XIV. ZAHNRÄDER.

§. 138.

Anordnung der Zahnräder.

Die geometrischen Achsen der Zahnräder kommen in denselben vier Hauptstellungen vor, welche bei den Riemscheiben, §. 110, angeführt wurden; auch erhalten die Räder je nach der Achsenstellung verschiedene Grundformen und Anordnungen.

Die Räder für parallele Achsen erhalten eine cylindrische Grundform (Stirnräder), die für schneidende Achsen eine kegelförmige (Kegelräder, Winkelräder), die für geschränkte Achsen eine cylindrische oder konoidische (hyperboloidische). Die Radzähne erhalten entweder gerade in der Ebene der Radachsen liegende Achsen, was der am meisten gebräuchliche Fall ist, oder die Zahnachsen werden schraubenförmig gewunden (Schraubenräder), wobei die Grundform des Rades irgend eine der vorhin angegebenen ist. Soll die Uebertragung der Bewegung ohne Aenderung des Bewegungsgesetzes stattfinden, so werden die Grundformen der Räder Drehungskörper zu ihren geometrischen Achsen, und diese einfachen Räderarten sind es, welche hier behandelt werden sollen.

A. Die Verzahnung der Stirnräder.

§. 139.

Allgemeines über Material und Form der Zähne der Stirnräder.

Die Zähne eines Räderpaares fertigt man im Maschinenbau gewöhnlich entweder an beiden Rädern aus Eisen, meist Gusseisen, und nennt solche Räder Eisenräder, oder man gibt in einem Paare dem einen Rad eiserne, dem anderen hölzerne Zähne, und nennt ein solches Räderpaar ein Paar von Holzeisenrädern.

Bei den Stirnrädern können die Zahnformen so gewählt werden, dass Räder von gleicher Theilung stets richtig miteinander arbeiten. Räder von diesen Zahnform-Eigenschaften heissen Satzräder, diejenigen hingegen, welchen die genannte Eigenschaft fehlt, Einzelräder.

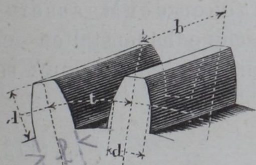
Die Stirnräder, welche als Eisenräder construirt werden, sollten in der Regel gleichzeitig als Satzräder verzahnt werden; bei den Holzeisenrädern kann die Rücksicht auf die Einfachheit der Zahnform (geradflankige Zähne) dahin führen, die Räder als Einzelräder zu verzahnen, auch muss bei Eisenrädern von ganz kleiner Zähnezahl manchmal der Vortheil des Satzräder-Wesens aufgegeben werden (vergl. §. 150).

In jedem Räderpaar heissen zwei den verschiedenen Rädern angehörige, an den Radmittelpunkten beschriebene Kreise, welche in jedem Augenblick gleiche Umfangsgeschwindigkeit haben, Verhältnisskreise. Die berührenden Verhältnisskreise eines cylindrischen Stirnräderpaares heissen dessen Theilkreise. Auf ihnen wird die Zahntheilung, d. i. die Entfernung der Mittelebenen zweier benachbarten Zähne abgetragen. Die Zahnachse liegt bei den geradzähnigen Stirnrädern, von welchen hier vorerst nur die Rede sein soll, im Theilkreiscylinder.

Die Stirnradzähne werden prismatisch geformt; dabei heissen die Grundflächen der Zahnprismen die Endflächen der Zähne, der über den Theilkreiscylinder hervorragende Theil des Zahnes der Zahnkopf, der andere Theil der Zahnfuss, die obere Fläche des Zahnkopfes ist der Zahnscheitel, die untere des Zahnfusses die Sohle oder Wurzel des Zahnes; die Zahnsohlen stehen auf dem Radboden auf. Die Flächen, welche die Zahnsohle mit dem Zahnscheitel verbinden, heissen die Zahnflanken; in ihrer Formgebung insbesondere besteht das, was man die Verzahnung der Räder nennt. Der Raum zwischen zwei benachbarten Zähnen heisst die Zahnlücke.

Beim Stirnrad nennt man ferner Zahnlänge, l Fig. 215, den Abstand von Zahnsohle und Scheitel, Zahnbreite, b Fig. 215, den Abstand der Endflächen des Zahnes, Zahndicke, d Fig. 215, die Länge des zwischen die Zahnflanken fallenden Theilkreisbogens, und Lückenweite endlich die Länge des in die Lücke fallenden Bogens des Theil-

Fig. 215.



kreises. Indem man die Lückenweite grösser macht als die Zahndicke, und die Kopflänge der Zähne kleiner als die Fusslänge, entstehen die Flanken- und Scheitelspielräume zwischen den Zähnen.

Bei der Anfertigung der Zahnräder muss den Zahnformen besondere Sorgfalt gewidmet werden, wenn der Gang der Räder befriedigend ausfallen soll. Am allerwichtigsten ist hierbei, auf die Genauigkeit der Theilung sein Augenmerk zu richten; Fehler in den Zahnformen sind lange nicht so störend, als Fehler in der Theilung. Die Benutzung der Theilmaschinen resp. Räderschneidemaschinen zur Zahnräderfertigung erhöht daher die Zuverlässigkeit der gelieferten Räder auf jeden Fall. In der Wahl der Zahnform sollte man stets sehr genau erwägen, ehe man sich entschliesst, da von derselben so vieles abhängt. Im Folgenden sind deshalb Anhalt- und Beurtheilungspunkte mit Sorgfalt zusammengestellt.

§. 140.

Theilkreishalbmesser. Peripheriemaasstab.

Bei einer Theilung t und einer Zähnezahl $\mathfrak{z}$ eines Rades hat man für den Theilkreishalbmesser R:

$$\frac{R}{t} = \frac{\mathfrak{z}}{2\pi} = 0{,}15915\,\mathfrak{z} \quad . \; . \; . \; . \; . \; (171)$$

Der Halbmesser, welchen man mittelst dieser Formel erhält, ist wegen der Zahl π stets irrational, so dass bei abgerundeter Grösse der Theilung R immer einen Bruch bei sich führen wird. Zur Erleichterung der bezüglichen Rechnung dient indessen die nach (171) berechnete Tabelle des folgenden Paragraphen. Will man die Irrationalität von R vermeiden, so wähle man die Stufen der Theilungen nicht nach einfachen Bruchtheilen oder Vielfachen der Maasseinheit (Millimeter, Linien etc.), sondern nach einfachen Bruchtheilen oder Vielfachen des πfachen der Maasseinheit, ein Verfahren, welches in vielen Maschinenbauanstalten gebräuchlich ist. Geht t durch π Maasseinheiten einfach auf, so liefert die obige Gleichung:

$$R = \frac{\mathfrak{z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (172)$$

stets einen rationalen Werth für R. Der Quotient $\frac{t}{\pi}$ heisst auch wohl die Stichzahl des Rades.

Hat z. B. ein 24zähniges Rad eine Theilung von $6 \times 3{,}14\ldots$ Millimeter, so wird nach (172) sein Theilkreishalbmesser $R = \frac{24}{2} \cdot 6 = 72^{mm}$; hat ein (nach preussischem Maass construirtes) Rad eine Theilung von $3 \times 3{,}14 \ldots$ Linien oder die Stichzahl 3 bei 30 Zähnen, so wird sein Theilkreishalbmesser $R = \frac{30}{2} \cdot 3 = 45$ Linien.

Für das Auftragen der Theilungen und ihrer Bruchtheile bedient man sich sehr bequem des Peripherie-Maasstabes *). Derselbe wird für Metermaass erhalten, indem man die eine Seite eines (prismatischen, hölzernen oder metallenen) Maasstabes in 314 Millimeter und deren Hälften eintheilt, und auf der gegenüberstehenden Seite diese Länge in 100 Theile und deren Hälften getheilt aufträgt. Gleichnumerirte Längen auf beiden Seiten verhalten sich dann wie $1 : \pi$. Der Maasstab dient auch bequem zur Streckung (Rectification) von Kreisen und deren Bögen.

Im Folgenden werden nun stets beide Methoden berücksichtigt, nämlich die, welche die Theilung nach dem gewöhnlichen Maasssystem und rational, also die Halbmesser irrational ausführt, und die, welche die Theilung rational in Einheiten des Peripheriemaasstabes (Peripheriemillimeter, -Linien u. s. w.), und damit die Halbmesser ebenfalls rational, aber im gewöhnlichen Maasssystem, macht. Die auf umstehender Seite folgende Tabelle ist nicht zu verwechseln mit der Donkin'schen **), nach dem Ausdruck $\frac{r}{t} = \frac{1}{2 \sin\left(\frac{180^0}{\mathfrak{z}}\right)}$, welche den Halbmesser eines Kreises liefert, der ein regelmässiges Vieleck von $\mathfrak{z}$ Seiten von der Länge t umschreibt. Dieser Halbmesser ist namentlich bei kleinem $\mathfrak{z}$ verschieden vom Radius R im obigen und gewöhnlichen Sinne. Die Verwechselung beider hat schon viele fehlerhafte Ausführungen hervorgerufen.

---

*) Derartige Maasstäbe, welche ich vor drei Jahren in den Uebungen im Maschinen-Construiren im Zürcher Polytechnikum einführte, haben auf meine Veranlassung sehr schön gefertigt und halten vorräthig die Herren Optiker Ernst (Schifflände) und Ulrich (Münsterplatz) in Zürich. Ein solcher Massstab von 314^{mm} Länge ist gleichzeitig fast ganz genau ein preussischer Fuss, getheilt in Hundertstel und deren Hälften. (1861.) Rx.

**) Siehe u. A. Salzenberg's Vorträge S. 93.

§. 141.

Tabelle über die Theilkreishalbmesser.

3	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	0,159	0,318	0,477	0,637	0,798	0,955	1,114	1,273	1,432
10	1,59	1,75	1,91	2,07	2,23	2,39	2,55	2,71	2,86	3,02
20	3,18	3,34	3,50	3,66	3,82	3,98	4,14	4,30	4,46	4,62
30	4,77	4,93	5,09	5,25	5,41	5,57	5,73	5,89	6,05	6,21
40	6,37	6,53	6,68	6,84	7,00	7,16	7,32	7,48	7,64	7,80
50	7,96	8,12	8,28	8,43	8,59	8,75	8,91	9,07	9,23	9,39
60	9,55	9,71	9,87	10,03	10,19	10,34	10,50	10,66	10,82	10,98
70	11,14	11,30	11,46	11,62	11,78	11,94	12,10	12,25	12,41	12,57
80	12,73	12,89	13,05	13,21	13,37	13,53	13,69	13,85	14,01	14,16
90	14,32	14,48	14,64	14,80	14,96	15,12	15,28	15,44	15,60	15,76
100	15,92	16,07	16,23	16,39	16,55	16,71	16,87	17,03	17,19	17,35
110	17,51	17,67	17,82	17,98	18,14	18,30	18,46	18,62	18,78	18,94
120	19,10	19,26	19,42	19,58	19,73	19,89	20,05	20,21	20,37	20,53
130	20,69	20,85	21,01	21,17	21,33	21,49	21,64	21,80	21,96	22,12
140	22,28	22,44	22,60	22,76	22,92	23,08	23,24	23,40	23,55	23,71
150	23,87	24,03	24,19	24,35	24,51	24,67	24,83	24,99	25,15	25,30
160	25,46	25,62	25,78	25,94	26,10	26,26	26,42	26,58	26,74	26,90
170	27,06	27,21	27,37	27,53	27,69	27,85	28,01	28,17	28,33	28,49
180	28,65	28,81	28,97	29,12	29,28	29,44	29,60	29,76	29,92	30,08
190	30,24	30,40	30,56	30,72	30,88	31,03	31,19	31,35	31,51	31,67
200	31,83	31,99	32,15	32,31	32,47	32,63	32,78	32,94	33,10	33,26
210	33,42	33,58	33,74	33,90	34,06	34,22	34,38	34,54	34,69	34,85
220	35,01	35,17	35,33	35,49	35,65	35,81	35,97	36,13	36,29	36,45
230	36,60	36,76	36,92	37,08	37,24	37,40	37,56	37,72	37,88	38,04
240	38,20	38,36	38,51	38,67	38,83	38,99	39,15	39,31	39,47	39,63
250	39,79	39,95	40,11	40,26	40,42	40,58	40,74	40,90	41,06	41,22
260	41,38	41,54	41,70	41,86	42,02	42,17	42,33	42,49	42,65	42,81
270	42,97	43,13	43,29	43,45	43,61	43,77	43,93	44,08	44,24	44,40
280	44,56	44,72	44,88	45,04	45,20	45,36	45,52	45,68	45,84	45,99
290	46,15	46,31	46,47	46,63	46,79	46,95	47,11	47,27	47,43	47,59

Erste Benutzungsart der vorstehenden Tabelle.

Beispiel. Ein Rad soll 63 Zähne und 30ᵐᵐ Theilung erhalten, welchen Halbmesser erhält sein Theilkreis? — Nach Zeile 7 Spalte 5 ist hier $\frac{R}{t} = 10{,}03$, *also* $R = 10{,}03 \,.\, t = 10{,}03 \,.\, 30 = 300{,}9^{mm}$, *abzurunden auf* 301^{mm}. *Wäre die Theilung 30 Linien gewesen, so würde* $R = 301$ *Linien geworden sein.*

Zweite Benutzungsart der Tabelle. Die Tabelle erleichtert auch das Auffinden der Zähnezahl, welche man einem Rad von bekannter (berechneter) Theilung und gegebenem (noch abrundbarem) Theilkreishalbmesser zu geben hat.

Beispiel. Welche Zähnezahl erhält ein Rad von 1000^{mm} *Theilkreishalbmesser bei* 40^{mm} *Theilung? — Es ist hier* $\frac{R}{t} = \frac{1000}{40} = 25$. *Fast genau entspricht diesem Werth die Zahl 24,99 in Spalte 9 Zeile 16, und erhält demnach das Rad* $150 + 7 = 157$ *Zähne. Der Halbmesser wäre streng genommen zu verkleinern auf* $24{,}99 \,.\, 40 = 999{,}6^{mm}$, *was aber einen vernachlässigbaren Unterschied liefert.*

Dritte Benutzungsart der Tabelle. Bei gegebenem Halbmesser und gegebener Zähnezahl die Theilung eines Rades zu suchen.

Beispiel. Gegeben $R = 400$, $\mathfrak{Z} = 54$. *Dem Werthe* $\mathfrak{Z} = 54$ *entspricht nach Spalte 6 Zeile 6 der Quotient* $\frac{R}{t} = 8{,}59$. *Man hat demnach hier zu nehmen:* $t = \frac{R}{8{,}59} = \frac{400}{8{,}59} = 46{,}56^{mm}$.

Bei der Verzeichnung der Theilung ist es am besten, den Kreis von dem auf die obige Weise sorgfältig ermittelten Halbmesser R recht genau aufzutragen und ihn dann in $\mathfrak{Z}$ gleiche Theile zu theilen.

§. 142.

Allgemeine Verzahnung.

