ausfallen, wenn nämlich etwa die Arme in den Achsenkörper eingesteckt, überhaupt der Baum verschwächt werden muss, reicht aber bei Belassung des vollen Querschnittes aus. Fällt er kleiner aus, als es die Zapfenverbindung, siehe Kap. VI, verlangt, so ist der von dieser geforderte Durchmesser des Achsenschenkels für die ganze Achse maassgebend. Die Wahl zwischen eisernen und hölzernen Wasserradachsen muss sich nach lokalen Preisen und Verhältnissen richten.

Beispiel. Eine Wasserradachse von 2400mm Schenkellänge sei so belastet, dass sie gusseiserne Zapfen von 90mm Dicke und danach von 120mm Länge erhalten müsse. Gemäss (§. 49) ist dann die Achsenkopfdicke für Gusseisen zu nehmen: $D = 90 \,.\, \sqrt[3]{\frac{2400}{60}} = 90 \,.\, \sqrt[3]{40} = 308^{mm}$. *In Holz ausgeführt, ist daher zu machen:* $D' = 1{,}55 \,.\, 308 = 477^{mm}$.

VIII. WELLEN.

§. 67.

Berechnungsart der cylindrischen Wellen.

Der Maschinenbau versteht unter Wellen diejenigen Verkörperungen geometrischer Drehachsen, welche verdrehende Kraftmomente zu übertragen bestimmt sind. Dieselben müssen für diesen Zweck solche Abmessungen erhalten, dass sie 1) fest genug sind, und dass sie 2) durch die verdrehende Kraft nicht zu stark verwunden werden. In der Regel erfahren die Wellen ausser der Beanspruchung auf Drehung auch noch solche auf Biegung durch die Gewichte und Pressungen der auf ihnen sitzenden Räder, Rollen, Hebel u. s. w. Vorerst soll indessen hierauf keine Rücksicht genommen und auch nur für die massiven cylindrischen schmiedund gusseisernen Wellen die Berechnungsart angegeben werden.

Es bezeichne für eine solche Welle:

P die verdrehende Kraft,
R den Hebelarm, an welchem sie angreift,
N die Anzahl der Pferdestärken, welche die Welle überträgt,
n die Anzahl ihrer minutlichen Umdrehungen,
d den Wellendurchmesser,
L die Länge der Welle (ausnahmsweise) in Meter,
ϑ^0 den Verdrehungswinkel in Graden,

$\mathfrak{S}$ die durch die Verdrehung am Wellenumfang hervorgerufene Spannung,

G den Drehungsmodul des Materials der Welle,

so ist zu nehmen, bei blosser Berücksichtigung der Festigkeit:

$$d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathfrak{S}} P R} \quad \text{. . . . . (103)}$$

und bei blosser Berücksichtigung der Verdrehung:

$$d = \sqrt[4]{\frac{32}{\pi G} \frac{1000 \, . \, 360}{2 \pi} \frac{L}{\vartheta^0} P R} \quad \text{. . . . . (104)}$$

Um dieselbe Sicherheit bei den Wellen anzuwenden, die bei den Achsen und Zapfen gebraucht wurde, darf $\mathfrak{S}$ bei Schmiedeisen nicht über $4{,}8^k$, bei Gusseisen nicht über $2{,}4^k$ hinausgehen*). In Bezug auf die Verdrehung ist es zweckmässig, bei Wellen, die nicht über 3 Meter Länge haben, zu nehmen: $\vartheta^0 = \frac{L}{4}$.

