



Reinhard Moser, BSc

# **FEM-Berechnung und Optimierung des X-Achs-Schlittens der Forschungsschleifmaschine**

## **MASTERARBEIT**

zur Erlangung des akademischen Grades eines  
Diplomingenieur (Dipl.-Ing.)  
Masterstudium Wirtschaftsingenieurwesen-Maschinenbau

eingereicht an der

**Technische Universität Graz**

Betreuer

Dipl.-Ing. Matthias Steffan

Ass. Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Jörg Edler

**Institut für Fertigungstechnik**

Graz, im November 2015

In Kooperation mit:

**GST – Gesellschaft für Schleiftechnik GmbH**



**GRINDING MADE FOR YOU!**

## EIDESSTATTLICHE ERKLÄRUNG

Ich erkläre an Eides statt, dass ich die vorliegende Arbeit selbstständig verfasst, andere als die angegebenen Quellen/Hilfsmittel nicht benutzt und die den benutzten Quellen wörtlich und inhaltlich entnommene Stellen als solche kenntlich gemacht habe. Das in TUGRAZonline hochgeladen Textdokument ist mit der vorliegenden Masterarbeit identisch.

Graz, am .....

.....

(Unterschrift)

## STATUTORY DECLARATION

I declare that I have authored this thesis independently, that I have not used other than the declared sources / resources, and that I have explicitly marked all material which has been quoted either literally or by content from the used sources. The text document uploaded to TUGRAZonline is identical to the present master's thesis dissertation.

.....

date

.....

(signature)

## **Kurzfassung**

Diese Masterarbeit befasst sich mit der Finiten-Elemente-Methode und Optimierung des X-Achs-Schlittens der Forschungsschleifmaschine, am Institut für Fertigungstechnik an der Technischen Universität Graz.

Die Firma GST entwickelt und baut eine neuartige Forschungsschleifmaschine, welche bis Februar 2016 in der Zentralwerkstätte am Institut aufgestellt wird. Ziel dieser Arbeit ist es, den Schlitten der X-Achse der Schleifmaschine mittels Finite-Elemente-Methode nachzuprüfen und zu optimieren.

Des Weiteren beschäftigt sich diese Masterarbeit mit der Weiterentwicklung des Schlittens, wobei der Fokus auf die Reduktion des Gewichtes gelegt wird. Dies soll bei einer möglichst hohen Gesamtsteifigkeit des Bauteils und der gesamten Baugruppe erfolgen.

Es werden verschiedene Konstruktionen ausgearbeitet, analysiert und gegenübergestellt, um eine möglichst optimale Variante bestimmen zu können. Die so erhaltenen Ergebnisse werden mit der Firma GST diskutiert und von dieser in den Entwicklungsprozess übernommen.

## **Abstract**

This Master's thesis deals with the Finite Element Method and optimization of the X-axis carriage of the research grinding machine at the Institute of Production Engineering at Graz University of Technology.

The company GST develops and designs an innovative research grinding machine which will be established in the central workshop of the Institute until February 2016. The aim of this work is to recalculate and optimize the X-axis carriage of the grinding machine by use of the Finite Element Method. Furthermore, this master thesis deals with the development of the carriage, whereby the focus lies on the reduction of the weight without losing stiffness of the component or assembly.

Therefore different designs are elaborated, analyzed and contrasted to determine an ideal version. The obtained outcomes are provided to GST, who will apply the results in their development process.

## Danksagung

Die vorliegende Masterarbeit stellt das Ende meines Studiums dar. Um eine Arbeit in dieser Form zu ermöglichen, sind neben dem Verfasser noch eine große Anzahl anderer Personen nötig.

Hiermit möchte ich mich bei den Ansprechpersonen am Institut für Fertigungstechnik Herrn Univ.-Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Franz Haas und Herrn Ass.Prof. Dipl.-Ing. Dr.techn. Jörg Edler bedanken. Außerdem möchte ich mich ausdrücklich bei meinem Betreuer Herrn Dipl. Ing. Matthias Steffan bedanken. Des Weiteren gilt mein Dank Herrn Ing. Bruno Grojer von der Firma GST GmbH für seine Unterstützung und Bereitstellung von Informationen.

Der größte Dank ergeht an meine Familie und Freunde, durch welche mir ein Studium erst ermöglicht wurde und welche mir immer mit Rat und Tat zur Seite gestanden sind.

Reinhard Moser

# Abkürzungsverzeichnis

## Lateinische Buchstaben

$u(x)$	Verschiebung in x-Richtung	mm
$v(y)$	Verschiebung in y-Richtung	mm
$w(z)$	Verschiebung in z-Richtung	mm
$A_{Rechteck}$	Ersatzfläche Rechteck	mm <sup>2</sup>
$A_{Tasche}$	Ersatzfläche Tasche	mm <sup>2</sup>
$A_{Gesamt}$	Gesamte Ersatzfläche	mm <sup>2</sup>
$A_{eff}$	Effektive Ersatzfläche	mm <sup>2</sup>
$V_{Film}$	Volumen Ölfilm	mm <sup>3</sup>
$V_{Tasche}$	Volumen Tasche	mm <sup>3</sup>
$V_{ges}$	Volumen Gesamt	mm <sup>3</sup>
$v_c$	Schnittgeschwindigkeit	m/s
$p_T$	Taschendruck	bar
$c_{Öl}$	Federsteifigkeit Öl	N/mm <sup>3</sup>
$[K]$	Steifigkeitsmatrix	-
$[B]$	Ansatzmatrix	-
$[E]$	Materialmatrix	-
$[C]$	Dämpfungsmatrix	-
$[M]$	Massenmatrix	-
$[D]$	Differenzialoperatormatrix	-
$u$	Weg Modalanalyse	m
$\dot{u}$	Geschwindigkeit	m/s
$\ddot{u}$	Beschleunigung	m/s <sup>2</sup>
$F_d$	Dämpfungskraft	N
$W$	Widerstandsmoment	mm <sup>3</sup>
$b$	Breite	mm
$h$	Höhe	mm
$a$	Beschleunigung	m/s <sup>2</sup>
$G$	Schubmodul	N/mm <sup>2</sup>
$E$	E-Modul	N/mm <sup>2</sup>
$f$	Frequenz	Hz
$M$	Moment	Nm
$m$	Masse	kg
$n$	Drehzahl	1/s
$P$	Leistung	W
$Q$	Ölmenge	-
$r$	Radius	m

**Griechische Symbole**

$\varepsilon_{ij}$	Dehnung	-
$\nu$	Querkontraktionszahl	-
$\sigma$	Spannung	N/mm <sup>2</sup>
$\delta W_i$	Innere virtuelle Arbeit	-
$\delta W_a$	Äußere virtuelle Arbeit	-
$\gamma_{ij}$	Gleiten	-
$\beta$	Dämpfungskonstante	-
$\omega$	Winkelgeschwindigkeit	rad/s

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b> .....	<b>1</b>
1.1	Ausgangssituation .....	1
1.2	Ziele .....	2
1.3	Aufgabenstellung .....	2
1.4	Untersuchungsbereich .....	3
1.5	Vorgehensweise.....	5
<b>2</b>	<b>Theoretische Grundlagen der Arbeit</b> .....	<b>6</b>
2.1	Einführung.....	6
2.1.1	Verzerrungen .....	6
2.1.2	Gleichgewichtsbedingungen.....	7
2.1.3	Werkstoffgesetz .....	8
2.1.4	Ebener Spannungszustand und ebener Verzerrungszustand.....	9
2.2	Prinzip virtuelle Arbeit.....	10
2.3	Steifigkeitsmatrix .....	12
2.4	Ansatzfunktion.....	13
2.5	Allgemeine Vorgehensweise .....	15
2.6	Kontaktzustand - Randbedingungen .....	16
2.6.1	Verbund .....	17
2.6.2	Reibungsfrei.....	18
2.6.3	Reibungsbehaftet .....	18
2.7	Hydrostatische Lagerung.....	19
2.8	Modalanalyse in ANSYS Workbench .....	20
2.9	Harmonische Analyse in ANSYS Workbench.....	20
<b>3</b>	<b>Praktische Problemlösung</b> .....	<b>22</b>
3.1	Vorgaben der Firma GST .....	22
3.1.1	Allgemeine Vorgaben .....	22
3.1.2	Kräfte Schleifscheibe.....	23
3.2	Auftretende Belastungen .....	24
3.2.1	Berechnung Taschendruck Umgriff .....	27
3.3	Schwingungsbetrachtung .....	28
3.4	Vereinfachungen Schlitten.....	29
3.5	FEM Simulation.....	32

---

3.5.1	Aufbereitung der Baugruppengeometrie.....	32
3.5.2	Vernetzungsstrategie .....	33
3.5.3	Kontakte und Verbindungen.....	37
3.5.4	Hydrostatische Lagerung .....	41
3.5.5	Statisch - mechanische Analyse.....	48
3.5.6	Modalanalyse.....	50
3.5.7	Harmonische Analyse .....	51
3.6	Prozedere der Variantenentwicklung.....	53
3.6.1	Konstruktion GST.....	53
3.6.2	Variante Rippen .....	56
3.6.3	Variante Rippen mit Abstützung .....	58
3.6.4	Variante Schachbrettmuster.....	60
3.6.5	Variante Wabenstruktur.....	62
3.6.6	Variante Wabenstruktur mit Deckplatte .....	64
3.7	Auswahl der Endvariante.....	65
3.7.1	Erkenntnisse aus Modalanalyse.....	65
3.7.2	Erkenntnisse statisch - mechanische Analyse.....	68
3.7.3	Steifigkeitsbetrachtung der Varianten.....	69
3.7.4	Gegenüberstellung der Frequenzen .....	71
<b>4</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick.....</b>	<b>72</b>
4.1	Gesamtbaugruppe.....	72
4.2	Gegenüberstellung Konstruktionsvarianten .....	73
4.3	Ausblick.....	73
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>74</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis .....</b>	<b>76</b>
	<b>Tabellenverzeichnis .....</b>	<b>79</b>
	<b>Anhang.....</b>	<b>80</b>

# 1 Einleitung

Folgend wird eine Übersicht über das gesamte Spektrum der Masterarbeit gegeben. Beginnend von der Ausgangssituation über die Aufgabenstellung bis hin zur detaillierten Vorgehensweise.

## 1.1 Ausgangssituation

Die Gesellschaft für Schleiftechnik GmbH entwickelt und baut eine neuartige Forschungsschleifmaschine zum Rundschleifen und Unrundschleifen von Bauteilen, in Zusammenarbeit mit dem Institut für Fertigungstechnik. In Zeiten des wachsenden Kostendrucks und auch immer höheren Anforderungen an die Effizienz und Produktivität wird mit dieser Forschungsschleifmaschine Rechnung getragen. Dies zeigt sich vor allem in immer höheren Schnittgeschwindigkeiten der verwendeten Schleifkörper, aber auch in immer höheren Geschwindigkeiten und Beschleunigungen, welche von den Antrieben, Achsen, Führungen usw. zu verrichten sind.

Diese Masterarbeit befasst sich mit dem Aufbau und der Bewegung des X-Achs-Schlittens. Um eine hohe Produktivität zu erreichen, ist es beim Schleifen von unrundern Werkstücken notwendig, eine Pendelhubbewegung des Schlittens mit möglichst hoher Beschleunigung zu gewährleisten. Dies geschieht durch Schleifen mit oszillierender Bewegung der Schleifscheibe.

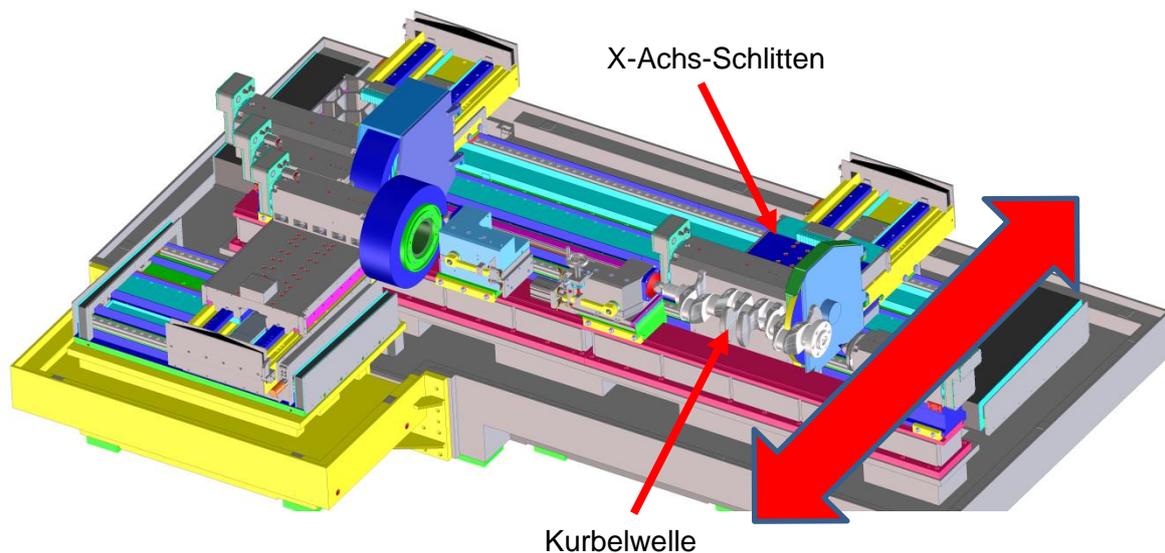


Abbildung 1: Forschungsschleifmaschine, Quelle: Eigene Darstellung.

Abbildung 1 zeigt die zwei möglichen Anfahrpositionen, sowie die Bewegungsrichtung des Schlittens in Richtung der X-Achse.

## 1.2 Ziele

Das Ziel dieser Arbeit besteht darin, den X-Achs-Schlitten der Maschine mittels der Finite-Elemente-Methode nachzurechnen und zu optimieren. Dies soll dazu führen, dass möglichst hohe Beschleunigungen des Schlittens ermöglicht werden. Dabei liegt die Vorgabe darin, dass die von der Firma GST vorgegebenen Randbedingungen und Werte für Beschleunigung eingehalten werden.

Generell liegt das Ziel darin eine Erhöhung der Drehzahl des Werkstücks von aktuell 30 U/min auf 120 U/min im Bereich des Kurbelwellenschleifens zu erreichen.

## 1.3 Aufgabenstellung

Der Fokus liegt dabei auf der Reduktion des Gewichtes, wobei die Gesamtsteifigkeit des Bauteils möglichst beizubehalten ist. Dazu ist die bereits vorliegende Konstruktion der Firma GST zu analysieren und gleichzeitig sollen verbesserte Varianten des Schlittens bzw. der gesamten X-Achse erarbeitet werden. Letztlich werden diese neu ausgearbeiteten Konstruktionsvarianten gegenübergestellt und miteinander verglichen.

Die Fragestellung bezüglich hoher Beschleunigungen des erwähnten X-Achs-Schlittens wird folgend beantwortet:

Der Hubzapfen der Kurbelwelle ist exzentrisch ausgeführt. Daraus resultierend kommt folgende Grundüberlegung zustande:

Je höher die Drehzahl des Werkstücks desto größer ist die Beschleunigung in X-Richtung.

$$F = m * a \quad (1)$$

Da die Vorschubkraft  $F$  durch den Linearmotor vorgegeben ist, liegt die Aufgabenstellung darin die Masse  $m$  zu reduzieren, um höhere Beschleunigungen  $a$  zu ermöglichen.

## 1.4 Untersuchungsbereich

Der Untersuchungsbereich umfasst grundsätzlich nur den Schlitten selbst. Da hingegen das Spindelgehäuse, die Führungen und der Grundrahmen als gesamtes System anzusehen sind, werden auch diese in die getroffenen Betrachtungen miteinbezogen und dementsprechend berücksichtigt.

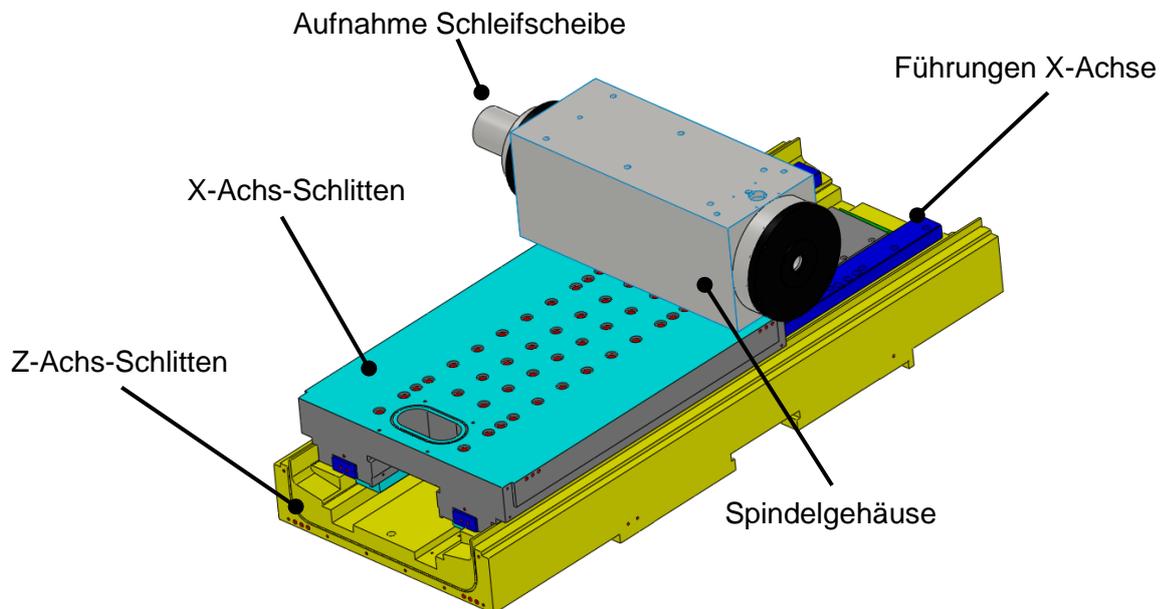


Abbildung 2: Aufbau X-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung.

Neben dem Schlitten sind jedoch noch weitere Anbauteile und Komponenten zu berücksichtigen. Dazu zählen:

- Umgriff links: Stellt die Verbindung von Schlitten zu Führung dar.
- Umgriff rechts: Siehe Umgriff links, jedoch rechts in Bewegungsrichtung.
- Führung: Verbindungselement von Z-Schlitten mit X-Schlitten
- Linearmotor: Vorschubeinheit für X-Achs-Schlitten.
- Zwischenplatte: Verbindung von Spindelstock und Schlitten.
- Verbindungsplatte: Feste Verbindung zwischen X-Achs-Schlitten und Linearmotor.
- Schleifscheibe: Aufnahme direkt an Spindelstock.
- Z-Schlitten: Verfährt in Z-Richtung und trägt gesamten X-Achs-Schlitten.

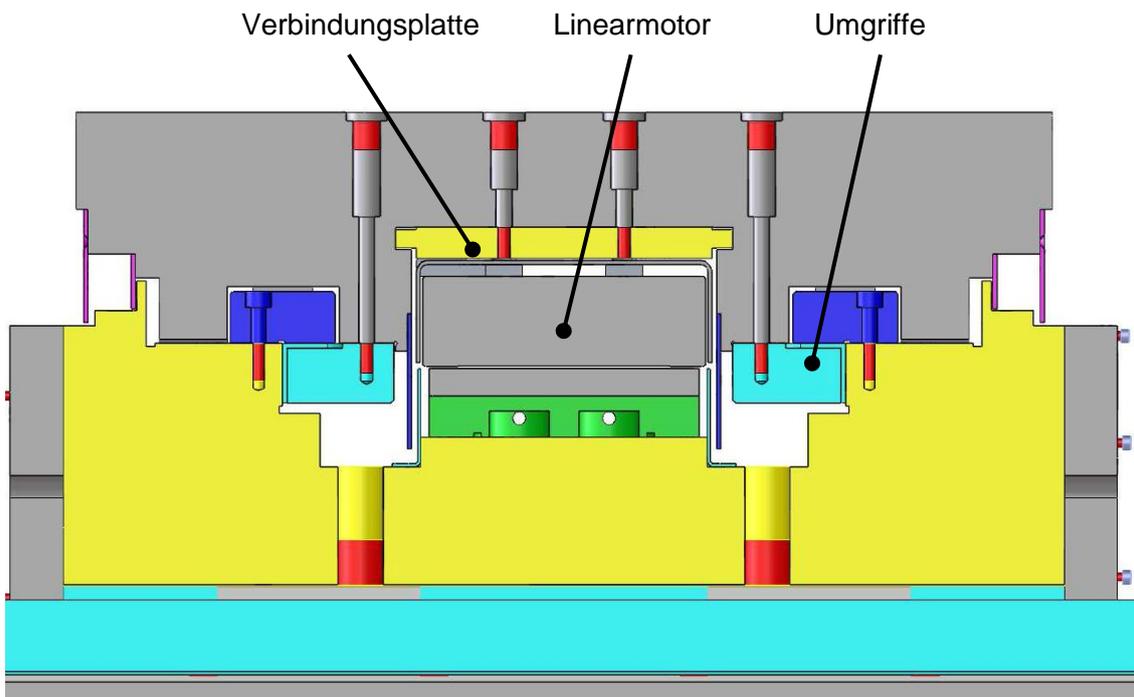


Abbildung 3: Querschnitt Grundaufbau, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Bewegung in Längsrichtung erfolgt mittels eines Linearmotors. Dieser ist über eine Verbindungsplatte mit dem Schlitten verschraubt.

Als Lagerung für den Schlitten kommt eine hydrostatische Lagerung zum Einsatz. Durch eine dementsprechende Konstruktion wird eine Fixierung des Schlittens in alle Richtungen, außer in X-Richtung gewährleistet. Aus diesem Grund sind die bereits angesprochenen Umgriffe rechts und links notwendig.

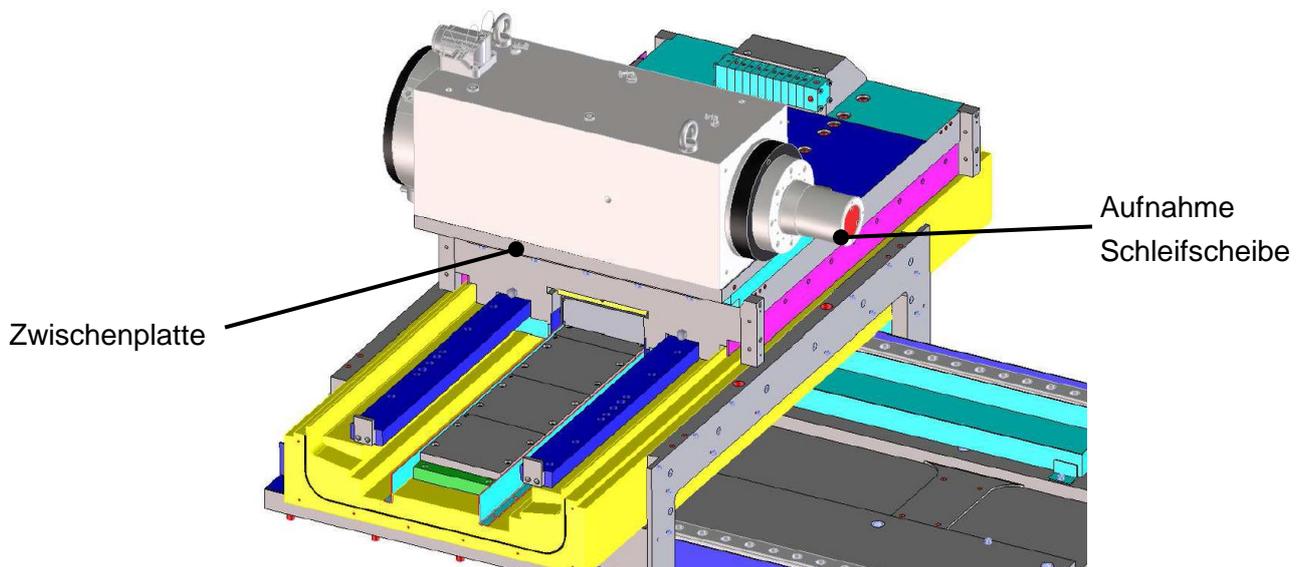


Abbildung 4: Aufbau Z-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Zwischenplatte dient zur Fixierung des Schleifspindelgehäuses und ermöglicht eine zusätzliche Einstellmöglichkeit der Distanz.

## 1.5 Vorgehensweise

Folgende Arbeitsschritte beschreiben das Vorgehen:

- Analyse des Bauteils hinsichtlich einwirkender Kräfte.
- FEM Berechnung der vorliegenden Konstruktion von GST.
- Optimierung des Bauteils und Änderung der Konstruktion (Gewichtsreduktion etc.).
- Gegenüberstellung und Vergleich der verschiedenen Varianten.
- Übermittlung beziehungsweise Besprechung der optimalen Variante mit GST.

Die angeführte Vorgehensweise soll einen Leitfaden darstellen, welcher sich durch die gesamte Arbeit zieht. Alle angeführten Punkte werden im Laufe dieser Arbeit behandelt und sind den dementsprechenden Kapiteln zu entnehmen.

## 2 Theoretische Grundlagen der Arbeit

Die Finite Elemente Methode ist eine computerorientierte Berechnungsmethode, da sich die Möglichkeit ergibt deren Ablauf zu programmieren. Dies verlangt, dass alle notwendigen Gleichungen in eine bestimmte Form gebracht werden. Das führt dazu, dass im Bereich der Finiten Elemente mit der Matrizenformulierung gearbeitet wird. Folgend ist es notwendig die bekannten Gleichungen der Elastizitätstheorie neu zu formulieren. Dabei besteht das Ziel in der Aufstellung der finiten Grundgleichungen und in weiterer Folge die Ermittlung der Wechselbeziehungen von Steifigkeit, Massen, Verschiebungen und Kräften.<sup>1</sup>

### 2.1 Einführung

Im Folgenden wird eine Betrachtung linear-elastischer Körper unter der Einwirkung von Kräften vorgenommen. Aus diesen Kräften folgen Verformungen, welche als klein, stetig und reversibel angenommen werden.

Zur Beschreibung des Verhaltens eines Körpers sind 15 Gleichungen erforderlich:<sup>2</sup>

- Verschiebungs-Verzerrungs-Beziehung 6 Gleichungen
- Gleichgewichtsbedingungen im inneren des Körpers 3 Gleichungen
- Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen 6 Gleichungen

#### 2.1.1 Verzerrungen

Anhand der Verzerrungen an einem ebenen Scheiben Element folgt eine Erläuterung der auftretenden Verzerrungen.

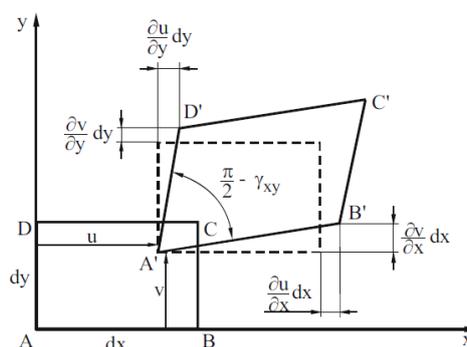


Abbildung 5: Verzerrungen am Scheiben Element, Quelle: Klein (2015), S.22.

Die richtungsabhängigen Verschiebungen in einem kartesischen Koordinatensystem werden mit  $u(x)$ ,  $v(y)$  und  $w(z)$  bezeichnet. Durch diese Verschiebungen entstehen außerdem

<sup>1</sup> Vgl. Klein (2015), S. 19.

<sup>2</sup> Vgl. Klein (2015), S. 22.

Verzerrungen  $\varepsilon$  (Dehnungen und Gleitungen). Verknüpft man die Verzerrungen mit dem Hooke'schen Gesetz, so erhält man die Spannungen.<sup>3</sup>

Möchte man ein räumliches Verhalten beschreiben, so kommen partielle Ableitungen zur Anwendung. Der Zusammenhang von Verzerrungen und Verschiebungen ist durch die folgenden partiellen Ableitungen gegeben:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{zz} &= \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}\end{aligned}$$

Das Ziel ist nun, die Verzerrungen aus der Differenzialoperatorenmatrix  $D$  und den Verschiebungen zu berechnen:

$$\varepsilon = D * u \quad (2)$$

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = D * u$$

## 2.1.2 Gleichgewichtsbedingungen

Die Forderung nach einem Gleichgewicht muss sowohl im Inneren, als auch an der Oberfläche eines Körpers erfüllt sein.

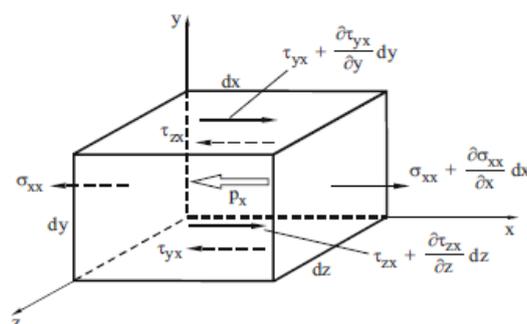


Abbildung 6: Kräftegleichgewicht an Element, Quelle: Klein (2015), S.26.

Im Inneren eines Körpers setzt das dynamische Grundgesetz der Kontinuums-Mechanik die inneren Spannungen und die äußeren Belastungen in ein Gleichgewicht.

<sup>3</sup> Vgl. Klein (2015), S. 23.

### 2.1.3 Werkstoffgesetz

Für ein lineares isentropes Kontinuum gilt eine lineare Beziehung zwischen den Spannungen und den Verzerrungen.

Dabei treten nur zwei Materialkonstanten auf. Diese sind der Elastizitätsmodul  $E$  und die Querkontraktionszahl  $\nu$ . Die Querkontraktionszahl lässt sich mit folgender Überlegung beschreiben: Wird ein Stab auf Zug belastet, so dehnt sich dieser in der Länge, gleichzeitig tritt aber auch eine Verringerung des Umfanges auf. Dieses schmaler werden wird durch die Querkontraktionszahl beschrieben.

Das Werkstoffgesetz für einen 3-D-Körper lautet:

$$\begin{aligned}\sigma_{xx} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\ \sigma_{yy} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{zz})] \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} [(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy})] \\ \tau_{xy} &= \frac{E}{2(1+\nu)} * \gamma_{xy} \\ \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\nu)} * \gamma_{yz} \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\nu)} * \gamma_{zx}\end{aligned}\quad (3)$$

Für den Schubmodul ist in obiger Formel  $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$  gesetzt worden.