In einem Stirnräderpaare liegen zusammenarbeitende Zahnumrisse in einem Lothschnitt zu den Radachsen, und geschieht deshalb die Verzeichnung und Auftragung der Zahnformen in einem solchen Schnitte (Endfläche). Die sogenannte allgemeine Verzahnung lehrt, wie bei gegebenem Zahnprofil des einen Rades dasjenige für das eingreifende Rad zu bestimmen ist, und zwar unter der Voraussetzung, dass die Bewegungsübertragung bei constantem Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten der Räder erfolgen soll.

I. Genaues Verfahren. Fig. 216. O Mittelpunkt, T Theilkreis, abc Zahncurve des gegebenen Rades, O_1 Mittelpunkt, T_1 Theilkreis des Rades, dessen Zahncurve $a_1 S b_1$ gesucht werden soll. Lege die gegebene Curve so, dass ihr Theilkreispunkt S in die Centrale $O O_1$, also in den Berührungspunkt S der Theilkreise fällt, so ist S gleichzeitig ein Punkt des gesuchten Zahnprofils. Um einen zweiten Punkt a_1 zu finden, der mit a zusammentreffen soll, ziehe sa normal zur gegebenen Curve in a, mache $\widehat{Ss_1} = \widehat{Ss}$, $\angle Ps_1 a_1 = \angle Osa$, und $s_1 a_1 = sa$, so ist a_1 der gesuchte Punkt. Profilpunkte, welche wie c so gelegen sind, dass ihre Normale den zugehörigen Theilkreis nicht trifft, sind für den gegebenen Theilkreis nicht benutzbar; um sie dazu zu machen, müsste man den Theilkreis T verlegen (hier vergrössern). Die gefundene Curve kann Spitzen, Schleifen, überhaupt unausführbare Formen erhalten, ohne deshalb geometrisch unrichtig zu werden.

Fig. 216.

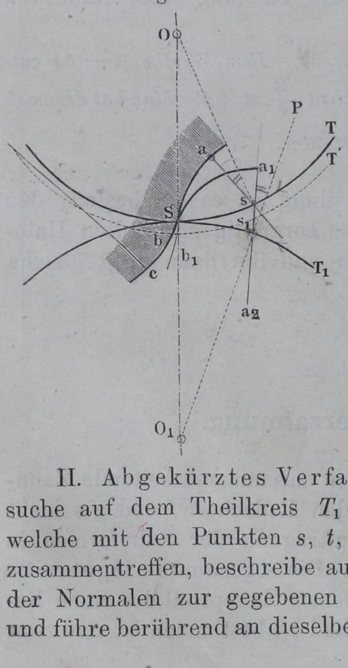
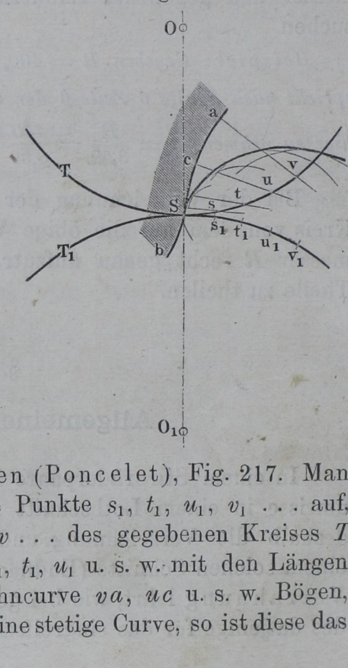


Fig. 217.



II. Abgekürztes Verfahren (Poncelet), Fig. 217. Man suche auf dem Theilkreis T_1 die Punkte s_1, t_1, u_1, v_1 . . . auf, welche mit den Punkten s, t, u, v . . . des gegebenen Kreises T zusammentreffen, beschreibe aus s_1, t_1, u_1 u. s. w. mit den Längen der Normalen zur gegebenen Zahncurve va, uc u. s. w. Bögen, und führe berührend an dieselben eine stetige Curve, so ist diese das gesuchte Zahnprofil. Die Punkte s, t, u, v . . . sollen in kleinen Abständen gewählt werden. — Trägt man in beiden Verfahrungsarten von den Punkten s_1, t_1, u_1 . . . die Länge der Normalen va, uc . . . rückwärts auf ($s_1 a_2$ . . ., Fig. 216), so erhält man die Hohlradverzahnung (innere Verzahnung) für das Rad $O_1 T_1$.

III. Verfahren des Verfassers. Fig. 218. Das Zahnprofil $abcSde$ und der zugehörige Theilkreis T sowie der Theilkreis T_1 gegeben. Man ziehe die Normalen $a1$, $b2$, $c3$ u. s. w., beschreibe aus O durch a, b, c u. s. w. Kreise, mache dann $S\mathrm{I} = a1$, $S\mathrm{II} = b2$, $S\mathrm{III} = c3$ u. s. w., und ziehe die Curve I, II, III, S, IV, V u. s. w., so gibt diese, welche den Namen Eingrifflinie führt, zunächst den geometrischen Ort der Zahnberührungen, und zwar greift der Punkt a ein, wenn er in I liegt, b in II, c in III u. s. w. Darauf beschreibe man aus O_1 Kreise durch die Punkte I, II, III u. s. w., mache auf T_1 $\widehat{S1'} = \widehat{S1}$, $\widehat{S2'} = \widehat{S2}$, $\widehat{S3'} = \widehat{S3}$ u. s f., und ferner $1'a_1 = 1a$, $2'b_1 = 2b$, $3'c_1 = 3c$ u. s. f., so ist die Curve $a_1 b_1 c_1$ . . ., welche die gefundenen Punkte a_1, b_1, c_1 . . . stetig verbindet, das gesuchte Zahnprofil. Dieses Verfahren ist

Fig. 218.

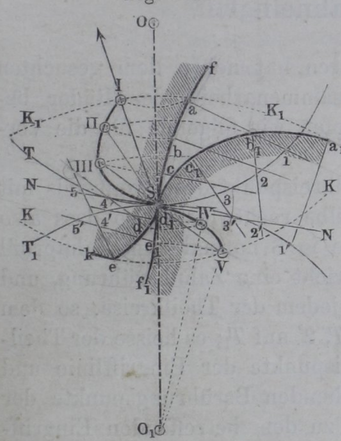
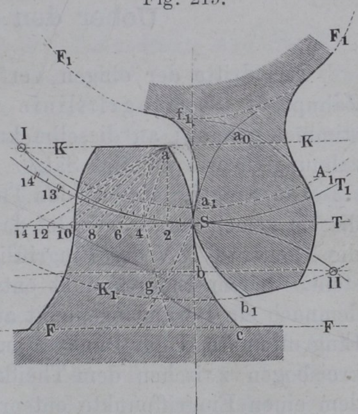


Fig. 219.



ebenso genau und dabei leichter als Nro. I, und liefert ausserdem die Eingrifflinie (s. d. folg. Paragraphen).

IV. Theoretisches Profil des Zahnfussansatzes. Fig. 219. Manchmal muss man, um den Zahnfuss genügend stark zu erhalten, dessen Ansatz an den Radboden soweit als thunlich in die Lücke hineinbiegen; dieses sein Ansatzprofil darf aber nicht in die Bahn der Spitze des Gegenzahnes hineinschneiden. Letztere Bahn wird auf folgende Weise gefunden. aSb Zahncurve des Rades T, $a_1 S b_1$ die des Rades T_1, $a_1 a_0$ Verlängerung des Fussprofiles des letzteren Zahnes, ISII Eingrifflinie, durch die Kopfkreise K und K_1 begrenzt. Trage nun von S aus die beziehlich gleichen Theilkreisstücke $S1$, 12, 23 . . ., $S1'$, $1'2'$, $2'3'$ . . . . auf T und T_1 in der Richtung der zu profilirenden Zahnlücke auf, fasse nacheinander Sa, $1a$, $2a$, $3a$ . . . . in den Zirkel und beschreibe mit den erhaltenen Zirkelöffnungen aus $1'$, $2'$, $3'$ . . . Kreise, so hüllen diese die Curve aa_1g . . . ., das sogenannte theoretische Profil des Zahnfusses, ein, an welches tangirend das wirkliche Profil a_1f_1 des Zahnfusses angelegt wird, so dass es in den Fusskreis F_1 übergeht. Das genannte theoretische Profil ist eine verlängerte oder verkürzte cyclische Curve (s. §. 144), hier wo T eine gerade Linie ist (Zahnstange), eine verkürzte Evolvente (s. übrigens §. 150).

§. 143.

Ueber den Zahneingriff.

Das dritte der obigen Verfahren hat neben dem gesuchten Zahnprofil die Eingrifflinie zusammenarbeitender Räder bestimmen gelehrt; an dieselbe knüpfen wir folgende für die Verzahnungstheorie wichtige Sätze.

Die Eingrifflinie hat den Theilkreispunkt des Zahnprofils mit diesem gemein, und schneidet dasselbe rechtwinklig, so dass also die Tangente NN der Eingrifflinie in S normal zum Zahnprofil steht. Jedem Eingriffpunkt entspricht eine Zahnberührung, und demnach ein Berührungspunkt auf jedem der Theilkreise, so dem Eingriffpunkte II der Punkt 2 auf T, $2'$ auf T_1; es heisse der Theilkreisbogen zwischen dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie und dem einen Eingriffpunkte entsprechenden Berührungspunkte der Theilkreise der Wälzungsbogen zu dem betreffenden Eingriffpunkte. So ist $\widehat{S2}$ der Wälzungsbogen auf T zum Punkte II, $\widehat{S2'}$ der auf T_1 zu demselben Eingriffpunkte.

Die Summe der Wälzungsbogen zu den äussersten Eingriffpunkten ($\widehat{1S} + \widehat{S5}$ oder $\widehat{1'S} + \widehat{S5'}$) heisst der Eingriffbogen, seine Länge in Theilungen ausgedrückt die Eingriffdauer des betrachteten Zahneingriffes, welche hiernach leicht graphisch zu bestimmen ist. Dieselbe hängt von der Länge der Eingriffstrecke, d. i. des benutzten Stückes der Eingrifflinie ab. Da nun aber der Zahnfuss wegen des Ansatzes an den Radboden sowohl, als wegen des Durchlassens des Gegenzahnkopfes über den Kopfkreis des Gegenrades hinaus verlängert werden muss, so sind es bei unseren gewöhnlichen Rädern die Kopfkreise K und K_1, welche die Eingriffstrecke (V-I) begrenzen.

Für ein Rad gibt es zu einem gegebenen Zahnprofile bei bekanntem Theilkreis nur eine Eingrifflinie, und zu einer gegebenen Eingrifflinie nur ein richtiges Zahnprofil. Dieses letztere ist nur in dem Falle aus der Eingrifflinie bestimmbar, wenn im voraus nachgewiesen werden kann, dass die Fahrstrahlen der Eingrifflinie im Augenblick des Eingriffes auch normal zum Zahnprofil stehen. Ist aber dieser Zusammenhang zwischen den Wälzungsbogen und Eingriffpunkten gegeben, so kann das entsprechende Zahnprofil construirt werden. Diese Aufgabe ist es, welche das obige Verfahren von einem gegebenen Zahnprofil ausgehend löst.

Bei den cycloidischen Verzahnungen ist der genannte aprioristische Nachweis allgemeiner zu führen, und deshalb sind diese Verzahnungen besonders praktisch.

Bei richtig zusammenarbeitenden Zahnrädern sind die Eingrifflinien congruent und die Wälzungsbogen zu homologen Eingriffpunkten gleich lang. Unter Einhaltung dieser Bedingung können beliebig viele Räder zu einem gegebenen hinzuconstruirt werden.

Solche Räder sind unter der weiteren Bedingung Satzräder (s. §. 139), dass die allen gemeinschaftliche Eingrifflinie so geformt ist, dass sie durch den Theilkreis sowohl, als durch den Radius zu ihrem Theilkreispunkt in zwei congruente Stücke zerlegt wird*).

Der Strahl, welcher von dem Theilkreispunkte der Eingrifflinie aus nach irgend einem Eingriffpunkte gezogen wird (z. B. SI in Fig. 218), gibt die Richtung und den Angriffpunkt des Zahndruckes für den betreffenden Eingriffpunkt an. Damit der Achsendruck zwischen den Rädern nicht zu gross ausfalle, soll der Winkel zwischen der Achsendruckrichtung und der Centrale nicht zu klein sein.

*) Mancherlei über die Eingrifflinie und insbesondere die Eingriffdauer findet man in der „Constructionslehre für den Maschinenbau", §. 178 u. f.

§. 144.

Die cyclischen Curven.

Zur Erzielung der Satzräderverzahnungen, oder überhaupt solcher Verzahnungen, deren geometrische Eigenschaften man allgemein vorausbestimmen will, eignen sich am besten die Kreisrollungs- oder cyclischen Curven*). Wenn ein Kreis auf einem anderen ohne Gleitung rollt, so beschreibt jeder Punkt in einem seiner Radien eine solche Curve, welche eine gemeine, verlängerte oder verkürzte Cycloide heisst, je nachdem der beschreibende Punkt auf dem Umfang des rollenden Kreises liegt, oder durch eine Verlängerung oder durch eine Verkürzung des Halbmessers des rollenden Kreises zu erreichen ist.

Der ruhende Kreis ist der Grundkreis der Curve, sein Halbmesser werde hier mit R bezeichnet; der rollende Kreis heisst der Wälzungskreis oder Radkreis und habe den Halbmesser r; der dem beschreibenden Punkt diametral gegenüberliegende Punkt des Radkreises werde der Gegenpunkt des Curvenpunktes genannt. Bezeichnet man nun den Halbmesser desjenigen der beiden Kreise, welcher den anderen mit seiner Innenseite berührt, als negativ, den anderen als positiv, so lassen sich zunächst die fünf Arten der cyclischen Curven, welche sich durch Veränderung von R und r ergeben, wie folgt zusammenstellen.

Grundkreis.	Radkreis.	Entstehende Curve.
$+R$	$+r$	Aufradlinie oder Epicycloide.
$\pm\infty$	$+r$	Radlinie schlechthin oder Cycloide.
$-R$	$+r$	Inradlinie oder Hypocycloide.
$+R$	$\pm\infty$	Fadenlinie oder Kreisevolvente.
$+R$	$-r$	Umradlinie oder Pericycloide.

*) Siehe u. A. Dr. Zehme's elem. u. anal. Behandl. d. versch. Cycloiden, Iserlohn und Elberfeld 1854, und Dr. Weissenborn's cyclische Curven, Eisenach 1856.

Bei allen fünf Arten gelten sodann von der gemeinen Form die beiden folgenden Sätze:

1. Die Normale zu einem Curvenpunkt geht durch den zugehörigen Berührungspunkt der Erzeugungskreise.

2. Der Krümmungsmittelpunkt zu einem Punkt der Curve ist der Durchschnitt der Normalen mit der Geraden, welche den Gegenpunkt mit dem Mittelpunkt des Grundkreises verbindet.