Diese Werthe in (103) und (104) eingeführt, liefern für schmiedeiserne Wellen, die über 285^{mm} Durchmesser erhalten:

$$d = \sqrt[3]{P R} = 90 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{. . . . . (105)}$$

und für schmiedeiserne Wellen unter 285^{mm} Durchmesser:

$$d = 4{,}13 \sqrt[4]{P R} = 120 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \text{. . . . . . . (106)}$$

Ferner ergiebt sich für gusseiserne Wellen über 285^{mm} Durchmesser:

$$d = 1{,}26 \sqrt[3]{P R} = 113 \sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad \text{. . . . . . . (107)}$$

und für gusseiserne Wellen unter 285^{mm} Durchmesser:

$$d = 4{,}9 \sqrt[4]{P R} = 143 \sqrt[4]{\frac{N}{n}} \quad \text{. . . . . (108)}$$

Nach diesen Formeln sind die beiden folgenden Tabellen berechnet.

---

*) Die Praxis bietet indessen Fälle dar, wo diese Grenzen überschritten werden. So findet sich in der Spinnerei in Logelbach bei Colmar eine schwere gusseiserne Wellenleitung, bei welcher in den Lagerhälsen die Spannung $\mathfrak{S}$ auf $3{,}65^k$ geht (ermittelt mit Unterlage einer ganz genauen Messung der durchgeleiteten Arbeitsstärke). Die Schafte der einzelnen Wellen dieser Leitung sind dagegen wieder sicherer construirt, indem sie durch Anschwellung des Hauptkörpers sowohl, als durch Aufsetzen von vier Rippen bedeutend verstärkt sind.

§. 68.

Schmiedeiserne Wellen.

d	PR	$\frac{N}{n}$	d	PR	$\frac{N}{n}$
30	2 784	0,004	130	981 690	1,37
32	3 608	0,005	135	1141 700	1,63
34	4 593	0,006	140	1320 400	1,87
36	5 733	0,008	145	1519 400	2,13
38	7 167	0,010	150	1740 100	2,43
40	8 799	0,012	155	1983 900	2,78
45	14 094	0,020	160	2252 600	3,16
50	21 482	0,030	165	2547 600	3,57
55	31 453	0,044	170	2870 800	4,03
60	44 531	0,063	175	3223 700	4,52
65	61 356	0,086	180	3608 200	5,06
70	82 526	0,116	190	4479 300	6,28
75	108 750	0,153	200	5499 400	7,72
80	140 780	0,197	210	6684 600	9,36
85	179 420	0,252	220	8239 300	11,30
90	225 510	0,32	230	9618 600	13,50
95	279 960	0,39	240	11144 000	16,00
100	343 720	0,48	250	13423 000	18,84
105	417 790	0,59	260	15707 000	22,04
110	503 240	0,71	270	18267 000	25,60
115	601 160	0,84	280	21952 000	30,11
120	712 730	1,00	290	24389 000	33,46
125	839 150	1,17	300	27000 000	37,03

Anmerkung. Wenn in den Spalten für PR die drei abgetrennten Stellen abgeschnitten werden, so bleibt der Werth von PR übrig, den man erhält, wenn R in Meter ausgedrückt wird.

§. 69.

Gusseiserne Wellen.

d	PR	$\frac{N}{n}$	d	PR	$\frac{N}{n}$
40	4 399	0,006	155	992 950	1,39
45	7 047	0,010	160	1126 300	1,58
50	10 741	0,015	165	1273 800	1,78
55	15 726	0,022	170	1435 400	2,01
60	22 265	0,031	175	1611 850	2,16
65	30 678	0,043	180	1804 100	2,53
70	41 263	0,058	190	2239 650	3,14
75	54 375	0,076	200	2749 700	3,86
80	70 390	0,098	210	3342 300	4,68
85	89 710	0,126	220	4119 650	5,65
90	112 755	0,16	230	4809 300	6,75
95	139 980	0,19	240	5572 000	8,00
100	176 860	0,24	250	6711 500	9,42
105	208 895	0,30	260	7853 500	11,02
110	251 620	0,35	270	9133 500	12,80
115	300 580	0,42	280	10976 000	15,05
120	356 365	0,50	290	12194 500	16,73
125	419 575	0,58	300	13500 000	18,51
130	490 845	0,68	310	15252 000	20,64
135	570 850	0,81	320	16777 000	22,71
140	660 200	0,93	330	18400 000	24,91
145	759 700	1,06	340	20124 000	27,24
150	870 050	1,21	350	21942 000	29,72