Somit lassen sich die oberhalb stehenden Gleichungen in Matrixschreibweise darstellen:

$$\sigma = E * \varepsilon \quad (4)$$

Der Zusammenhang von Spannung und Verzerrung ist im Spannungs-Dehnungs-Diagramm ersichtlich:

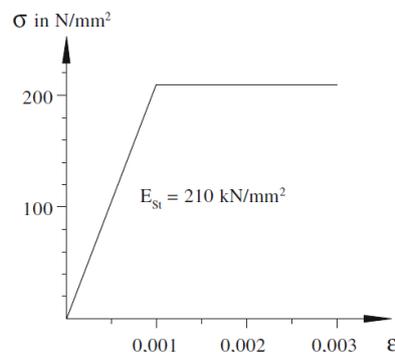


Abbildung 7: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Stahl, Quelle: Schier (2011), S.287.

Der Zusammenhang von E-Modul und Werkstoffgesetz ist in folgender Matrize ersichtlich:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (1-\nu) & \nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \nu & (1-\nu) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix}$$

### 2.1.4 Ebener Spannungszustand und ebener Verzerrungszustand

Betrachtet man den Fall des ebenen Spannungszustandes (ESZ) oder den Fall des ebenen Verzerrungszustandes (EVZ), so sind bestimmte Formulierungen vorzunehmen.

Kann die Dickenausdehnung vernachlässigt werden, so liegt ein ESZ vor. Dabei können folgende Vereinfachungen getroffen werden:<sup>4</sup>

$$\sigma_{zz} = 0 \quad \tau_{zx} = 0 \quad \tau_{zy} = 0$$

So erhält man folgenden Zusammenhang von Verzerrung und Spannung:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

Bei sehr langen und mit konstantem Querschnitt ausgeführten Körpern tritt ein EVZ auf. Dabei gelten folgende Annahmen:<sup>5</sup>

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$$

Auch hier lässt sich ein Zusammenhang von Verzerrung und Spannung ermitteln:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} (1-\nu) & \nu & 0 \\ \nu & (1-\nu) & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(1-2\nu)}{2} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix}$$

<sup>4</sup> Vgl. Klein (2015), S.25.

<sup>5</sup> Vgl. Klein (2015), S.25.

## 2.2 Prinzip virtuelle Arbeit

Das Prinzip der virtuellen Arbeit stellt die Grundlage für die Finite Elemente Lösung dar. Eine weitere gängige Bezeichnung für die virtuelle Arbeit lautet die virtuelle Verschiebung.

Die Kernaussage der virtuellen Arbeit liegt darin, dass die Summe der inneren und äußeren virtuellen Arbeiten Null ist, das heißt sie stehen in einem Gleichgewicht zueinander.<sup>6</sup>

Somit lautet das Gleichgewicht von innerer und äußerer virtueller Arbeit:

$$\delta W_i = \delta W_a \quad (5)$$

Als äußere virtuelle Arbeit bezeichnet man jene äußeren Kräfte in Zusammenhang mit deren virtuellen Verschiebungen. Dabei wird davon ausgegangen, dass die Verschiebungen klein sein sollen. Dies wird durch das Symbol  $\delta$  sichergestellt. Die virtuelle Verschiebung  $\delta u$  bezieht sich dabei auf kleine gedachte Verschiebungen, welche kinematisch möglich sind und die gesetzten Randbedingungen nicht verletzen. Die Arbeit der inneren Spannungen, welche mit den virtuellen Verzerrungen geleistet wird, bezeichnet man als innere virtuelle Arbeit. Die virtuellen Verzerrungen  $\delta \varepsilon$  leiten sich aus den virtuellen Verschiebungen ab.<sup>7</sup>

Folgend wird der Weg für die Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix, Elementenverschiebungsvektoren und der Elementenlastvektoren anhand mehrerer Überlegungen aufgezeigt. Dazu betrachtet man einen elastischen Körper an welchem eine konzentrierte Einzellast  $F$  und verteilte Oberflächenlasten  $q$  vorliegen. Im Inneren wirken Volumenkräfte in Form der Gewichtskraft.

Die folgende Herleitung der virtuellen Arbeit erfolgt gemäß der Vorgehensweise nach KLEIN:<sup>8</sup>

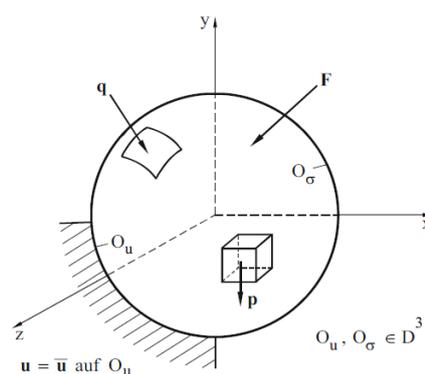


Abbildung 8: Wirkende Lasten auf Element, Quelle: Klein (2015), S.31.

Die virtuelle Arbeit der äußeren Kräfte ist die Summe der Produkte der äußeren Kräfte, zusätzlich der kleinen virtuellen Verschiebung:

<sup>6</sup> Vgl. Bathe (2002), S. 186.

<sup>7</sup> Vgl. Klein (2015), S. 30.

<sup>8</sup> Vgl. Klein (2015), S. 31 ff.

$$\delta W_a = \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{F} + \int_V \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{p} dV + \int_O \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{q} dO \quad (6)$$

Die im Körper verrichtete Kraft errechnet sich mit dem Integral über dem Volumen:

$$\delta W_i = \int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t * \boldsymbol{\sigma} dV \quad (7)$$

Setzt man das Gleichgewicht an erhält man:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^t * \boldsymbol{\sigma} dV = \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{F} + \int_V \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{p} dV + \int_O \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{q} dO$$

Das Einsetzen der bekannten Beziehungen für die Verzerrung  $\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} * \mathbf{u}$  und für die Spannungen  $\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E} * \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} * \mathbf{D} * \mathbf{u}$  führt zu folgendem Zusammenhang, der sogenannten Variationsgleichung:

$$\int_V \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{D}^t * \mathbf{E} * \mathbf{D} dV * \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{F} + \int_V \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{p} dV + \int_O \delta \mathbf{u}^t * \mathbf{q} dO$$

Nun erfolgt die Näherung der Finite-Elemente-Methode, in dem für die Verschiebung eines Elementes der Ansatz gemacht wird.

Um einen Zusammenhang zwischen der Verschiebung  $\mathbf{u}$  über eine bestimmte Stützstelle  $\mathbf{d}$ , welche der Knotenverschiebung entspricht, herzustellen ist es notwendig einen Verschiebungsansatz von folgender Form zu wählen:

$$\delta \mathbf{u}^t = \delta \mathbf{d}^t * \mathbf{G}^t \quad (8)$$

Die virtuellen, sehr kleinen, Knotenverschiebungen sind in einem finiten Element an den Eckknoten festgelegt. Durch Einsetzen des Verschiebungsansatzes und wegkürzen der virtuellen Verschiebungen erhält man folgendes Gleichungssystem:

$$\int_V \cancel{\delta \mathbf{d}^t} * \mathbf{G}^t * \mathbf{D}^t * \mathbf{E} * \mathbf{D} * \mathbf{G} dV * \mathbf{d} = \cancel{\delta \mathbf{d}^t} * \mathbf{G}^t * \mathbf{F} + \int_V \cancel{\delta \mathbf{d}^t} * \mathbf{G}^t * \mathbf{p} dV + \int_O \cancel{\delta \mathbf{d}^t} * \mathbf{G}^t * \mathbf{q} dO$$

$$\int_V (\mathbf{D} * \mathbf{G})^t * \mathbf{E} * \mathbf{D} * \mathbf{G} dV * \mathbf{d} = \mathbf{G}^t * \mathbf{F} + \int_V \mathbf{G}^t * \mathbf{p} dV + \int_O \mathbf{G}^t * \mathbf{q} dO$$

Betrachtet man die linke Seite der Gleichung, so ist ersichtlich, dass es sich hierbei um das Produkt einer Steifigkeit mit einem Weg handelt. Setzt man  $\mathbf{G} * \mathbf{D} = \mathbf{B}^t$  ein, so erhält man folgende Aussage:

$$\mathbf{k} = \int_V (\mathbf{D} * \mathbf{G})^t * \mathbf{E} * \mathbf{D} * \mathbf{G} dV = \int_V \mathbf{B}^t * \mathbf{E} * \mathbf{B} dV \quad (9)$$

Unter dem Integral stehen nur mehr bekannte Matrizen. Dies sind die Materialeigenschaften  $[E]$ , sowie die Matrizen der Ableitungen der Ansatzfunktionen  $[B]$ . Daraus ist die Elementensteifigkeitsmatrix  $[K]$  einfach berechenbar.

## 2.3 Steifigkeitsmatrix

Betrachtet man ein einfaches Federsystem mit zwei Freiheitsgraden so lässt sich folgende Aussage treffen: Das gegebene Federsystem ist durch sein elastomechanisches Verhalten gekennzeichnet. Diese Beziehung wird durch die Kräfte  $F_1, F_2$  und  $F_3$  sowie den Verschiebungen  $u_1, u_2$  und  $u_3$  definiert.<sup>9</sup>

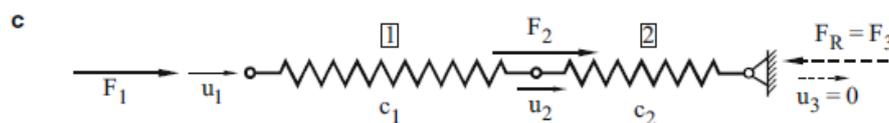


Abbildung 9: Matrix-Steifigkeitsmethode, Quelle: Klein (2015), S. 39 (leicht modifiziert).

Die Federn können als die einfachsten Finiten Elemente angesehen werden. Die Verbindung der Elemente erfolgt mittels Knoten und die Verschiebungen stellen die Freiheitsgrade dar

Die Kraft-Weg-Beziehung ist in Matrixschreibweise wie folgt definiert:

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$$

Oder kürzer:

$$\{F\} = [K] * \{u\} \quad (10)$$

Dabei wird die Matrix  $[K]$  als die Steifigkeitsmatrix bezeichnet. Das Invertieren der Matrix  $[K]$  liefert die Verschiebungen  $u$ .

$$u = k^{-1} * F$$

Aus den Verschiebungen wiederum können die Relativverschiebungen für die Elemente berechnet werden und damit die Spannungen und Kräfte im Element selbst.

Mittels dieser Überlegung kann man darauf schließen, dass sich jeder elastische Körper unter einer Belastung wie eine Feder verhält. Ein System aus Finiten Elementen wird also aus vielen Federn aufgebaut und kann mit dem oberhalb erwähnten Zusammenhang gelöst werden.

<sup>9</sup> Vgl. Link (2014), S. 3.

## 2.4 Ansatzfunktion

Je nach Wahl der Ansatzfunktion können sich aus der FEM Berechnung dienliche oder weniger verwertbare Berechnungsergebnisse ergeben. Verschiebungsansätze müssen folgende drei Bedingungen erfüllen nach GALLAGHER:<sup>10</sup>

- „Die Ansatzfunktion darf keine Verzerrungen und Spannungen hervorrufen, wenn ein Element nur Starrkörperbewegungen vollführt.“
- Die Ansatzfunktion muss stetig sein. Stetigkeit ist im Inneren und auf dem Rand zu verlangen, falls das Element mit einem Element desselben Typs oder mit Elementen desselben Ansatztyps in Berührung kommt.
- Die Ansatzfunktion soll zumindest Konstantglieder enthalten, damit auch ein konstanter Verzerrungs- und Spannungszustand dargestellt werden kann.“

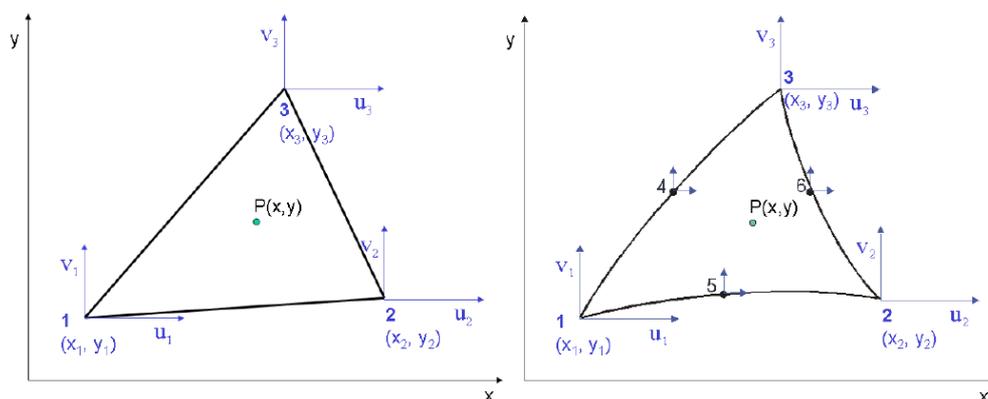


Abbildung 10: Dreieckselement mit linearem oder quadratischen Verschiebungsansatz, Quelle: Mayr (1993), S. 39.

Allgemein unterscheidet man zwischen linearem und quadratischem Verschiebungsansatz. Für das Dreieckselement in der Abbildung oberhalb kommt für den linken Teil der Abbildung der lineare Ansatz in folgender Form in Frage:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y \quad (11)$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 * x + \beta_3 * y \quad (12)$$

Beim linearen Ansatz werden die Verschiebungen in den Eckpunkten jedes Elementes berechnet.

<sup>10</sup> Gallagher (1976), o.S.

Der quadratische Ansatz für den rechten Teil der Abbildung lautet:

$$u(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 * x + \alpha_3 * y + \alpha_4 * x^2 + \alpha_5 * y^2 \quad (13)$$

$$v(x, y) = \beta_1 + \beta_2 * x + \beta_3 * y + \beta_4 * x^2 + \beta_5 * y^2 \quad (14)$$

Für das Dreieckselement in der obigen Abbildung benötigt man zu den Knoten an den Eckpunkten außerdem noch zusätzliche Zwischenknoten. Damit lassen sich Elemente wesentlich genauer beschreiben, als wenn der lineare Ansatz zur Anwendung kommt. Dies ist auch der Grund, warum etwa ANSYS Workbench vorzugsweise Elemente mit der quadratischen Ansatzfunktion verwendet.<sup>11</sup>

Dazu zählen etwa Dreieckselemente mit einem oder mehreren Zwischenknoten.

Ein weiterer essentieller Punkt der Ansatzfunktion besteht in der Kompatibilität zwischen den Elementen. Dies bedeutet, dass die Verschiebungen an den Rändern der benutzten Elemente stetig sein müssen. Damit ist gewährleistet, dass kein Klaffen der Elementenränder auftritt. Abhängig von den gewählten Elementen ist diese Forderung leicht oder schwer zu erreichen.<sup>12</sup>

Um Kompatibilität zu erreichen ist es obligatorisch, dass die Verschiebungen und die Koordinaten der Elemente an den gemeinsamen Stirnflächen dieselben sein müssen. Dies ist dadurch erreichbar, wenn die Stirnflächen der Elemente durch dieselbe Interpolationsfunktion definiert sind. In der Abbildung unterhalb sind Beispiele dargestellt, welche die Kompatibilität besitzen, beziehungsweise diese nicht besitzen. Die dabei entstehenden aufklaffenden Spalten führen dazu, dass es in der Praxis häufig notwendig ist, eine Netzverfeinerung durchzuführen.<sup>13</sup>

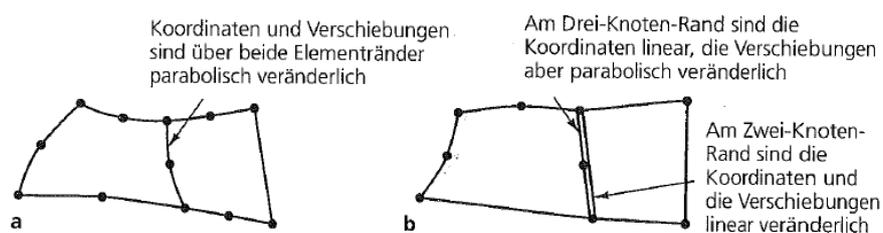


Abbildung 11: Zweidimensionale Elemente-Gruppierung, Quelle: Bathe (2002), S.441.

<sup>11</sup> Vgl. Figel (2012), S. 17.

<sup>12</sup> Vgl. Klein (2015), S. 93.

<sup>13</sup> Vgl. Bathe (2002), S. 440 f.

## 2.5 Allgemeine Vorgehensweise

Die Vorgehensweise ist im Grunde ein sich wiederholender Ablauf.

Als Vorarbeit ist es jedenfalls notwendig, aus dem CAD Bauteil ein vereinfachtes Analysemodell zu erstellen. Dieses aufbereitete Modell wird anschließend via Schnittstelle dem eigentlichen FEM System zugeführt.

Im FEM System erfolgt dann die Übernahme des Modells. Die Software ANSYS Workbench führt anschließend ein Pre Processing, ein Auflösen des Gleichungssystems und ein sogenanntes Post Processing durch.

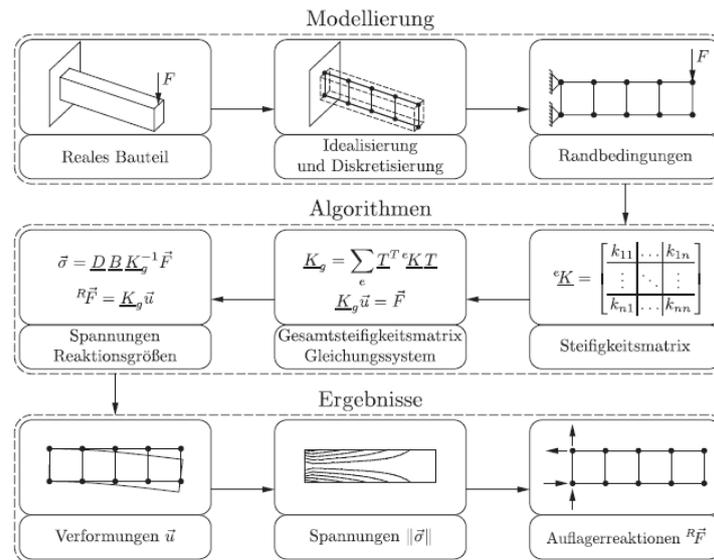


Abbildung 12: Schritte bei der Anwendung der FEM, Quelle: Steinke (2015), S.4.

Die Finite-Elemente-Berechnung gliedert sich in folgende Bereiche:<sup>14</sup>

- **PRE- Processor**

Für eine FE-Analyse ist es notwendig die Daten aufzubereiten. Dazu zählt die Vereinfachung des Modells beziehungsweise der Geometrie. Dieses Programm nennt man den Pre-Processor. Diese Aufbereitung besteht aus einer Geometrieerstellung, einer Vernetzung, welche Knoten und Elemente beinhaltet und einer physikalischen Beschreibung. Dazu zählen Lagerungen, Belastungen, Material.

- **SOLVER**

Dabei handelt es sich um das eigentliche FE Analyse Programm. Der Solver löst die Gleichungen und berechnet in weiterer Folge Verschiebungen, Spannungen, Dehnungen und weitere Parameter.

- **POST- Processor**

Dies ist ein Programm zur grafischen und tabellarischen Aufbereitung der FE Ergebnisse. Dazu zählen etwa Zeitverläufe oder Schnittlinienauswertungen.

<sup>14</sup> Vgl. Schier (2011), S. 4.

## 2.6 Kontaktzustand - Randbedingungen

Als schwierig zu berechnendes Verhalten von zwei oder mehr Körpern stellt sich das Kontaktverhalten dar. Kontaktprobleme reichen dabei von reibungsfreien Kontakten bei kleinen Verschiebungen bis zu reibungsbehafteten Kontakten bei großen Verzerrungen.

Zu beachten ist, dass die Formulierung des Kontaktzustands in allen Fällen die gleiche ist, dennoch ist die Berechnung des nichtlinearen Problems in einigen Fällen viel aufwändiger als in anderen. Das heißt, dass sich die Nichtlinearität des zu berechnenden Problems nicht nur aus den materiellen und geometrischen Nichtlinearitäten besteht, sondern auch aus den Kontaktbedingungen.<sup>15</sup>

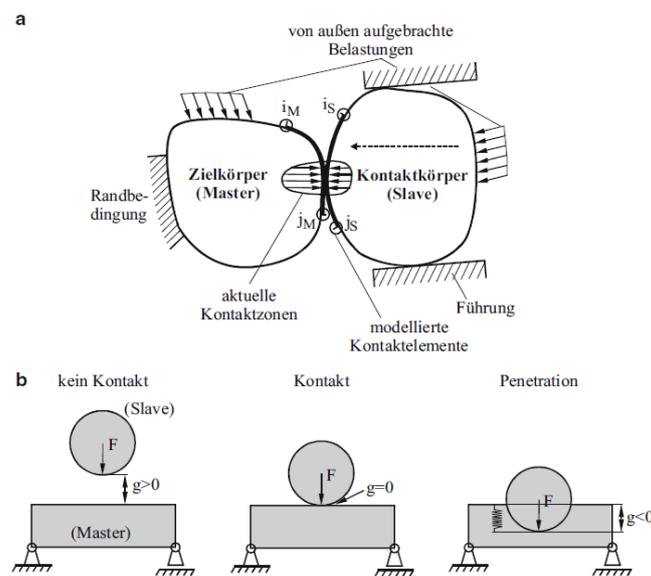


Abbildung 13: Kontakt und Kontaktbedingungen, Quelle: Klein (2015), S. 182.

Zusätzlich ist hier ein Rechenalgorithmus notwendig, welcher zwischen modellierten Kontaktflächen einen Kontakt erkennen muss. Dies ist aber gleichbedeutend mit großen Problemen in der Formulierung, da es schwierig ist die sich ergebenden Kontaktflächen genau vorherzusagen. Die in der Abbildung oberhalb dargestellte Situation verdeutlicht das Kontaktproblem zweier beliebiger Körper, welche sich unter Belastung berühren. Dabei ist zu unterscheiden ob ein symmetrischer oder asymmetrischer Kontakt vorliegt. Beim symmetrischen Kontakt ist es möglich, dass jeder Körper den Ziel- oder auch Kontaktkörper darstellt. Beim asymmetrischen Kontakt sind bestimmte Regeln einzuhalten. Diese beziehen sich auf die Beschaffenheit der im Kontakt stehenden Oberflächen. Beispielfhaft sollte bei einem Kontaktbereich immer die ebene Oberfläche die Zielfläche sein falls dies möglich ist. Sind beide Kontaktbereiche konvex, so sollte jene als Zielfläche gewählt werden, welche ebener ist.<sup>16</sup>

<sup>15</sup> Vgl. Bathe (2002), S. 737.

<sup>16</sup> Vgl. Klein (2015), S. 181 f.

Diese Festlegung von Kontaktkörper und Zielkörper hat den Hintergrund, dass vom verwendeten Algorithmus geprüft wird, ob eine Durchdringung der Knoten der beiden beteiligten Körper stattfindet. Außerdem ist zu bedenken, dass die Fläche des Zielkörpers jene ist, auf welcher die freigeschnittenen Kontaktkräfte des Kontaktkörpers einwirken

So sind einige Voraussetzungen gegeben, die erfüllt werden müssen:

- Der Kontakt zwischen Körperpaarungen, in Form von elastischen beziehungsweise starr-elastischen Paarungen muss ermöglicht werden.
- Die wiederholte Trennung von Körpern muss möglich sein.
- Die relativen Bewegungen zwischen den Körpern müssen erlaubt bleiben.
- Haft- oder Gleitbedingungen sollen möglich sein.<sup>17</sup>

Folgend sind einige Informationen betreffend der verwendeten Kontaktarten im ANSYS Workbench, welche im Kapitel „Praktische Problemlösung“ auftauchen aufgelistet.

ANSYS Workbench arbeitet mit den zwei Kontaktelementtypen 173 und 174, welche automatisch an der Kontaktfläche generiert werden. Diese Elemente überprüfen ob eine Durchdringung vorliegt. Liegt ein Eindringen vor, wirkt eine sogenannte Kontaktsteifigkeit dieser Geometrieverletzung entgegen. Die Kontaktsteifigkeit wirkt wie eine Rückstellfeder. Die entstehenden Rückstellkräfte gegenüber den von außen wirkenden Belastungen werden mittels mehreren Iterationsschritten ins Gleichgewicht gebracht bis diese ein vernachlässigbares kleines Maß erreichen.<sup>18</sup>

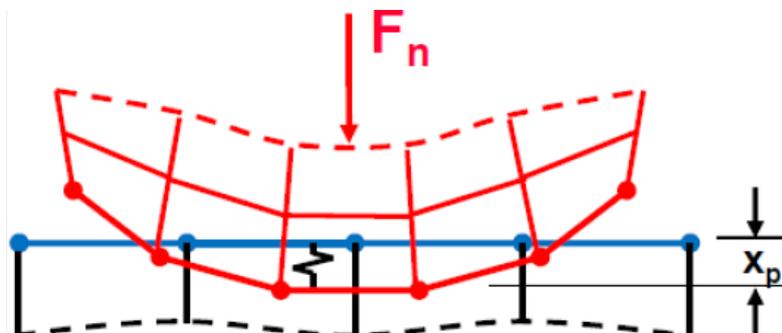


Abbildung 14: Kontaktsteifigkeit ANSYS Workbench, Quelle: ANSYS Mechanical User's Guide (2014), Onlinequelle [31.08.2015].

### 2.6.1 Verbund

Die Verbund Kontaktbedingung kann man mit den Eigenschaften fest, verklebt und verschweißt beschreiben. Die Berücksichtigung von Spalten oder Durchdringungen erfolgt bei diesem Kontakttyp nicht. Des Weiteren ist eine Übertragung von Zug- und Druckkräften in Normalen Richtung möglich. Auch eine Übertragung von Schubkräften wird ermöglicht.<sup>19</sup>

<sup>17</sup> Vgl. Klein (2015), S. 183.

<sup>18</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 156 f.

<sup>19</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 157 ff.

### 2.6.2 Reibungsfrei

Der reibungsfreie Kontaktyp ist mit den Eigenschaften eines reibungsfreien aber abhebenden Kontaktes beschreibbar. Spalten und Durchdringungen können berücksichtigt werden. Zu berücksichtigen ist, dass nur Druckkräfte und keine Schubkräfte übertragen werden können. Da mehrere Gleichgewichtsiterationen notwendig sind, verlängert sich die Berechnungszeit um ein Vielfaches.<sup>20</sup>

### 2.6.3 Reibungsbehaftet

Die reibungsbehaftete Kontaktbedingung ermöglicht einen einstellbaren Reibfaktor, sowie einen abhebenden Kontakt. Die Berücksichtigung von Spalten und Durchdringungen ist gegeben. Auch hier erfolgt wie beim reibungsfreien Kontakt nur eine Übertragung von Druckkräften. Anstelle von Zug kommt es zu einem Abheben. Schubkräfte können bis zu einem gewissen Grenzwert übertragen werden, was man mit einem Gleiten gleichsetzen kann. Die Schubkräfte sind dabei von der Normalkraft und dem Reibwert abhängig. Zur Berechnung dieses Kontaktes sind mehrere Gleichgewichtsiterationen notwendig.<sup>21</sup>

---

<sup>20</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 157 ff.

<sup>21</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 157 ff.

## 2.7 Hydrostatische Lagerung

Bei einer hydrostatischen Lagerung wird der Öldruck außerhalb der Lagerung erzeugt und behilft sich dabei des hydrostatischen Prinzips. Durch einen dauerhaft vorhandenen Ölfilm werden zwei aneinander gleitende Bauteile voneinander getrennt. Durch eine Ölversorgungseinrichtung und dementsprechender Regelungstechnik wird die benötigte Ölmenge zugeführt. Außerdem bewirkt diese Art der Ölversorgung, dass hydrostatische Lagerungen verschleißfrei sind. Das heißt im Umkehrschluss, dass keine Anlaufreibung, sondern eine reine Flüssigkeitsreibung vorherrscht. Der so genannte Stick-Slip-Effekt, welcher einem Ruckgleiten entspricht, wird so ausgeschlossen.<sup>22</sup>

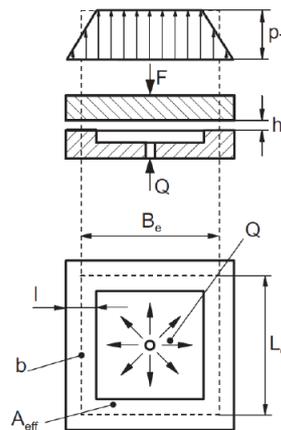


Abbildung 15: Hydrostatische Lagertasche, Quelle: Weck(2006), S. 281.

Das Grundprinzip einer hydrostatischen Lagerung ist in Abbildung 15 ersichtlich. Die eingearbeitete Tasche wird über Zuführleitungen mit Öl versorgt. Zwischen der Gleitfläche und dem Lagersteig bildet sich ein Ölspalt  $h$ . Die Spalthöhe liegt im Allgemeinen zwischen 10  $\mu\text{m}$  bis 60  $\mu\text{m}$ . Der Taschendruck  $p_T$  ergibt sich aus der Differenz zwischen dem Druck in der Lagertasche und dem Umgebungsdruck. Dieser Druck fällt nach außen hin auf den Umgebungsdruck ab.<sup>23</sup>

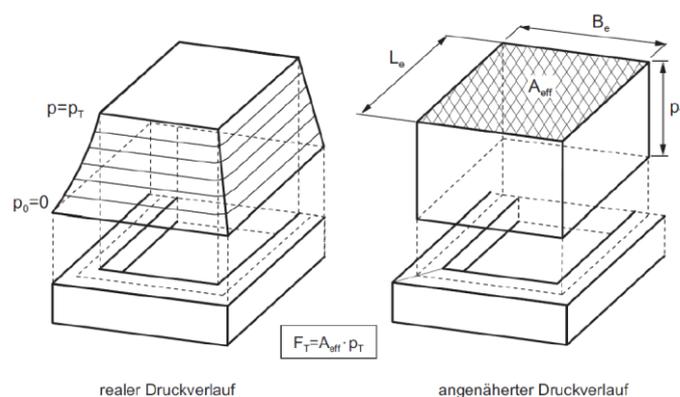


Abbildung 16: Druckaufbau und effektive Lagerfläche, Quelle: Weck(2006), S. 280.

<sup>22</sup> Vgl. Weck (2006), S. 277 f.