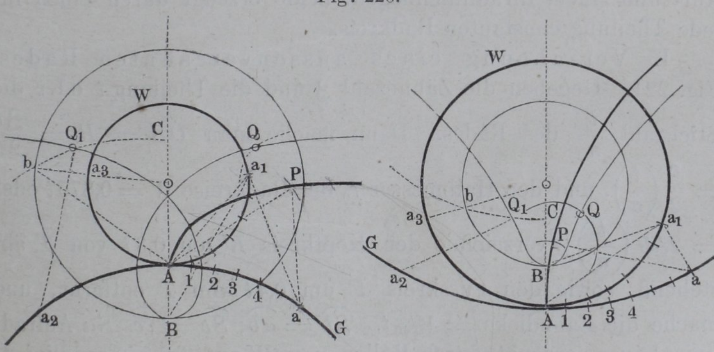
Auf dem ersteren Satze beruht die vorzügliche Anwendbarkeit der cyclischen Curven zur Verzahnung; auf den zweiten lassen sich vortrefflich die Ersetzungen der cycloidischen Zahncurven durch Kreisbögen stützen.

§. 145.

Verzeichnung der cyclischen Curven.

I. Genaues Verfahren. Fig. 220. G Grundkreis, W Radkreis, A Anfangspunkt der Curve. Trage von A aus auf G und W nach derselben Seite kleine gleichlange Bogenstücke auf, und es seien nun a und a_1 zwei zusammengehörige Theilpunkte. Be-

Fig. 220.



schreibe aus A mit dem Abstand aa_1 einen Bogen, und aus a mit der Sehne Aa_1 ebenfalls einen Bogen, so schneidet letzterer den ersteren in einem Punkte P der gesuchten Curve. Dieses Verfahren, welches in Fig. 220 nur für Auf- und Inradlinie angewandt ist, gilt für alle fünf Arten der cyclischen Curven.

II. Abgekürztes Verfahren. Beschreibe aus den Theilpunkten 1, 2, 3, a, . . . mit den zugehörigen, von A aus gemessenen Sehnen des Radkreises Kreisbogen, so berühren diese sämmtlich die gesuchte Curve und können, bei recht kleiner Theilung, $A - 1$, $1 - 2$ . . . gut zur Verzeichnung derselben dienen.

Für die in B anfangende verlängerte oder verkürzte Curve bestimme zuerst P (wobei es nicht nöthig ist, die gemeine Curve selbst zu verzeichnen), beschreibe dann aus a mit $a_1 B$ einen Bogen, und aus P einen solchen mit AB, so schneiden die beiden Bogen einander in einem Punkte Q der gesuchten Curve.

Oder: Ziehe durch a_3 einen Radius $a_3 b$ im Radkreise, und durch b einen Kreisbogen bc concentrisch mit dem Grundkreise, und mache $a_2 Q_1 = Ab$, so ist Q_1 der Curvenpunkt für die Wälzung auf dem Bogen $Aa_2 = Aa_3$.

§. 146.

Radlinienverzahnung für Satzräder.

Das Zahnprofil wird bei dieser streng genommen als doppelte zu bezeichnenden Verzahnung zusammengesetzt aus einem Auf- und einem Inradlinienbogen, beide erzeugt durch einen für jede Theilung constanten Radkreis.

I. Verzahnung eines aussenverzahnten Rades, Fig. 221. Gegeben die Zähnezahl $\mathfrak{Z}$ und die Theilung t oder die Stichzahl $\frac{t}{\pi}$ des Rades. Dann mache man $OS = R = \frac{\mathfrak{Z}t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, und den Halbmesser r_0 der Radkreise $W = 0{,}875\,t$ oder $= 2{,}75\left(\frac{t}{\pi}\right)$; verzeichne den Kopfkreis K um $0{,}3\,t$ von T abstehend, sowie den Fusskreis F um $0{,}4\,t$ von T entfernt, und mache die Zahndicke $= {}^{18}/_{40}\,t$. $\widehat{Sb} = \widehat{ab}$; $\widehat{Sc} = \widehat{ic}$. Sa Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W auf T; Si Inradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W in T.

Bei dem eilfzähnigen Rad wird Si gerade und radial. Die Verzahnung kann gut bis zu sieben Zähnen herab benutzt werden; die Inradlinienbogen werden zwar bei $\mathfrak{Z} = 11$ unterkrümmt,

d. i. nach der Zahnmittelebene hin gebogen. Diese Unterkrümmung der Zahnflanken ist aber dadurch unschädlich zu machen, dass man die Zahnfussflanken unter Beachtung des theoretischen Fussprofiles ausrundet (s. §. 142, wo in Fig. 219 als Beispiel das siebenzähnige Rad der vorliegenden Verzahnung im Eingriff mit der Zahnstange gewählt wurde), und ausserdem dem Rade eine Seitenscheibe (s. §. 164, S. 285) gibt. Die oben angegebenen Verhältnisse liefern einen Scheitelspielraum von $^1/_{10}\,t$, einen Flankenspielraum von $^1/_{20}\,t$.

Fig. 221.

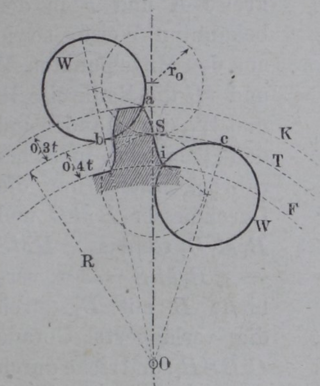
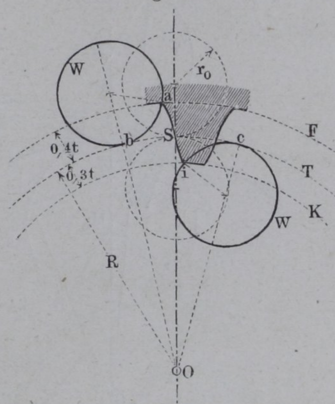


Fig. 222.



II. Verzahnung eines Hohlrades, Fig. 222. Das Hohlrad ist in den Zahnformen, abgesehen von der Rücksicht auf die Spielräume, die genaue Hohlform des gleichgrossen aussenverzahnten Rades. — O Mittelpunkt, R Theilkreishalbmesser, K Kopfkreis, um $0{,}3t$ von T nach innen abstehend, F Fusskreis, um $0{,}4t$ von T nach aussen abstehend. $r_0 = 0{,}875\,t = 2{,}75\,\dfrac{t}{\pi}$, Zahndicke $= {}^{19}/_{40}\,t$. Sa Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W auf T, Si Inradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W in T.

Bei der Zahnstange ist $R = \infty$. Sa und Si werden dann congruente Bögen der gemeinen Radlinie (vergl. Fig. 219 in §. 142).

Die Eingrifflinie fällt bei der vorliegenden Verzahnung mit den Radkreisen zusammen; der Eingriffbogen ist zudem hier gleich der Eingriffstrecke, nämlich $= \widehat{ba}\, +$ dem entsprechenden $\widehat{b_1 a_1}$ am eingreifenden Rade. Die Eingriffdauer ε schwankt zwischen 1,22 und 1,60.

§. 147.

Radlinien-Kreisverzahnung.

Als Ersatzbögen werden zwei Stücke von Krümmungskreisen passend gelegener Elemente der Radlinienbögen benutzt.

Fig. 223.

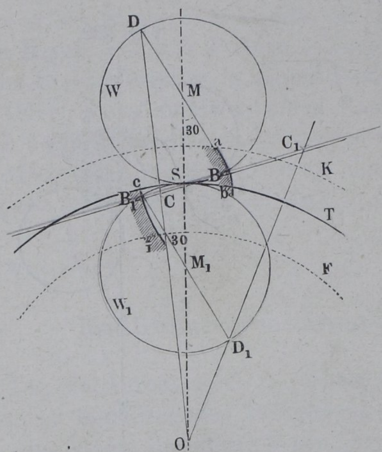


Fig. 223. Verzeichne aus O den Theilkreis T und die Kopf- und Fusskreise K und F in der bekannten Weise, sowie aus den Mittelpunkten M und M_1 die Radkreise W und W_1, die einander und den Theilkreis in S berühren. Ziehe nun die Durchmesser BMD und $B_1M_1D_1$ so, dass $\angle BMS = \angle B_1M_1S = 30^0$; verbinde B mit B_1 durch die verlängerte Gerade C_1BSB_1, und ziehe durch die Gegenpunkte D und D_1 die Geraden OD und OD_1C_1, so liefern deren Schnitte C und C_1 mit der Geraden B_1CSC_1 die gesuchten Krümmungsmittelpunkte zu den Ersatzbögen aBb und cB_1i. Durch C und C_1 lege nun aus O beschriebene Mittelpunktkreise, und rücke die Bögen aBb und cB_1i zum Zahnprofil zusammen.

Durch Rechnung findet man die Krümmungshalbmesser ϱ aus den folgenden Formeln:

$$\frac{\varrho}{t} = 0{,}45\,\frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \text{ und } \frac{\varrho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)} = 1{,}42\,\frac{2\mathfrak{z} \pm 11}{\mathfrak{z} \pm 11} \quad . \quad (173)$$

Die Pluszeichen liefern die Krümmungshalbmesser CB für die Aufradlinienbögen (ϱ_a), die Minuszeichen die Krümmungshalbmesser C_1B_1 für die Inradlinienbögen (ϱ_i). Am Radboden wird der Zahnfuss in bekannter Weise mit einer Abrundung angesetzt.

1. Beispiel. Gegeben $\mathfrak{Z} = 63$, $t = 30$, *so ist der Krümmungshalbmesser* ϱ_a *für die Ersatzbögen der Aufradlinien:* $\varrho_a = 30 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{126+11}{63+11}$ $= 30 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{137}{74} = 0{,}833 \,.\, 30 =$ *sehr nahe* 25^{mm}, *und der Krümmungshalbmesser* ϱ_i *für die inneren Bögen:* $\varrho_i = 30 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{126-11}{63-11} = 30 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{115}{52}$ $= 30 \,.\, 0{,}995 =$ *sehr nahe* 30^{mm}.

2. Beispiel. Gegeben $Z = 11$, $\left(\frac{t}{\pi}\right) = 10$. *Hier wird:* $\varrho_a = 10 \,.\, 1{,}42 \,.\, \frac{33}{22}$ $= \frac{42{,}6}{2} = 41{,}3$ *Millimeter (nicht etwa Theile des Peripheriemaasstabes). Sodann hat man* $\varrho_i = 10 \,.\, 1{,}42 \,.\, \frac{11}{0} = \infty$, *d. h. die Fussflanke wird geradlinig und radial.*

3. Beispiel. Gegeben $Z = 7$, $t = 50$. *Hier wird* $\varrho_a = 50 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{14+11}{7+11}$ $= 50 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{25}{18} = 31{,}2$ *oder abgerundet* 31^{mm}. *Für den inneren Bogen erhält man:* $\varrho_a = 50 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{14-11}{7-11} = -\, 50 \,.\, 0{,}45 \,.\, \frac{3}{4} = -\, 50 \,.\, 0{,}3375$ $=$ *nahe* $-\, 17^{mm}$. *Die Fussflanke wird also unterkrümmt. Sie wird in der in §. 142, Fig. 219 angegebenen Weise in den Radboden übergeführt.*

Bemerkung. Bei den Zähnezahlen unter 15 thut man wohl, statt der Kreisverzahnung die genaue Methode (§. 146) anzuwenden, indem sonst die Vernachlässigungen einen merkbaren Einfluss auf den Gang der ausgeführten Zahnräder üben.

§. 148.

Geradflankenverzahnung.

Die Geradflankenverzahnung ist eine einfache Radlinienverzahnung; sie liefert Einzelräder (s. §. 139 und 143) und ist für Holzeisenräder namentlich bei Winkeltrieben deshalb passend, weil sie die Flanken der Holzzähne als ebene Flächen liefert.

I. Räder mit äusserem Eingriff, Fig. 224. $\mathfrak{Z}$ Zähnezahl, R Halbmesser des Holzrades, $\mathfrak{Z}_1$ und R_1 Zähnezahl und Halbmesser des Eisenrades, t die Theilung, k und f Kopf- und Fusslänge beim Holzrad, k_1 und f_1 diese Längen beim Eisenrad. W Radkreis zur Erzeugung der Zahncurven des Rades R_1. Man mache $R = \frac{\mathfrak{Z}t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$, den Halbmesser von $W = \frac{R}{2}$,

$$R_1 = \frac{\mathfrak{Z}_1 t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}_1}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right),\ k = 0{,}1t,\ f = 0{,}6t,\ k_1 = 0{,}5t,\ f_1 = 0{,}2t,$$

und die Zahndicke bei beiden Rädern $= \frac{19}{40}t$. Si gerade und radial, Sa Abrundung vom Halbmesser $\frac{t}{10}$, aSi das Profil des geradflankigen Zahnes. Bogen $\widehat{Sb_1} = \widehat{b_1 a_1}$, Sa_1 Aufradlinienbogen, erzeugt durch Rollen von W auf T_1. Si_1 geradlinige Verlängerung der Curve $a_1 S$, mit einer Ausrundung in den Radbogen übergeführt; $i_1 S a_1$ Profil des krummflankigen Zahnes.

Fig. 224.

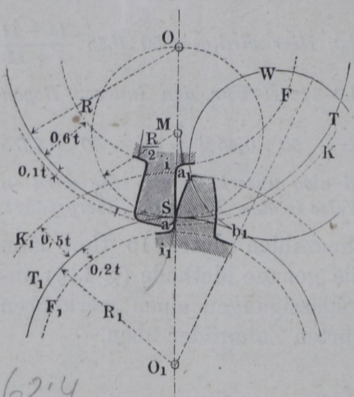
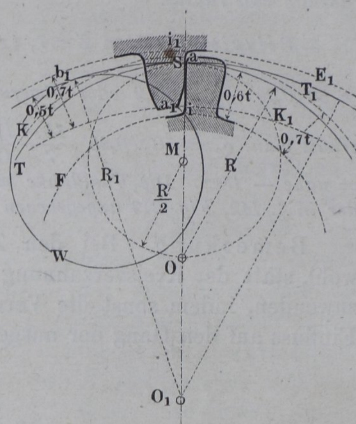


Fig. 225.



62'4
37'2

II. Räder mit innerem Eingriff, Fig. 225. Das Hohlrad erhält die eisernen krummflankigen Zähne, den Halbmesser R_1, die Zähnezahl $\mathfrak{Z}_1$; das andere Rad die Zähnezahl $\mathfrak{Z}$, den Halbmesser R. W Radkreis vom Halbmesser $\frac{R}{2}$; die Kopf- und Fusslängen werden genommen wie oben. aSi gerades, oben abgerundetes Profil des Holzrades; $i_1 S a_1$ Profil des Eisenzahnes, zusammengesetzt aus dem Inradlinienbogen Sa_1 und dem Ansatzstück Si_1. Sa_1 wird erzeugt durch Rollen von W in T_1. — Wollte man dem Hohlrad die geradlinigen Zähne geben, so würden die Zahnprofile des aussenverzahnten Rades nach Umradlinienbögen zu formen sein, erzeugt durch Wälzen eines Radkreises von dem halben Halbmesser des Hohlrades um den Theilkreis des aussenverzahnten. Die entstehenden Zahnformen werden dabei für die Ausführung weniger bequem als bei der obigen Methode. Will man die Geradflankenverzahnung für Zahnstange und Triebling benutzen, so kann man a) $R_1 = \infty$ annehmen, R endlich lassen, also den Triebling mit den Geradflanken versehen; die Zahnflanken der Zahnstange werden dann gemeine Radlinien; oder man kann b) $R = \infty$, R_1 aber endlich annehmen, wobei die Zahnstange die geraden Flanken, der Triebling Evolventen zu Zahnflanken erhält.