Beispiel. Gegeben $N = 35$, $n = 20$, also $\frac{N}{n} = 1{,}75$. Hierfür ist die schmiedeiserne Welle nach Spalte 6 Zeile 2 bis 3 §. 68 zwischen 135 und 140^{mm} dick zu nehmen; für die gusseiserne giebt Tabelle §. 69 Spalte 6 Zeile 3: $d =$ sehr nahe 165^{mm}.

§. 70.

Drehzapfen der Wellen.

Die Zapfen der Wellen sind entweder Endzapfen, und dürfen dann als Stirnzapfen behandelt werden, oder sie sind, was der gewöhnliche Fall ist, Halszapfen, die man nach den in §. 41 gegebenen Regeln bestimmen kann. Bei den Triebwerkwellen der Fabriken ist eine besondere Berechnung der Zapfenlänge unnöthig. Man nehme hier, wenn nicht ausnahmsweise die Zapfenlänge l beschränkt werden muss, $l = {}^3/_2\, d$, wobei zu bedenken ist, dass eine Vergrösserung von l über dieses Maass hinaus nicht ungünstig wirkt, sondern die Abnutzung nur verkleinert. In dieser Beziehung hüte man sich übrigens, Halszapfen und Stirnzapfen zu verwechseln.

§. 71.

Lange Triebwellen.

Die langen Triebwellen der Fabriken, denen man gewöhnlich zwischen 60 und 100 Umdrehungen pro Minute giebt, erhalten in der Regel Durchmesser unter 285^{mm} und sind daher nach den Formeln, welche den Verdrehungswinkel berücksichtigen, zu berechnen; sie würden, nach den obigen Formeln ausgeführt, in der Regel eine zu grosse Verdrehung erfahren. Man erzielt gute Verhältnisse, wenn man bei solchen Wellen den Verdrehungswinkel $\vartheta^0 = \sqrt{\frac{L}{8}}$ nimmt. Um die hierfür passenden Wellendicken zu finden, multiplicire man die Werthe, welche die obigen Formeln und Tabellen ergeben, mit $\sqrt[8]{\frac{L}{2}}$, und setze dabei für L:

a. die ganze Wellenlänge (in Meter), wenn die Triebkraft an dem einen Ende eingeleitet, am andern ganz abgeleitet wird;

b. die halbe Wellenlänge, wenn die Kraftabgabe gleichförmig über die ganze Welle vertheilt ist, was in langen Wellensträngen in der Regel der Fall ist;

c. ein Drittel der Wellenlänge, wenn die Kraftabgabe gleichförmig abnehmend vom Krafteinleitungspunkte bis zum Wellenende vertheilt ist (siehe Fall III. in §. 11) was in Fabriksälen mit verschieden starken Maschinen sich manchmal zweckmässigerweise angeordnet findet;

d. im allgemeinen den Abstand des Angriffschwerpunktes der zu überwindenden Widerstandsmomente, wenn die Kraftabgabe irgendwie über die Welle vertheilt ist (siehe Fall IV. in §. 11). Man findet den Angriffschwerpunkt, wenn man die Producte aus den einzelnen Widerstandsmomenten (in Pferdestärken) und den Abständen ihrer Angriffpunkte vom Wellenanfang bildet und addirt, und die erhaltene Summe durch die ganze Kraftabgabe (in Pferdestärken) theilt*).