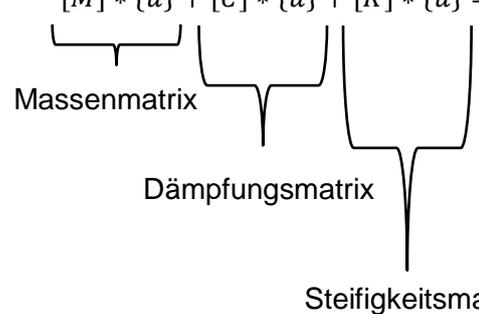
<sup>23</sup> Vgl. Weck (2006), S. 278.

In einer ersten Näherung kann man den Druckabfall über den Steg als linear betrachten. Dies ist auch der Grund, warum man annehmen kann, dass der volle Taschendruck über die Tasche hinaus noch bis zur Mitte des Steges wirksam ist. Die Fläche auf welcher der voll wirksame Taschendruck angenommen wird bezeichnet man als  $A_{eff}$ . Stellt man das Kräftegleichgewicht der äußeren Belastung und der Lagerkraft auf, so erhält man die wirkende Belastung  $F$ . Diese errechnet sich aus der effektiven Fläche  $A_{eff}$  multipliziert mit dem Taschendruck  $p_T$ .<sup>24</sup>

## 2.8 Modalanalyse in ANSYS Workbench

Die Modalanalyse stellt in ANSYS Workbench die Grundlage dar um Schwingungsprobleme genauer zu untersuchen.

ANSYS Workbench arbeitet mit folgender Gleichung für das Gesamtsystem laut KLEIN:<sup>25</sup>

$$[M] * \{\ddot{u}\} + [C] * \{\dot{u}\} + [K] * \{u\} = \{F(t)\} \quad (15)$$


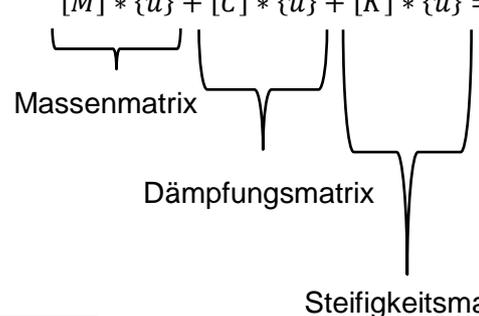
Das Diagramm zeigt die Gleichung (15) mit drei geschweiften Klammern unter den Termen  $\{\ddot{u}\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  und  $\{u\}$ . Von diesen Klammern führen Linien nach unten zu den Beschriftungen 'Massenmatrix', 'Dämpfungsmatrix' und 'Steifigkeitsmatrix'.

Für die Modalanalyse wird die Dämpfungsmatrix  $[C] = 0$  gesetzt.

## 2.9 Harmonische Analyse in ANSYS Workbench

Erfolgt zum Beispiel eine sinusförmige angeregte Belastung, so ist es möglich mit der Harmonischen Analyse diese Belastung auszuwerten.

Auch hier arbeitet ANSYS Workbench mit der Gleichung für das Gesamtsystem:

$$[M] * \{\ddot{u}\} + [C] * \{\dot{u}\} + [K] * \{u\} = \{F(t)\}$$


Das Diagramm zeigt die Gleichung mit drei geschweiften Klammern unter den Termen  $\{\ddot{u}\}$ ,  $\{\dot{u}\}$  und  $\{u\}$ . Von diesen Klammern führen Linien nach unten zu den Beschriftungen 'Massenmatrix', 'Dämpfungsmatrix' und 'Steifigkeitsmatrix'.

<sup>24</sup> Vgl. Weck (2006), S. 279.

<sup>25</sup> Vgl. Klein (2015), S. 201.

Bei der harmonischen Analyse erfolgt eine Vorgabe der Variablen  $F(t)$  und  $u(t)$ .

Außerdem ermöglicht die harmonische Analyse das Dämpfungsverhalten zu berücksichtigen. Die Dämpfungskraft  $F_d$  ist durch den Zusammenhang von der Dämpfung  $C$  und der Geschwindigkeit  $\dot{u}$  definiert:

$$F_d = C * \dot{u} \quad (16)$$

Setzt man für  $C = \beta * K$  ein, wobei  $K$  die Steifigkeit ist, erhält man folgenden Zusammenhang:

$$F_d = \beta * K * \dot{u} \quad (17)$$

Für die Berechnung in ANSYS Workbench ist es notwendig den  $\beta$  Wert einzugeben, falls die Dämpfung berücksichtigt werden soll. Dabei handelt es sich um das Lehr'sche Dämpfungsmaß. Dieses berücksichtigt das Verhalten des kompletten Systems, das heißt in diesem Fall die gesamte Baugruppe mit dem X-Achs-Schlitten und allen Anbauteilen. Die Größenordnung des Lehr'schen Dämpfungsmaßes liegt zwischen 2 und 10 Prozent. Für die vorliegenden Berechnungen wird ein  $\beta$  Wert, welcher dem Lehr'schen Dämpfungsmaß entspricht, von 0,02 verwendet. Dieser Wert ergibt sich aus empirischen Versuchen und stellt eine für den Sonder- beziehungsweise Werkzeugmaschinenbau übliche Größenordnung dar.

Um die Amplitude über die Frequenz darzustellen definiert man einen sogenannten Frequenzgang. Dabei ist zu beachten in welcher Richtung man etwa die Verformung auswerten möchte.

### 3 Praktische Problemlösung

In den nachkommenden Kapiteln erfolgt eine ausführliche Beschreibung der Vorgehensweise und der eingesetzten Methoden. Hierbei wird der Weg vom Beginn bis zur schlussendlichen Konstruktionsvariante sorgfältig betrachtet und es werden einzelne Aspekte genauer behandelt. Auch eine Gegenüberstellung der erarbeiteten Varianten und eine detaillierte Beschreibung der Endvariante sind vorzufinden.

#### 3.1 Vorgaben der Firma GST

Von der Firma GST wurden Vorgaben in Form eines Pflichtenheftes erarbeitet, welche als Grundlage für die gesamte Arbeit gedient haben.

##### 3.1.1 Allgemeine Vorgaben

- Es ist ein möglichst niedriges Gewicht bei möglichst unveränderter Steifigkeit anzustreben.
- Im Bereich der Montageflächen ist eine Auflagefläche (siehe Abbildung 17) vorzusehen. Der dazwischenliegende Bereich kann tiefer oder höher gesetzt werden.

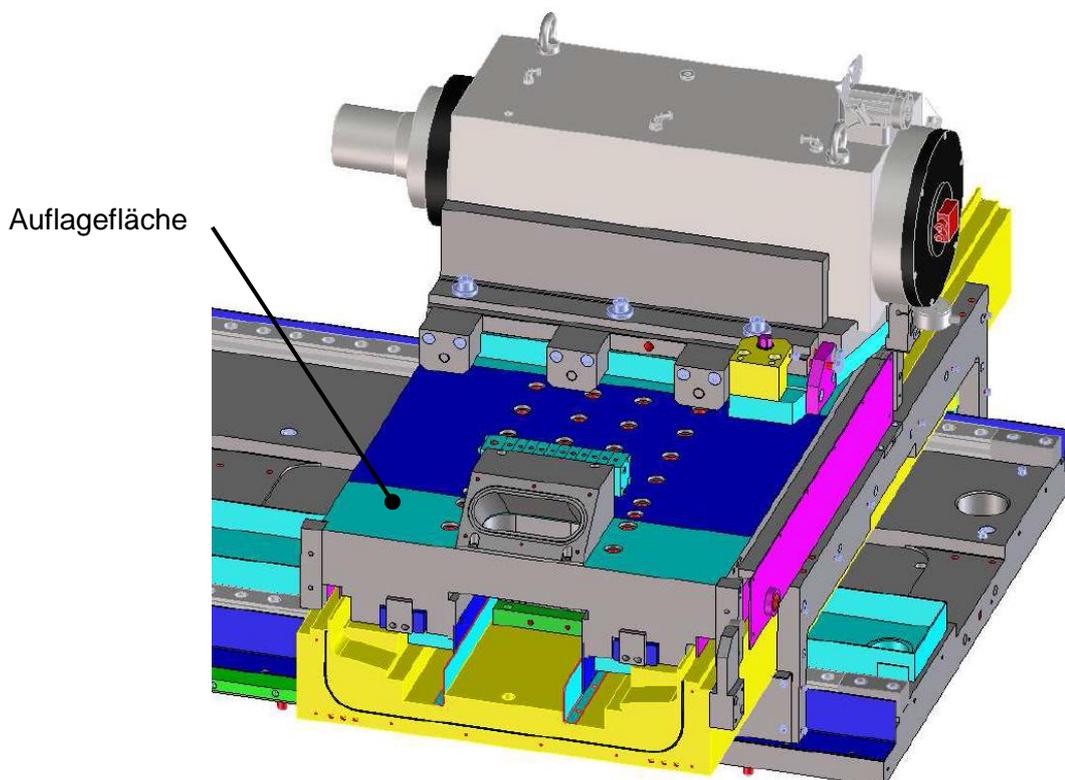


Abbildung 17: Anbauteile Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

- Kanäle für die Versorgung der hydrostatischen Lagertaschen sind zu berücksichtigen. Jede der vier Führungsebenen (Ecken) wird über drei Ölzuführungsbohrungen versorgt; 1x Seitenfläche, 1x Auflage und 1x Unterzug.

Für die FEM Berechnung wird von folgenden Drücken und Kräften ausgegangen:

- Taschendruck Vertikal (hebt den Schlitten nach oben) ca. 45 bar.
- Taschendruck Umgriff (zieht den Schlitten nach unten) ergibt sich aus der nach oben wirkenden Kraft der vertikalen Taschen abzüglich der Gewichtskraft und Belastungen um die Gleichgewichtsbedingung zu erfüllen. Eine Berechnung dieses Taschendruckes erfolgt im Verlauf dieses Kapitels.
- Taschendruck an der Seitenführung: ca. 20 bar.
- Die Zugkraft des Linearmotors greift flächig an der Verbindungsplatte an, wobei die Anzugskraft ca. 25.000 N und die Vorschubkraft maximal 8.810 N beträgt.
- Für die Schleifspindel und Zwischenplatte ist eine Masse von 350 – 400 kg anzusetzen.
- Für die Hydrostatische Lagerung kommt Öl vom Typ HLP 46 zum Einsatz.

### 3.1.2 Kräfte Schleifscheibe

Die Ermittlung der Schleifkräfte erfolgt anhand der vorhandenen Informationen, welche von der Firma GST zur Verfügung gestellt werden.

Für die Schleifkraft ist aus der Berechnung bekannt, dass diese mit ungefähr 400 N der Gewichtskraft entgegenwirkt. Dies führt somit zur Festlegung einer  $F_{\text{Schleifkraft}}$  von 400 N.

Berechnung der Schleifkraft  $F_{\text{Schleifkraft}}$  mit folgenden Angaben:

Antriebsleistung	P = 70 kW
Radius Schleifscheibe	r = 350 mm
Drehzahl	n = 4.500 U/min

$$\omega = 2 * \pi * f \quad (18)$$

$$\omega = 2 * \pi * \frac{4.500 \text{ U/min}}{60}$$

$$\omega = 471,23 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$P = M * \omega \quad (19)$$

$$M = \frac{P}{\omega}$$

$$M = \frac{70000 \text{ W}}{471,23 \text{ rad/s}}$$

$$M = 148,5 \text{ Nm}$$

$$M = F * r \quad (20)$$

$$F = \frac{M}{r}$$

$$F = \frac{148,5 \text{ Nm}}{0,35 \text{ m}}$$

$$F = 422,8 \text{ N}$$

Bei der Berechnung der Schleifkraft ist darauf hinzuweisen, dass diese einen außermittigen Kraftangriffspunkt besitzt und dieser bei der Berechnung zu berücksichtigen ist.

Die maximale Vorschubkraft ist laut Datenblatt des Linearmotor Herstellers mit 8.810 N vorgegeben. Da diese jedoch in einem, hier angenommen quasistationären Zustand nicht erreicht wird, ist eine  $F_{\text{Vorschubkraft}}$  von 1.500 N als realistischer Wert anzusehen. Diese Vorschubkraft wird in Absprache mit der Firma GST als Vorgabewert für die Simulation verwendet.

### 3.2 Auftretende Belastungen

Unter Belastungen versteht man die auf den Schlitten wirkenden Kräfte resultierend aus der Schleifkraft, sowie weiterer Baugruppen, wie etwa dem fest mit dem Schlitten verbundenen Linearmotor.

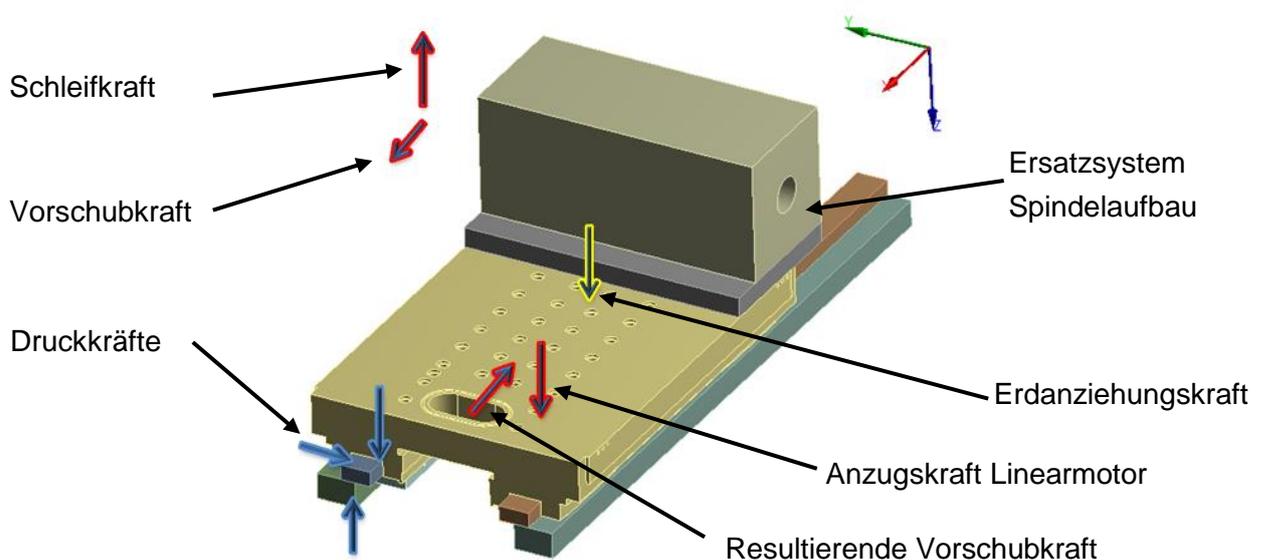


Abbildung 18: Belastungen Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

In Abbildung 18 sind die Schleifkraft, sowie die entstehende Vorschubkraft, die Druckkräfte der hydrostatischen Lagerungen und auch die Erdanziehungskraft ersichtlich. Neben der bereits erwähnten Schleifkraft und Vorschubkraft wirken eine Reihe von Kräften beziehungsweise Belastungen.

Einerseits übt der Linearmotor Kräfte auf den Schlitten aus. Diese wirken wie in Abbildung 19 ersichtlich in positiver Z-Richtung und in die negativer X-Richtung. In Z-Richtung wirkt die Anzugskraft des Linearmotors in der Größenordnung von 25.000 N. Die Kraftübertragung erfolgt über eine Zwischenplatte welche mit dem X-Achs-Schlitten verschraubt ist. Die Kraftübertragung entsteht am rot eingefärbten Bereich. Die Vorschubkraft in negativer X-Richtung wirkt der Schleifkraftkomponente in X-Richtung entgegen.

Die Berücksichtigung des gesamten Spindelaufbaues erfolgt mittels eines Ersatzsystems. Die Gründe dafür liegen einerseits darin, dass eine exakte Modellierung nicht zweckmäßig ist, andererseits ist ein Körper mit der Masse von ca. 375 kg für die FEM Simulation ausreichend genau als Vereinfachung.

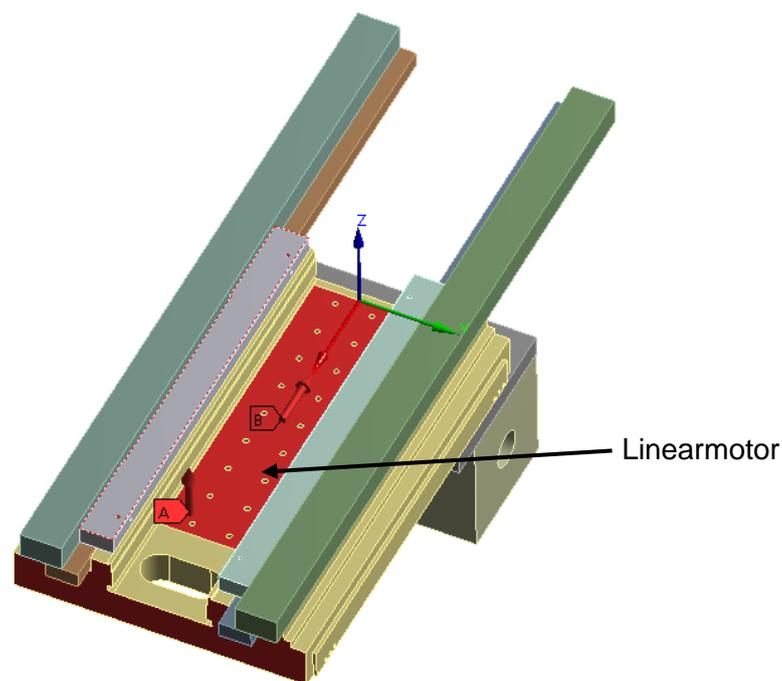


Abbildung 19: Linearmotor Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung.

In obiger Abbildung ist die Fläche ersichtlich, an welcher der Linearmotor angreift. Zu beachten ist, dass der Linearmotor nicht an der gesamten Schlittenunterseite, sondern nur am farblich dargestellten Bereich verschraubt ist.

Außerdem ist die hydrostatische Lagerung zu beachten. Hier ist ersichtlich, dass pro Führungsbereich drei Auflagerpunkte beziehungsweise Auflagerflächen zu betrachten sind. Dies sind einerseits die Druckkräfte in vertikaler Richtung, die Druckkräfte welche am Umgriff auftreten und die Druckkräfte an der Seitenführung.

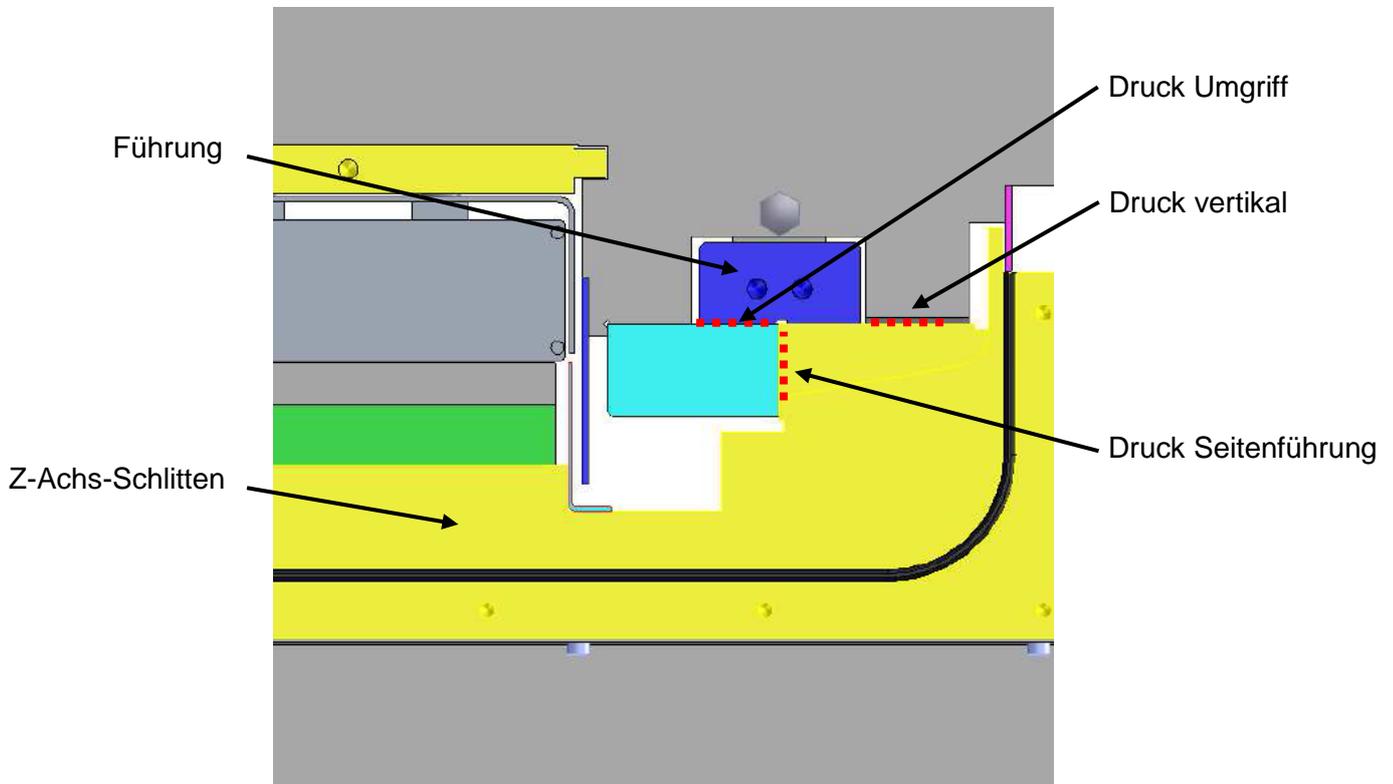


Abbildung 20: Druckkräfte hydrostatische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Versorgung der hydrostatischen Lagerungen erfolgt mittels Öl durch dementsprechend vorgesehene Bohrungen. Diese Bohrungen sind im X-Achs-Schlitten eingearbeitet. Als Medium kommt Öl vom Typ HLP 46 zum Einsatz.

Der Umgriff an der Unterseite des X-Achs-Schlittens ist mittels Verschraubung mit dem Schlitten verbunden. Auch die Führung wird mit dem Z-Achs-Schlitten verschraubt. Das auf Grund der hydrostatischen Lagerungen anfallende Öl läuft nach unten hin ab und wird in einer Ölwanne aufgefangen und dem Kreislauf wieder zugeführt.

Die Spalthöhe des Lagers wird mittels eines Regelkreises geregelt. Dazu kommt ein Regelungssystem der Firma Hyprostatik zum Einsatz. Bei Belastung setzt ein Regler ein um die Spalthöhe konstant zu halten, indem der Volumenstrom des Öls dementsprechend angepasst wird.

### 3.2.1 Berechnung Taschendruck Umgriff

Der Taschendruck des Umgriffs zieht den Schlitten nach unten und ergibt sich aus der nach oben wirkenden Kraft der vertikalen Taschen abzüglich der Gewichtskraft. Im Prinzip haben also alle wirkenden Kräfte einen Einfluss auf den Druck in der Tasche.

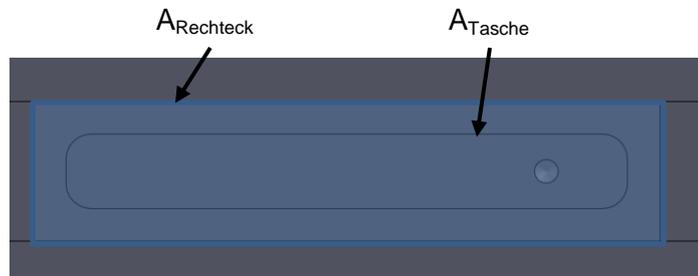


Abbildung 21: Fläche Hydrostatische Lagerung Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung.

Für die Berechnung des Taschendrucks ist es notwendig, in einem ersten Schritt die tatsächlich wirkende Fläche zu ermitteln. Diese setzt sich aus  $A_{Rechteck}$  und  $A_{Tasche}$  zusammen. Somit ergibt sich für die gesamte Fläche  $A_{Gesamt}$  ein Wert von 9043 mm<sup>2</sup>. Unter der Annahme, dass der Schlitten und der Umgriff laut Abbildung 22 fest miteinander verbunden sind, ist es möglich den Taschendruck für den Umgriff in erster Näherung zu berechnen.

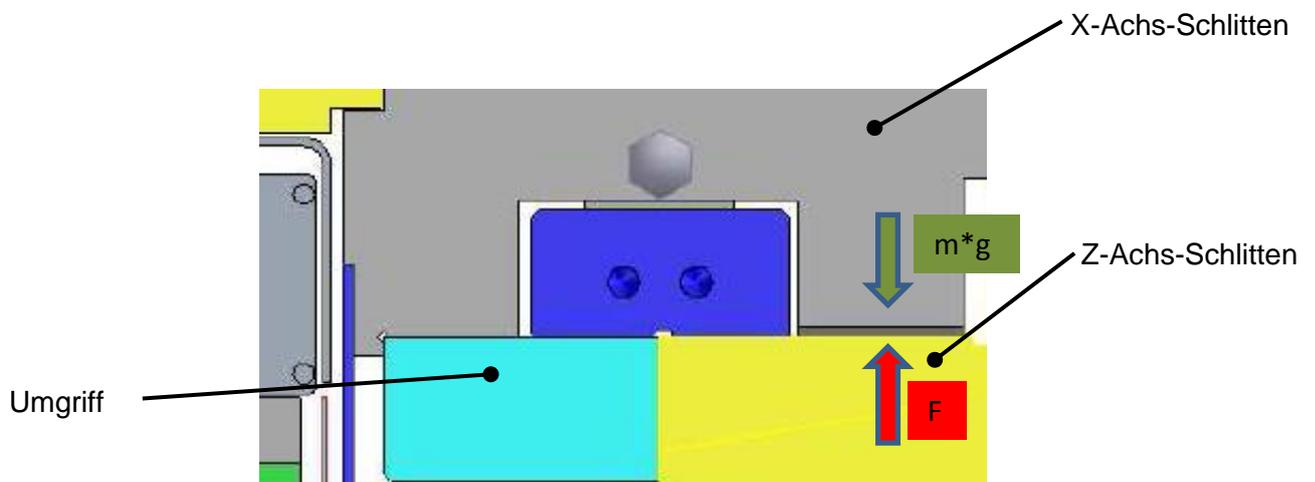


Abbildung 22: Berechnung Taschendruck Umgriff, Quelle: Eigene Darstellung.

Zwischen Z-Achs-Schlitten und X-Achs-Schlitten wirkt ein Druck von 45 bar. Multipliziert man diesen Druck mit der Fläche  $A_{Gesamt}$  so erhält man die wirkende Kraft  $F$  in der Größenordnung von 40.693,5 N. Nimmt man für die Gewichtskraft 400 N an, so ergibt sich die Kraft welche am Umgriff wirkt. Dividiert man diese wiederum durch die gesamte am Umgriff wirkende Fläche, so erhält man einen Druck von 46 bar am Umgriff.

Neben den beschriebenen Kräften ist außerdem die Erdanziehungskraft als Trägheitslast zu berücksichtigen.

Zusammenfassend wirken folgende Kräfte auf die gesamte Baugruppe:

- Vorschubkraft des Linearmotors
- Anzugskraft des Linearmotors
- Druckkräfte auf Grund der hydrostatischen Lagerung des Schlittens
- Belastung resultierend aus dem Spindelaufbau
- Erdanziehungskraft

### 3.3 Schwingungsbetrachtung

Die Schwingungsbetrachtung erfolgt für das gesamte System, zu welchem auch das Spindelgehäuse und die Schleifscheibe gehören.

Grundsätzlich ist festzuhalten, dass verschiedene Frequenzen auf das Gesamtsystem wirken. Dies sind die Anregungsfrequenz durch die Pendelhubbewegung und die Anregungsfrequenz aus der Drehzahl der Schleifscheibe.

Angestrebte maximale Werkstückumdrehung:

$$120 \frac{U}{min}$$

**=> 2 Hz Anregungsfrequenz**

Drehzahl Schleifscheibe:  $v_c = r * \omega = r * 2\pi * n$  (21)

$$n = \frac{v_c}{r * 2\pi} = \frac{v_c}{d * \pi}$$

$$n = \frac{300m/s}{0,7 m * \pi} = 140 \frac{U}{s} = 8400 \frac{U}{min}$$

**=> 140 Hz Anregungsfrequenz**

$$n = \frac{50m/s}{0,7 m * \pi} = 23 \frac{U}{s} = 1380 \frac{U}{min}$$

**=> 23 Hz Anregungsfrequenz**

Die Berechnung der Anregungsfrequenzen erfolgt mit zwei unterschiedlichen Schnittgeschwindigkeitswerten, welche sich aus der Drehzahl ergeben.

Das heißt die Anregungsfrequenz oszilliert im Bereich von 2 Hz, beziehungsweise 23 – 140 Hz.

Die Schlussfolgerung aus der obigen Berechnung ist dahin gehend, dass das Ziel hohe Eigenfrequenzen als Vorgabe festgelegt wird. Dies ist vor allem mit konstruktiven Maßnahmen erreichbar. Allgemein ist folgende Beziehung aus der Dynamik bekannt:

$$\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \quad (22)$$

Daraus ist der Zusammenhang von Frequenz  $\omega$ , statischer Steifigkeit  $K$  und Masse  $m$  ersichtlich.

### 3.4 Vereinfachungen Schlitten

Vereinfachungen sind notwendig um die FEM Simulation auf das Notwendige zu reduzieren. Dies bedeutet, dass zum Beispiel nicht benötigte Bohrungen für Verkleidungsbleche, Fasen, Einstiche, Formschrägen usw., welche für die Simulation keinen bestimmenden Einfluss auf die Ergebnisse der FEM-Analyse haben, entfernt werden. Dies ermöglicht in weiterer Folge auch eine höhere Netzqualität und schnellere Rechenzeit der FEM Berechnung.

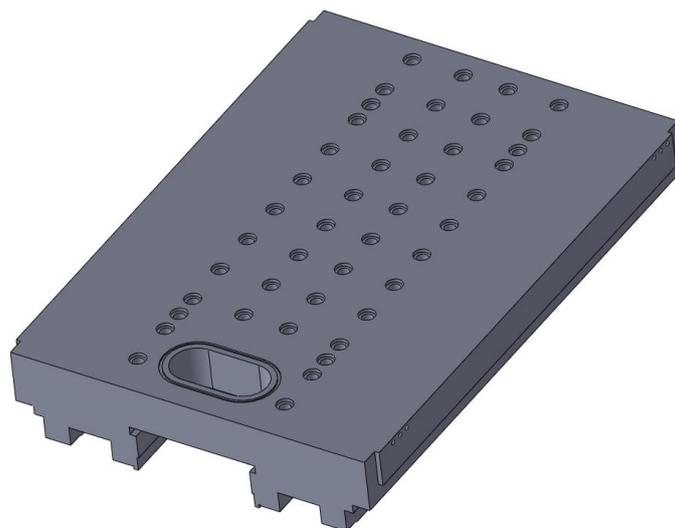


Abbildung 23: X-Achs-Schlitten Vereinfachungen, Quelle: Eigene Darstellung.