Die Eingrifflinie fällt bei der Geradflankenverzahnung mit dem Radkreis $\left(\frac{R}{2}\right)$ zusammen; der Eingriffbogen wird gleich der Eingriffstrecke, d. i. gleich dem $\widehat{b_1 a_1}$; die Eingriffdauer ε schwankt zwischen 1,7 und 3,7. Wenn die Profile des krummflankigen Zahnes einander vor Erreichung des normalen Kopfkreises schneiden, so schadet das nicht, wenn dabei $\varepsilon > 1$ bleibt; andernfalls wähle man alsdann grössere Zähnezahlen.

§. 149.

Geradflanken-Kreisverzahnung.

Der Radlinienbogen wird durch ein Stück eines Krümmungskreises, das einem passend gelegenen Curvenelemente angehört, ersetzt.

Räder mit äusserem und Räder mit innerem Eingriff, Fig. 226 und 227 (a. f. S.). Verzeichne aus O_1 den Theilkreis T_1 und die Kopf- und Fusskreise K_1 und F_1, sowie in S berührend aus M den Radkreis W mit dem Halbmesser $\frac{R}{2}$, wobei R den Halbmessser des eingreifenden (Holz-) Rades bezeichnet. Mache die Sehne SB des Radkreises $= 0{,}8\,t$, ziehe den Durchmesser BMD, und verbinde den Gegenpunkt D mit O_1, so ist der Durchschnitt C von DO_1 mit der Verlängerten BS der gesuchte Krümmungsmittelpunkt, und CB der Halbmesser ϱ des Ersatzbogens $a_1 B i_1$.

Auch bestimmt sich ϱ aus folgenden Formeln:

$$\frac{\varrho}{t} = 0{,}8\,\frac{2\,\mathfrak{Z}_1 \pm \mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1 \pm \mathfrak{Z}}, \quad \frac{\varrho}{\left(\frac{t}{\pi}\right)} = 2{,}5\,\frac{2\,\mathfrak{Z}_1 \pm \mathfrak{Z}}{\mathfrak{Z}_1 \pm \mathfrak{Z}} \quad . \quad . \quad (174)$$

wobei die Pluszeichen für die aussenverzahnten, die Minuszeichen für die innenverzahnten Räder gelten.

Fig. 226.

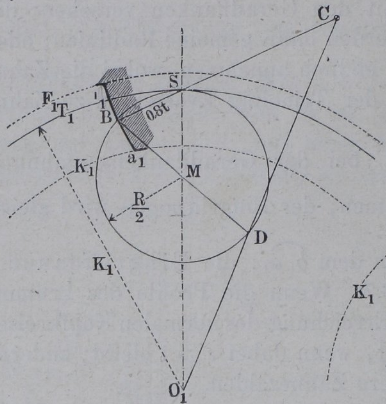
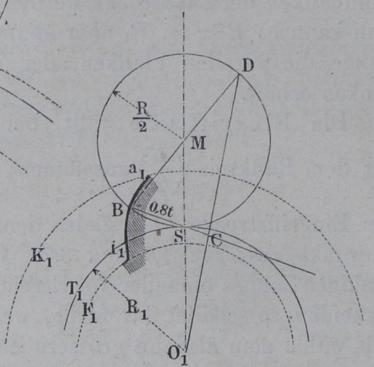


Fig. 227.



§. 150.

Punktverzahnungen. Gemischte Verzahnungen.

Die Geradflankenverzahnung ist auch vielfach so benutzt worden, dass man deren zwei zusammenfügt, so dass an beiden Rädern die Fussflanken gerade, die Kopfflanken gekrümmt werden. Solche Räder sind aber keine Satzräder, und daher für die gewöhnlichen Ausführungen des Maschinenbaues als unpraktisch zu verwerfen. Nur bei den Uhrmachern mag sich diese Verzahnungsmethode vielleicht halten, weil sie ein bequemes Ausfeilen der Zahnlücken gestattet, und ausserdem kleine Zähnezahlen zulässt.

Steigert man den Durchmesser des Radkreises um einen Bruchtheil über den Halbmesser des umgebenden Theilkreises hinaus, so ergeben sich auch ausführbare Verzahnungen, welche aber nur in vereinzelten Fällen praktisch sind.

Wird der Radkreis einer einfachen Verzahnung so gross gemacht, wie der Theilkreis des einen der beiden Räder, so ergeben sich für den Theilkreis, auf welchem er rollt, als Zahnprofile cyklische Curven, für den anderen, mit ihm gleich grossen Theilkreis aber schrumpft das Zahnprofil in einen Punkt zusammen, weshalb man solche Verzahnungen Punktverzahnungen nennen kann. Unter diese fallen die sogenannten Triebstock-Verzahnungen.

Triebstockverzahnung für äusseren Eingriff. Fig. 228. Um den Punkt, in welchem das Zahnprofil am Rade R übergegangen ist, wird ein Kreis mit $\frac{19}{80}t$ beschrieben, welcher das Profil des den Punkt umgebenden und vertretenden Triebstockes ist; das Zahnprofil am Rade R_1 ist eine Parallele (oder Aequidistante) zu einer Aufradlinie Sa, erzeugt durch Wälzen des Kreises T auf T_1, $\widehat{Sb} = \widehat{ab}$; Kreise vom Triebstockhalbmesser aus den Punkten von Sa beschrieben, hüllen das Zahnprofil cd ein; di viertelkreisförmiges Fussprofil. Die Eingrifflinie fällt mit T zusammen; die Eingriffstrecke SI wird durch den Kopfkreis K_1' in I begrenzt, und ist gleich dem Eingriffbogen, muss also $> t$, nicht kleiner als etwa $1{,}1\,t$ sein. Hiernach richtet sich die Kopflänge k_1' und die daraus folgende k_1.

Triebstockverzahnung für inneren Eingriff. Fig. 229.

Fig. 228.

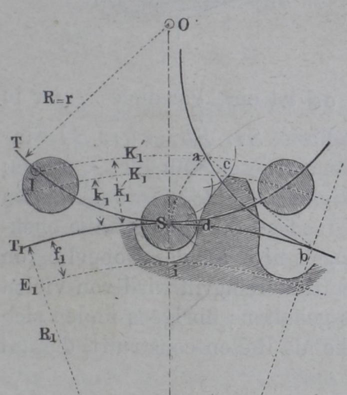
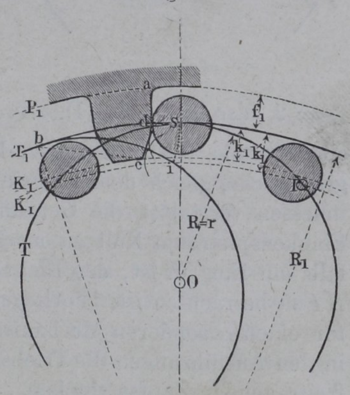


Fig. 229.



Ganz ähnliches Verfahren wie vorhin. Das Zahnprofil cd ist eine Parallele zu der Inradlinie Si, erzeugt durch Wälzen von T in T_1, $\widehat{Sb} = \widehat{ib}$; SI Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffbogen, also $\geqq 1{,}1\,t$ zu machen. Das Fussprofil da ist hier radial gemacht, indem die Ausrundung bei Fig. 228 nicht unbedingt erforderlich ist. — In Fig. 230 sind die Triebstöcke an dem Hohlrade angebracht; Profil cd ist parallel zu der Umradlinie Sa, erzeugt durch Wälzen von T um T_1; $\widehat{Sb} = \widehat{ab}$; SI Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffbogen, wie oben, und $\geqq 1{,}1\,t$ zu machen; di radiales Fussprofil.

Einen besonderen Fall der Verzahnung in Fig. 229 stellt Fig. 231 dar; hier ist $R = \frac{1}{2} R_1$, also $\mathfrak{Z} = \frac{1}{2} \mathfrak{Z}_1$, und hier insbesondere

Fig. 230.

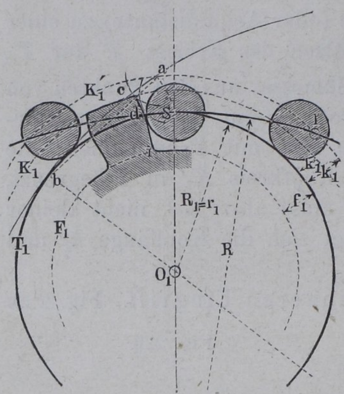
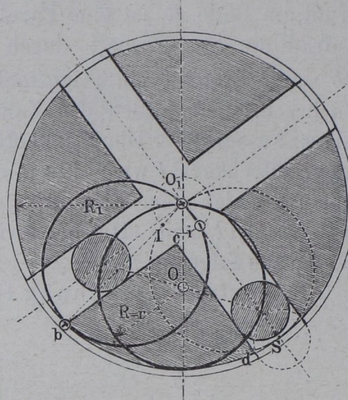


Fig. 231.



$\mathfrak{Z} = 2$, also $\mathfrak{Z}_1 = 4$. Das Profil cd ist eine Parallele zu der in eine Gerade übergegangenen Inradlinie Si; $\widehat{Sb} = \widehat{bi}$; SI Eingriffstrecke, gleich dem Eingriffbogen. Dieser fällt hier $< t$ aus; indessen verstattet die Geradflankigkeit der Zähne von R_1, den Flankenspielraum Null zu machen, sodass die Gegenflanke ebenfalls ein Eingriff ist, der Eingriffbogen also als das Doppelte von SI zu betrachten ist. Vorliegender Rädereingriff wird von Vielen für einen besonderen Mechanismus gehalten; übrigens finden sich in den Ausführungen die Triebstöcke als Rollen construirt, die auf freitragenden Zapfen stecken.

Lässt man in Fig. 229 den Radius R_1 unendlich gross werden, so entsteht der Zahnstangenmechanismus, bei welchem die Zahnprofile an der Zahnstange Parallelen zu gemeinen Radlinien werden. Wenn dagegen bei Fig. 230 R unendlich gross gemacht wird, erhält die entstehende Zahnstange eine sehr bequeme Form (Stockleiter), sodass diese Construction der ersteren meist vorzuziehen ist; an dem Rade werden die Zahnprofile Parallelen zu Kreisevolventen.

Die Triebstockverzahnungen haben für präcise Ausführungen, welche sich nicht oft wiederholen, den Vortheil, dass man die Triebstöcke so leicht genau herstellen kann (auf der Drehbank); die erwähnten leiterförmigen Zahnstangen, aus Schmiedeisen hergestellt, sind äusserst praktisch, namentlich für Windwerke, welche dem Frost ausgesetzt sind, wie die an Schützen, Schleusen u. s. w.

Fig. 232.

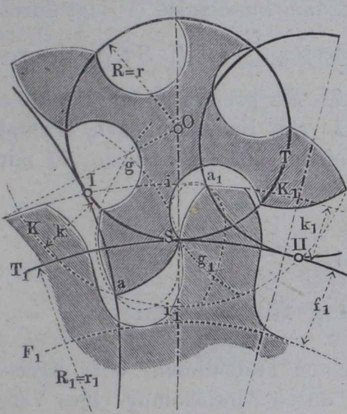
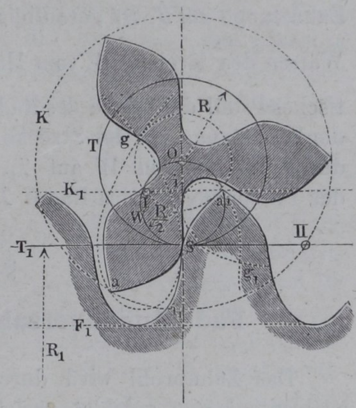


Fig. 233.



Doppelte Punktverzahnung. Fig. 232. Verbindet man zwei Punktverzahnungen miteinander, so erhält man eine Verzahnung, welche ein sehr tiefes Herabgehen der Zähnezahl des einen Rades, also eine starke Uebersetzung bei kleinen Abmessungen der Räder gestattet. Hier sind beide Theilkreise zugleich Radkreise. Sa Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von T_1 auf T, eingreifend auf der Strecke SI mit dem Punkte S des Rades T; Sa_1 Aufradlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von T auf T_1, eingreifend auf der Strecke SII mit dem Theilkreispunkte S des Rades T_1. Si Fussprofil, angelehnt an das theoretische Lückenprofil Sa_1g_1 (siehe IV. §. 142), Si_1 Fussprofil des anderen Rades, ebenso an das theoretische Lückenprofil Sag gelehnt. — Unter Voraussetzung der Seitenscheiben ist das kleine Rad gut zu brauchen; Ausführungen ähnlicher Art zeigen die Wagenwinden und ähnliche Hebezeuge.

Gemischte Verzahnung. Fig. 233. Für die Anfertigung der soeben genannten kleinen Trieblinge für Hebezeuge ist es sehr zweckmässig, wenn das Fussprofil nicht gar zu sehr unterschnitten erscheint. Für diesen Zweck eignet sich die Anwendung der Geradflanken beim Zahnfusse des kleinen Rades. Zur Erzielung einer genügenden Eingriffdauer (welche hier bei dem Dreier-Rad mit Zahnstange immer noch 1,15 beträgt) müssen dann freilich auch am eingreifenden Rade die Zahncurven am Zahnkopf bis zu ihrem Durchschnitt geführt werden. Sa Fadenlinienbogen, erzeugt durch Wälzen des (hier geradlinigen) Theilrisses T_1 der Zahnstange auf T, Si geradlinige radiale Fussflanke, erzeugt durch Wälzen des Kreises W vom Halbmesser $\frac{R}{2}$ in T, $Sa_1 g_1$ theoretisches Profil der Lücke des Rades T. Sa greift mit dem Punkte S der Zahnstange auf der Strecke SII. Sa_1 Radlinienbogen, erzeugt durch Wälzen von W auf T_1, greifend auf der Strecke SI mit der Fussflanke Si des Rades T.

§. 151.

Fadenlinienverzahnung für Satzräder.

Das Zahnprofil wird durch einen Fadenlinien- oder Kreisevolventenbogen gebildet, welcher durch Abwickelung eines Verhältnisskreises erzeugt wird.

Fig. 234.