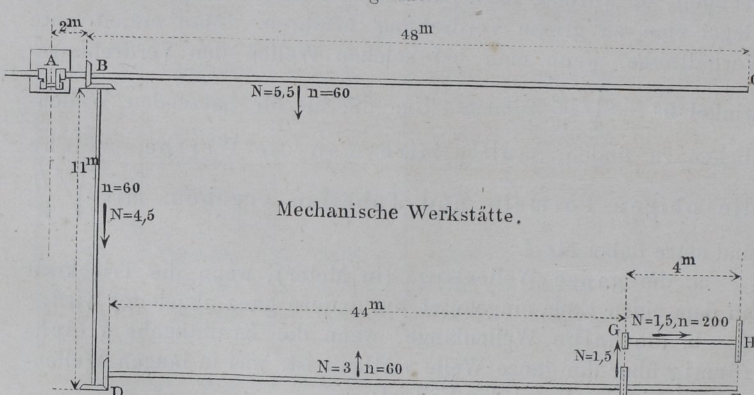
Man hat für:

$L =$	4	8	10	12	16	20	25	30	35	40	50	60	70	80	(109)
$\sqrt{\frac{L}{2}} =$	1,09	1,19	1,22	1,25	1,30	1,33	1,37	1,40	1,43	1,45	1,50	1,53	1,56	1,59	

e. Kommen Verzweigungen der Wellen vor, so ist bei Feststellung von L stets vom Anfang der Leitung auszugehen. Hierbei, wie bei der ganzen vorstehenden Ermittlung sind selbstverständlich mit praktischem Takt einzelne Abrundungen und Vereinfachungen der Annahmen vorzunehmen.

Beispiel. Es sei die in Fig. 118 skizzirte, einer Maschinenfabrik angehörige Triebwellenleitung zu berechnen. A Dampfmaschine, nach zwei

Fig. 118.



*) Auch ist dieser Schwerpunkt graphostatisch leicht zu ermitteln.

Seiten Kraft abgebend; die Welle AB (Schwungradwelle) macht 60 Umdrehungen und empfängt 10 Pferdestärken. Dem Strang BC sind in stufenweiser Abnahme des Kraftbedarfes Bohrbänke, grosse Drehbänke u. s. w. zugetheilt, so dass die hier stattfindende Kraftabgabe von 5,5 Pferdestärken als von B nach C hin gleichförmig bis auf Null abnehmend angesehen werden kann. Die Welle BD ist Zwischenwelle, indem sie unterwegs keine Kraft abgiebt, sondern nur 4,5 Pferdestärken auf DE überträgt. An der Welle DE von 60 Umdrehungen hängen 1) gleichförmig vertheilt verschiedene Werkzeuge (namentlich Drehbänke), welche zusammen 3 Pferdestärken beanspruchen, 2) werden in E 1,5 Pferdestärken an die Vorlegewelle GH mit 200 Umdrehungen abgegeben, welche bei H ihre Triebkraft an einen Ventilator überträgt.

Stück AB. $\frac{N}{n} = \frac{10}{60} = 0{,}166$, *gäbe d zwischen 75 und* 80^{mm}, *ist übrigens als Schwungradwelle einer besonderen Berechnung und Verstärkung bedürftig.*

Stück BC. $\frac{N}{n} = \frac{5{,}5}{60} = 0{,}092$, *was nach Tabelle §. 68* 67^{mm} *Wellendicke entspräche. Es ist aber (c)* $L = \text{etwa } \frac{50}{3} = 16{,}66^{m}$, *und somit zu nehmen:* $d = 1{,}30 \,.\, 67 = 88^{mm}$.

Stück BD. $\frac{N}{n} = \frac{4{,}5}{60} = 0{,}075$, *gäbe* 63^{mm} *Wellendicke; es ist aber zu nehmen wegen* $L = 2 + 11 : d = 1{,}26 \,.\, 63 = 79^{mm}$.

Stück DE. $\frac{N}{n} = \frac{4 + 1{,}5}{60} = 0{,}075$, *wie bei BD. Es ist aber [nach d), a) und b)]* $L = \frac{3\,(22 + 11 + 2) + 1{,}5\,(44 + 11 + 2)}{4{,}5} = 42{,}3^{m}$, *und danach zu nehmen:* $d = 1{,}47 \,.\, 63 = 93^{mm}$.