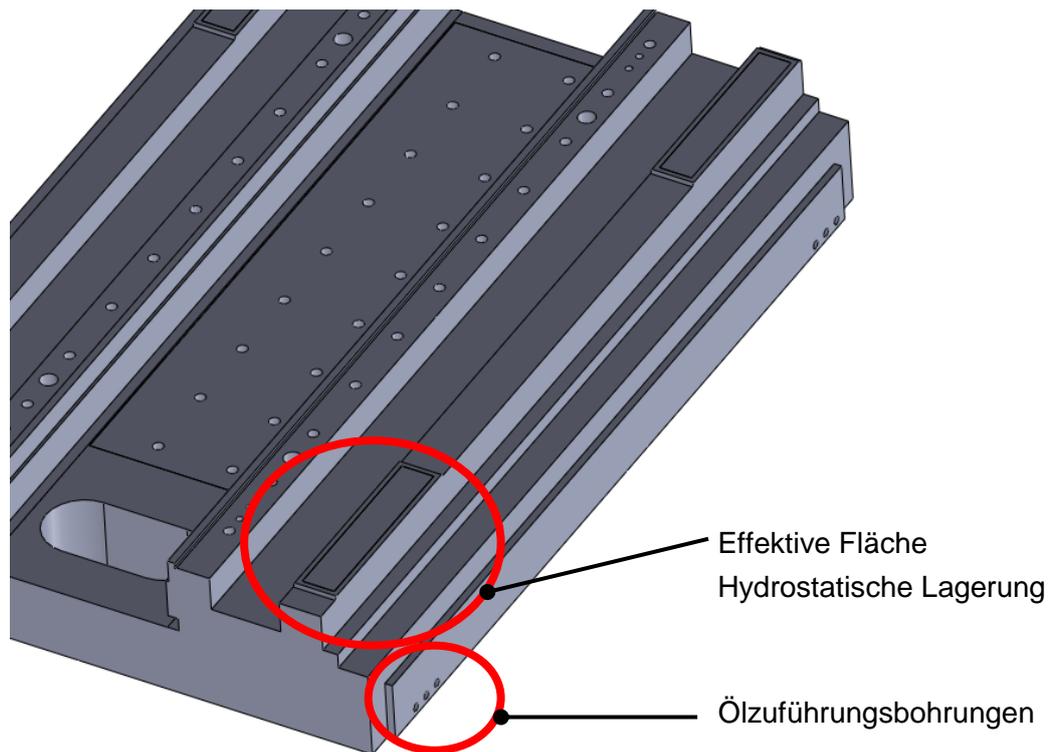


Abbildung 24: Vereinfachung hydrostatische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

Wie in Abbildung 24 gezeigt, werden die hydrostatischen Lager mittels einer effektiven Fläche  $A_{eff}$  modelliert.

Ein Augenmerk ist auf die Ölzuführungsbohrungen für die hydrostatischen Lager zu legen, da diese keinesfalls unterbrochen, beziehungsweise anderweitig beeinflusst werden dürfen. Das heißt, dass diese in vollem Umfang und ohne Vereinfachungen in der Simulation berücksichtigt werden. Diese befinden sich jeweils an den vier Ecken des Schlittens und sind dort je drei Mal vorhanden.

Weiters wird auf eine Modellierung der Verbindungsplatte von Linearmotor mit dem Schlitten verzichtet. Der Kraftangriff des Linearmotors erfolgt somit direkt am Schlitten.

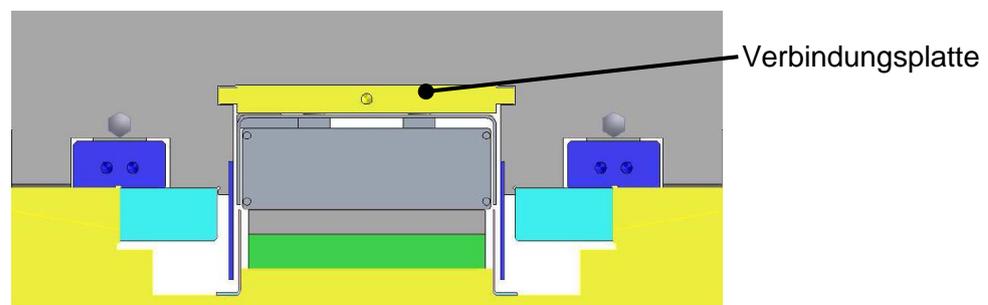


Abbildung 25: Verbindungsplatte, Quelle: Eigene Darstellung.

Der Gesamtaufbau mit den erwähnten und weiteren Vereinfachungen lässt sich wie folgt grafisch darstellen:

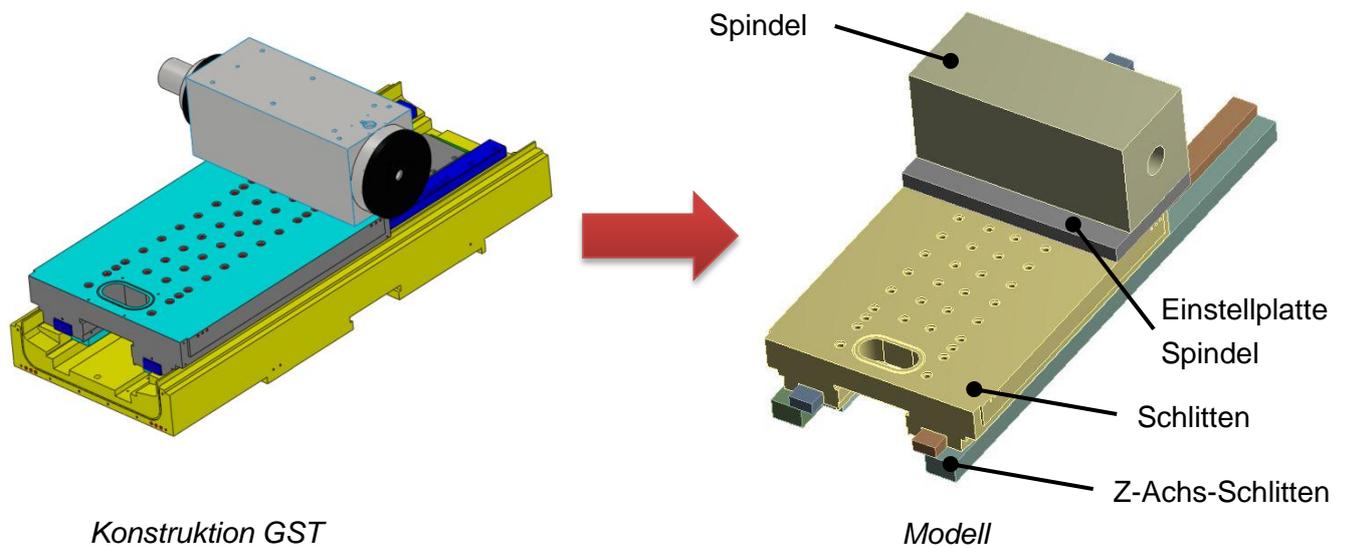


Abbildung 26: Vereinfachung Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

Für die exakte Ausrichtung betreffend der Distanz von Spindel zu Schlitten wird eine Einstellplatte benötigt. In erster Näherung wird diese als quaderförmige Platte mit 80 kg Eigengewicht modelliert. Die Spindel selbst wird durch eine Vereinfachung modelliert, welche einem Gewicht von 400 kg entspricht.

Der Z-Achs-Schlitten wird ebenfalls mit quaderförmigen Körpern modelliert. Die Kontaktbedingungen, warum diese Vereinfachung so ausgeführt ist und weitere detailliertere Informationen sind dem Kapitel 3.5.3 Kontakte und Verbindungen zu entnehmen.

## 3.5 FEM Simulation

Für die FEM Untersuchung des X-Achs-Schlittens kommt die Simulationssoftware ANSYS Workbench zum Einsatz.

ANSYS Workbench ist eine etablierte Software zur numerischen Simulation von Bauteilen in der Produktentwicklung. Der Umfang des Softwarepaketes enthält die gesamten Arbeitsschritte einer CAE-Simulation, kombiniert mit einer leistungsfähigen Simulationstechnologie für Strömungsmechanik, Strukturmechanik, Elektromagnetik, Multiphysik und Systemsimulation sowie Temperaturfelder.

### 3.5.1 Aufbereitung der Baugruppengeometrie

Unter Aufbereitung der Geometrie ist das Entfernen von nicht benötigten Geometrien, wie etwa Rundungen, Bohrungen oder auch das Einfügen von sogenannten Hilfs- Geometrien. In Absprache mit der Firma GST wurde festgelegt, welche Bohrungen beziehungsweise Geometrien unerlässlich sind.

Um bei der statisch-mechanischen Analyse den Kraftangriff des Linearmotors modellieren zu können, ist es notwendig an der Unterseite des Schlittens eine kleine Extrusion mit einem Wert von 0,01 mm anzubringen. Damit ist gewährleistet, dass nur jene Teile mit einer Belastung beaufschlagt werden, welche auch am realen Bauteil in Kontakt zueinander stehen.

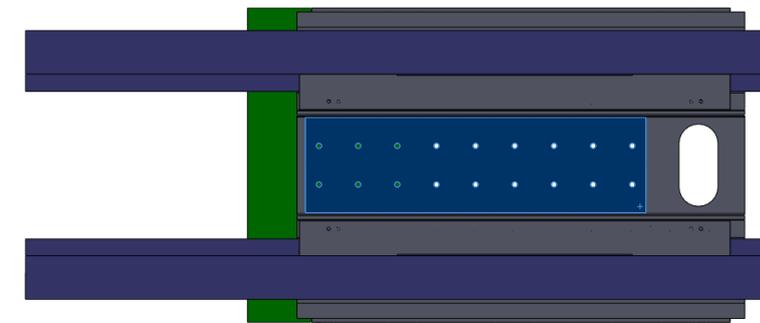


Abbildung 27: Vertiefung Linearmotor, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Beeinflussung der FEM Berechnungsergebnisse ist durch diese 0,01 mm Extrusion verschwindend klein und führt somit zu einem vernachlässigbaren Einfluss.

Für das Ansetzen der Druckkräfte im ANSYS Workbench ist es erforderlich, die hydrostatischen Lagerungen mittels einer Ersatzfläche  $A_{eff}$  zu modellieren. In Abbildung 28 ist dies ersichtlich. Die Tasche wird hierbei durch die rechteckige Fläche  $A_{eff}$  ersetzt.

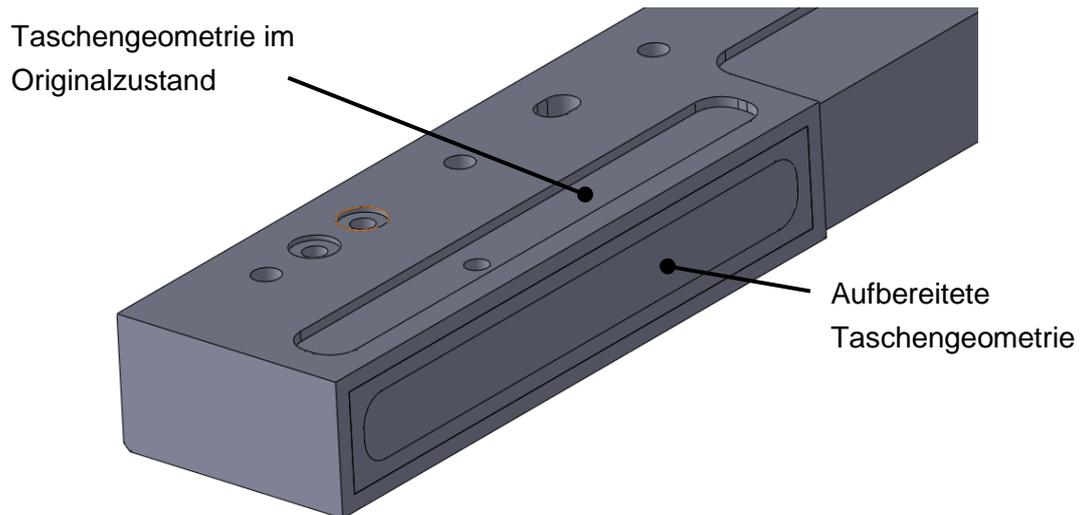


Abbildung 28: Vergleich Geometrie, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.5.2 Vernetzungsstrategie

Die Vernetzung ist das Zerlegen der Geometrie in Elemente. Dieses Zerlegen wird auch mit dem Begriff Diskretisierung beschrieben. Die einzelnen Elemente sind an den Eckknoten und soweit vorhanden an den Mittelknoten miteinander verbunden. Durch gestiegene Rechenleistung und Solverleistung können heute mehrere Millionen Knoten ohne Probleme berechnet werden.<sup>26</sup>

#### Verwendete Elemente

Für die Berechnung von Volumenmodellen in der strukturmechanischen Berechnung kommen sowohl Tetraeder Elemente, als auch Hexaeder Elemente mit linearem oder höheren Verschiebungsansatz zum Einsatz.<sup>27</sup>

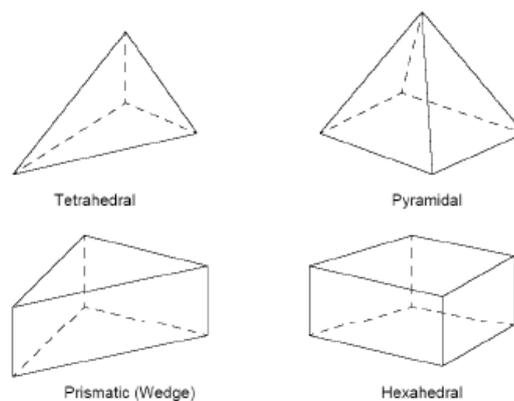


Abbildung 29: Volumenelemente, Quelle: Introduction to Ansys Meshing, Onlinequelle [31.08.2015].

<sup>26</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S.165.

<sup>27</sup> Vgl. Figel (2012), S. 49.

## Vernetzungsstrategien

Um möglichst genaue Berechnungsergebnisse zu erhalten, ist es notwendig das Netz an die Gegebenheiten anzupassen. Bezogen auf den X-Achs-Schlitten bedeutet dies, dass für diesen ein feineres Netz zu wählen ist, als etwa für den Spindelstock. Der Schlitten stellt die komplexeste Geometrie dar und ist auch das Grundelement der gesamten Baugruppe.

Für die Verfeinerung des Netzes stehen verschiedene Ansätze und Möglichkeiten zur Verfügung. Exemplarisch seien hier folgende für die Simulation verwendete Methoden genannt:

Die Methode „Hex Dominant“ eignet sich besonders für massive Bauteile wie es der X-Achs-Schlitten ist. Innerhalb eines Volumens erzeugt diese Methode einen Mix von Hexaedern, vorwiegend an der Oberfläche und Tetraedern mit Pyramiden im Kernbereich.<sup>28</sup>



Abbildung 30: Methode Hex Dominant, Quelle: Eigene Darstellung.

Unter Elementgröße versteht man die Dimension eines Elementes. Eine Reduzierung der Elementgröße ist mit einer Netzverfeinerung gleichzusetzen. Setzt man etwa die globale Netzdichte so weit herunter, dass zum Beispiel ein Spannungsverlauf gut abgebildet werden kann, so steigt unweigerlich die Anzahl der Knoten und Elemente stark an. Dies wiederum führt zu einer sprunghaften Erhöhung der Rechenzeit. Um das zu vermeiden setzt man auf lokale Netzverfeinerungen in Form der Elementgröße. Die Netzverfeinerung ermöglicht eine Definition der Elementgröße in mm für jedes Bauteil. Diese angesprochene Größe entspricht der durchschnittlichen Kantenlänge.<sup>29</sup>

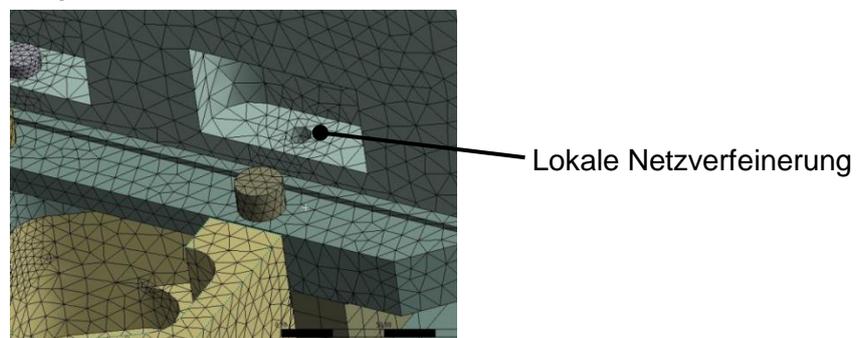


Abbildung 31: Elementgröße, Quelle: Eigene Darstellung.

<sup>28</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 174.

<sup>29</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 170 f.

Die Verfeinerung stellt eine weitere Möglichkeit der Netzanpassung dar. Wie in Abbildung 31 ersichtlich, ist dies zum Beispiel im Bereich von Bohrungen eine praktische Möglichkeit das Netz zu verfeinern. Des Weiteren führt diese Maßnahme auch zu einem exakteren Ergebnis.

### Kontrolle der Vernetzung

Hierbei ist darauf hinzuweisen, dass die Form der abgebildeten Elemente nur einen groben Einblick betreffend der Netzgüte darstellt.

Es ist also nicht zielführend zu sagen, dass ein rein aus Tetraeder Elementen bestehendes Bauteil die höchstmögliche Netzgüte aufweist. Den Verlauf der Spannungen prüft man am besten in der Darstellung mit Farbbändern. Unstetige Verläufe sind zu vermeiden, es sollte ein runder, glatter Verlauf vorhanden sein. Dies ist mit den bereits erwähnten Verfeinerungsmethoden erreichbar.<sup>30</sup>

Auch eine höhere Qualität der Berechnungsergebnisse ist mit einer guten Vernetzung erreichbar.

Eine weitere Möglichkeit die Vernetzung zu überprüfen ist der Vergleich von gemittelten und ungemittelten Spannungen. Dabei werden für jedes Element die Spannungen einzeln berechnet.

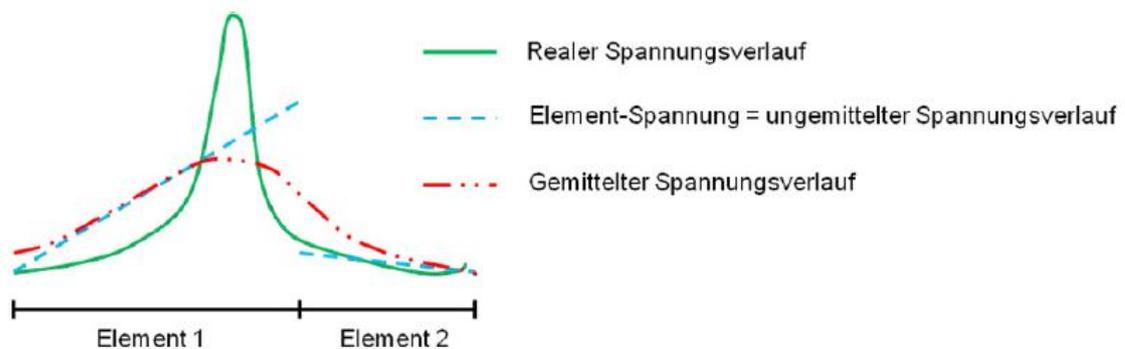


Abbildung 32: Bewertung der Netzgüte, Quelle: Gebhardt (2014), S. 178.

Mit diesen Spannungen wird anschließend eine gemittelte Spannung errechnet. Intern berechnen sich die Spannungen elementweise, das heißt, dass bei zu grober Vernetzung die Spannungen von Element zu Element stark schwanken.

Treten nun große Unterschiede zwischen der gemittelten und der ungemittelten Spannung ( der Elementspannung ) auf so ist davon auszugehen, dass der reale Spannungsverlauf nicht ausreichend genau abgebildet wird. Diese Differenz ist daher als Bewertungskriterium zulässig.<sup>31</sup>

<sup>30</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 176.

<sup>31</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 178.

## Netzdaten am Beispiel der Endvariante

Nachkommend einige detaillierte Daten betreffend der Vernetzung für die Endvariante. Um den Rahmen dieser Arbeit nicht zu überziehen behandelt dieser Unterpunkt die Eigenschaften des Netzes für die Endvariante.

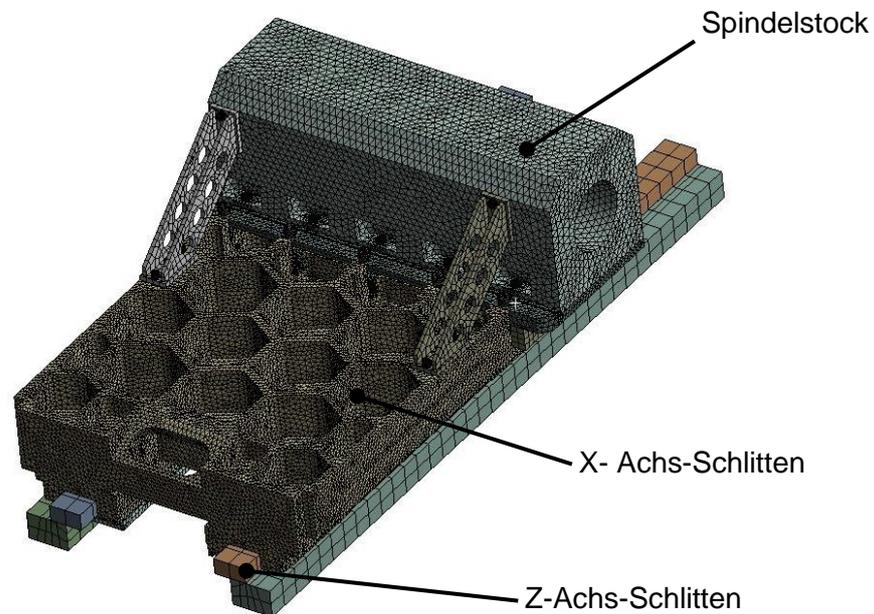


Abbildung 33: Vernetzung Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

Ersichtlich ist hierbei, dass für alle Bauteile eine möglichst hohe Netzgüte angestrebt wird. Bei komplexen Bauteilen wie etwa dem X-Achs-Schlitten ist es deshalb notwendig ein lokal feines Netz zu erstellen.

### Allgemeine Einstellungen

Physikvoreinstellung	Explizit
Glätten	Hoch
Übergang	Langsam
Knoten	238.676
Elemente	1.102.083

Für den X-Achs-Schlitten kommen die erwähnte Methode „Hex Dominant“ und „Elementgröße“ zur Anwendung.

Methode	Hex Dominant
Freies Flächennetz	Vierecke/ Dreiecke
Elementmittelnknoten	Beibehalten
Elementgröße	15 mm
Verhalten	Flexibel

In Abbildung 33 ist außerdem anschaulich die Abstrahierung des Z-Achs-Schlittens in Form von zwei Quadern dargestellt. Gut ersichtlich ist hier die Vernetzung mit zwei Elementschichten auf Grund der geometrischen Einfachheit der beiden Körper. Dies führt zu einer nahezu idealen Vernetzung. In ANSYS Workbench ist die Anzahl der Elementschichten frei definierbar. Diese angesprochene Vernetzung stellt die optimalste Form einer möglichen Vernetzung dar, ist aber bei Geometrien wie dem X-Achs-Schlitten auf Grund der komplexen Formgebung nicht erreichbar.

### 3.5.3 Kontakte und Verbindungen

Generell ist festzuhalten, dass beim Einspielen der Geometriedateien ANSYS Workbench selbstständig Kontakte erkennt und auch definiert. Hier ist jedoch Vorsicht geboten, denn es kommt teilweise zu falschen Kontaktverbindungen, das heißt es werden Kontakte an Stellen erzeugt an denen keine Kontakte von Bauteilen zueinander gegeben sind. Die theoretischen Grundlagen der einzelnen Kontaktbedingungen sind bereits im Kapitel 2.6 dieser Arbeit ausführlich erörtert worden.

Dieses Kapitel beschäftigt sich mit den Kontakten welche in der Endvariante der Simulation implementiert sind.

#### Verbund

Diese Kontaktbedingung kommt für die Abstrahierung des Z-Achs-Schlittens und bei der Modellierung der Schraubenkontakte zur Anwendung.

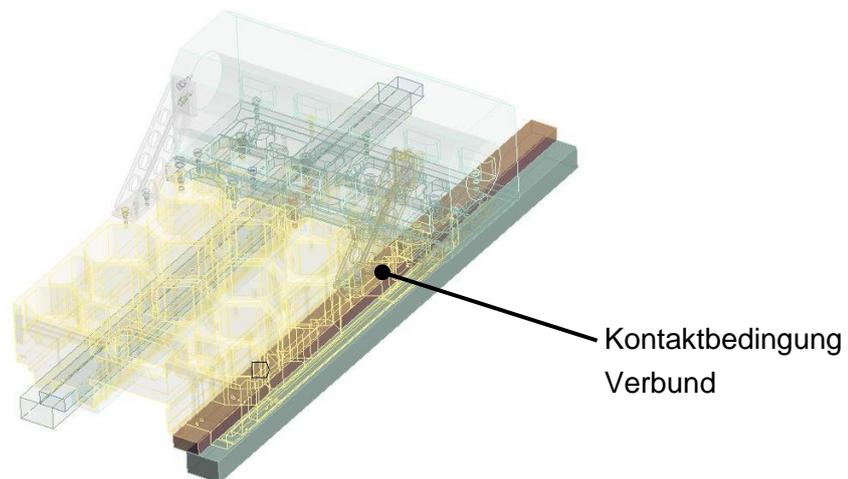


Abbildung 34: Verbund Z-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung.

Beim Z-Achs-Schlitten wird von starren Körpern ausgegangen. Daher stellt die Kontaktverbindung Verbund bei der Abstrahierung des Z-Achs-Schlittens, mit jeweils zwei quaderförmigen Körpern, eine der Realität entsprechenden Kontaktverbindung dar.

Bei Schraubverbindungen wird der Kontakt zwischen Schraubenschaft und Bohrung, das Gewinde mit der Gewindebohrung und die Auflagefläche des Schraubenkopfes mit verschiedenen Kontaktbedingungen modelliert.

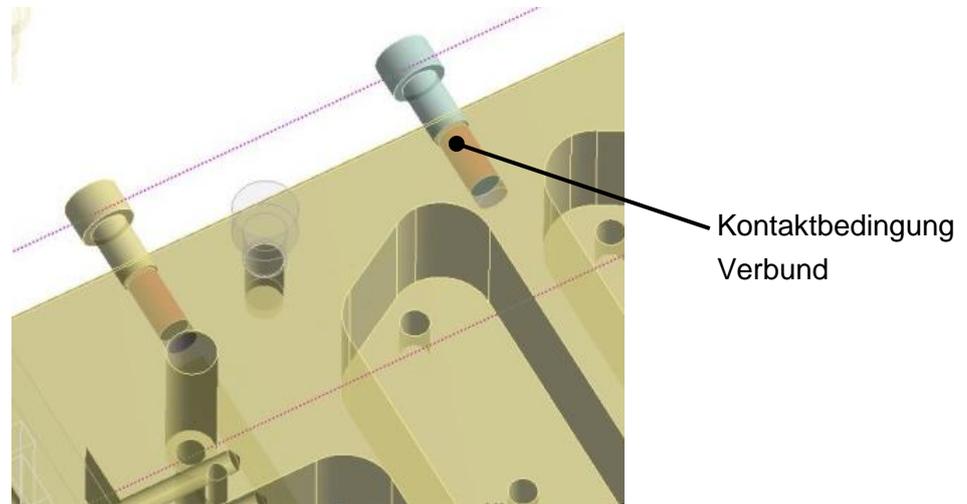


Abbildung 35: Verbund Schraube, Quelle: Eigene Darstellung.

Dazu ist es notwendig die Schraube bezogen auf ihre Geometrie anzupassen. Hierbei wird der gesamte Schaft der Schraube in einen Gewindeteil und in eine Zylinderfläche aufgeteilt.

Um die Schraubenvorspannung zu berücksichtigen wird die Schraubenvorspannung in die Schraube eingebracht. Dies geschieht an der Zylinderfläche der Schraube. Dazu wird in ANSYS Workbench diese angesprochene Zylinderfläche in zwei Teile aufgespaltet.

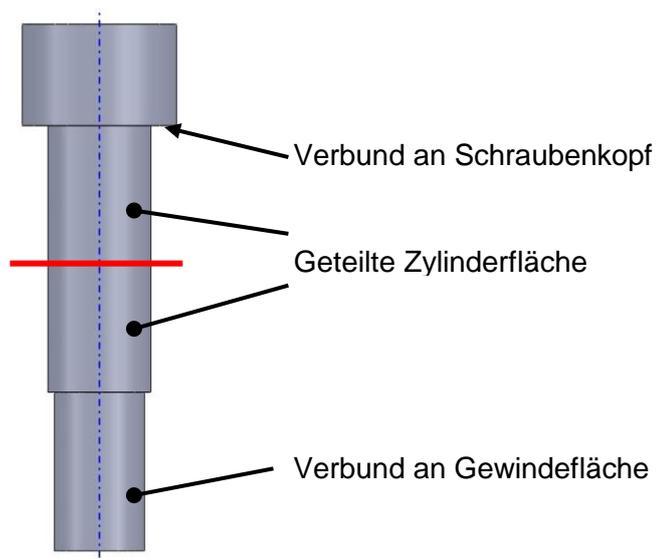


Abbildung 36: Modellierung Schraube. Quelle: Eigene Darstellung.

Das Gewinde selbst wird nicht dargestellt, sondern mit einer dementsprechenden Zylinderfläche modelliert. Die Modellierung des Gewindeteils und des Gegenstückes erfolgt mit einem Verbund Kontakt.

Für die Unterseite des Schraubenkopfes, also die Schraubenauflagefläche, kommt wiederum ein Verbund Kontakt zur Anwendung. Ein reibungsbehafteter Kontakt ist nicht zweckmäßig, da ein Verbund Kontakt eine ausreichende Annäherung an die Realität ermöglicht. Außerdem würde die Rechenzeit unnötigerweise verlängert werden.