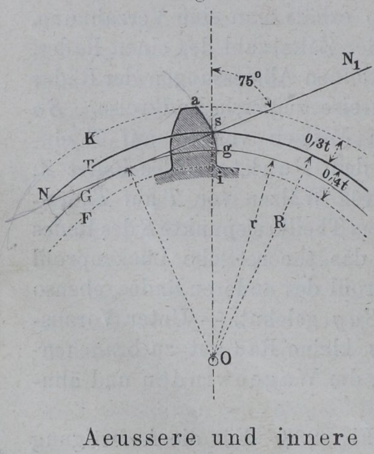
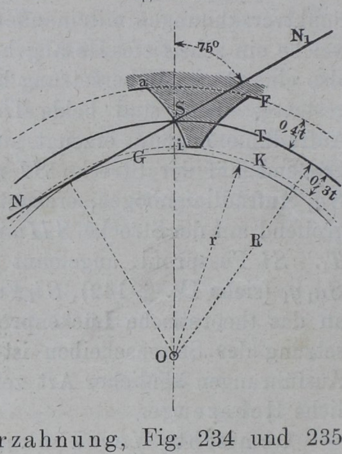


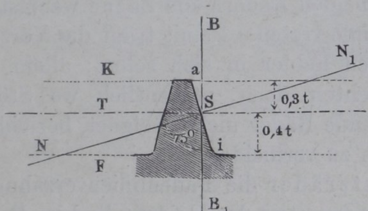
Fig. 235.



Aeussere und innere Verzahnung, Fig. 234 und 235

Gegeben die Zähnezahl $\mathfrak{Z}$ und die Theilung t, oder die Stichzahl $\frac{t}{\pi}$ des zu verzahnenden Rades. Mache $OS = R = \frac{\mathfrak{Z}t}{2\pi} = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right)$ und verzeichne die Kopf- und Fusskreise K und F in den Abständen $f = 0{,}4\,t$, $k = 0{,}3\,t$ vom Theilkreis, sowie die Zahndicke mit $^{19}/_{40}\,t$. Ziehe hierauf die Gerade NSN_1 unter 75^0 gegen OS geneigt, so wird dieselbe den Grundkreis G vom Halbmesser $r = 0{,}966\,R = 0{,}154\,\mathfrak{Z}t = 0{,}483\,\mathfrak{Z}\left(\frac{t}{\pi}\right)$ berühren. Wickle nun die NS von S nach a vom Kreise G ab, und von S nach g auf den Kreis G auf, so ist die Bahn aSg des Punktes S der gesuchte Zahnumriss, welcher bei äusserer Verzahnung für die Zähnezahlen unter 55 durch ein radiales Stück gi zu verlängern und mit dem Radboden zu verbinden ist.

Fig. 236.



Zahnstange, Fig. 236. aSi gerade, unter 75^0 gegen den Theilkreis T geneigte Linie als Zahnprofil. Der Winkel von 75^0 ist durch Zusammenlegen der gebräuchlichen Winkelbrettchen von 45^0 und 30^0 leicht zu erhalten.

Man übersehe bei Benutzung dieser Zahnstangenform nicht die Bemerkungen in dem folgenden Paragraphen.

§. 152.

Vor- und Nachtheile der behandelten Verzahnungsmethoden.

Jede von den beiden Satzräderverzahnungen hat ihre Vorzüge und ihre Nachtheile.

Radlinienverzahnung. Sie gewährt den grossen Vortheil, dass man bei ihr mit der Zähnezahl bis auf 7 für gleichgrosse Räder herabgehen kann, während bei der Fadenlinienverzahnung die kleinsten gleichgrossen Räder 14 Zähne haben müssen, man auch die Zähnezahl bei der Fadenlinienverzahnung nicht wohl unter 11 nehmen darf. Als ein kleiner Nachtheil ist zu betrachten, dass die Zahnprofile eine S-förmige Krümmung haben, was die Anfertigung erschwert; auch können zusammenarbeitende Räder nicht viel auseinandergerückt werden, ohne den genügend richtigen Eingriff einzubüssen.

Fadenlinienverzahnung. Vortheile sind: vor allem die einfache Form der Zähne und sodann die Eigenschaft, dass man die Räder auseinanderrücken darf, ohne die Richtigkeit des Eingriffes zu beeinträchtigen. Diesen Vorzügen stellt sich aber ein eigenthümlicher Nachtheil entgegen. Derselbe besteht darin, dass bei kleinen Zähnezahlen der Zahnkopf nach Beendigung des richtigen Eingriffstückes eine solche Bahn gegen den ihn angreifenden Zahn oder genauer gegen dessen radialen Fuss beschreibt, dass er ihm eine unrichtige Geschwindigkeit ertheilt. Der Uebelstand wird gehoben, wenn man die betreffenden Räder auseinanderrückt, und zwar so weit, dass bei beiden Rädern die Zähne wenigstens gleichzeitig aus der Eingrifflinie treten. Somit trägt die Verzahnung das Heilmittel für ihren Fehler in sich selbst; allein für starke Kraftübertragung möchten doch, namentlich wo Stösse häufig sind, so gesperrt gehende Räder nicht geeignet, beziehlich die Kleinheit der Zähnezahlen zu vermeiden sein.

So wird also für die Satzräder die Fadenlinienverzahnung nur bei grösseren Zähnezahlen (wo etwa das kleinere Rad im Paare nicht unter 30 Zähne hat) zu empfehlen sein, wo ihre guten Eigenschaften sich dann gut verwerthen lassen, während für Räder mit kleinen, unter Umständen möglichst kleinen Getrieben die Radlinienverzahnung den entschiedenen Vorzug verdient. Da diese ausserdem auch für grosse Zähnezahlen vortrefflich ist, sollte man bei neuen Fabrikanlagen nur sie allein für die Satzräder in Anwendung bringen.

Bei der Geradflankenverzahnung, deren einfache Zahnform namentlich für die Kegelräder von hohem Werth ist, wird das am Holzzahn angegriffene Stück in radialer Richtung manchmal ziemlich klein (und zwar um so kleiner, je grösser die Zähnezahl des geradflankigen Rades ist), und leidet deshalb nicht unbedeutend durch die Abnutzung, wenn man nicht sich durch das einfache Mittel vorsieht, den Zähnen eine recht grosse Breite zu geben.

Die Punktverzahnungen und die, welche als gemischte bezeichnet wurden, leisten für besondere Fälle, namentlich bei Hebzeugen und anderen Windwerken, wo als Zahnmaterial

Schmiedeisen gebraucht wird, ausgezeichnete Dienste, weshalb die betreffenden Regeln namentlich bei solchen Maschinen ihre Verwendung finden möchten.

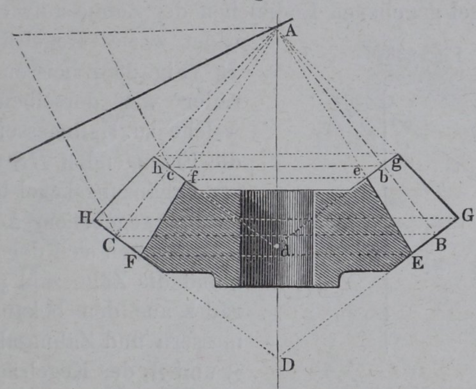
B. Verzahnung der Kegelräder.

§. 153.

Allgemeines über die Kegelradzähne.

Bei den Kegel- oder Winkelrädern liegen die berührenden Verhältnisskreise zusammenarbeitender Räder in Normalkegeln, den Grundkegeln, deren Spitzen im Schnittpunkt der geometrischen Achsen der Räder zusammentreffen. Unter den Theilkreisen verstehen wir die an den Grundflächen der Grundkegel liegenden berührenden Verhältnisskreise (BC Fig. 237). Die Zahnlänge

Fig. 237.



wird auf dem Ergänzungskegel des Grundkegels gemessen; BDC ist der Ergänzungskegel ($\angle DBA = 90^0$) und es ist $EG = FH$ die Zahnlänge; die Zahnbreite Bb, Cc wird auf der Erzeugungslinie des Grundkegels gemessen, die Zahndicke auf dem Theilkreis; die Zähne sind Pyramiden, deren Spitzen in A liegen.

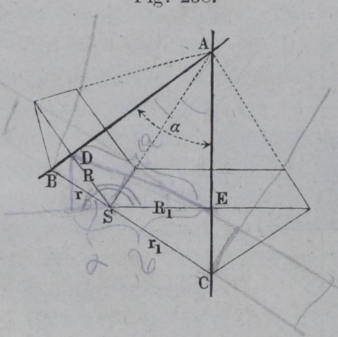
Wenn Kegelräder Satzräder werden sollen (vergl. §. 139), so müssen sie ausser gleicher Theilung auch noch gleichlange Berührungslinien (AB, Fig. 237) haben. Da diese Bedingung oft nicht erfüllt werden kann, so sind Kegelräder von gleicher Theilung und Verzahnungsart doch häufig Einzelräder. In der Praxis findet man übrigens Abweichungen bis zu 5 Procent in der Länge der Berührungslinie noch als statthaft betrachtet. Man nennt solche mit einem kleinen Fehler behaftete zu einem vorhandenen Kegelräderpaar für denselben Achsenwinkel hinzu construirte Räder **Bastardräder**. Bei einem vorhandenen rechtwinkligen Kegelräderpaar von 80 auf 45 Zähne gestattet also z. B. die Praxis noch, Bastardräder bis zu 80 ($1 \pm 0{,}05$), d. i. bis zu 84 und 76 Zähnen, mit dem 45zähnigen rechtwinklig arbeiten zu lassen.

§. 154.

Hilfräder der Kegelräder.

Die Kegelräder erhalten brauchbare Zahnformen, wenn man ihre als Stirnräder verzahnten Hilfräder auf die durch die Ergänzungskegel gegebenen Endflächen der Zähne aufwickelt. Hilfräder zweier Kegelräder R und R_1 (Fig. 238) heissen die Stirnräder von derselben Theilung, welche zu Halbmessern r und r_1 die Erzeugenden BS und CS ihrer Ergänzungskegel haben.

Fig. 238.



Bei gegebenem Achsenwinkel α bestimmen sich der Halbmesser r und die Zähnezahl $\mathfrak{z}$ eines Hilfrades aus den bekannten Halbmessern und Zähnezahlen R, R_1, $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{Z}_1$ der Kegelräder mittelst der Formeln:

$$\left.\begin{aligned} \frac{r}{R} &= \frac{\sqrt{R^2 + R_1^2 + 2\,R R_1 \cos.\alpha}}{R_1 + R \cos.\alpha} \\ \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} &= \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2 + 2\,\mathfrak{Z}\mathfrak{Z}_1 \cos.\alpha}}{\mathfrak{Z}_1 + \mathfrak{Z} \cos.\alpha} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (175)$$

$= \frac{a}{b}$ | cos 180 − α =

Ist der Achsenwinkel ein Rechter, so wird:

$$\left.\frac{r}{R} = \frac{\sqrt{R^2 + R_1^2}}{R_1}, \quad \frac{\mathfrak{z}}{\mathfrak{Z}} = \frac{\sqrt{\mathfrak{Z}^2 + \mathfrak{Z}_1^2}}{\mathfrak{Z}_1}\right\} \quad \ldots \quad (176)$$

Beispiel. *Ein Kegelräderpaar habe die Zähnezahlen 30 und 50 und einen Achsenwinkel $\alpha = 60^0$, so ist $\cos.\alpha = \frac{1}{2}$, und es findet sich für das Hilfrad zu dem 30zähnigen Rade:* $\mathfrak{z} = \frac{30.\sqrt{30^2 + 50^2 + 2.30.50.0{,}5}}{50 + 30.0{,}5}$ $= \frac{6.\sqrt{4900}}{13} = 32{,}3$, *wofür man 32 nehmen würde. Für das 50zähnige Rad erhält man ferner:* $\mathfrak{z}_1 = \frac{50.\sqrt{4900}}{30 + 50.0{,}5} = \frac{50.70}{55} =$ *nahe 64. Mit diesen Zähnezahlen und der gegebenen Theilung sind die Hilfräder zu verzahnen.*

§. 155.

Das Planrad.

Verändert man in dem Räderpaar $D_0 E$, Fig. 239, unter Beibehaltung des Winkels α und des Halbmessers R_1 den anderen

Fig. 239.

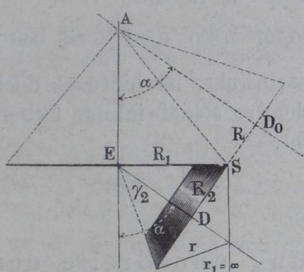
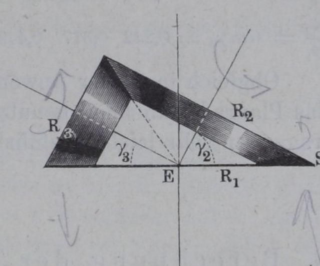


Fig. 240.



Halbmesser R so, dass der Achsenschnittpunkt in den Mittelpunkt E des Rades R_1 fällt (Fig. 239), so geht der Grundkegel von E in eine ebene Scheibe über. Ein Winkelrad mit einem solchen Grundkegel nennen wir ein Planrad. Der Ergänzungskegel desselben geht in einen Cylinder über; der Halbmesser des Hilfrades zum Planrad wird also unendlich gross, d. h. das Rad erhält die Zahnformen der Zahnstange. Diese sind bei der Fadenlinienverzahnung besonders einfach (§. 151) und machen dadurch das Planrad zu einer empfehlenswerthen Construction.

Für das Uebersetzungsverhältniss hat man:

$$\frac{R_2}{R_1} = \cos.\alpha \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (177)$$

bei Planrad

woraus z. B. bei $\alpha = 60^0$, $\frac{R_2}{R_1} = {}^1/_2$ folgt. Das Planrad erlaubt also bei festgesetztem Achsenwinkel nur ein bestimmtes Uebersetzungsverhältniss. Dieses lässt sich auch ausdrücken durch den halben Spitzenwinkel γ_2 des Kegelrades R_2, indem man auch hat:

$$\frac{R_2}{R_1} = sin.\gamma_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (178)$$

Es verdient beachtet zu werden, dass beide Räder aus einem Winkelräderpaar mit demselben Planrad arbeiten können. Hat ein solches Paar R_2, R_3 (Fig. 240) die Spitzenwinkel γ_2 und γ_3 und ist ausserdem rechtwinklig, so ist zunächst dessen Uebersetzungszahl:

$$\frac{R_2}{R_3} = tg.\gamma_2 = cotg.\gamma_3,$$

und man hat bei:

$\frac{R_2}{R_3} = tg.\gamma_2 =$	$^1/_4$	$^1/_3$	$^1/_2$	$^3/_4$	1	$^4/_3$	2	3	4
$\gamma_2 =$	14^0	18^030	26^040	36^050	45^0	53^010	63^020	71^030	76^0
$\frac{R_2}{R_1} = sin.\gamma_2 =$	0,242	0,317	0,449	0,60	0,707	0,800	0,894	0,948	0,970.

Obgleich in seiner Anwendung beschränkt, ist hiernach doch das Planrad manchmal benutzbar, indem es schiefwinklige Uebertragungen sehr leicht ausführbar macht.

C. Berechnung der Theilung und Breite der Radzähne.

§. 156.

Eintheilung der Räder.