Stück GH. $\frac{N}{n} = \frac{1{,}5}{200} = 0{,}0075$, *gäbe* $35{,}5^{mm}$ *Wellendicke. Es ist aber [nach e) und a)]* $L = 4 + 44 + 11 + 2 = 61^{m}$, *und daher zu nehmen* $d = 1{,}53 \,.\, 35{,}5 = 54^{mm}$.

Man wird nun wohl thun, die Wellenstränge BC und DE gleich stark zu machen, damit die Riemscheibennaben beiderseits passen, und beiden 91 bis 92^{mm} *Dicke zu geben; denselben Durchmesser erhielte dann auch das nicht besonders wichtige Stüch EF.*

§. 72.

Wellen, die durch Menschenhände bewegt werden.

Für die Wellen an Maschinen, die durch Menschenhände betrieben werden, sind, wenn die Wellenlänge nicht klein ist, die obigen Formeln und Tabellen anzuwenden. Hat man indessen für eine derartige Maschine nur ein kurzes Wellenstück, z. B. einen Halszapfen, der beiderseits in andere Maschinentheile übergeht, zu berechnen, bei dem also der Verdrehungswinkel ganz unbeachtet bleiben darf, oder wünscht man überhaupt auf die kleinsten zulässigen Abmessungen zu kommen, so bediene man sich der Formeln (105) und (107) auch für Wellen unter 285^{mm} Dicke, setze also bei Schmiedeisen: $d = \sqrt[3]{PR}$, bei Gusseisen: $d = 1{\cdot}25\sqrt[3]{PR}$.

§. 73.

Zusammengesetzte Querschnitte. Hölzerne Wellen.

Die Abmessungen der zusammengesetzten Wellenquerschnitte (Kreisring-, Kreuz- und Sternquerschnitt) findet man, nachdem man zuerst die Berechnung für die massive runde Welle (aus demselben Material) gemacht, ganz auf dieselbe Weise aus der Dicke d der runden Welle, wie es in den §§. 61 bis 65 für die Tragachsen gezeigt wurde. Bei hölzernen Wellen (aus Eichenholz) nehme man den Durchmesser D des dem Querschnitt-Vieleck eingeschriebenen Kreises nicht kleiner als 2,05mal die Dicke der schmiedeisernen oder 1,75 mal die Dicke der gusseisernen gleichbeanspruchten Welle.

§. 74.

Belastete Wellen.

Bei der Construction von Wellen, welche ausser den verdrehenden noch biegenden Kräften ausgesetzt sind, oder was dasselbe ist, von Tragachsen, welche durch verdrehende Kräfte beansprucht werden, untersuche man vorerst, welche Theile des Trägers bloss von biegenden, und welche bloss von verdrehenden Kräften beansprucht werden, und construire diese einzeln nach den Regeln für Tragachsen und Wellen. Diejenigen Theile sodann, welche gleichzeitig gebogen und verdreht werden, berechne man auch nach beiden Beanspruchungen und behalte die grösseren so erhaltenen Querschnittabmessungen bei. Dabei aber bediene man sich statt Formel (105) und (107) der folgenden:

$$\text{Schmiedeisen: } d = 1{,}17\sqrt[3]{PR} = 105\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \quad (110)$$

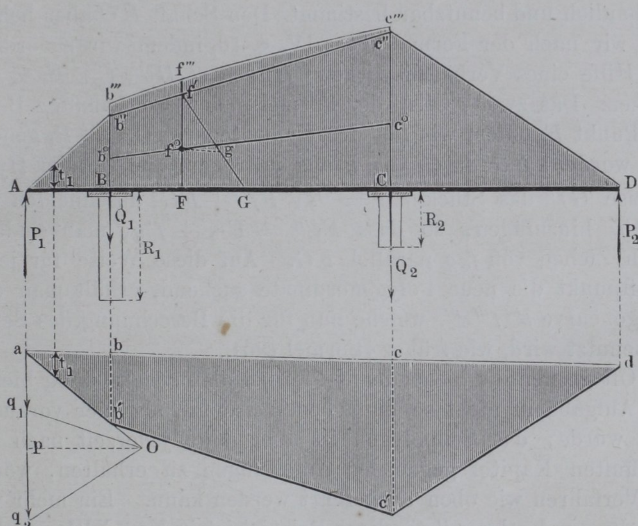
$$\text{Gusseisen: } d = 1{,}47\sqrt[3]{PR} = 132\sqrt[3]{\frac{N}{n}} \quad . \; . \; . \quad (111)$$