### Reibungsfrei

Die reibungsfreie Kontaktbedingung kommt ausschließlich für die Modellierung der Hydrostatischen Lagerung zum Einsatz. Mit dieser Bedingung wird eine Vereinfachung getroffen, welche das Ergebnis jedoch nur gering beeinflusst. Es handelt sich dabei um einen abhebenden Kontakt, welcher reibungsfrei ist.

Es werden die Kontaktflächen des Hydrostatischen Lagers ausgewählt, welche der effektiv belasteten Fläche  $A_{eff}$  entsprechen.

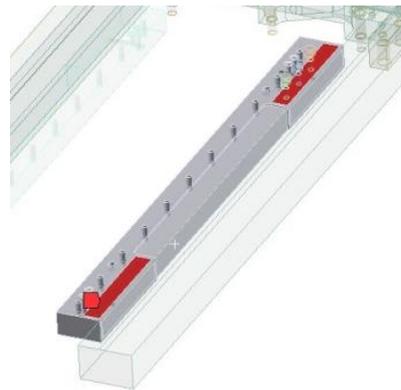


Abbildung 37: Reibungsfreier Kontakt Umgriff, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Beziehung des Schlittens zu dem Z-Achs-Schlitten wird ebenfalls mit einem reibungsfreien Kontakt modelliert.

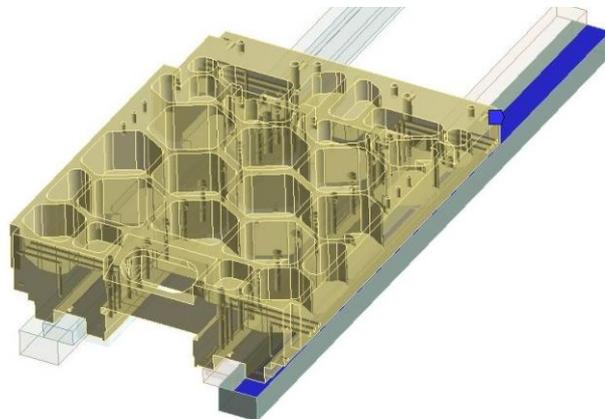


Abbildung 38: Reibungsfreier Kontakt Auflage, Quelle: Eigene Darstellung.

## Reibungsbehaftet

Für Bauteile, die zueinander in Bewegung sind kommt die reibungsbehaftete Kontaktbedingung in Frage. Dabei handelt es sich um einen abhebenden Kontakt, wobei der Reibfaktor einstellbar ist.

Diese Bedingung kommt bei der Zwischenplatte für die Höheneinstellung, die seitliche Abstützung, der Verbindung von Spindelstock und Zwischenplatte und den Streben zur Abstützung des Spindelstockes zur Anwendung. Exemplarisch ist in Abbildung 39 die Kontaktfläche für den reibungsbehafteten Kontakt von Zwischenplatte zum X-Achs-Schlitten ersichtlich.

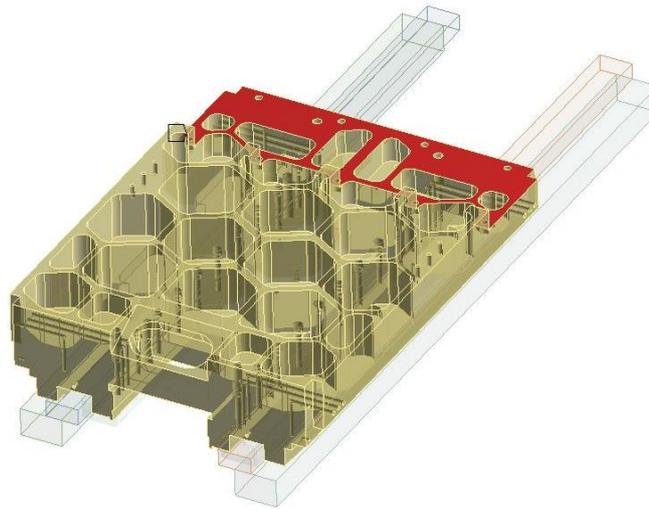


Abbildung 39: Reibungsbehafteter Kontakt, Quelle: Eigene Darstellung.

Als Haftreibungskoeffizient wird  $\mu = 0,15$  gewählt, ein in der Praxis üblicher Haftreibungskoeffizient von Stahl auf Stahl im trockenen Zustand.

Um ein möglichst der Realität entsprechendes Ergebnis zu erhalten setzt man reibungsbehaftete Kontakte ein. Dabei ist es aber notwendig das Gleiten der Kontaktpartner zueinander zu berücksichtigen. Das heißt, Bauteile die miteinander verschraubt sind müssen mit einer dementsprechend hohen Schraubkraftkraft beaufschlagt werden, damit eine kraftschlüssige Verbindung der Kontaktpartner zueinander vorhanden ist. Der Grund dafür liegt darin, dass damit eine Relativverschiebung der Komponenten zueinander vermieden wird.

In der vorliegenden Arbeit sind alle als reibungsbehafteter Kontakt ausgeführten Bauteile mit Schrauben verbunden. Werden solche Bauteile nur mit einem reibungsbehafteten Kontakt zueinander definiert, so treten Starr-Körper-Bewegungen auf, welche zu einem Fehler in der Simulation führen.

### 3.5.4 Hydrostatische Lagerung

Diese nimmt bei der Beschreibung der statisch–mechanischen Belastung einen eigenen Unterpunkt ein, da sich die Modellierung der hydrostatischen Lager als sehr aufwändig dargestellt hat. Dazu wurden verschiedene Gedankenmodelle beziehungsweise Lösungsansätze erarbeitet, welche in der Folge vorgestellt werden. Allgemein kann gesagt werden, dass hierbei zwei Hauptprobleme zu lösen sind. Dies sind die Modellierung der Hydrostatik und andererseits die Kontaktbedingung zwischen dem Schlitten und der Führung.

#### 3.5.4.1 Modellierung in ANSYS Workbench

Die Problematik betreffend der Modellierung hydrostatischer Lagerungen hat sich insofern gezeigt, dass nach intensiven Recherchen der ANSYS Hilfe, aber auch online im Customer Portal und diverser speziellen Foren keine zufriedenstellende Möglichkeit der Modellierung gefunden wurde.

Dies führte zu einer Kontaktaufnahme mit CADFEM, der Kundenvertretung für ANSYS Workbench in Deutschland und Österreich. Auf diesem Wege hat CADFEM mitgeteilt, dass die Modellierung hydrostatischer Lager mit ANSYS Workbench nur sehr schwer realisierbar ist. Dazu ist es notwendig eine iterative Schleife zu erstellen und den Druck  $p$  anhand der Spalthöhe  $h$  anzupassen. Dies macht es notwendig eine Co Simulation des Fluides zu erstellen, was wiederum nicht zielführend ist.

Von CADFEM selbst ist die Empfehlung den Z-Achs-Schlitten in Form eines nicht linearen Kontaktes als eigenes Bauteil zu modellieren.

Folgend ist der Weg von den ersten Überlegungen der Modellierung des hydrostatischen Lagers mit Federn, über eine elastische Lagerungsvariante bis hin zur verwendeten Methode des reibungsfreien Kontaktes beschrieben.

#### 3.5.4.2 Variante 1: Feder-Feder-System

Bei dieser Variante ist die Grundüberlegung, dass der Kontakt der Lagertasche mit dem Gegenstück, also der Gleitfläche, mit einem Feder–Feder System modelliert werden soll, also eine „Verbindung“ darstellt.

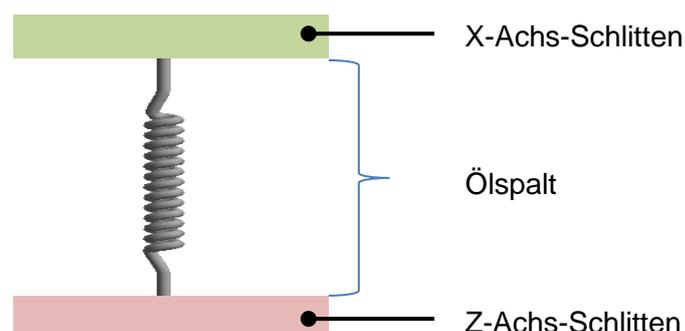


Abbildung 40: Feder-Feder System der Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

Dazu ist es notwendig die Längssteifigkeit umzurechnen und diese mit dem Volumen der Lagertasche und dem Volumen der  $A_{eff}$  bei verschiedenen Spalthöhen gleichzusetzen.

Da reale Flüssigkeiten kompressibel sind verhalten sich diese einem Druck ausgesetzt wie eine Feder. Das heißt: Je höher der Druck, umso mehr werden diese „Federn“ zusammengedrückt und umso kleiner wird ihr Volumen. Abhängig davon ob eine statische oder eine dynamische Belastung vorliegt kommt es zu einer Änderung der Spalthöhe. Daher ist es notwendig die Spalthöhe auszuregeln um die Höhe des Spaltes konstant zu halten.

Der Zusammenhang von Kraft, Weg und Steifigkeit ist folgend definiert:

$$F = c * x \quad (23)$$

Die Federsteifigkeit  $c$  für Öl erhält man aus folgendem Zusammenhang vom Querschnitt der Quersäule  $A$ , E- Modul von Öl und dem Volumen unter Druck:

$$c_{\text{öl}} = A^2 * \frac{E_{\text{öl}}}{V_0} \quad (24)$$

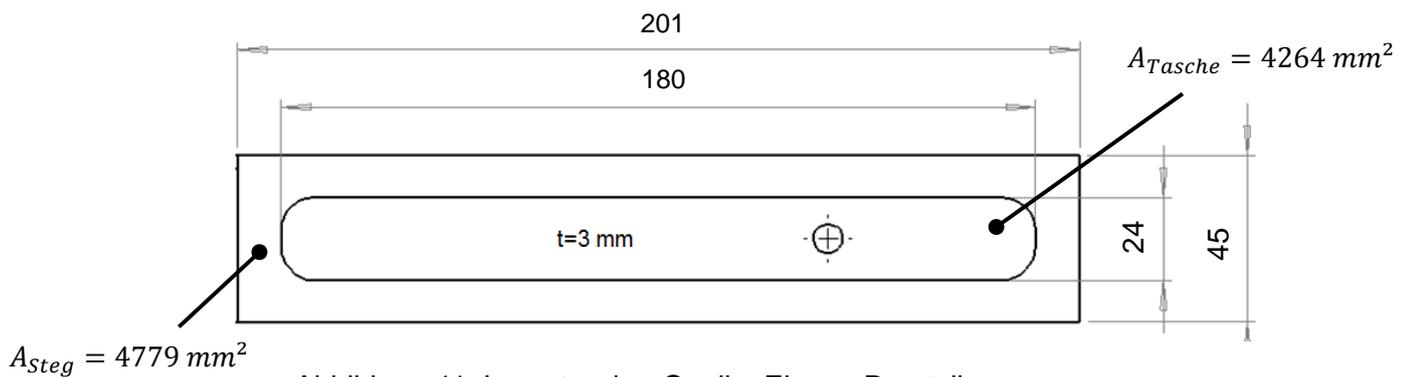


Abbildung 41: Lagertasche, Quelle: Eigene Darstellung.

$$A_{eff} = A_{Tasche} + A_{Steg} \quad (25)$$

$$A_{eff} = 9043 \text{ mm}^2$$

Spalthöhe 0  $\mu\text{m}$ : kein Ölfilm, Öl nur in Tasche

$$V_{Tasche} = t * A_{Tasche} \quad (26)$$

$$V_{Tasche} = 3 \text{ mm} * 4264 \text{ mm}^2$$

$$V_{Tasche} = 12\,792 \text{ mm}^3$$

Spalthöhe 15  $\mu\text{m}$ :

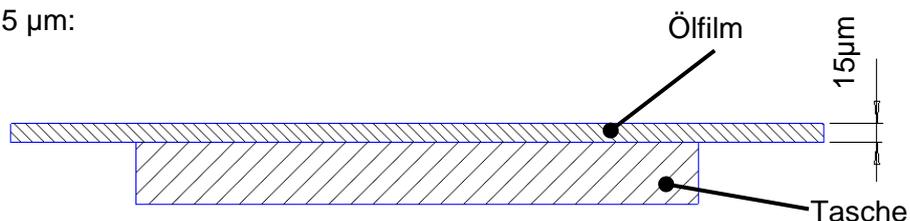


Abbildung 42: Volumen Spalthöhe, Quelle: Eigene Darstellung.

$$V_{Film} = 0,015 \text{ mm} * A_{eff} \quad (27)$$

$$V_{Film} = 135,64 \text{ mm}^3$$

$$V_{ges} = V_{Tasche} + V_{Film} \quad (28)$$

$$V_{ges} = 12792 \text{ mm} + 135,64 \text{ mm}$$

$$V_{ges} = 12927,6 \text{ mm}^3$$

Spalthöhe 12  $\mu\text{m}$ :

$$V_{Film} = 0,012 \text{ mm} * A_{eff}$$

$$V_{Film} = 108,51 \text{ mm}^3$$

$$V_{ges} = V_{Tasche} + V_{Film}$$

$$V_{ges} = 12792 \text{ mm} + 108,51 \text{ mm}$$

$$V_{ges} = 12900,5 \text{ mm}^3$$

Spalthöhe 10  $\mu\text{m}$ :

$$V_{Film} = 0,010 \text{ mm} * A_{eff}$$

$$V_{Film} = 90,43 \text{ mm}^3$$

$$V_{ges} = V_{Tasche} + V_{Film}$$

$$V_{ges} = 12792 + 90,43$$

$$V_{ges} = 12882,4 \text{ mm}^3$$

Die Berechnung der Federsteifigkeit für Öl folgt laut Formel 24:

Spalthöhe 0  $\mu\text{m}$ :

wobei  $V_0$  das Volumen von Tasche + Film darstellt

$$c_{\text{öl}} = A^2 * \frac{E_{\text{öl}}}{V_0}$$

$$c_{\text{öl}} = 9043 \text{ mm}^2 * \frac{14000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{12792 \text{ mm}^3}$$

$$c_{\text{öl}} = 9896,9 \text{ N/mm}$$

Spalthöhe 15  $\mu\text{m}$ :

$$c_{\text{öl}} = 9043 \text{ mm}^2 * \frac{14000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{12927,6 \text{ mm}^3}$$

$$c_{\text{öl}} = 9793,15 \text{ N/mm}$$

Spalthöhe 12  $\mu\text{m}$ :

$$c_{\text{öl}} = 9043 \text{ mm}^2 * \frac{14000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{12900,5 \text{ mm}^3}$$

$$c_{\text{öl}} = 9813,72 \text{ N/mm}$$

Spalthöhe 10  $\mu\text{m}$ :

$$c_{\text{öl}} = 9043 \text{ mm}^2 * \frac{14000 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}}{12882,4 \text{ mm}^3}$$
$$c_{\text{öl}} = 9827,5 \text{ N/mm}$$

Aus der Berechnung von  $c_{\text{öl}}$  für verschiedene Spalthöhen ist ersichtlich, dass die Abweichung bei ungefähr 1% liegt, das heißt  $c_{\text{öl}} = 9800 \text{ N/mm}$  wird gewählt.

Für die Modellierung im ANSYS Workbench wird für jede hydrostatische Lagertasche eine Feder eingesetzt, das Gegenstück dazu ist mit der Bedingung „starr“ eingebaut. Für die Längssteifigkeit wird der vorher gewählte Wert eingegeben.

## Ergebnis

Eine erste Simulation ergab sehr große Abweichungen zum erwarteten Ergebnis und hielt einer Plausibilitätskontrolle nicht stand. Da bei dieser Variante von einer konstanten Höhe des Spaltes ausgegangen wird, entspricht diese Annahme auch nicht exakt der Realität. Grund dafür ist, dass sich wie vorher beschrieben die Spalthöhe bei dynamischer Belastung ändert. Zusätzlich sorgt die außermittig angreifende Schleifkraft für eine nicht symmetrische Belastung, was in weiterer Folge dazu führt, dass Kräfte nicht nur in Achsrichtung der Feder, sondern auch in radialer Richtung auftreten. Diese radial auftretenden Kräfte an der Feder führen des Weiteren dazu, dass die Verbindung von X-Achs-Schlitten und Z-Achs-Schlitten in radialer Richtung belastet wird. Dies ist nicht zielführend und somit ist die Variante mit einem Feder-Feder-System für diese Aufgabe nicht geeignet.

### 3.5.4.3 Variante 2: Elastische Lagerung

Die Variante 2, in Form einer „elastischen Lagerung“, als Randbedingung für die hydrostatische Lagerung geht von der Überlegung aus, dass kein Feder-Feder-System die Verbindung zwischen den Körpern darstellt, sondern ein Kontakt in Form eines Ölfilms in Kombination mit dem Z-Achs-Schlitten.

Dabei wird als erstes versucht nur den Ölfilm mit einer Steifigkeit zu modellieren. Auf dieses Ersatzsystem setzt dann der X-Achs-Schlitten auf.

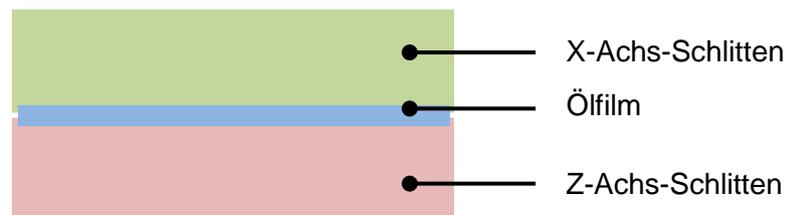


Abbildung 43: Variante Elastische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

ANSYS Workbench ermöglicht es, ein Anschlussstück mit einer Steifigkeit zu modellieren. Dabei wird die Steifigkeit in  $\text{N/mm}^3$  definiert. Dazu ist es notwendig die Federsteifigkeit von Öl, welche bereits in Variante 1 berechnet wurde und die Fläche miteinzubeziehen. Bei der Fläche handelt es sich um jene, an welcher die Lagerung definiert wird. In diesem Fall ist dies die effektive Fläche  $A_{eff}$ .

Die Berechnung der Basissteifigkeit für Öl ergibt folgendes Ergebnis:

$$\text{Basissteifigkeit} = \frac{c_{\text{Öl gewählt}}}{A_{eff}} = \frac{9800 \text{ N/mm}}{9043 \text{ mm}^2} = 1,08 \text{ N/mm}^3 \quad (29)$$

Dieser errechnete Wert wird in der Simulation als Randbedingung für die hydrostatische Lagerung verwendet. Eine erste Simulation hat sehr kleine und unrealistische Verformungen gezeigt.

Darauffolgend wird das Anschlussstück, welches den Z-Achs-Schlitten darstellt, in die Abstrahierung miteinbezogen. Das Fluid wird dabei nicht berücksichtigt. Mit den wirkenden Belastungen lässt sich eine Basissteifigkeit für den Z-Achs-Schlitten errechnen. Da in den Lagertaschen unterschiedliche Drücke wirken, ergeben sich für die jeweiligen Anschlussstücke unterschiedliche Einfederungswerte in  $\text{N/mm}^3$  für die elastische Lagerung. Diese liegen um ein Vielfaches über jenen von Öl. Eine Überprüfung dieser Einfederungswerte zeigt bereits, dass diese sehr hoch sind und sind somit in Frage zu stellen. Durch die hydrostatischen Lagertaschen an den Umgriffen ist es notwendig auch diese mit einer elastischen Lagerung als Randbedingung zu versehen. Problematisch ist dabei, dass die unterschiedlichen Belastungsrichtungen dazu führen, dass sich eine Verdrehung um die Horizontale am Z-Achs-Schlitten einstellt.

Das heißt, dass die unterschiedlichen Belastungsrichtungen der elastischen Lagerungen an den Lagertaschen zu einer Verfälschung der Ergebnisse führen.

Ein weiterer Aspekt liegt darin, dass es sich um ein ausgeglichenes System handelt. Man kann also davon ausgehen, dass die Spalthöhe konstant bleibt. Wird der Z-Achs-Schlitten mit einer elastischen Lagerung modelliert, kommt es zu einer Verschiebung der effektiven Fläche nach unten. Dies führt dazu, dass die Spalthöhe nicht konstant bleibt.

Zusätzlich zu diesen Abweichungen treten auch nicht nachvollziehbare Verformungen am Z-Achs-Schlitten auf. Diese sind auf die elastische Lagerung als Randbedingung am Umgriff zurückzuführen, welche das Ergebnis verfälschen. Alle diese Erkenntnisse führen dazu, dass es nicht zielführend ist eine Abstrahierung mit einer elastischen Lagerung vorzunehmen.

#### 3.5.4.4 Variante 3: Reibungsfreier Kontakt

Variante 3 verfolgt, wie Variante 2, die Überlegung dass mit einer Kontaktbedingung gearbeitet werden soll.

Da die genannten Varianten zu keinem brauchbaren Ergebnis geführt haben, geht die Überlegung hier nun dahingehend ob ein „reibungsfreier Kontakt“ einer Annäherung an ein hydrostatisches Lager genügt.

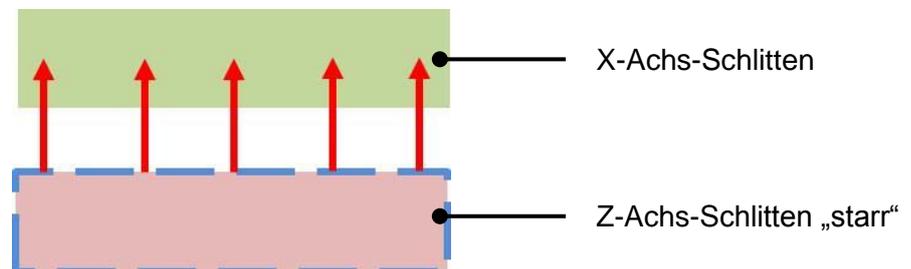


Abbildung 44: Reibungsfreier Kontakt Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

Setzt man voraus, im Gegensatz zu Variante 1 und Variante 2, dass die Unterlage „starr“ ist, kann man davon ausgehen, dass sich das Bauteil beim Ausströmen von Öl, von der Unterlage abhebt, also ein abhebender Kontakt vorherrscht. Unter abhebenden Kontakt versteht man dabei, dass sich der X-Achs-Schlitten vom Z-Achs-Schlitten abheben kann. Den Abstand der beiden Schlitten zueinander stellt dabei die Spalthöhe dar, da diese konstant ist wenn von einem ausgeglichenen System ausgegangen wird. Zusätzlich stellt man sich die Frage ob Kräfte in Normalrichtung übertragen werden können. Da Öl nur Druckkräfte und keine Zugkräfte überträgt, ist diese Frage damit zu beantworten, dass nur Druckkräfte übertragen werden.

Eine weitere Überlegung ist dahin gehend, dass im geregelten statischen Fall eine theoretisch unendliche Steifigkeit des Regelkreises vorherrscht. Dies führt zu einer immer konstanten Spalthöhe. Daher ist es zulässig den reibungsfreien Kontakt als Randbedingung

einzusetzen. Da der Z-Achs-Schlitten als starres Modell abstrahiert wird, stellt sich nach unten, also in Richtung des Z-Achs-Schlittens keine Verschiebung ein.

Auch die Annahme „reibungsfrei“ lässt sich wie folgt begründen: Der X-Achs-Schlitten und der Z-Achs-Schlitten sind mittels eines Ölfilms voneinander getrennt. Dies führt dazu, dass ein nahezu reibungsfreier Kontakt zwischen den Bauteilen herrscht, da die Scherspannungen im Fluid sehr klein sind. Aus diesem Grund ist die reibungsfreie Annahme zulässig.

Ein erster Versuch mit einem „starren“ Z-Achs-Schlitten Modell und dem darauf aufliegenden X-Achs-Schlitten hat Ergebnisse geliefert, welche absolut als plausibel und realistisch eingestuft werden können.

### **Gegenüberstellung der möglichen Modellierungsvarianten:**

Aus den beschriebenen Gründen fallen Variante 1 und Variante 2 aus. Die Abstrahierung der hydrostatischen Lager im ANSYS Workbench erfolgt somit mit einem reibungsfreien Kontakt.

### 3.5.5 Statisch - mechanische Analysemethode

Die auftretenden Belastungen wurden bereits in Kapitel 3.2 angeführt und näher beschrieben. Dieses Kapitel beschäftigt sich nun mit der Implementierung der Belastungen am Bauteil in ANSYS Workbench.

Grundsätzlich stellt ANSYS Workbench für die Solversteuerung verschiedene Solver Typen zur Verfügung. Beim hier eingesetzten Solver Typ handelt es sich um einen direkten Solver. Da der Z-Achs-Schlitten als starr angenommen wird. Ist es notwendig die Geometrie für den Z-Achs-Schlitten hinsichtlich seiner Werkstoffeigenschaften zu adaptieren. Um die Voraussetzung „starr“ zu erreichen, ist es notwendig die Materialeigenschaften zu modifizieren. Bei der Zuordnung des Materials in ANSYS Workbench verwendet man Stahl mit einem Standard E-Modul von 210.000 N/mm<sup>2</sup>. Multipliziert man diesen um eine mehrfache zehner Potenz, so erhält man einen sich quasi nicht mehr verformenden Werkstoff, welcher mit der Eigenschaft „starr“ gleichzusetzen ist.

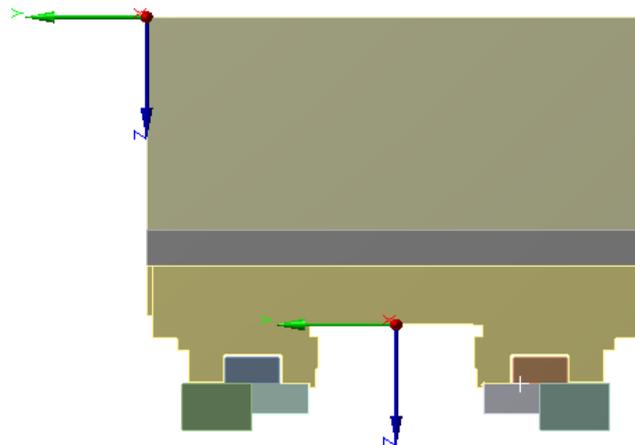


Abbildung 45: Koordinatensysteme, Quelle: Eigene Darstellung.

Weiters ist es notwendig zusätzliche Koordinatensysteme in die Simulation einzubauen. Einerseits aus Handhabungsgründen, andererseits aber auch um etwa Kraftangriffspunkte an bestimmten Stellen zu ermöglichen.

Die „Fixierte Lagerung“ verhindert die Bewegung und Verformung einer Fläche, einer Kante oder eines Punktes. Bei der Lagerung von Punkten erfolgt keine Momentenaufnahme, man spricht von einer drehweichen Lagerung. Auch entlang einer Kante wird kein Moment bei einer Lagerung aufgenommen.<sup>32</sup>

Die Auswahlflächen für die fixierte Lagerung befinden sich auf der Unterseite der Z-Achs-Schlitten Abstrahierung. Alternativ wäre es auch möglich die Stirnflächen zu wählen, da der Z-Achs-Schlitten als „starr“ angenommen wird.

<sup>32</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 194.

Anstelle einer Kraft oder eines Druckes kann auch eine sogenannte vorgegebene Verschiebung definiert werden. Werden alle drei Verschiebungskomponenten festgehalten, ist das Bauteil über die ausgewählte Fläche komplett eingespannt. Wählt man für den Verschiebungswert in eine der drei Koordinatenrichtungen Null, ist das Bauteil in diese Richtung gelagert. Hier ist der Schlitten in X-Richtung gelagert, aber in der Y- sowie Z-Richtung frei beweglich.<sup>33</sup>

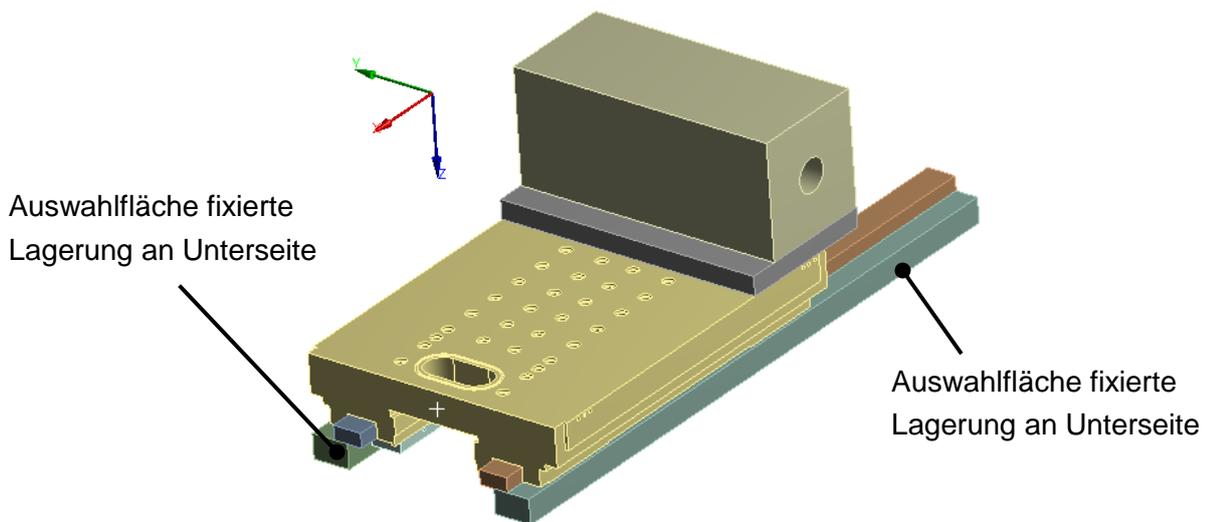


Abbildung 46: Auswahlflächen fixierte Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.

Im weiteren Verlauf der Arbeit ist es erforderlich neben den bereits erwähnten Kräften auch die Schrauben beziehungsweise deren Vorspannkraft zu berücksichtigen. Hierzu ist es nötig die Anzahl der Lastschritte auf zwei zu erhöhen.

Tabellarische Daten				
	Schritte	<input checked="" type="checkbox"/> Definiert durch	<input checked="" type="checkbox"/> Vorspannkraft [N]	<input checked="" type="checkbox"/> Vorspannweg [mm]
1	1,	Vorspannkraft	26336	Nicht zutreffend
2	2,	Sperrern	Nicht zutreffend	Nicht zutreffend
*				

Abbildung 47: Lastfälle Schraubenvorkraft, Quelle: Eigene Darstellung.