Die Abmessungen der Zahnräder müssen bei gleichem Zahndruck wegen der Stösse um so grösser genommen werden, je grösser ihre Umfangsgeschwindigkeit ist; auch muss mit letzterer die Zahnbreite zunehmen, um die Abnutzung der Zahnflanken einzuschränken. Unterhalb einer gewissen Geschwindigkeit können indessen diese Einflüsse vernachlässigt werden. Wir theilen deshalb die Räder in zwei Classen ein, nämlich:

1. Krahnräder, 2. Triebwerkräder; und zwar sind Krahnräder solche, die bis zu $^1/_2$ Meter Theilkreisgeschwindigkeit haben, Triebwerkräder, die von grösserer Geschwindigkeit. Indem wir deren Theilung und Breite bestimmen, und später auf diese Maasse die des Radkörpers beziehen, werden die Räder passende Abmessungen erhalten können. Die zu gebenden Regeln beziehen sich auf Gusseisen, Holz, Schmiedeisen und Bronze als Material der Zähne.

§. 157.

Der Zahnquerschnitt.

Bei der Zahntheilung t, der Zahnbreite b, der Zahnlänge l, der Zahnfussdicke h, dem Zahndruck P und der im Zahne eintretenden Biegungsspannung $\mathfrak{S}$ gilt allgemein die Beziehung

$$bt = b\,\frac{P}{\mathfrak{S}}\left(\frac{l}{t}\right)\left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (179)$$

und für die oben angenommenen Verhältnisse zwischen Zahnlänge und -Dicke die Formel:

$$bt = 16{,}8\,\frac{P}{\mathfrak{S}}\,{}^{*)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (180)$$

Dies bedeutet, dass die Festigkeit des Zahnes seinem Querschnitt proportional ist, dass es also für dieselbe gleichgültig ist, welches Verhältniss b und t zu einander haben, ein Umstand, aus welchem sich beim Construiren oft Nutzen ziehen lässt. (Vergl. §. 163.)

§. 158.

Theiluug und Zahnbreite der Krahnräder.

Bezeichnet bei einem gusseisernen Krahnrad:
(PR) das statische Moment der angreifenden Kraft,
$\mathfrak{Z}$ die dem Rad bestimmte Zähnezahl,

---

*) Wenn die Zahnlänge statt zu $0{,}7\,t$ zu $0{,}75\,t$ angenommen wird, wie es in der „Constructionslehre f. d. Masch.-Bau" geschah, so wird $bt = 18\,\frac{P}{\mathfrak{S}}$. Trotz diesem Unterschiede dürfen die nachfolgenden Formeln doch ohne weiteres auch auf $^3/_4\,t$ lange Zähne angewandt werden.

R seinen vorläufig festgesetzten Theilkreishalbmesser,
t seine Theilung,

so nehme man je nach den gegebenen Grössen:

$$t = 2{,}11 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}}, \quad \frac{t}{\pi} = 0{,}67 \sqrt[3]{\frac{(PR)}{\mathfrak{Z}}} \quad . \; . \; . \; . \quad (181)$$

oder

$$t = 1{,}23 \sqrt{\frac{(PR)}{R}}, \quad \frac{t}{\pi} = 0{,}39 \sqrt{\frac{(PR)}{R}} \quad . \; . \; . \; . \quad (182)$$

und gleichzeitig die Zahnbreite b:

$$b = 2t \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (183)$$

Ist statt (PR) die Zahl N der zu übertragenden Pferdestärken und die Umdrehungszahl n gegeben, so nehme man:

$$t = 188 \sqrt[3]{\frac{N}{n\mathfrak{Z}}}, \quad \frac{t}{\pi} = 60 \sqrt[3]{\frac{N}{n\mathfrak{Z}}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (184)$$

oder

$$t = 1040 \sqrt{\frac{N}{nR}}, \quad \frac{t}{\pi} = 331 \sqrt{\frac{N}{nR}} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (185)$$

Da der Werth $\frac{(PR)}{R}$ gleich der Umfangskraft P ist, so gilt (182) auch für die Fälle, wo P unmittelbar gegeben ist, wie bei der Zahnstange.

Hat man mit Hilfe der gegebenen Formeln oder der Tabelle des folgenden Paragraphen die Abmessungen des gusseisernen Zahnes ermittelt, so findet man die des schmiedeisernen, hölzernen, bronzenen Zahnes durch Multiplication der Ergebnisse mit folgenden Coëfficienten:

Man multiplicire:

	für Schmiedeisen	für Holz	für Bronze	
die Ergebnisse von (181) u. (184) mit:	0,79	1,43	1,23	(186)
„ „ „ (182) u. (185) „	0,71	1,72	1,37	

Dabei ist zu bemerken, dass bei den Rädern mit schmiedeisernen, hölzernen, bronzenen Zähnen auch die Zahnbreite geändert werden, d. h. immer gleich zwei Theilungen gemacht werden soll, indem bei der Berechnung das Breitenverhältniss $\frac{b}{t} = 2$ eingeführt ist; Veränderungen der Zahnbreite ändern die Festigkeit des Zahnes nach (180) nicht, wenn man zugleich t so verändert, dass das Product bt seinen Werth beibehält.

§. 159.

Tabelle über die Theilung der Krahnräder.

t	$\frac{(PR)}{3}$	$\frac{(PR)}{R}$	$\frac{N}{3n}$	$\frac{N}{Rn}$	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{(PR)}{3}$	$\frac{(PR)}{R}$	$\frac{N}{3n}$	$\frac{N}{Rn}$
10	106	66	0,00015	0,00009	3	90	59	0,00013	0,00008
12	184	95	0,00026	0,00013	4	213	105	0,00030	0,00015
15	359	149	0,00051	0,00021	5	416	164	0,00058	0,00023
18	621	214	0,00088	0,00030	6	718	237	0,00100	0,00031
22	1133	320	0,00160	0,00045	7	1140	322	0,00159	0,00043
26	1633	447	0,0026	0,0006	8	1702	420	0,0024	0,0006
30	2874	595	0,0041	0,0008	9	2424	533	0,0034	0,0008
35	4564	810	0,0065	0,0011	10	3325	657	0,0046	0,0009
40	6813	1058	0,0096	0,0015	11	4425	796	0,0062	0,0011
45	9461	1338	0,0137	0,0019	12	5745	947	0,0080	0,0013
50	13307	1652	0,019	0,0023	13	7215	1111	0,010	0,0015
55	17711	1999	0,025	0,0028	14	9123	1289	0,013	0,0018
60	22994	2380	0,033	0,0033	16	13619	1683	0,019	0,0023
65	29234	2793	0,041	0,0039	18	19391	2130	0,026	0,0030
70	36512	3239	0,052	0,0045	20	26599	2630	0,037	0,0037
75	44909	3718	0,063	0,0052	22	35404	3182	0,049	0,0044
80	54503	4230	0,077	0,0059	24	45963	3787	0,064	0,0053
90	77603	5354	0,109	0,0075	28	72988	5155	0,102	0,0072
100	106452	6610	0,150	0,0092	32	108949	6732	0,152	0,0093
110	141688	7998	0,200	0,0112	36	155125	8520	0,216	0,0115

1. Beispiel. Auf eine Handkurbel von 400^mm Länge finde ein Druck von 50^k statt; welche Theilung und Zahnbreite ist dem die Kraft weiter leitenden 10zähnigen Getriebe zu geben? Hier ist $\frac{PR}{3} = \frac{50 \cdot 400}{10} = 2000$, *und daher nach Spalte 2 Zeile 6 bis 7 zu nehmen t zwischen 26 und 30^mm oder nach Spalte 7 Zeile 6 bis 7,* $\frac{t}{\pi} = 8$ *bis 9. Die Zahnbreite wird* $= 2t$ *genommen.*

2. Beispiel. Eine Zahnstange soll 2000^k Zug ausüben. Sie erhält dafür nach Spalte 3 Zeile 12 eine Theilung von 55^mm, oder nach Spalte 8 Zeile 14 eine Theilung $t = 18\,\pi^{mm}$, *und eine doppelt so grosse Zahnbreite.*

— *Soll diese Zahnstange aus Schmiedeisen gemacht werden, so ist nach (186) zu nehmen:* $t = 0{,}71 \cdot 55 = 39^{mm}$, *die Zahnbreite* $2 \cdot 39$ *oder* $0{,}71 \cdot 110 = 78^{mm}$.

Ueber die Benutzung der Spalten $\dfrac{N}{\mathfrak{Z}n}$ und $\dfrac{N}{Rn}$ siehe §. 163, S. 282.

§. 160.

Theilung und Zahnbreite der Triebwerkräder.

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen, welche in §. 158 angewandt wurden, sind für die Triebwerkräder mit Gusseisenzähnen die Theilung t oder $\dfrac{t}{\pi}$ und das sogenannte Breitenverhältniss $\dfrac{b}{t}$ aus folgender Formelreihe zu entnehmen:

Gegeben.	Gesucht.	Formel.	
N, n	t	$= 60 \sqrt[4]{\dfrac{N}{n}}$	(187)
N, n	$\dfrac{t}{\pi}$	$= 19{,}3 \sqrt[4]{\dfrac{N}{n}}$	(187)
(PR)	t	$= 2{,}1 \sqrt[4]{(PR)}$	(188)
(PR)	$\dfrac{t}{\pi}$	$= 0{,}66 \sqrt[4]{(PR)}$	(188)
$P, \mathfrak{Z}$	t	$= 1{,}42 \sqrt[3]{P\mathfrak{Z}}$	(189)
$P, \mathfrak{Z}$	$\dfrac{t}{\pi}$	$= 0{,}45 \sqrt[3]{P\mathfrak{Z}}$	(189)
P, n	$\dfrac{b}{t}$	$= 0{,}01 \sqrt{Pn}$	(190)
N, R	$\dfrac{b}{t}$	$= 8{,}5 \sqrt{\dfrac{N}{R}}$	(191)
$N, \mathfrak{Z}, t$	$\dfrac{b}{t}$	$= 21{,}2 \sqrt{\dfrac{N}{\mathfrak{Z}t}}$	(192)
$N, \mathfrak{Z}, \dfrac{t}{\pi}$	$\dfrac{b}{t}$	$= 12 \sqrt{\dfrac{N}{\mathfrak{Z}\left(\dfrac{t}{\pi}\right)}}$	(192)
$(PR), n, \mathfrak{Z}, t$	$\dfrac{b}{t}$	$= 0{,}025 \sqrt{\dfrac{(PR)n}{\mathfrak{Z}t}}$	(193)
$(PR), n, \mathfrak{Z}, \dfrac{t}{\pi}$	$\dfrac{b}{t}$	$= 0{,}014 \sqrt{\dfrac{(PR)n}{\mathfrak{Z}\left(\dfrac{t}{\pi}\right)}}$	(193)

Hierbei ist stets das kleinere Rad im Paare in die Rechnung einzuführen. Führt man statt seiner das grössere der beiden Räder ein, so liefert die Rechnung Zahnabmessungen, welche hinsichtlich der Festigkeit vollkommen brauchbar, dagegen hinsichtlich der Zahnabnutzung nicht so gut sind, als jene, weil die Zähne schmäler ausfallen.

Aus Theilung und Breitenverhältniss des gusseisernen Zahnes findet man diejenigen für den hölzernen Zahn durch Anwendung folgender Coëfficienten:

Man multiplicire die Ergebnisse:

$$\left.\begin{array}{lr} & \text{für Holzzähne mit:} \\ \text{für } t \text{ oder } \frac{t}{\pi} \text{ aus (187) bis (188)} \;\ldots\ldots & 1{,}54 \\ \text{„ } t \text{ oder } \frac{t}{\pi} \text{ (189)} \;\ldots\ldots\ldots & 1{,}77 \\ \text{„ } \frac{b}{t} \text{ aus (190) bis (193)} \;\ldots\ldots & 1{,}25 \end{array}\right\} \quad \ldots \quad (194)$$

Die Formeln (187) bis (194) wurden aus (180) entwickelt, indem man darin $\mathfrak{S}$ nicht constant, sondern bei einer Theilkreisgeschwindigkeit v gleich $\frac{Const.}{\sqrt{v}}$ setzte, und ausserdem $\frac{b}{t} = Const. \sqrt{Pn}$ einführte. Wegen der Gründe zu diesen Annahmen verweise ich auf den Anfang von §. 163. Bei den Krahnrädern konnte einfacher verfahren werden, dagegen möchte es bei den Triebwerkrädern wohl unerlässlich sein, genaue Rücksicht auf die Umstände zu nehmen, unter welchen die Zahnräder in den Maschinen von verschiedener Stärke und Geschwindigkeit arbeiten; es können demnach die mathematischen Hilfsmittel hier nicht ganz und gar einfach ausfallen. Dieser Bemerkung wird jeder beipflichten, der es versucht hat, die Berechnung der Zahnräder unter Rücksicht auf die verschiedenen Zustände, in welchen dieselben arbeiten sollen, in Formeln zu bringen. Uebrigens wird man finden, dass man mit den obigen Formeln, welche für alle Hauptfälle den nöthigen Aufschluss enthalten, nach einiger Uebung sehr rasch arbeiten kann, wozu die umstehenden Tabellen noch wesentlich beitragen. Auch erscheint die Zahl der Formeln nur deshalb gross, weil dieselben in einer Reihe von praktisch wichtigen Umformungen vorgeführt werden; hätte man diese weggelassen, so wären nur zwei Ausdrücke, der erste und der siebente, anzugeben gewesen.

§. 161.

Tabelle über die Theilung der Triebwerkräder.

t	$\frac{N}{n}$	(PR)	$P\mathfrak{Z}$	$\frac{t}{\pi}$	$\frac{N}{n}$	(PR)	$P\mathfrak{Z}$
12	0,0016	1 066	604	4	0,0018	1 349	702
15	0,0040	2 603	1179	5	0,0045	3 293	1372
18	0,0081	5 398	2034	6	0,0093	6 830	2469
22	0,0181	12 045	3719	7	0,0173	12 654	3764
26	0,0256	23 497	6138	8	0,0295	21 587	5619
30	0,068	41 649	9430	9	0,047	34 578	8000
35	0,158	77 161	14974	10	0,072	52 702	10974
40	0,197	131 632	22351	11	0,106	77 161	14606
45	0,316	210 850	31825	12	0,149	109 282	18963
50	0,482	321 375	43656	13	0,206	150 522	24110
55	0,71	470 525	58106	14	0,280	202 459	30112
60	1,00	666 303	75438	16	0,472	345 387	44949
65	1,38	917 879	95913	18	0,757	553 242	64000
70	1,85	1234 594	119792	20	1,153	843 229	87791
75	2,44	1626 961	147339	22	1,688	1234 571	116850
80	3,16	2106 000	178815	24	2,39	1748 000	151703
90	5,02	3374 000	254603	28	4,43	3239 000	240899
100	7,72	5142 000	349249	32	7,55	5526 000	359593
110	11,30	7528 000	464850	36	12,11	7486 000	511998
120	16,00	10662 000	603502	40	18,45	13491 000	702330
130	22,04	14686 000	767300	44	27,01	19752 000	934800
140	29,64	13754 000	958339	48	38,78	27975 000	1213628
150	39,06	26031 000	1178715	52	52,70	38509 000	1543018

Bemerkung. Werden in den Spalten für (PR) in dieser und der folgenden Tabelle die drei abgetrennten Stellen weggelassen, so bleibt die Zahl übrig, welche R in Meter ausgedrückt entspricht.

