.R. Nabavi and S. Nihtianov, *A Novel Interface for Eddy Current Displacement Sensors*, Instrumentation and Measurement, IEEE Transactions on **58** (2009), no. 5, 1623–1632.
- [14] Alan V. Oppenheim and R.W. Schaffer, *Digital signal processing*, Prentice-Hall international editions, Prentice-Hall, 1975.
- [15] Claude E. Shannon and Warren Weaver, *Mathematische Grundlagen der Informationstheorie*, Scientia nova, Oldenbourg, München, 1976, Amerik. Orig.-Ausg.: The mathematical theory of communication, 1949 u.ö.
- [16] Johannes Skaar, Ulf Österberg, and Lise L. Randeberg, *Lock-in Amplifier (TFE4160 - Electrooptics and Lasers)*, Tech. report, Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet, 2010.
- [17] G. Steiner, J. Gautsch, R. Breidler, and F. Plank, *A novel fluid dynamic inline viscometer suitable for harsh process conditions*, Procedia Engineering **5** (2010), no. 0, 1470 – 1473, Eurosensor {XXIV} Conference Eurosensor {XXIV} Conference.
- [18] H.R. Tränkler and E. Obermeier, *Sensortechnik: Handbuch für Praxis und Wissenschaft ; mit 122 Tabellen*, Springer, 1998.
- [19] Jörg Weber, *Temperaturkompensation eines hydrodynamischen Viskosimeters*, Master's thesis, TU Graz, 2014.
- [20] M. Werner and O. Mildenerger, *Nachrichten-Übertragungstechnik: Analoge und Digitale Verfahren mit modernen Anwendungen*, Studium Technik, Vieweg+Teubner Verlag, 2006.
- [21] Bing Zhong, *Lossy transmission line modeling and simulation using special functions*, Ph.D. thesis, The University of Arizona., 2006.