Im ersten Lastschritt wird für die dementsprechende metrische Schraube die Schraubenvorspannkraft definiert und gleichzeitig müssen die äußeren Kräfte, welche auf die Baugruppe wirken deaktiviert werden. Dies ist unter anderem zwingend um den Vorspannweg der Schraube als Längenänderung zu ermitteln. Im zweiten Lastschritt erfolgt eine Sperrung der Vorspannkraft. Gleichzeitig wirken hier nun die äußeren Belastungen, welche die in der Schraube wirksamen Kräfte erhöhen oder verringern.

<sup>33</sup> Vgl. Gebhardt (2014), S. 194.

Die Berechnung der statisch-mechanischen Analyse ergibt eine Lösung, wobei hier allerdings eine Vielzahl von Möglichkeiten vorhanden sind um diese darzustellen. Diese Arbeit beschränkt sich auf die Gesamtverformung und die Vergleichsspannungen.

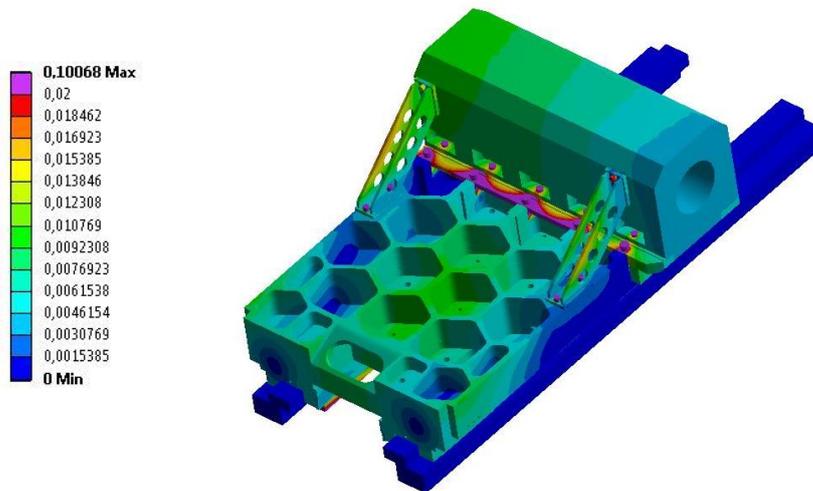


Abbildung 48: Gesamtverformung anhand Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

Je nach Verformungsgrad kommen unterschiedliche Farbbänder zum Einsatz. In diesem Fall deuten blaue Farbbänder auf geringe Verformungen und violette Farbbänder auf große Verformungen hin.

### 3.5.6 Modalanalyse

Die Modalanalyse stellt in ANSYS Workbench die Grundlage dar um Schwingungsprobleme genauer zu untersuchen.

Es ist zu bedenken, dass der abstrahierte Z-Achs-Schlitten, in Form von starren Quadern, zusätzlich mit einer „fixierten Lagerung“ zu versehen ist. Das verhindert ein Abdriften der gesamten Baugruppe im Raum und somit verfälschte Simulationsergebnisse.

Ausgehend von der gewünschten Anzahl der zu ermittelnden Eigenformen werden diese grafisch dargestellt. In der Abbildung unterhalb sind exemplarisch die ersten zehn Eigenformen und die dazugehörigen Frequenzen ersichtlich. Auf Details bezüglich deren Größenordnung wird hier nicht eingegangen. Es wird auf die kommenden Kapitel verwiesen, in welcher die entwickelten Varianten genau beschrieben werden.

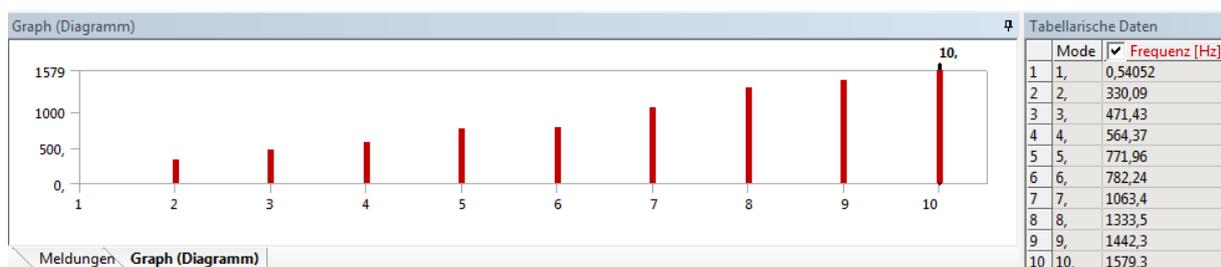


Abbildung 49: Eigenformen ermittelt aus Modalanalyse, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.5.7 Harmonische Analyse

Erfolgt zum Beispiel eine sinusförmige angeregte Belastung, so ist es möglich mit der harmonischen Analyse diese Belastung auszuwerten.

Um die Amplitude über die Frequenz darzustellen definiert man einen sogenannten Frequenzgang. Dabei ist zu beachten in welcher Richtung man etwa die Verformung auswerten möchte.

Für das darstellen der Frequenz an der Vorderseite des Spindelstockes ist es notwendig, die vorhandene Schleifkraft als periodisch auftretende Belastung in die Simulation einzuarbeiten. Bis zu diesem Zeitpunkt wird nur eine statische Belastung der Schleifkraft angenommen. Mit dem Aufbringen von periodisch wirkenden Schleifkräften wird der Einfluss auf das Berechnungsergebnis untersucht.

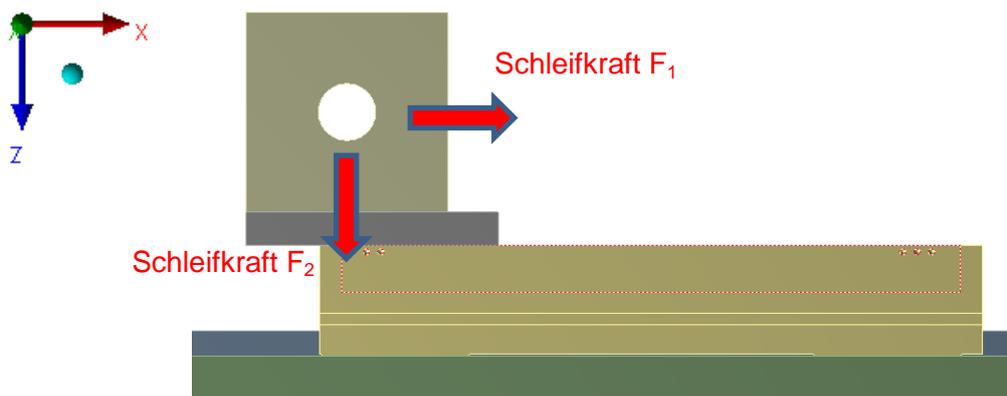


Abbildung 50: Periodisch wirkende Schleifkraft, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Anregung der Kraft  $F_2$  erfolgt mit einem um  $90^\circ$  verschobenen Phasenwinkel. Mit dieser um  $90^\circ$  verdrehten Kraft wird eine rotierende Unwucht simuliert. Diese rotierende Unwucht stellt die Unwucht der Schleifscheibe dar. Die Abstrahierung der angesprochenen Unwucht wird mit einem um den Phasenwinkel von  $90^\circ$  verschobenen Sinus bewerkstelligt.

Die Auswertung dieser zwei Kräfte für die Auswerterichtung, zum Beispiel in X-Richtung, ergibt folgenden Zusammenhang von Amplitude und Frequenz, sowie Phasenwinkel und Frequenz:

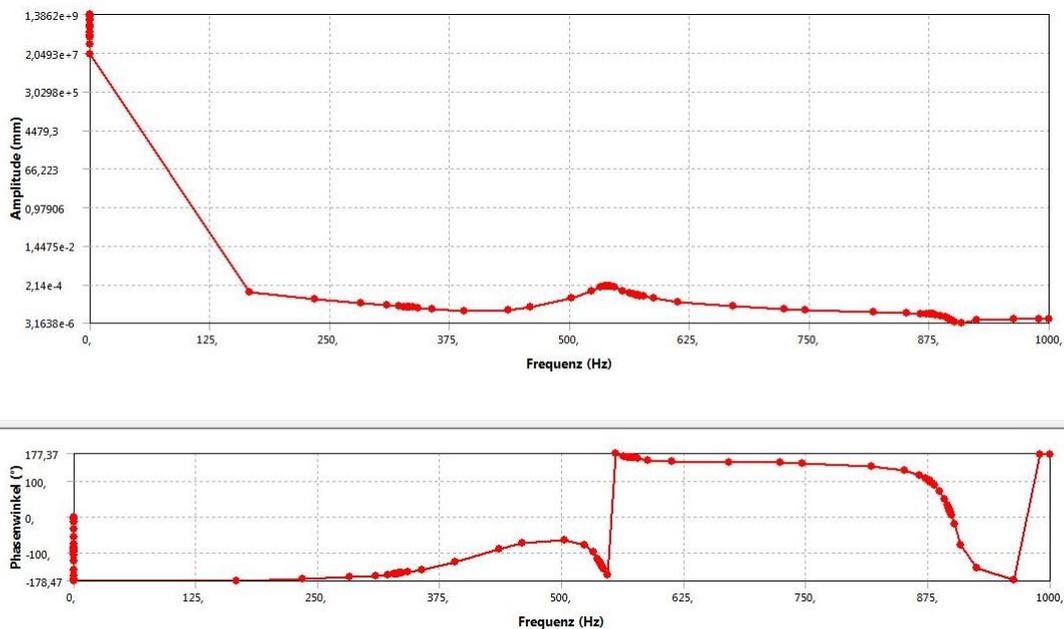


Abbildung 51: Beschreibung Amplitude und Phasenwinkel, Quelle: Eigene Darstellung.

In der Abbildung ist ersichtlich bei welchen Eigenfrequenzen hohe Amplituden in X-Achsen-Richtung auftreten. Bei ca. 550 Hz tritt eine Eigenfrequenz auf, welche einen leichten Anstieg der Amplitude bewirkt. Die Amplitude ist sehr klein und dementsprechend vernachlässigbar. Die Werte der Amplitude, welche man aus der Berechnung erhält, lassen jedoch keine quantitativen Aussagen zu. Diese stellen qualitative Werte dar. Als Grund dafür sind Vereinfachungen wie etwa in Bezug auf das Dämpfungsverhalten der gesamten Baugruppe zu nennen.

Die harmonische Analyse wird für alle Konstruktionsvarianten im Entwicklungsprozess durchgeführt. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass sich die auftretenden Amplituden bei allen Varianten in etwa im gleichen Wertebereich bewegen.

## 3.6 Prozedere der Variantenentwicklung

Für jede zu untersuchende Variante wird zuerst eine 3D-Baugruppe mit Solid Works erstellt und anschließend in ANSYS Workbench eingespielt.

Dabei wird nicht nur der Schlitten selbst für jede Variante neu adaptiert, sondern auch, je nach Entwicklungsfortschritt zusätzliche Bauteile. Betreffend der statisch-mechanischen Analyse wird für jede Variante die Gesamtverformung und die Vergleichsspannung ermittelt. Außerdem erfolgt eine Schwingungsbetrachtung der Konstruktion mittels einer Modalanalyse.

Um den Rahmen dieser Schrift nicht zu überziehen, werden in diesem Kapitel nur die aussagekräftigsten Konstruktionsvarianten des Schlittens näher beschrieben. Diese geben jedoch einen vollständigen Einblick in den Entwicklungsprozess, beginnend bei der Variante der Firma GST, bis hin zur schlussendlich umgesetzten Variante. Alle weiteren erarbeiteten Varianten sind dem Anhang zu entnehmen.

### 3.6.1 Konstruktion GST

Für die Erarbeitung einer neuen Schlittenkonstruktion ist es notwendig den aktuellen IST-Zustand zu erfassen und zu beurteilen.

Da von der Firma GST noch keine FEM Berechnungen bezüglich des aktuellen Schlittens angestellt worden sind, ist ein erster Schritt die Untersuchung des vorläufig geplanten Schlittens.

Bei diesem X-Achs-Schlitten handelt es sich um folgende Konstruktion:

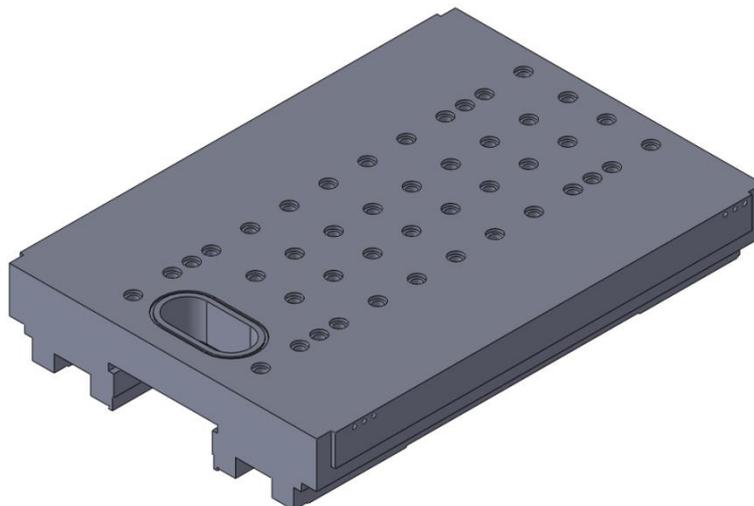


Abbildung 52: X-Achs-Schlitten GST, Quelle: Eigene Darstellung.

Folgende Parameter fließen in die Simulation ein:

- Berücksichtigung der Zwischenplatte und Spindel
- Masse Schlitten: 498 kg

Auf Grund des ursprünglichen Entwicklungsstandes der Forschungsschleifmaschine war die Ausführung der Zwischenplatte noch von mehreren Unsicherheitsfaktoren getragen. Dies führt dazu, dass für eine erste Annäherung eine Zwischenplatte mit einer Geometrie verwendet wurde, welche noch keine Ausnehmungen oder Bohrungen besitzt.

In Abbildung 53 sind die Gesamtverformungen ersichtlich. Erwartungsgemäß treten nur sehr kleine Verformungen auf. Größere Verformungen befinden sich in der Mitte des Schlittens, an jener Stelle wo der Linearmotor befestigt ist.

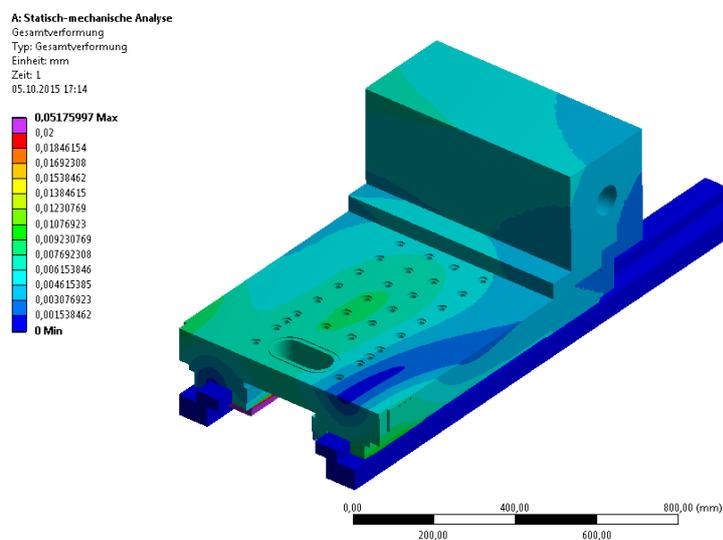


Abbildung 53: Gesamtverformungen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Betrachtung der Vergleichsspannungen ergibt folgende Darstellung der auftretenden Spannungen.

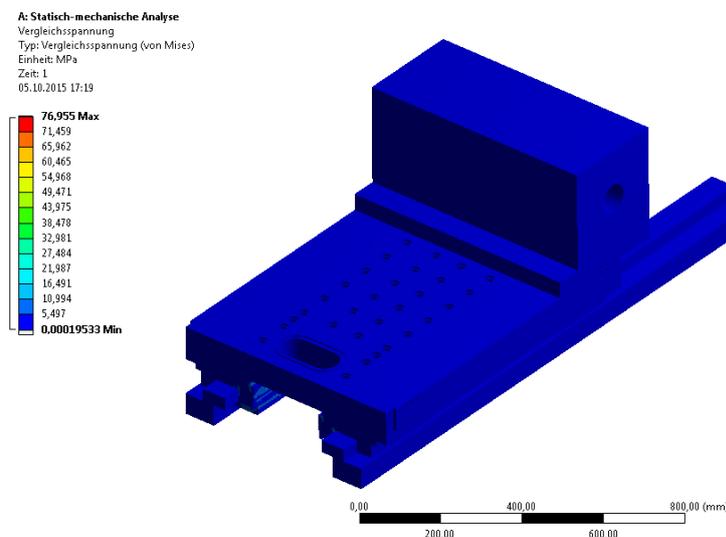


Abbildung 54: Vergleichsspannungen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung.

Die maximalen Spannungen liegen bei allen erstellten Konstruktionsvarianten zwischen 60 – 80 N/mm<sup>2</sup>. Dies stellt eine absolut ausreichende Sicherheit bezogen auf die Streckgrenze von Stahl dar.

Diese Ergebnisse für die Spannungen waren zu erwarten und stellen somit auch eine Plausibilitätskontrolle dar.

Die Schwingungsbetrachtung in Form einer Modalanalyse kommt zu folgenden Ergebnissen.

Eigenform	Frequenz [Hz]
1.	0
2.	258,35
3.	424,25
4.	565,63
5.	645,56
6.	721,26
7.	818,65
8.	970,35
9.	993,53
10.	1035,20

Tabelle 1: Eigenformen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung.

Bezogen auf die Schwingungsbetrachtung in Kapitel 3.3 sind folgende Frequenzwerte als kritische Werte auszumachen:

#### *Pendelhubbewegung*

⇒ **2 Hz** Anregungsfrequenz

#### *Drehzahl Schleifscheibe*

⇒ **23 Hz** (bei  $v_c = 50$  m/s)

⇒ **140 Hz** (bei  $v_c = 300$  m/s)

Betrachtet man die Absolutwerte der von der Firma GST konstruierten Schlittenvariante, so ist ersichtlich, dass bereits die zweite Eigenform einen Wert von 258,35 Hz annimmt, also über der kritischen Frequenz von 140 Hz liegt.

Damit lässt sich die Aussage treffen, dass das Ziel höhere Eigenfrequenzen als die berechneten Frequenzen zu erreichen bei der Ausführung der Firma GST gegeben ist.

### 3.6.2 Variante Rippen

Für die Variante mit Rippen erfolgt auf Grundlage des GST Schlittens eine erste Adaptierung. Ausnehmungen an der Stirnseite und Rückseite, sowie Rippen mit Verstrebungen charakterisieren diese Variante.

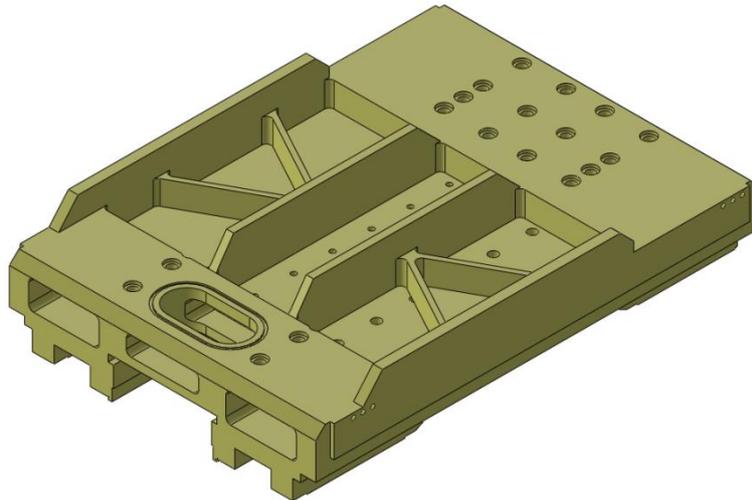


Abbildung 55: Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Rippen in Längsrichtung sind erhöht ausgeführt. Dies hat einen positiven Einfluss auf das Widerstandsmoment, da die Höhe  $h$  mit der zweiten Potenz in dieses eingeht, was sich in weiterer Folge auch auf die Steifigkeit des Schlittens positiv auswirkt.

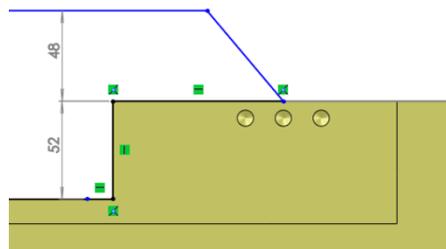


Abbildung 56: Erhöht ausgeführte Rippen, Quelle: Eigene Darstellung.

Folgende Parameter fließen in die Simulation ein:

- Berücksichtigung der Zwischenplatte und Spindel
- Materialentfernung vor allem im mittleren Bereich des Schlittens
- Erhöhte Rippen
- Masse Schlitten: 379 kg

Die FEM Berechnung für die Gesamtverformung liefert folgendes Ergebnis:

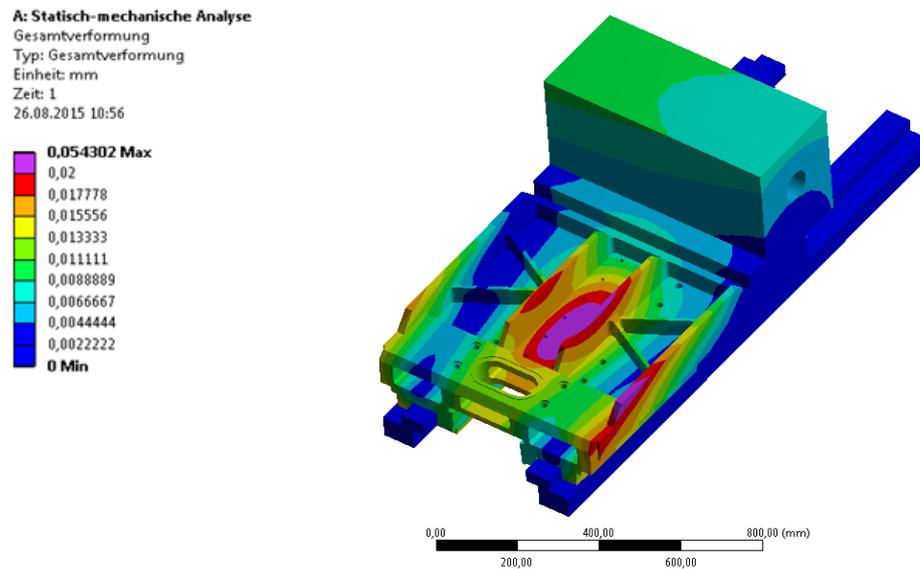


Abbildung 57: Gesamtverformung Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung.

Im Vergleich zu der Variante der Firma GST ist eine Schwächung der Struktur im mittleren Bereich erkennbar, was auf eine verminderte Steifigkeit schließen lässt. Außerdem ist die hohe Verformung an den zwei Längsrippen in der Mitte erkennbar, diese haben die Tendenz nach innen zu klappen.

Die Schwingungsbetrachtung führt auch hier zur Erkenntnis, dass die auftretenden Frequenzen nicht in den kritischen Bereichen, sondern darüber liegen.

Eigenform	Frequenz [Hz]
1.	0,5786
2.	323,16
3.	414,90
4.	510,86
5.	748,89
6.	752,27
7.	778,41
8.	829,99
9.	998,43
10.	1128,70

Tabelle 2: Eigenformen Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.6.3 Variante Rippen mit Abstützung

Aus den Ergebnissen der vorhin angeführten Variante folgt die Überlegung, dass es sinnvoll ist, das nach innen Klappen der zwei Längsrippen zu vermeiden. Dies sollte auch positive Auswirkungen auf die Verformung und Steifigkeit des Schlittens haben.

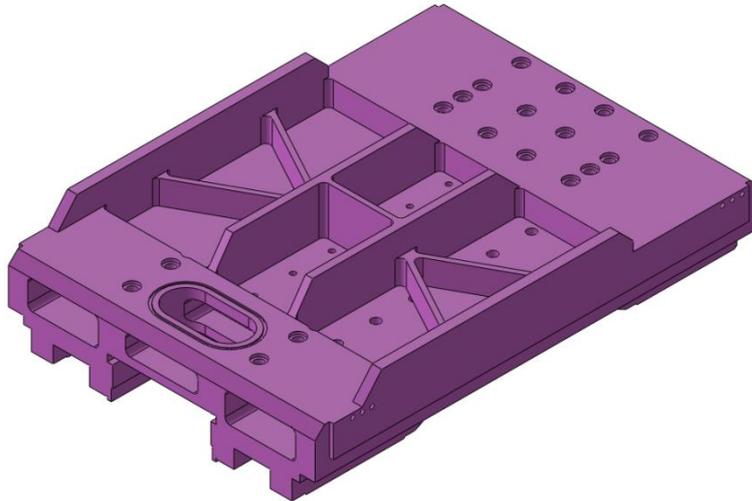


Abbildung 58: Variante Rippen mit Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung.

Folgende Parameter fließen in die Simulation ein:

- Berücksichtigung der Zwischenplatte und Spindel
- Materialentfernung vor allem im mittleren Bereich des Schlittens
- Querversteifung im Bereich hoher Verformungen
- Masse Schlitten: 381 kg

**A: Statisch-mechanische Analyse**  
Gesamtverformung  
Typ: Gesamtverformung  
Einheit: mm  
Zeit: 1  
26.08.2015 10:52

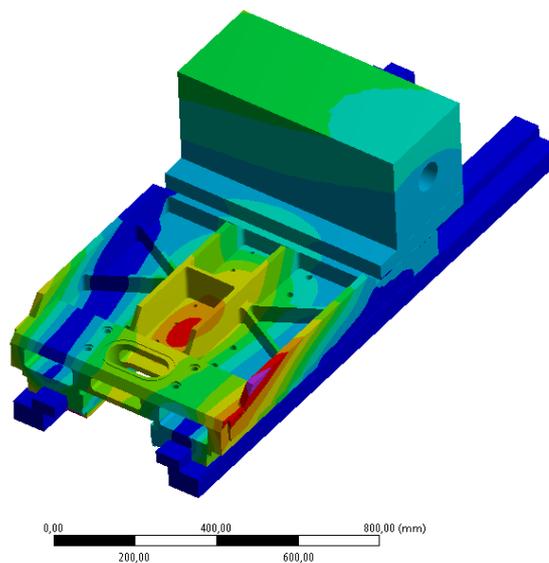
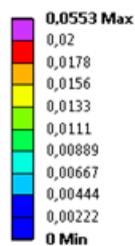


Abbildung 59: Gesamtverformung Variante Rippe Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung.

Um die Stabilität der zwei innen liegenden Längsrippen zu erhöhen wird im inneren Bereich eine Querabstützung in Form einer zusätzlichen Rippe angebracht. Diese Rippe ist um 90° verdreht und im Bereich der größten Verformungen angebracht.

Betrachtet man das Ergebnis der Gesamtverformungen, so ist der positive Einfluss dieser zusätzlichen Rippe auf die Verformung klar ersichtlich. Es ist nun nur mehr ein kleiner roter Farbbereich vorhanden, welcher auf geringere Verformungen schließen lässt.

Auch hier erfolgt eine Analyse der Eigenformen. Abermals ist aus den gewonnenen Werten ersichtlich, dass keine Gefahr in Bezug auf die Anregungsfrequenz durch den Pendelhub beziehungsweise durch die Anregungsfrequenzen der Schleifscheibe gegeben ist.

Eigenform	Frequenz [Hz]
1.	0,5787
2.	323,35
3.	414,00
4.	513,71
5.	749,19
6.	753,76
7.	778,93
8.	830,01
9.	998,86
10.	1129,80

Tabelle 3: Eigenformen Variante Rippen mit Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.6.4 Variante Schachbrettmuster

Weitere Überlegungen und die gesammelten Erkenntnisse aus den bisherigen Varianten führen zu einem Ergebnis, welches einem Schachbrettmuster ähnelt. Im Grunde handelt es sich dabei immer noch um eine mit Rippen in Längsrichtung ausgeführte Konstruktion, jedoch werden hier die einzelnen Rippen durch Querrippen gestützt. Dadurch soll der Effekt aus der Variante mit der Abstützung genutzt werden.

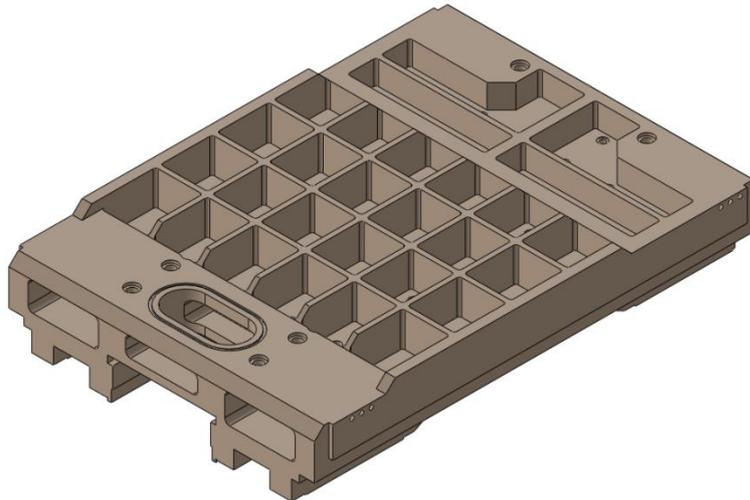


Abbildung 60: Variante Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung.

Folgende Parameter fließen in die Simulation ein:

- Berücksichtigung der Zwischenplatte und Spindel
- Schachbrettmuster
- Im hinteren Bereich geometrische Anpassungen, dadurch Gewichtseinsparung
- Masse Schlitten: 346 kg

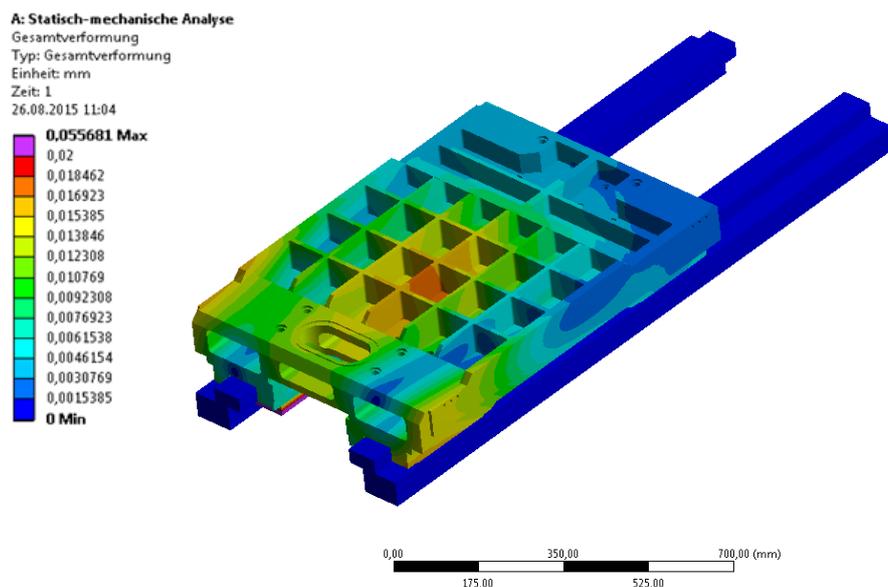


Abbildung 61: Gesamtverformung Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Konstruktion ist ebenfalls so ausgeführt, dass die Rippen in der Höhe größer modelliert sind um das Widerstandsmoment positiv zu beeinflussen.