§. 162.

Tabelle über die Breite der Triebwerkräder.

$\frac{b}{t}$	$\frac{Pn}{1000}$	$\frac{N}{R}$	$\frac{N}{3t}$	$\frac{N}{3\left(\frac{t}{\pi}\right)}$	$\frac{(PR)n}{3t}$	$\frac{(PR)n}{3\left(\frac{t}{\pi}\right)}$
1	10,0	0,014	0,0022	0,007	1 600	5 102
1,25	15,6	0,022	0,0035	0,011	2 500	7 973
1,5	22,5	00,31	0,0050	0,016	3 600	11 480
1,75	30,6	0,042	0,0068	0,021	4 900	15 626
2	40,0	00,55	0,0089	0,028	6 400	20 420
2,25	50,6	0,070	00,113	0,035	8 100	25 831
2,5	62,5	0,089	0,0139	0,043	10 000	31 890
3,0	90,0	0,125	0,0200	0,062	14 400	45 922
3,5	122,5	0,170	0,0273	0,085	19 600	62 505
4	160,0	0,221	0,0356	0,111	25 600	81 639
4,5	202,5	0,28	0,045	0,14	32 400	103 000
5,0	250,0	0,35	0,056	0,17	40 000	128 000
5,5	302,5	0,42	0,067	0,21	48 400	154 000
6,0	360,0	0,50	0,080	0,25	57 600	184 000
6,5	422,5	0,58	0,094	0,29	67 600	216 000
7,0	490,0	0,68	0,109	0,34	78 400	250 000
7,5	562,5	0,78	0,125	0,39	90 000	287 000
8,0	640,0	0,89	0,142	0,44	102 400	327 000
8,5	722,5	1,00	0,161	0,50	115 600	369 000
9,0	810,0	1,12	0,180	0,56	129 600	413 000
9,5	902,5	1,25	0,201	0,63	144 400	463 000
10	1000,0	1,38	0,223	0,69	160 000	501 000
11	1210,0	1,67	0,269	0,89	177 600	617 000
12	1440,0	1,99	0,320	1,00	214 400	735 000

Bemerkung. Wenn die Breite eines Rades sehr hoch ausfällt, so wird es in zwei oder mehrere Räder (Etagenräder) zerlegt, deren Gesammtbreite etwas grösser zu nehmen ist, als die ermittelte Radbreite.

§. 163.

Anwendung der vorstehenden Tabellen auf Beispiele.

Die Formeln der vorangehenden Paragraphen sind auf zwei Grundlagen gestützt und zwar in ganz ähnlicher Weise wie die für die „Tragzapfen", vergl. §. 37. Sie berücksichtigen einestheils die Festigkeit der Zähne, welche bei wachsender Umfangsgeschwindigkeit der Räder wegen der damit zunehmenden Stösse bei gleichem Druck grösser und grösser genommen werden muss. Anderntheils berücksichtigen sie die Abnutzung der Zähne, welche bei dem kleineren Rad im Paare bedeutender ist, als bei dem grösseren, und mit der Umdrehungszahl wächst. Aus diesem Grunde muss, wie oben bemerkt, die Zahnberechnung bei dem kleineren Rad im Paare vorgenommen werden. Bei den auf solche Weise erhaltenen Zahnabmessungen, welche natürlich manchmal passend abgerundet werden müssen, ist die Abnutzung in zweckentsprechende Grenzen eingeschlossen. Will man aus irgend welchen Gründen ein Rad schmäler oder breiter machen, als es die Formeln liefern, so beachte man, dass nach Formel (180) der Zahn eine unveränderte Festigkeit behält, wenn man nur seinen Querschnitt nicht ändert.

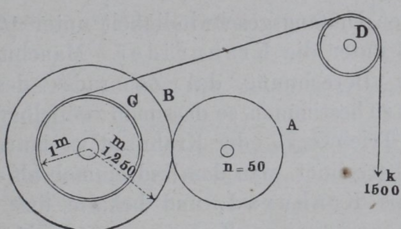
Wo es angeht, gehe man von der Zähnezahl der zu construirenden Räder aus; man wird stets finden, dass man dann am raschesten und natürlichsten zu guten Ergebnissen geführt wird. In dieser Beziehung ist zu merken, dass man bei Triebwerkrädern mit $\mathfrak{Z}$ beim getriebenen Rad nicht unter 30, beim treibenden nicht unter 20 gehen soll, und dass grössere Zähnezahlen in allen Beziehungen den Eingriff nur vortheilhafter machen. So zeigen die Räder rasch laufender Turbinen selten weniger als 40, oft bis 80 Zähne im getriebenen Rade. Bei Krahnrädern kann mit $\mathfrak{Z}$ so tief herabgegangen werden, als es die Verzahnung zulässt. Bei vorgeschriebenem Halbmesser lässt sich die etwa zu klein ausfallende Zähnezahl durch eine (die Abnutzung nur verkleinernde) Vergrösserung der Radbreite erhöhen (§. 157).

In Paaren von Holz-Eisenrädern ist es günstig für geringe Abnutzung, das Holzrad zum treibenden Rade zu wählen. Doch soll seine Zähnezahl nicht gleichzeitig sehr klein gegen die des Eisenrades sein.

1. *Beispiel.* *Von einer Welle A mit 40 Umdrehungen soll eine Welle B mit 60 Umdrehungen p. M. unter Uebertragung von 20 Pferdestärken mittelst eines Eisenräderpaares umgetrieben werden. Hier ist für das kleinere Rad im Paare* $\frac{N}{n} = \frac{20}{60} = 0{,}333\ldots$, *und daher nach Tabelle §. 161, Spalte 2, Zeile 9, die Theilung* $t = 45^{mm}$ *zu nehmen. Geben wir nun diesem Rade 40 Zähne, so kennen wir den Quotienten* $\frac{N}{\mathfrak{Z}t} = \frac{20}{40 \,.\, 45} = 0{,}011$. *Demselben entspricht nach Tabelle §. 162, Spalte 4, Zeile 6 das Breitenverhältniss* $\frac{b}{t} = 2{,}25$, *wonach also die Zahnbreite* $b = 2{,}25 \,.\, 45$ *= nahe* 100^{mm} *zu nehmen ist. Der Theilkreishalbmesser wird nach Tabelle §. 141, Spalte 2, Zeile 5:* $R = 6{,}37 \,.\, 45 = 286{,}7$, *abgerundet* 287^{mm}. *Das eingreifende Rad erhält 60 Zähne, und einen Halbmesser* $R_1 = 9{,}55 \,.\, 45 = 427{,}75$, *abgerundet* 428^{mm}. — *Sollen die Räder als Holzeisenräder ausgeführt werden, so ist nach (194) zu nehmen: die Theilung* $t = 1{,}54 \,.\, 45 = 70^{mm}$, *das Breitenverhältniss* $\frac{b}{t} = {}^5\!/_4$*mal dem Werth aus (192.) Dieser ist wegen* $\frac{N}{\mathfrak{Z}t} = \frac{20}{40 \,.\, 70} = 0{,}00714$ *gemäss Sp. 4, Z. 4* $= 1{,}75$; *wir erhalten also die Radbreite* $b = {}^5\!/_4 \,.\, 1{,}75 \,.\, 70 = 153^{mm}$.

2. *Beispiel.* *Das auf der Kurbelwelle einer Dampfmaschine sitzende Stirnrad A, Fig. 241, mache 50 Umdrehungen p. M. und treibe mittelst*

Fig. 241.



des Rades B den Seilkorb C um. Dieser habe 1^m *Halbmesser und werde durch das Förderseil mit einer Umfangskraft von* 1500^k *angegriffen, schreibe aber durch seine Grösse dem Rad B einen vorläufigen Halbmesser von* 1250^{mm} *vor; sodann soll zwischen A und B eine Uebersetzung ins Langsame wie 1 : 2,5 stattfinden, wonach A einen vorläufigen Halbmesser von* $\frac{1250}{2{,}5} = 500^{mm}$ *erhält. — Hier ist für A als das kleinere Rad das Drehungsmoment* $(PR) = \frac{1500 \,.\, 1000}{2{,}5} = 600000$; *dasselbe erhält daher nach Tabelle §. 161, Spalte 7, Zeile 13 eine Stichzahl* $\frac{t}{\pi} =$ *nahe 18. Behufs Aufsuchung des Breitenverhältnisses benutzen wir Spalte 2, §. 162 und* *haben dafür* $\frac{Pn}{1000} = \frac{600000.50}{500.1000} = 60$, *und daher nach Zeile 7, §. 162* $\frac{b}{t} = 2{,}5$ *zu nehmen. Dies gibt eine Zahnbreite* $b = 2{,}5 \,.\, 18 \,.\, \pi = 141^{mm}$. *Die Zähnezahl des Rades A wird nun* $\mathfrak{Z} = \frac{2\,.\,R\pi}{t} = \frac{2R}{\left(\frac{t}{\pi}\right)} = \frac{1000}{18} = 55{,}5$, *abgerundet 5,5, was nun den Halbmesser abzurunden nöthigt auf* $R = \frac{\mathfrak{Z}}{2}\left(\frac{t}{\pi}\right) = \frac{55\,.\,18}{2} = 495^{mm}$.

3. Beispiel. Ein Wasserrad hat 44 Pferdestärken bei 6,5 Umdrehungen p. M. mittelst eines Zahnkranzes auf eine 32,5mal umlaufende Triebwelle zu übertragen. Der Zahnkranz muss der Radconstruction wegen einen Theilkreishalbmesser von etwa 2200^{mm} *erhalten; der vorläufige Halbmesser des eingreifenden Rades ist daher:* $R = \frac{6{,}5\,.\,2200}{32{,}5} = 440^{mm}$; *die Räder sollen Eisenräder sein. — Für die Bestimmung der Theilung hat man* $\frac{N}{n} = \frac{44}{32{,}5} = 1{,}35$, *wofür Tabelle §. 161,* Spalte *2, Zeile 18* $t = 65^{mm}$ *liefert. Für die Zahnbreite ist gegeben* $\frac{N}{R} = \frac{44}{440} = 0{,}1$, *was nach Tabelle §. 162, Spalte 3, Zeile 7 bis 8 ein Breitenverhältniss* $\frac{b}{t} = 2{,}5$ *bis 3 gibt. Wir nehmen 2,7; und haben* $b = 2{,}7\,.\,65 = 175^{mm}$.

Räder, deren Umfangsgeschwindigkeit unter $\frac{1}{2}^{m}$ fällt, gehören nach §. 156 unter die Krahnräder. Manchmal ist es aber unbequem, vor Berechnung des Zahnrades dessen Umfangsgeschwindigkeit zu bestimmen, so dass man zweifelhaft bleiben kann, ob ein Rad als Triebwerk- oder Krahnrad zu betrachten ist. In solchen Fällen berechnet man das Rad einmal als Triebwerkrad, einmal als Krahnrad, und behalte das Ergebniss bei, welches den grösseren Zahnquerschnitt ergibt. In Rücksicht hierauf wurden in Tabelle §. 159 die Spalten $\frac{N}{\mathfrak{Z}n}$ und $\frac{N}{Rn}$ aufgenommen.

4. Beispiel. An einem Pumpwerk werden 10 Pferdestärken in eine 6mal umlaufende Welle von einer 20mal umlaufenden mittelst Eisen-Stirnrädern übertragen, von denen das kleinere 20 Zähne erhalten soll. Die Räder sind zu berechnen. a) Berechnung der Räder als Triebwerkräder. $\frac{N}{n} = \frac{10}{20}$ *liefert nach Tabelle §. 161* $t = 50^{mm}$; *sodann ist* $\frac{N}{\mathfrak{Z}t} = \frac{10}{20.50} = 0{,}01$, *woraus nach Tabelle §. 162* $\frac{b}{t} = 2{,}25$ *folgt. Dies* *gibt* $b = 2{,}25 \,.\, 50 = 112^{mm}$, *und einen Zahnquerschnitt* $\frac{bt}{2} = \frac{50 \,.\, 112}{2} = 2800^{\square mm}$. *b) Berechnung der Räder als Krahnräder.* $\frac{N}{3n} = \frac{10}{20 \,.\, 20} = 0{,}025$. *Hierfür gibt Tabelle §. 159* $t = 55^{mm}$; *dabei erhält das Rad als Krahnrad eine Breite* $b = 2t = 2 \,.\, 55 = 110^{mm}$, *d. i. einen Zahnquerschnitt* $\frac{bt}{2} = \frac{55 \,.\, 110}{2} = 3025^{\square mm}$. *Dies überragt die obengefundene Zahl nicht unbedeutend; das Rad ist also mit den zuletzt gefundenen Abmessungen auszuführen.*

Sehr grosse Umdrehungszahlen in Verbindung mit grossen zu übertragenden Kräften liefern bedeutende Zahnbreiten, was auch die Praxis vielfach als nothwendig nachgewiesen hat.

5. Beispiel. Ein Schraubenschiff von 800 Pferdestärken habe eine Triebschraube von 300 Umdrehungen p. M., welcher die Umtriebkraft durch Vermittlung eines Holzräderpaares mitgetheilt wird; man will dem (kleineren) auf der Schraubenwelle sitzenden Rade 30 Zähne geben; die Räder sind zu berechnen. $\frac{N}{n} = \frac{800}{300} = 2{,}67$ *gibt für Eisenräder nach Tabelle §. 161 eine Stichzahl* $\frac{t_0}{\pi} =$ *nahe* 25, *woraus nach (194) für Holzräder* $\frac{t}{\pi} = 1{,}54 \,.\, 25 = 39$ *folgt. Ferner ist nun* $\frac{N}{3\left(\frac{t}{\pi}\right)} = \frac{800}{30 \,.\, 39} = 0{,}68$, *wofür Tabelle §. 162* $\frac{b}{t} = 10$ *liefert, welche Zahl für die Umwandlung in Holzräder noch mit* $^5/_4$ *zu multipliciren ist, also in 12,5 übergeht. Dies gibt eine Radbreite* $b = 12{,}5 \,.\, 39 \,.\, \pi = 1532^{mm}$, *eine Breite, wie sie bei den Rädern der Schraubenschiffe in der That gefunden wird, die übrigens die Zerlegung des Rades in etwa 4 Etagenräder von je 380 bis* 400^{mm} *Breite erfordern würde.*

Holz

Die Gruppenräder, d. h. solche, bei denen mehrere Räder mit einem zusammenwirken, sind, wenn die Seitenräder ungleich sind, in Paare zu zerlegen, deren Zahnabmessungen man einzeln bestimmt, und von denen darauf der grösste Zahnquerschnitt und die grösste Zahnbreite beibehalten werden. In der Regel sind die Seitenräder untereinander gleich.