Betrachtet man die Gesamtverformungen so ist im hinteren Bereich der Einfluss der Ausnehmungen anschaulich dargestellt. Dabei wird der positive Effekt der Zwischenplatte ersichtlich. Diese führt zu einer zusätzlichen Stützwirkung auf Grund der großen Auflagefläche.

Außerdem führt die schachbrettmusterförmige Geometrie zu einer weiteren Verbesserung bezogen auf den Verformungsgrad, wie in Abbildung 61 ersichtlich ist. Im Vergleich zu den vorher gezeigten Varianten ist hier eine weitere Reduktion der Verformungen gelungen.

Sieht man sich die Schwingungsbetrachtung näher an, so ist ein leichter Anstieg der zweiten Eigenform feststellbar. Dieser ist jedoch nicht dramatisch und führt im Weiteren zu keiner Gefahr in puncto der Überlagerung von den kritischen Anregungsfrequenzen und den ermittelten Frequenzen der Eigenformen.

Eigenform	Frequenz [Hz]
1.	0,5832
2.	304,82
3.	379,23
4.	513,44
5.	723,46
6.	742,60
7.	768,06
8.	810,29
9.	982,39
10.	1127,20

Tabelle 4: Eigenformen Variante Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.6.5 Variante Wabenstruktur

Der weitere Entwicklungsprozess führt zu einem Prinzip, welches sich die Natur als Vorbild zum Nutzen macht, nämlich die Form einer Bienenwabe.

Rein auf die Geometrie bezogen ist das Sechseck jene geometrische Figur mit der höchsten Eckenanzahl, welche eine Fläche komplett abdecken kann. Dies führt zu optimaler Raumausnutzung, bei größtmöglichem Platz im inneren des Sechsecks. Daraus folgt, dass mit möglichst wenig Materialeinsatz eine größtmögliche Fläche abgedeckt wird.<sup>34</sup>

Überdies besitzen Waben schwingungsdämpfende Eigenschaften und bilden Versteifungsstrukturen aus.<sup>35</sup>

Außerdem zeichnet sich der Wabenkern durch höhere Druck- und Schubsteifigkeiten senkrecht zur Fläche aus. Die Wabenstege sind in Längsrichtung verdoppelt. Dadurch ergibt sich eine Erhöhung der Schubsteifigkeit und der Schubfestigkeit in Längsrichtung im Vergleich zur Querrichtung.<sup>36</sup>

Umgemünzt auf das Modell des Schlittens ergibt sich folgende Konstruktion:

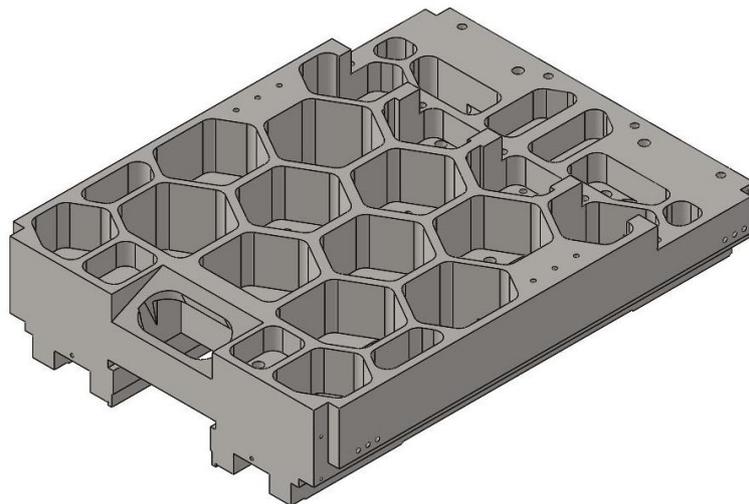


Abbildung 62: Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung.

Da das Ziel ein möglichst geringes Eigengewicht des Schlittens ist, wird ein weiterer möglicher Aspekt der Gewichtseinsparung betrachtet: Materialverringerung an den Schlittenauflageflächen.

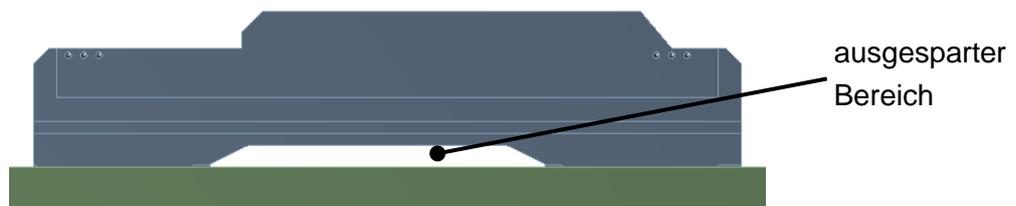


Abbildung 63: Modifizierte Auflagefläche, Quelle: Eigene Darstellung.

<sup>34</sup> Vgl. Warum ist die Bienenwabe sechseckig, Quelle: Geo.de (2015), Onlinequelle [27.08.2015].

<sup>35</sup> Vgl. Optimierte Wabenstrukturen, Quelle: Elise Productsheet (2015), Onlinequelle [28.08.2015].

<sup>36</sup> Vgl. Wiedemann (2007), S. 227 f.

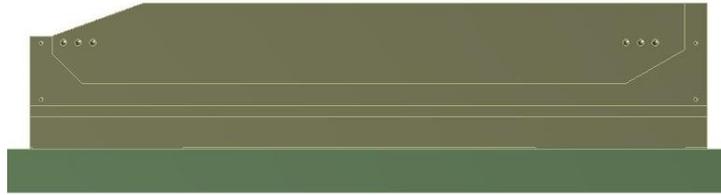


Abbildung 64: Verstärkte Auflagefläche, Quelle: Eigene Darstellung.

Zwar kann mit dieser Maßnahme das Gewicht um einige Kilogramm verringert werden, dem steht jedoch ein signifikanter Verlust an Steifigkeit gegenüber, welcher aus der harmonischen Analyse für die Wabenstruktur ersichtlich ist. Aus diesem Grund wird auf eine Ausnehmung an den Schlittenauflageflächen verzichtet.

Folgende Parameter fließen in die Simulation ein:

- Berücksichtigung einer angepassten Zwischenplatte
- Berücksichtigung einer austragenden Spindelstockkonstruktion
- Materialausnehmungen im hinteren und vorderen Bereich optimiert
- Wabenstruktur
- Masse Schlitten: 385 kg

Betrachtet man nun die Gesamtverformungen, so erreicht die Variante mit Wabenstruktur die besten Ergebnisse bezogen auf die Verformung.

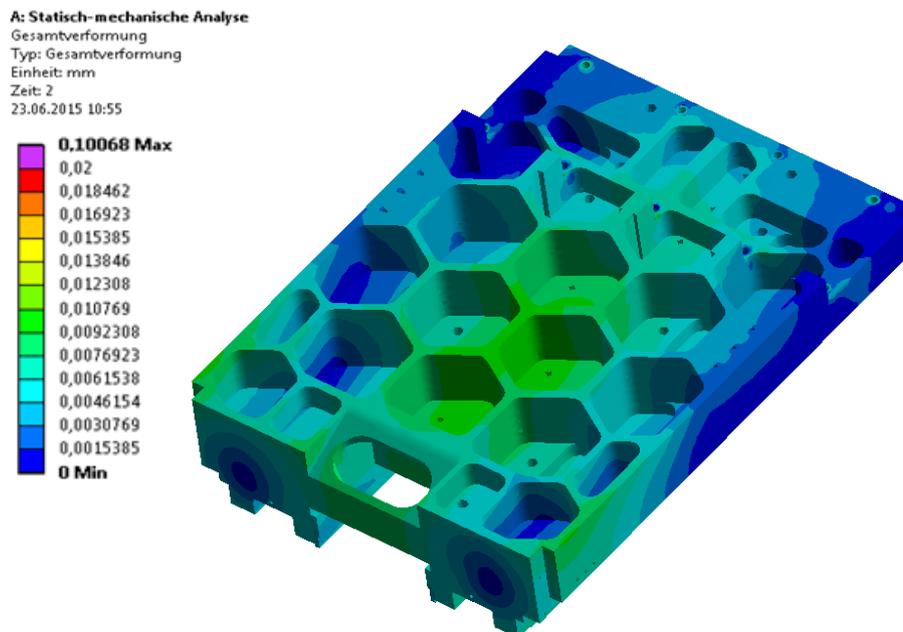


Abbildung 65: Gesamtverformung Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung.

Auffallend ist die gleichmäßig vorherrschende Verformung am gesamten Schlitten. Bezogen auf die Schwingungsbetrachtung ist abermals ein leichter Anstieg der Frequenzen feststellbar, dies stellt jedoch keine Probleme für das Verhalten der Rundschleifmaschine dar.

Eigenform	Frequenz [Hz]
1.	1,402*e-004
2.	329,28
3.	455,09
4.	533,19
5.	781,91
6.	871,10
7.	974,47
8.	990,42
9.	996,02
10.	1151,5

Tabelle 5: Eigenformen Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung.

### 3.6.6 Variante Wabenstruktur mit Deckplatte

Eine weitere Verbesserung der Steifigkeit des Gesamtsystems ergibt sich, wenn man den Schlitten mit einer Deckplatte ausführt. Diese Ausführung orientiert sich an einer sogenannten Sandwich Variante. Im Inneren befindet sich der Wabenkern, welcher durch eine Deckplatte zusätzlich gestützt wird. Eine Sandwich Ausführung zeichnet sich durch zusätzliche Biegesteifigkeit aus, was sich laut Theorie positiv auf das Gesamtsystem auswirkt.

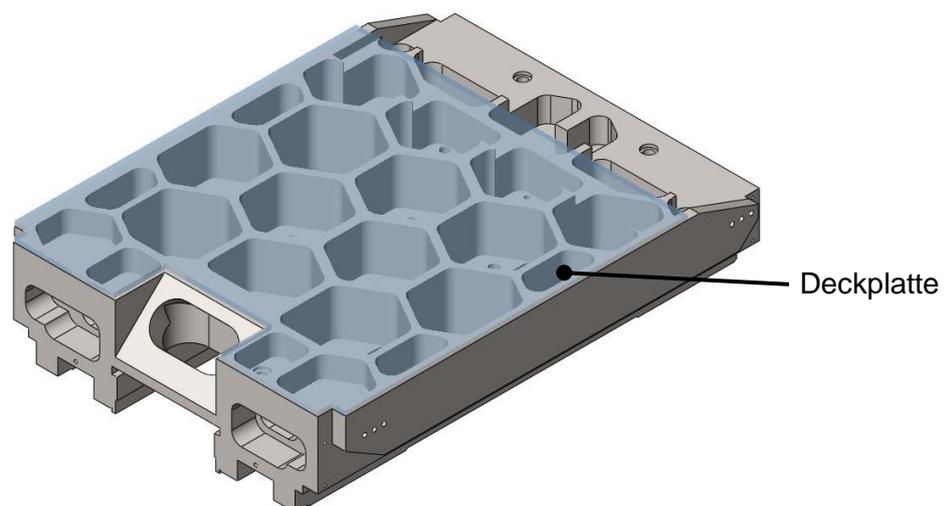


Abbildung 66: Wabenstruktur mit Deckplatte, Quelle: Eigene Darstellung.

Betrachtet man die Gesamtverformung in Abbildung 66, so bestätigt sich diese Annahme. Die Verformungen sinken im Vergleich zur Wabenstruktur ohne Deckplatte.

Dem gegenüber steht aber eine Reihe von Nachteilen, welche gegen die Variante mit Deckplatte sprechen.

Um den gewünschten Effekt zu erreichen, wäre es notwendig, die Deckplatte mit einer Vielzahl von Schrauben zu befestigen. Dies ist als nicht zielführend anzusehen.

Ein weiterer negativer Aspekt dieser Variante liegt in der Deckplatte selbst. In der Simulation wird diese als eine 10 mm dicke Stahlplatte ausgeführt. Bei den ausgeführten Abmessungen dieser Platte besitzt die Deckplatte ein Eigengewicht von 38 kg. Es ist auch nicht möglich, dieses zusätzliche Gewicht an einer anderen Stelle des Schlittens beziehungsweise des gesamten Spindelaufbaues einzusparen. Diese Gewichtszunahme steht aber im Widerspruch zum ursprünglichen Ziel der Gewichtsreduzierung des Schlittens.

### 3.7 Auswahl der Endvariante

Auf Grund der Entwicklungsfolge, beginnend mit der Variante der Firma GST über Rippen, Rippen mit Verstrebungen, Schachbrettmuster bis hin zur Wabenstruktur und Wabenstruktur mit Deckplatte hat sich die Konstruktion mit Wabenstruktur als die am besten geeignete Variante herausgestellt. Diese erfüllt die notwendigen Anforderungen hinsichtlich Steifigkeit, Gewichtseinsparung, Schwingungsverhalten und Verformung am besten.

Das heißt die Entscheidung fällt somit zugunsten der Variante Wabenstruktur. Festzuhalten ist, dass die Endvariante eine zwei Millimeter dünne Deckplatte besitzt um einen Schutz vor Verschmutzung zu bieten.

#### 3.7.1 Erkenntnisse aus Modalanalyse

Nachdem die Auswahl für den Schlitten gefallen ist, steht als nächste Aufgabe das Betrachten der Eigenformen an.

Hier stellt sich eine kritische Eigenform in Bezug auf das Verhalten der gesamten Baugruppe, das heißt Schlitten und Spindelstock ein.

Es handelt sich dabei um die dritte Eigenform welche bei ca. 455 Hz auftritt. Die erste und zweite Eigenform stellen kein kritisches Verhalten dar. Bei der ersten Eigenform kommt es zu einer Verschiebung des gesamten Schlittens in X-Richtung. Dies lässt sich durch die getroffenen Randbedingungen in Form einer vorgegebenen Verschiebung in X-Richtung erklären. Die zweite Eigenform entsteht durch eine Verdrehung des Spindelaufbaues. Dieser Verdrehung wird mit einem dementsprechenden Spindelaufbau, das heißt mit einer Zwischenplatte und einer seitlichen Abstützung konstruktiv entgegengewirkt.

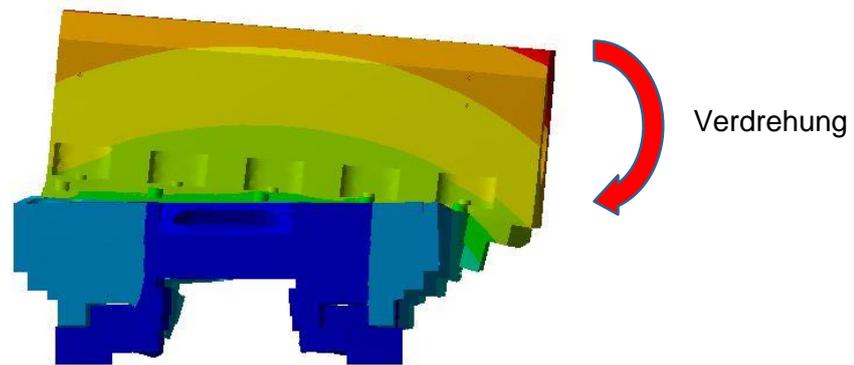


Abbildung 67: Verdrehung auf Grund zweiter Eigenform, Quelle: Eigene Darstellung.

Problematisch für das gesamte Verhalten der Gesamtbaugruppe stellt sich aber wie erwähnt die dritte Eigenform dar. Diese Eigenform führt zu einem nach vorne kippen der Spindel.

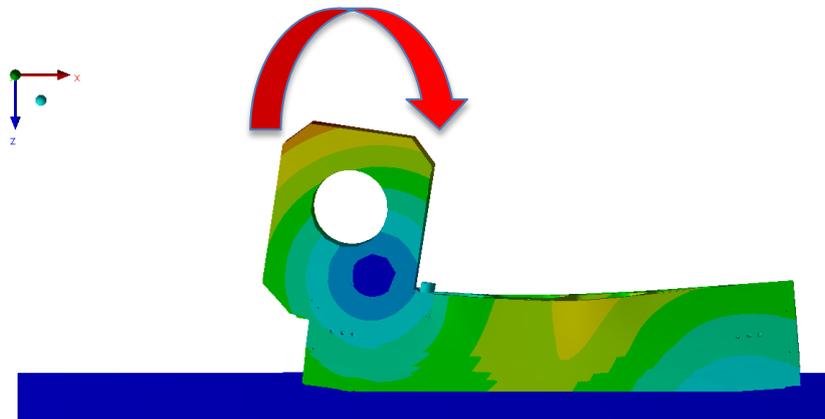


Abbildung 68: Variante Wabenstruktur-Kippen der Spindel, Quelle: Eigene Darstellung.

Dies führt zu negativen Einflüssen auf den Spindelblock und in weiterer Folge auch auf den Schleifprozess selbst. Daher ist es notwendig Gegenmaßnahmen zu setzen um diese Einflüsse zu reduzieren.

### Gegenmaßnahme

Um eine Erhöhung der Steifigkeit zu erreichen ist es zielführend den Spindelblock mit einer Abstützung zu versehen. Als Abstützung kommt eine Strebe in Form verschweißter Flachstahl Profile in Frage.

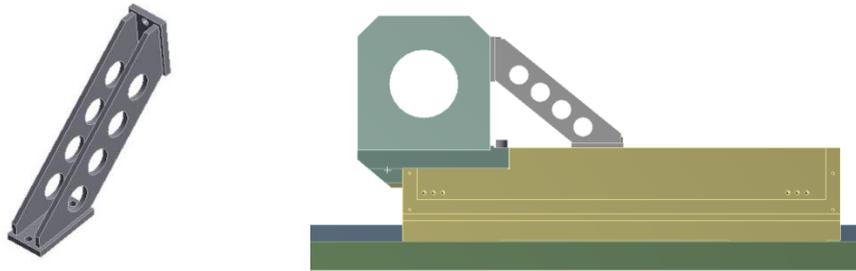


Abbildung 69: Strebe gegen Kippen, Quelle: Eigene Darstellung.

Bei weiteren Untersuchungen der nun angebrachten Streben hat sich folgendes Verformungsbild auf Grund der Belastung gezeigt. Hierbei ist darauf hinzuweisen, dass es sich bei Abbildung 70 um eine überzeichnete Darstellung der Verformung an der Strebe handelt.

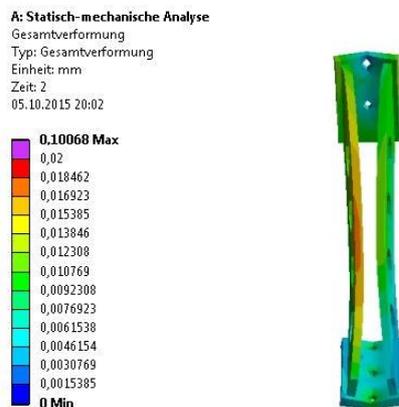


Abbildung 70: Verformung an Strebe, Quelle: Eigene Darstellung.

Klar ersichtlich ist hierbei das nach innen klappen der Seitenwände. Um dies zu vermeiden ist es zweckmäßig eine konstruktive Änderung der Strebe vorzunehmen.

Das berücksichtigen einer Deckplatte folgt dem Prinzip eines T-Trägers. Hieraus folgt eine Erhöhung der Steifigkeit der gesamten Strebe und auch das beschriebene Einfallen der Seitenwände wird vermieden.



Abbildung 71: Versteifungsplatte Strebe, Quelle: Eigene Darstellung.

Die Abbildung 71 zeigt eine mögliche Form der anzustrebenden Ausführung der Abstützung.

### 3.7.2 Erkenntnisse statisch - mechanische Analyse

Aus der Finite-Elemente-Berechnung betreffend der Gesamtbaugruppe ergeben sich einige Verbesserungsvorschläge, welche an die Firma GST weitergeleitet worden sind und auch dementsprechend in den Konstruktionsprozess implementiert wurden.

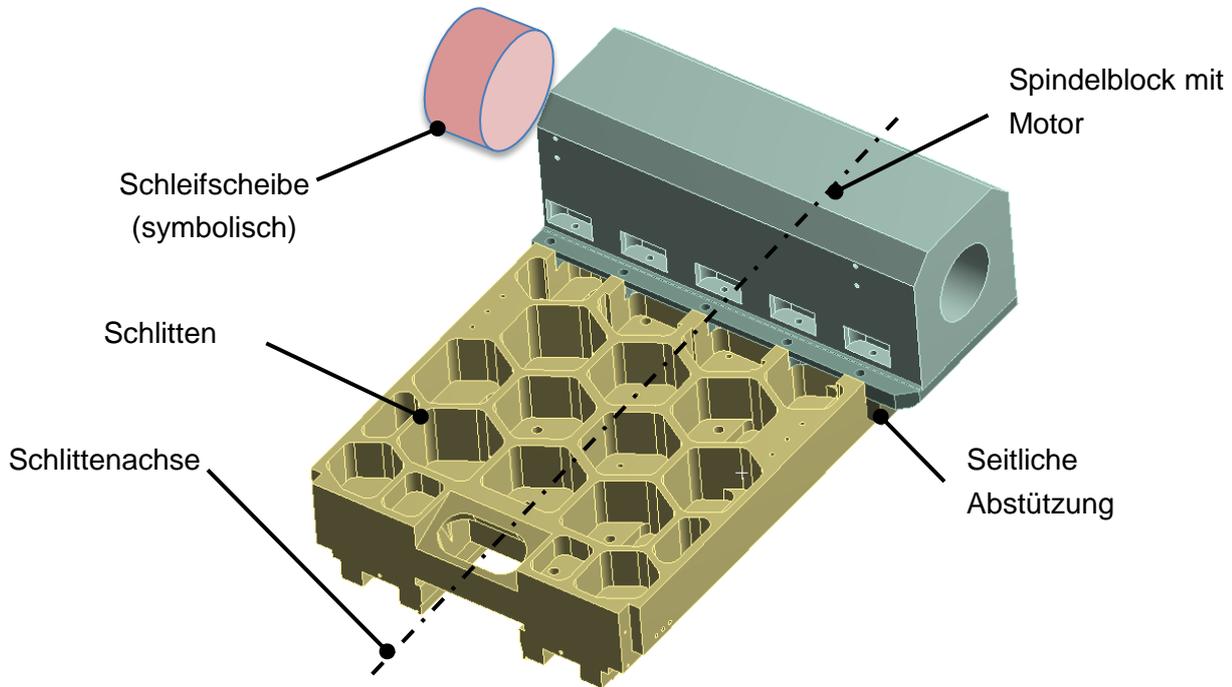


Abbildung 72: Verbesserungen der Konstruktion, Quelle: Eigene Darstellung.

Als vorteilhaft erweist sich eine außermittige Anordnung der Zwischenplatte. Dies führt dazu, dass der Schwerpunkt des Gesamtsystems zentral über der Schlittenachse liegt. Außerdem ist ein Abdeckblech vorzusehen. Dies verhindert Schmutzablagerungen vom Schleifprozess, oder auch Ablagerungen in Form von Öl.

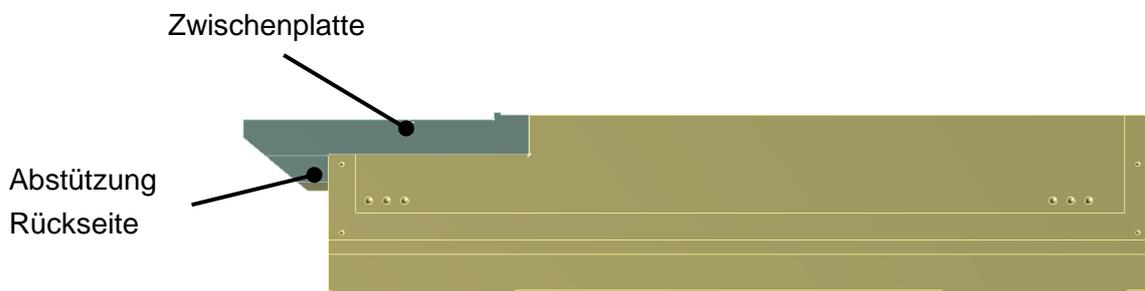


Abbildung 73: Position der Zwischenplatte, Quelle: Eigene Darstellung.

Eine weitere Möglichkeit zur Erhöhung der Steifigkeit des gesamten Spindelaufbaues liegt darin, an der Rückseite eine Abstützung anzubringen. Diese Abstützung wird mittels Schrauben mit dem X-Achs-Schlitten fest verbunden.

### 3.7.3 Steifigkeitsbetrachtung der Varianten

Um eine zuverlässige Aussage betreffend der Steifigkeit der einzelnen Varianten zu erhalten ist es notwendig diese miteinander zu vergleichen.

Bei der vorliegenden Gegenüberstellung werden nicht nur die in der Arbeit angesprochenen Varianten miteinbezogen, sondern auch jene, welche im Laufe des Entwicklungsprozesses entstanden sind. Dies sind in Summe 16 verschiedene Varianten, welcher einer FEM Berechnung unterzogen wurden.

Als Ausgangsvariante steht dabei wiederum die Konstruktionsvariante der Firma GST zum Vergleich.

Allgemein erfolgt die Berechnung der Steifigkeit  $k$  nach folgendem Zusammenhang:

$$k = \frac{dF}{dx} \quad (30)$$

Die Kraft  $dF$  steht dabei für die wirkende Belastung. Dem gegenüber steht die Verformung  $dx$ .

Die Steifigkeitsbetrachtung bezieht sich für alle Varianten auf die Unterseite des X-Achs-Schlittens. Um einen zuverlässigen Vergleich zu erhalten, wird auf die Unterseite im Bereich des Kraftangriffspunktes des Linearmotors ein Koordinatensystem gesetzt und an diesem immer gleichen Punkt die Verformung gemessen. Als vertikal auftretende Belastung wird dabei die Anzugskraft des Linearmotors am X-Achs-Schlitten in der Höhe von 25.000 N gewählt. Die Steifigkeit in N/mm ergibt sich aus Formel 30. Für die Gegenüberstellung wird außerdem die Masse der einzelnen Varianten herangezogen.

Die Variante 1 in Abbildung 74 stellt dabei die Konstruktion der Firma GST dar. Bei näherer Betrachtung der Ergebnisse ist erkennbar, dass die Steifigkeit bei den Anfangsvarianten stark gesunken ist. Dies ist mit den massiven Materialeinsparungen und auch mit den Geometrie bedingten Änderungen zu erklären.

Der weitere Trend der Steifigkeiten ist ansteigend und mit den verbesserten Konstruktionsvarianten zu begründen. Vor allem die Variante Wabenstruktur (Variante 15) und die Variante Wabenstruktur mit Deckplatte (Variante 17) zeigen merklich bessere Steifigkeitswerte wie in der Abbildung ersichtlich ist.

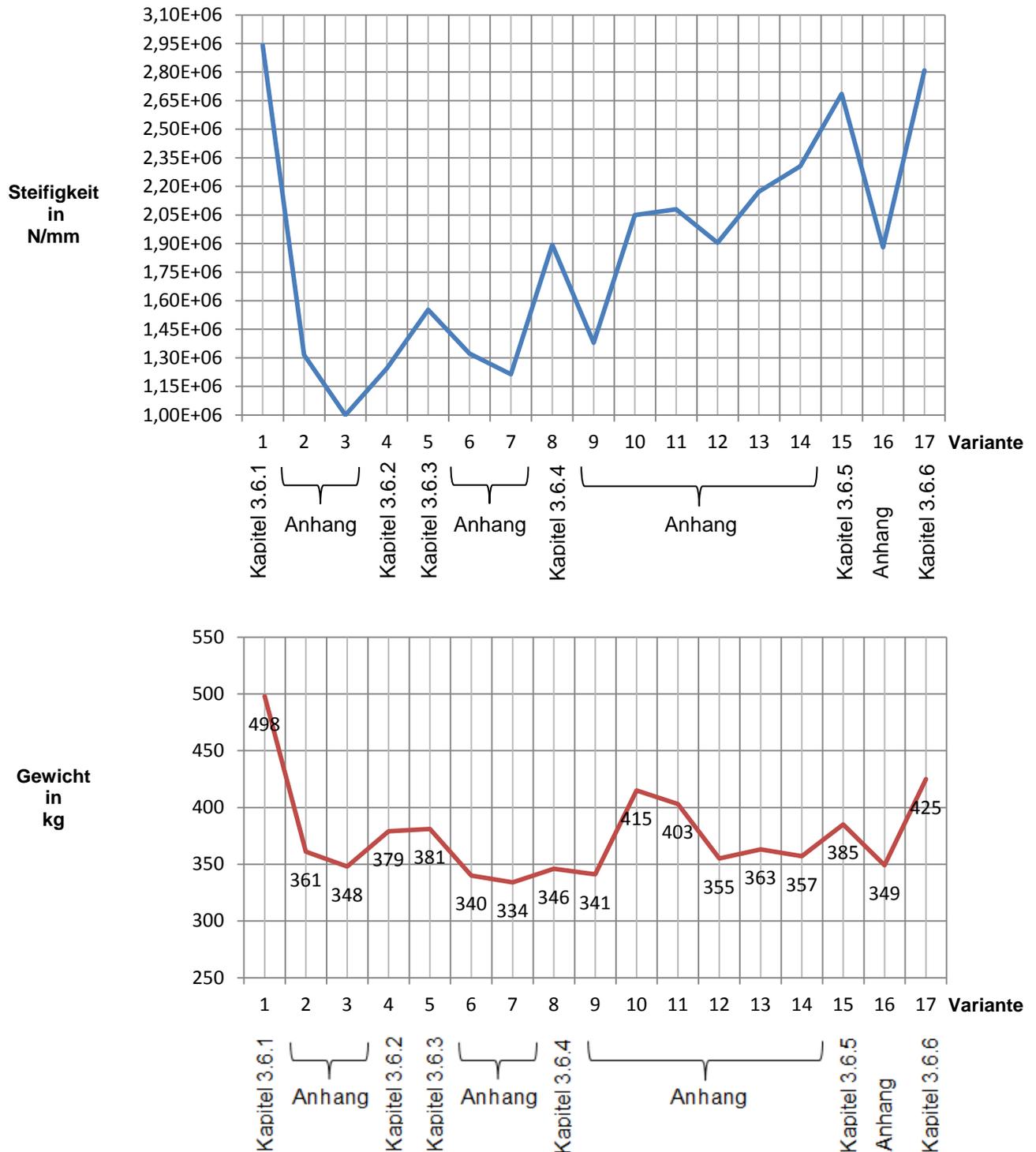


Abbildung 74: Steifigkeitsbetrachtung Varianten, Quelle: Eigene Darstellung.