Räder für Walzwerke und stark stossende Maschinen überhaupt sind mit etwas ($^1/_{10}$ bis $^2/_{10}$) grösseren Abmessungen auszuführen, als sie aus den obigen Berechnungen erhalten werden.

D. Abmessungen des Radkörpers.

§. 164.

Der Radkranz.

Der Ring, an welchem die Zähne eines Zahnrades sitzen, heisst der Kranz oder die Felge des Rades; unter letzterer Bezeichnung wird insbesondere auch jeder von den Bögen verstanden, aus welchen man den Kranz eines Rades zusammensetzt. Bei den gusseisernen Stirnrädern nehme man die Kranzdicke:

$$\delta = 3 + 0{,}4\,t \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (195)$$

(Fig. 242 bis 244). Nach der Mitte oder nach der einen Seite zu wird der Kranz auf $^6/_5\,\delta$ verstärkt und durch die Kranzrippe aus-

Fig. 242.

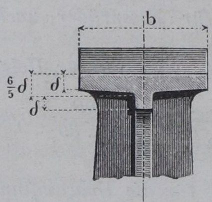


Fig. 243.

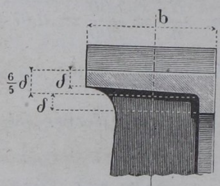
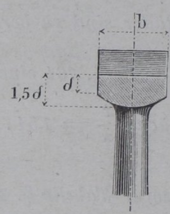


Fig. 244.



gesteift, bei kleineren Theilungen auch wohl bogenförmig profilirt, Fig. 244, wozu aber nur Arme von ovalem Querschnitt passen. Eine Theilung von 20^{mm} erfordert nach (195) eine Kranzdicke $\delta = 3 + 8 = 11^{mm}$; bei $t = 10^{mm}$ wird $\delta = 7^{mm}$.

Bei den gusseisernen Kegelrädern, Fig. 245 bis 247, wird

Fig. 245.

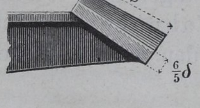


Fig. 246.

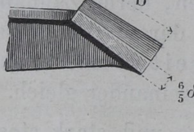
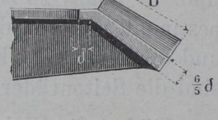


Fig. 247.



die Felge aussen $^6/_5\,\delta$ dick gemacht und erhält einen der hier skizzirten Armanschlüsse.

Räder mit Holzzähnen oder Holzkammen bekommen eine höhere und seitlich verstärkte Felge, bei deren Abmessungen namentlich Rücksicht auf die Handarbeit beim Verschirren, d. i. Einsetzen der Kammen, genommen wird; die Verhältnisse für Stirnräder sind aus Fig. 248 bis 250, die für Kegelräder aus

Fig. 248.

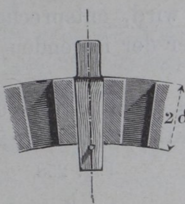


Fig. 249.

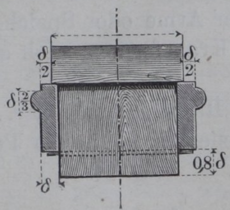


Fig. 250.

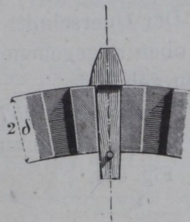


Fig. 251 und 252 ersichtlich. Sehr breite Holzkammen werden aus zwei Stücken gebildet, Fig. 252, deren Stiele durch einen Steg getrennt sind.

Fig. 251.

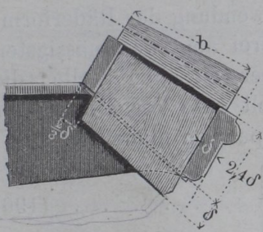
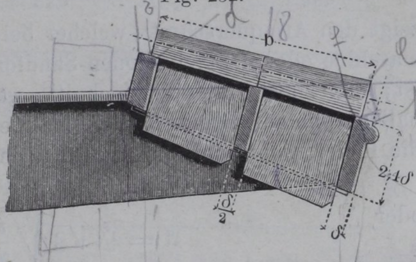


Fig. 252.



Ganz kleine Stirnräder (Blockräder) erhalten, wenn bei ihnen die Kraftübertragung wesentlich ist, eine oder zwei verstärkende Seitenscheiben, Fig. 253 und 254, welche zweckmässig bis auf

Fig. 253.

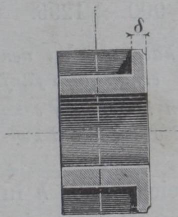


Fig. 254.

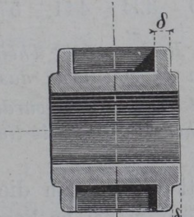
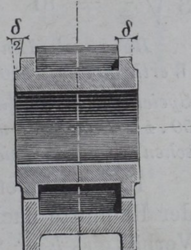


Fig. 255.



die Theilkreishalbmesser abgedreht werden, wenn das Rädchen in eine Zahnstange greift, Fig. 255; diese bekommt dann bearbeitete Seitenleisten, auf welchen die Ränder des Getriebes rollen.

§. 165.

Die Radspeichen. Zahl derselben.

Der Querschnitt der Arme oder Speichen wird, entsprechend den oben angegebenen Kranzformen, nach einer der folgenden Figuren gebildet.

Fig. 256 und 257. Rippenquerschnitte, bei denen Haupt- und Nebenrippe zu unterscheiden sind; die Punktirung in Fig. 257

Fig. 256.

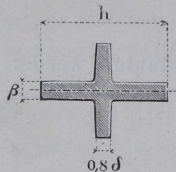


Fig. 257.

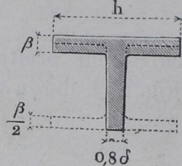
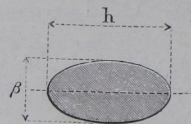


Fig. 258.



zeigt den Armquerschnitt, welcher bei Anwendung der Räderformmaschine oder der Schablonen-Sandformerei am zweckmässigsten ist; Fig. 258, ovaler Querschnitt, welcher an allen Stellen die halbe Höhe zur Breite β hat. Man erzielt gute Verhältnisse für die Räder, wenn man die Anzahl $\mathfrak{A}$ der Speichen nimmt:

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{A} &= {}^1/_4 \sqrt{3}\,\sqrt[4]{t} \\ \text{oder} \quad \mathfrak{A} &= {}^1/_3 \sqrt{3}\,\sqrt[4]{\frac{t}{\pi}} \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (196)$$

Hiernach ist folgende Zahlenreihe berechnet:

$\mathfrak{A}$	= 3	4	5	6	7	8	10	12
$3\sqrt{t}$	= 144	256	400	576	784	1024	1600	2304
$3\sqrt{\frac{t}{\pi}}$	= 81	144	225	324	441	576	900	1296.

Beispiel. Ein 50zähniges Rad von 50^mm Theilung hat für $3\sqrt{t}$ den Werth 50.7 = 350, was nahe an 400 liegt; das Rad erhält also fünf Speichen. Hätte das Rad 16^mm Theilung, so würde man haben: $3\sqrt{t} =$ 50.4 = 200, was mitten zwischen 256 und 144 liegt, also die Wahl zwischen 3 und 4 Speichen lässt.

Beim Rippenquerschnitt wählt man die Speichenhöhe h in der Radmitte nach dem Gefühl, wobei zu bemerken ist, dass das Verhältniss $h = 2$ bis $2{,}5\,t$ meistens recht gut passt, und ermittelt darauf die constante Rippenstärke β nach folgender Formel:

$$\frac{\beta}{b} = 0{,}07 \frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}} \left(\frac{t}{h}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (197)$$

Ergibt sich dabei eine für das Aussehen oder die Rücksicht auf das Giessen zu grosse oder zu kleine Rippendicke, so ändere man $\frac{h}{t}$ entsprechend ab, und rechne aufs neue. Die nachfolgende Tabelle erleichtert dieses Verfahren.

Speichenverjüngung wie vorhin. Höhe der Nebenrippe am Kranz etwas kleiner als b, an der Nabe gleich oder etwas grösser als b.

Die Speichenhöhe h in der Radmitte wird bei den Rädern mit ovalem Armquerschnitt $= 2t$ genommen, und die Höhe nach aussen bis auf $^2/_3\, 2t$ verjüngt.

§. 166.

Tabelle über die Abmessungen der Radspeichen.

$\frac{h}{t}$	Werthe von $\frac{\beta}{b}$, wenn								
	$\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}} = 7$	9	12	16	20	25	30	35	40
1,50	0,20	0,28	0,37	0,50	0,62	0,78	0,93	1,08	1,24
1,75	0,16	0,21	0,27	0,37	0,46	0,57	0,69	0,80	0,91
2,00	0,12	0,16	0,21	0,28	0,35	0,44	0,53	0,61	0,70
2,25	0,10	0,12	0,17	0,22	0,28	0,35	0,41	0,48	0,55
2,50	0,08	0,10	0,13	0,18	0,22	0,28	0,34	0,39	0,45
2,75	0,06	0,08	0,11	0,15	0,18	0,23	0,28	0,32	0,37
3,00	0,05	0,07	0,09	0,12	0,16	0,19	0,23	0,27	0,31

1. Beispiel. Hat das obige 50zähnige Rad von 50mm Theilung eine Zahnbreite von 100mm, und wählt man die Speichenhöhe h in der Radmitte $= 2t = 100^{mm}$, *also* $\frac{h}{t} = 2$, *so hat man nach Spalte 6, Zeile 3, zu nehmen:* $\beta = 0{,}35 \,.\, 100 = 35^{mm}$. *Fände man dies nicht bequem und zöge eine kleinere Rippendicke vor, so könnte man z. B.* $h = 2{,}25\,t = 2{,}25 \,.\, 50 = 113^{mm}$ *wählen, und erhielte dann nach Spalte 6, Zeile 4:* $\beta = 0{,}28 \,.\, 100 = 28^{mm}$.

Die Speichenkreuze der Räder mit Holzzähnen und der in sie eingreifenden Eisenräder dürfen bei denselben Arm-Höhenabmessungen, welche man den Rädern für Eisen auf Eisen gibt, die 0,8fache Armdicke erhalten. Will man genauer verfahren, so ermittle man die Maasse der den Holzzähnen gleichwerthigen Eisenzähne, und suche aus deren Theilung, Breite und Zahl die zugehörigen Armdimensionen.

2. Beispiel. In dem ersten Beispiel §. 163 berechneten wir für ein Rad mit 50 Holzzähnen $t = 70^{mm}$, $b = 153^{mm}$, *während* $N = 20$ *war. Wir erhalten nun zunächst aus Tab. §. 141,* $R = 6{,}37 \,.\, 70 = 445{,}9$ *oder* 446^{mm}; *dies ergibt* $\frac{N}{R} = \frac{20}{446} = 0{,}0448$, *woraus nach §. 162* $\frac{b}{t} = 1{,}8$ *folgt. Oben hatten wir für das gleichstarke Eisenrad schon* $t = 45^{mm}$ *gefunden,* b *wird also* $= 1{,}8 \,.\, 45 = 81^{mm}$. *Endlich ist* $\frac{R}{t}$ *für das ideelle Eisenrad* $\frac{446}{45} = 9{,}91$, *woraus sich seine Zähnezahl* $\mathfrak{Z}$ *nach Spalte 4, Zeile 7, §. 141, zu 62 ergibt. Formel (196) liefert dafür 5 Arme, also* $\frac{\mathfrak{Z}}{\mathfrak{A}} = \frac{62}{5}$ *= nahe 12. Wählt man nun* $\frac{h}{t} = 2{,}5$, *also* $h = 2{,}5 \,.\, 45 = 112^{mm}$, *so ist nach Spalte 4, Zeile 4, §. 166:* $\beta = 0{,}17\, b = 0{,}17 \,.\, 81 = 14^{mm}$ *zu nehmen, was etwas unschöne Verhältnisse liefert. Machen wir aber* $\frac{h}{t} = 2$, *also* $h = 2 \,.\, 45 = 90^{mm}$, *so wird passend nach Spalte 4, Zeile 3 dieses Paragraphen:* $\beta = 0{,}21 \,.\, 81 = 17^{mm}$.

§. 167.

Die Radnabe.

Die Nabe des Zahnrades wird je nach dem gewählten Armquerschnitt nach einer oder nach beiden Seiten schwach konisch geformt, bei grösseren Abmessungen überdies mit viertelelliptischen Stäbchen abgerundet; sie erhält eine Länge $L = {}^5/_4\, b$ und eine Wanddicke $w = 10 + 0{,}4\,h$, wobei h die Armhöhe bezeichnet.

§. 168.

Gewichte der Zahnräder.

Das Gewicht G eines nach den vorstehenden Regeln construirten Stirnrades wird annähernd aus folgendem Ausdruck erhalten:

$$G = b t^2 (6{,}25\,\mathfrak{Z} + 0{,}04\,\mathfrak{Z}^2) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (198)$$

wobei die obigen Bezeichnungen gelten, b und t aber in **Decimetern** auszudrücken sind. Folgende Tabelle erleichtert die Benutzung der gegebenen Formel, indem sie die Werthe von $\frac{G}{b t^2}$ für eine Reihe von Zähnezahlen enthält. Die Tabellenwerthe entsprechen derjenigen Zähnezahl, welche gleich der Summe von Spalten- und Zeileneingang ist.

$\mathfrak{Z}$	0	2	4	6	8
20	141,0	156,9	173,0	189,5	206,4
30	223,5	241,0	258,7	276,8	295,3
40	314,0	333,0	352,4	372,1	392,2
50	412,5	433,2	454,1	475,4	497,1
60	519,0	541,3	563,8	586,7	610,0
70	633,5	657,4	681,5	706,0	730,7
80	756,0	781,5	807,2	833,3	859,8
90	886,5	913,6	940,9	968,6	996,7
100	1025,0	1053,7	1082,6	1111,9	1141,6
120	1326,0	1357,9	1390,0	1422,5	1455,4
140	1659,0	1694,1	1729,4	1765,1	1801,2
160	2024,0	2062,3	2100,8	2139,7	2179,0
180	2421,0	2462,5	2504,2	2546,3	2588,8
200	2850,0	2894,7	2936,9	2984,9	3030,6
220	3311,0	3358,9	3407,0	3455,5	3504,4

Beispiel. Ein gusseisernes, nach obigen Regeln construirtes Zahnrad habe 50 Zähne, $0{,}5^{dcm}$ Theilung und 1^{dcm} Zahnbreite; bei ihm ist also $b t^2 = 0{,}25$ und somit sein Gewicht nach Spalte 2, Zeile 4: $G = 0{,}25 \,.\, 412{,}5 = 103{,}1^k$. Hätte ein 50zähniges Rad 30^{mm} Theilung und 60^{mm} Breite, so würde sein Gewicht sein: $G = 0{,}6 \,.\, 0{,}3^2 \,.\, 412{,}5 = 0{,}054 \,.\, 412{,}5 = 22{,}28^k$.

Kegelräder und Holzeisenräder mit leichtem Speichenkreuz (siehe Ende §. 166) werden etwas leichter, als es die Tabelle angibt.