Betrachtet man den Verlauf der Masse, so ist erkennbar, dass diese dauerhaft bei allen Varianten niedriger ist als bei der Ausgangsvariante. Die Masse der Endvariante mit Wabenstruktur hat ein Eigengewicht von 385 kg.

Allgemein ist zu bemerken, dass die Variante Wabenstruktur die höchste Steifigkeit aller ausgearbeiteten Konstruktionen besitzt.

### 3.7.4 Gegenüberstellung der Frequenzen

Die Gegenüberstellung der Frequenzen erfolgt für die ausgearbeiteten Varianten. Ausgehend von der Konstruktion der Firma GST bis hin zur schlussendlichen Variante der Wabenstruktur erfolgt ein Vergleich der Frequenzen. Dabei werden die einzelnen auftretenden Eigenformen miteinander verglichen.

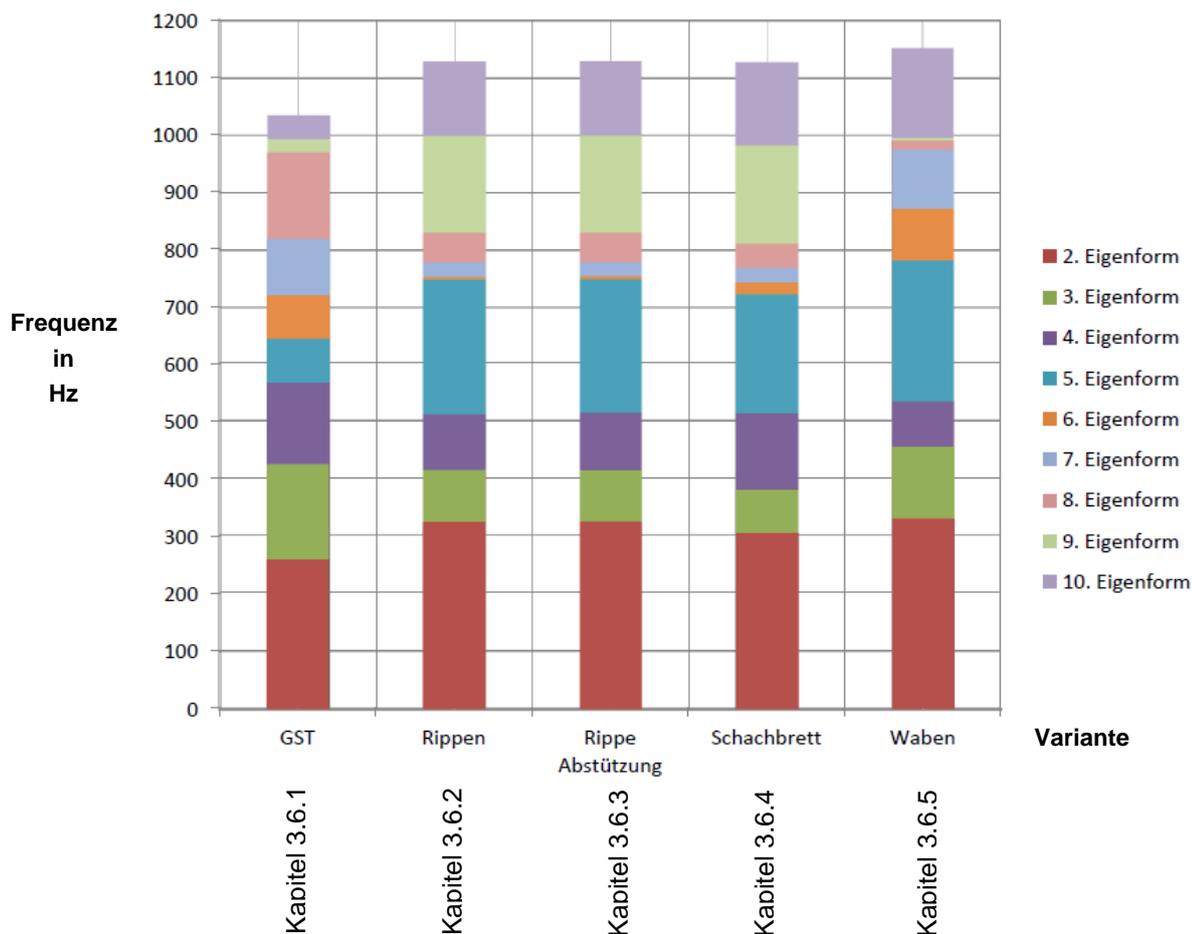


Abbildung 75: Gegenüberstellung der Frequenzen, Quelle: Eigene Darstellung.

In puncto Eigenformen kann festgehalten werden, dass sich die ersten vier Eigenformen bei allen dargestellten Varianten in etwa gleich verhalten. Die 1. Eigenform ist in der Abbildung nicht ersichtlich, da diese teilweise Null bzw. nur wenige Hundertstel groß ist. Ruft man sich die kritischen Werte von 2 Hz, 23 Hz und 140 Hz in Erinnerung, so ist klar ersichtlich, dass keine der Eigenformen in diesem kritischen Bereich liegt.

## 4 Zusammenfassung und Ausblick

In diesem Kapitel werden die wichtigsten Erkenntnisse der vorliegenden Arbeit zusammengefasst.

### 4.1 Gesamtbaugruppe

Die Simulation erfolgt für die gesamte Baugruppe mit der bereits erwähnten **Wabenstruktur** für den Schlitten.

Die **Gesamtverformungen** der Wabenstruktur sind im Vergleich zur Schlittenvariante der Firma GST kaum höher. Dies lässt sich durch die geforderte Materialeinsparung und die neuen Geometrie des Schlittens erklären.

Betreffend der auftretenden **Vergleichspannungen** zeigt sich, dass hier keine zusätzlichen Überlegungen anzustrengen sind. Die Spannungen liegen alle weit unterhalb der Streckgrenze der eingesetzten Stähle. Das ist unbedingt erforderlich, da es zu möglichst kleinen Verformungen durch die Belastung kommen darf.

Bezüglich der **Schwingungsbetrachtung** ist festzuhalten, dass keine Probleme zu erwarten sind. Die Anregungsfrequenzen, in diesem Fall die Eigenformen, liegen in einem sicheren Bereich, stellt man diesen die kritischen Werte von 2 Hz, 23 Hz und 140 Hz gegenüber.

Dem auftretenden nach Vornekippen bei Erreichen der dritten Eigenform kann mit einer **Abstützung** in Form von zwei Streben entgegengewirkt werden. Ebendiese führen außerdem zu einer zusätzlichen Erhöhung der Steifigkeit und wirken sich somit positiv auf die Steifigkeit des Gesamtsystems aus.

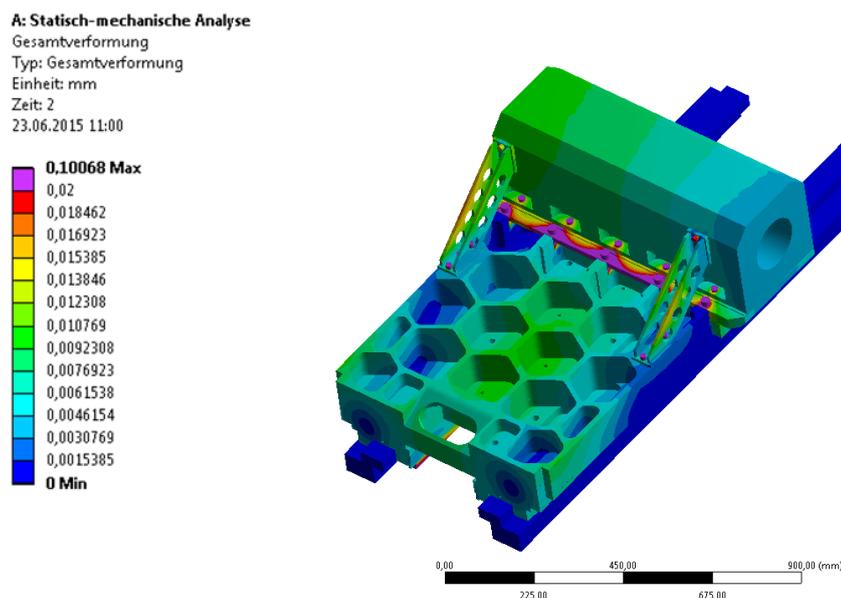


Abbildung 76: Endvariante der Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.

## 4.2 Gegenüberstellung Konstruktionsvarianten

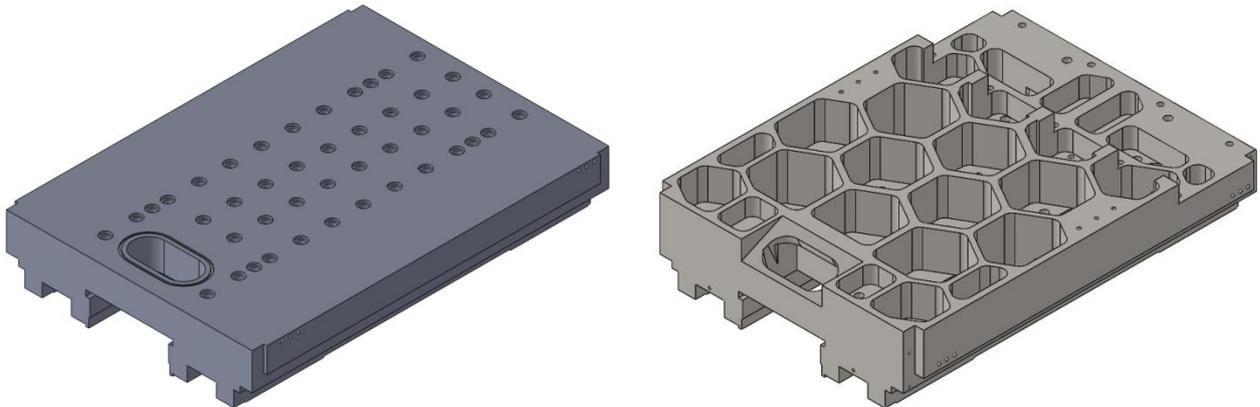


Abbildung 77: Gegenüberstellung der Konstruktionsvarianten, Quelle: Eigene Darstellung.

Variante GST	Variante NEU
m = 498 kg	m = 385 kg
Produktionskosten: 3.980,00 €	Produktionskosten: 4.420,00 €

Vergleicht man die Anfangsvariante mit der neu entwickelten Endvariante, so ist eine **Gewichtseinsparung** von **23 %** erreicht worden. Eine Gegenüberstellung der Produktionskosten zeigt einen verhältnismäßig geringen Anstieg dieser. Außerdem ist es vonseiten der Firma GST vorstellbar, die neu erarbeitete Variante für zukünftige Optimierungen zu übernehmen.

## 4.3 Ausblick

Mit dieser Arbeit wurde die Basis, neue Schleifverfahren zu erforschen beziehungsweise bekannte Verfahren grundlegend zu verbessern und zu optimieren geschaffen. Dabei erfolgt die Auslegung auf dem höchsten Stand der Technik um ein möglichst produktives Schleifenverfahren auf der Forschungsschleifmaschine am Institut für Fertigungstechnik der Technischen Universität Graz zu ermöglichen.

Das Ziel der Gewichtseinsparung bei nahezu gleichbleibender Steifigkeit wurde erreicht. Ebenso wurden weitere Verbesserungsmaßnahmen der Konstruktion des gesamten Spindelaufbaues aufgezeigt und können somit in die weitere Entwicklung der Forschungsschleifmaschine, aber auch in zukünftigen Projekten übernommen werden. Diese Verbesserungen haben somit auch für die Firma GST einen großen Know-How Zuwachs bewirkt.

Die erarbeitete Variante steht der Firma GST zur Verfügung und hat Potenzial auch in anderen Schleifmaschinentypen zum Einsatz zu kommen.

## Literaturverzeichnis

Bathe Klaus Jürgen (2002): *Finite-Elemente-Methoden*, 2. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Figel Klaus (2012): *FEM-Berechnung für Maschinenbauingenieure: Einführung in die Simulation mit Ansys Workbench*, 1. Auflage, Ventus Publishing Aps, o.O.

Gallagher Richard H. (1976): *Finite-Element-Analysis: Grundlagen*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Gebhardt Christof (2014): *Praxisbuch FEM mit ANSYS Workbench: Einführung in die lineare und nichtlineare Mechanik*, 2. Auflage, Carl Hanser Verlag, München

Klein Bernd (2015): *FEM: Grundlagen und Anwenden der Finite-Element-Methode im Maschinen- und Fahrzeugbau*, 10. Auflage, Springer Vieweg Verlag, Wiesbaden

Link Michael (2010): *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*, 4. Auflage, Springer Fachmedien, Wiesbaden

Mayr Martin; Thalhofer Ulrich (1993): *Numerische Lösungsverfahren in der Praxis: FEM – BEM - FDM*, Carl Hanser Verlag, München

Schier Klaus (2011): *Finite Elemente Modelle der Statik und Festigkeitslehre: 101 Anwendungsfälle zur Modellbildung*, 1. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Steinke Peter (2015): *Finite-Elemente-Methode: Rechnergestützte Einführung*, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Weck Manfred; Brecher Christian (2006): *Werkzeugmaschinen: Konstruktion und Berechnung*, 8. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

Wiedemann Johannes (2010): *Leichtbau: Elemente und Konstruktion*, 3. Auflage, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg

**Online sources**

ANSYS, Inc (2014). *ANSYS Mechanical User's Guide*. Vol. Release 15.0. URL: <http://www.ansys.com> (S. 504)

ANSYS, Inc (2011). *Introduction to ANSYS Meshing*. Vol. Release 13.0. URL: <http://www.ansys.com> (S. 25)

ELiSE GmbH (2015). URL: [http://elise.de/wp-content/uploads/2013/12/ProductSheet\\_Waben\\_Fraktal-Adaptiv\\_DE\\_EN\\_web.pdf](http://elise.de/wp-content/uploads/2013/12/ProductSheet_Waben_Fraktal-Adaptiv_DE_EN_web.pdf)

G+J Wissen GmbH (2015). URL: <http://www.geo.de/GEOlino/kreativ/warum-ist-die-bienenwabe-sechseckig-56260.html>

## Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Forschungsschleifmaschine, Quelle: Eigene Darstellung.....	1
Abbildung 2: Aufbau X-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung. ....	3
Abbildung 3: Querschnitt Grundaufbau, Quelle: Eigene Darstellung.....	4
Abbildung 4: Aufbau Z-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung. ....	4
Abbildung 5: Verzerrungen am Scheiben Element, Quelle: Klein (2015), S.22. ....	6
Abbildung 6: Kräftegleichgewicht an Element, Quelle: Klein (2015), S.26.....	7
Abbildung 7: Spannungs-Dehnungs-Diagramm für Stahl, Quelle: Schier (2011), S.287. ....	8
Abbildung 8: Wirkende Lasten auf Element, Quelle: Klein (2015), S.31.....	10
Abbildung 9: Matrix-Steifigkeitsmethode, Quelle: Klein (2015), S. 39 (leicht modifiziert).....	12
Abbildung 10: Dreieckselement mit linearem oder quadratischen Verschiebungsansatz, Quelle: Mayr (1993), S. 39.....	13
Abbildung 11: Zweidimensionale Elemente-Gruppierung, Quelle: Bathe (2002), S.441.....	14
Abbildung 12: Schritte bei der Anwendung der FEM, Quelle: Steinke (2015), S.4. ....	15
Abbildung 13: Kontakt und Kontaktbedingungen, Quelle: Klein (2015), S. 182. ....	16
Abbildung 14: Kontaktsteifigkeit ANSYS Workbench, Quelle: ANSYS Mechanical User's Guide (2014), Onlinequelle [31.08.2015]. ....	17
Abbildung 15: Hydrostatische Lagertasche, Quelle: Weck(2006), S. 281. ....	19
Abbildung 16: Druckaufbau und effektive Lagerfläche, Quelle: Weck(2006), S. 280.....	19
Abbildung 17: Anbauteile Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.....	22
Abbildung 18: Belastungen Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.....	24
Abbildung 19: Linearmotor Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung. ....	25
Abbildung 20: Druckkräfte hydrostatische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung.....	26
Abbildung 21: Fläche Hydrostatische Lagerung Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung. ....	27
Abbildung 22: Berechnung Taschendruck Umgriff, Quelle: Eigene Darstellung.....	27
Abbildung 23: X-Achs-Schlitten Vereinfachungen, Quelle: Eigene Darstellung.....	29
Abbildung 24: Vereinfachung hydrostatische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	30
Abbildung 25: Verbindungsplatte, Quelle: Eigene Darstellung. ....	30
Abbildung 26: Vereinfachung Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung.....	31
Abbildung 27: Vertiefung Linearmotor, Quelle: Eigene Darstellung.....	32
Abbildung 28: Vergleich Geometrie, Quelle: Eigene Darstellung. ....	33

---

Abbildung 29: Volumenelemente, Quelle: Introduction to Ansys Meshing, Onlinequelle [31.08.2015]. .....	33
Abbildung 30: Methode Hex Dominant, Quelle: Eigene Darstellung. ....	34
Abbildung 31: Elementgröße, Quelle: Eigene Darstellung. ....	34
Abbildung 32: Bewertung der Netzgüte, Quelle: Gebhardt (2014), S. 178. ....	35
Abbildung 33: Vernetzung Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung. ....	36
Abbildung 34: Verbund Z-Achs-Schlitten, Quelle: Eigene Darstellung. ....	37
Abbildung 35: Verbund Schraube, Quelle: Eigene Darstellung. ....	38
Abbildung 36: Modellierung Schraube. Quelle: Eigene Darstellung. ....	38
Abbildung 37: Reibungsfreier Kontakt Umgriff, Quelle: Eigene Darstellung. ....	39
Abbildung 38: Reibungsfreier Kontakt Auflage, Quelle: Eigene Darstellung. ....	39
Abbildung 39: Reibungsbehafteter Kontakt, Quelle: Eigene Darstellung. ....	40
Abbildung 40: Feder-Feder System der Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	41
Abbildung 41: Lagertasche, Quelle: Eigene Darstellung. ....	42
Abbildung 42: Volumen Spalthöhe, Quelle: Eigene Darstellung. ....	42
Abbildung 43: Variante Elastische Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	45
Abbildung 44: Reibungsfreier Kontakt Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	46
Abbildung 45: Koordinatensysteme, Quelle: Eigene Darstellung. ....	48
Abbildung 46: Auswahlflächen fixierte Lagerung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	49
Abbildung 47: Lastfälle Schraubenvorkraft, Quelle: Eigene Darstellung. ....	49
Abbildung 48: Gesamtverformung anhand Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung. ....	50
Abbildung 49: Eigenformen ermittelt aus Modalanalyse, Quelle: Eigene Darstellung. ....	50
Abbildung 50: Periodisch wirkende Schleifkraft, Quelle: Eigene Darstellung. ....	51
Abbildung 51: Beschreibung Amplitude und Phasenwinkel, Quelle: Eigene Darstellung. ....	52
Abbildung 52: X-Achs-Schlitten GST, Quelle: Eigene Darstellung. ....	53
Abbildung 53: Gesamtverformungen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung. ....	54
Abbildung 54: Vergleichspannungen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung. ....	54
Abbildung 55: Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung. ....	56
Abbildung 56: Erhöht ausgeführte Rippen, Quelle: Eigene Darstellung. ....	56
Abbildung 57: Gesamtverformung Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung. ....	57
Abbildung 58: Variante Rippen mit Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	58
Abbildung 59: Gesamtverformung Variante Rippe Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	58

---

Abbildung 60: Variante Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung.....	60
Abbildung 61: Gesamtverformung Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung.....	60
Abbildung 62: Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung. ....	62
Abbildung 63: Modifizierte Auflagefläche, Quelle: Eigene Darstellung. ....	62
Abbildung 64: Verstärkte Auflagefläche, Quelle: Eigene Darstellung. ....	63
Abbildung 65: Gesamtverformung Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung. ....	63
Abbildung 66: Wabenstruktur mit Deckplatte, Quelle: Eigene Darstellung. ....	64
Abbildung 67: Verdrehung auf Grund zweiter Eigenform, Quelle: Eigene Darstellung. ....	66
Abbildung 68: Variante Wabenstruktur-Kippen der Spindel, Quelle: Eigene Darstellung. ....	66
Abbildung 69: Strebe gegen Kippen, Quelle: Eigene Darstellung. ....	67
Abbildung 70: Verformung an Strebe, Quelle: Eigene Darstellung.....	67
Abbildung 71: Versteifungsplatte Strebe, Quelle: Eigene Darstellung.....	67
Abbildung 72: Verbesserungen der Konstruktion, Quelle: Eigene Darstellung.....	68
Abbildung 73: Position der Zwischenplatte, Quelle: Eigene Darstellung. ....	68
Abbildung 74: Steifigkeitsbetrachtung Varianten, Quelle: Eigene Darstellung.....	70
Abbildung 75: Gegenüberstellung der Frequenzen, Quelle: Eigene Darstellung.....	71
Abbildung 76: Endvariante der Gesamtbaugruppe, Quelle: Eigene Darstellung. ....	72
Abbildung 77: Gegenüberstellung der Konstruktionsvarianten, Quelle: Eigene Darstellung..	73

## Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Eigenformen Variante GST, Quelle: Eigene Darstellung. ....	55
Tabelle 2: Eigenformen Variante Rippen, Quelle: Eigene Darstellung. ....	57
Tabelle 3: Eigenformen Variante Rippen mit Abstützung, Quelle: Eigene Darstellung. ....	59
Tabelle 4: Eigenformen Variante Schachbrettmuster, Quelle: Eigene Darstellung. ....	61
Tabelle 5: Eigenformen Variante Wabenstruktur, Quelle: Eigene Darstellung. ....	64

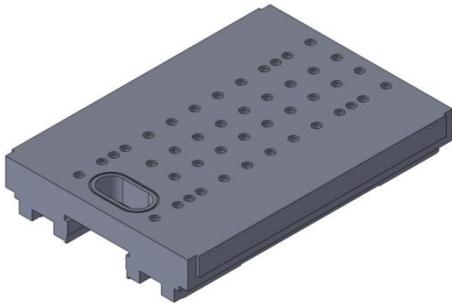
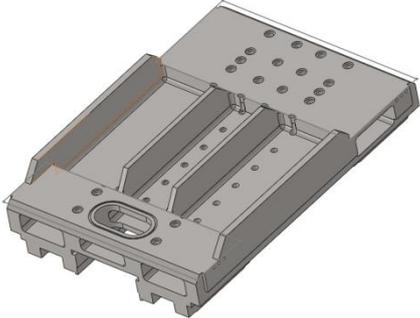
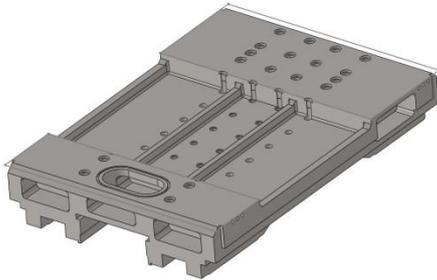
## **Anhang**

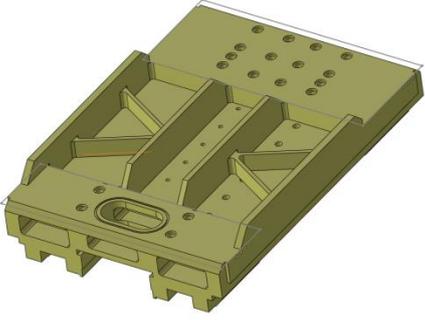
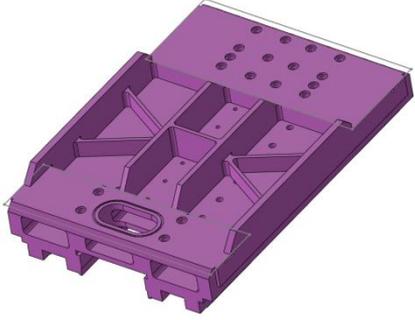
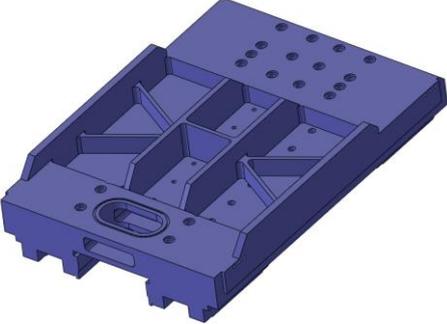
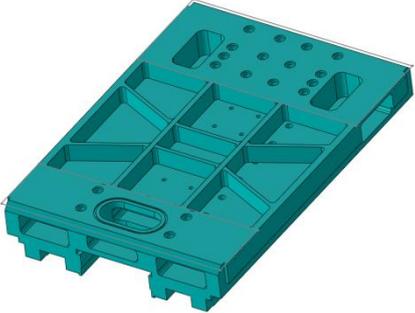
<b>Anhang 1: Gesamtübersicht Varianten.....</b>	<b>81</b>
---	-----------

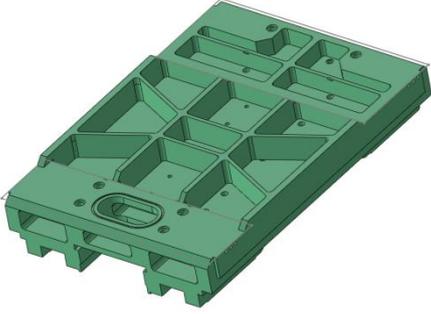
## Anhang 1: Gesamtübersicht Varianten

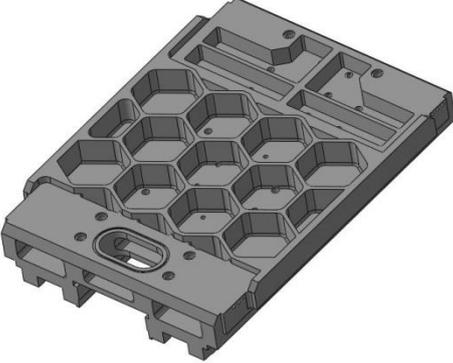
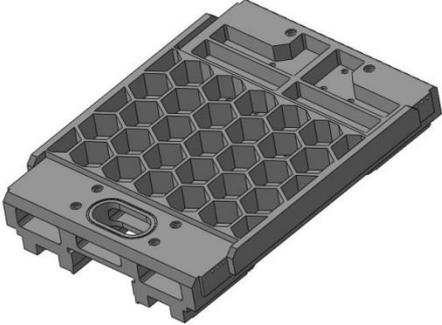
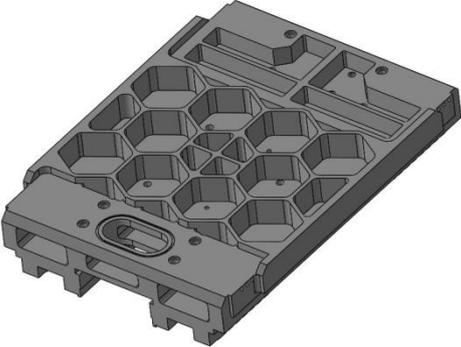
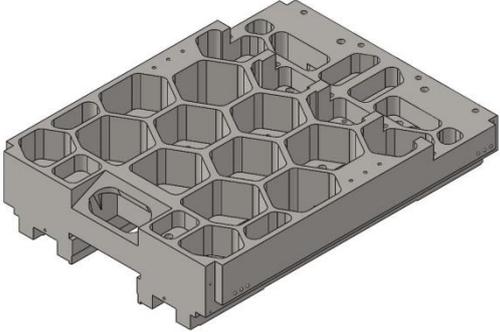
Anbei befindet sich eine übersichtliche Darstellung der gesamten in der Masterarbeit entwickelten Varianten.

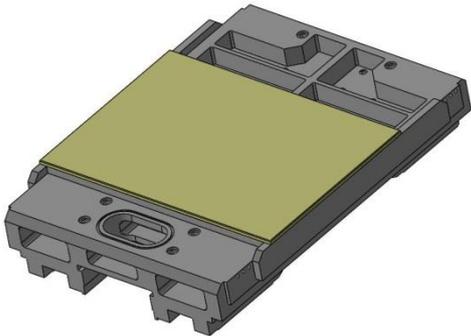
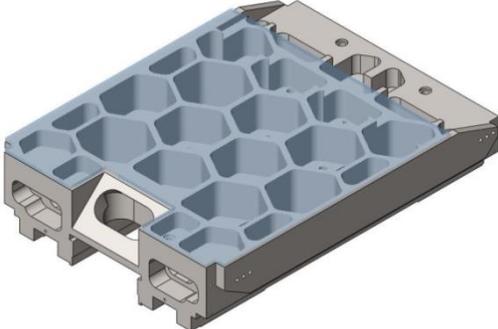
Um den Rahmen dieser Arbeit nicht übermäßig in die Länge zu ziehen, beschränkt sich die Arbeit selbst auf die vier aussagekräftigsten Varianten. Die hier nun aufgeführten Varianten unterscheiden sich oftmals nur in kleinen Details, trotzdem soll ein Überblick über diese gegeben werden.

Variante 1		m = 498 kg
Variante 2		m = 361 kg
Variante 3		m = 348 kg

Variante 4		m = 379 kg
Variante 5		m = 381 kg
Variante 6		m = 340 kg
Variante 7		m = 334 kg

Variante 8		m = 346 kg
Variante 9		m = 341 kg
Variante 10		m = 415 kg
Variante 11		m = 403 kg

Variante 12		m = 355 kg
Variante 13		m = 363 kg
Variante 14		m = 357 kg
Variante 15		m = 385 kg

<p>Variante 16</p>		<p>m = 349 kg</p>
<p>Variante 17</p>		<p>m = 425 kg</p>