welche von $d = 250^{mm}$ aufwärts (statt von 285^{mm} an) gelten. Bei Anwendung dieses Verfahrens werden die Schwierigkeiten der Berechnung für zusammengesetzte Festigkeit (siehe §. 16) umgangen.

Diese sind indessen unter Zuziehung der graphischen Statik unschwer zu überwinden, so dass für eine klare und überzeugende Lösung der vorliegenden Aufgabe das folgende, auf ein Beispiel angewandte Verfahren vorzuziehen ist.

Die Welle $ABCD$ (Fig. 120) trägt in B und C zwei Zahnräder R_1 und R_2, von welchen das erstere von einer Kraft Q_1 am

Fig. 120.



Umfange erfasst wird, um das Moment $Q_1 R_1$ durch den Achsenschaft BC hindurch auf das zweite Rad zu übertragen, an dessen Umfang demnach eine Kraft $Q_2 = \dfrac{Q_1 R_1}{R_2}$ widersteht. Wir nehmen an, dass die Kräfte Q_1 und Q_2 parallel wirken und ihre Angriffpunkte in einer zur Zeichnung normal stehenden Ebene auf verschiedenen Seiten von AD haben: dann wird die Achse in B und C durch die parallelen Kräfte Q_1 und Q_2 belastet, welche die Stücke AB, BC und CD auf Biegung beanspruchen; und ausserdem wird der Schaft BC durch das Moment $Q_1 R_1 = Q_2 R_2$ auf Verdrehung beansprucht.

Wir tragen nun zunächst $Q_1 = R_2$, $Q_2 = R_1$ auf, suchen wie oben (siehe S. 52) gelehrt wurde, die in E angreifende Mittelkraft $Q_1 + Q_2$ auf, und ermitteln daraus die Zapfenkräfte P_1 und P_2, aus welchen die Zapfen für A und D berechnet werden können. Hierauf verzeichnen wir das Kräftepolygon $a q_1 q_2 O$ mit einem Polabstand Op, welchen wir $=$ dem Halbmesser R_1 wählen, und bilden nun das Seilpolygon $a b' c' d a$. Tragen wir nun der Uebersicht halber bb' nach Bb'', cc' nach Cc'', und ziehen Ab'', $b''c''$, $c''D$, so sind zunächst die Momente für die Schenkel AB und CD anschaulich und benutzbar bestimmt. Den Schaft BC aber behandeln wir nach der Formel unter IV, §. 16, indem wir zuvörderst (mit Hilfe eines Verhältnisszirkels) $Bb_0 = {}^3/_8\, Bb''$, $Cc_0 = {}^3/_8\, Cc''$ machen. Das zweite Glied der Formel finden wir sodann z. B. für den Punkt F, indem wir (da der Momentenarm $Op = R_1$ genommen worden) $FG = Q_1$ von F aus auftragen, und von der Hypothenuse Gf' das Stück $f'g = {}^5/_8 \sqrt{Ff'^2 + FG^2}$ abschneiden und zu Ff_0 hinzufügen, so dass $Ff''' = Ff_0 + f'g$; man findet g durch Ziehen von $f_0 g$ parallel FG. Auf diese Weise für jeden Schaftpunkt die neue Polygonordinate suchend, erhält man eine Polygoncurve $b''' f''' c'''$, welche nun für die Berechnung des Schaftes benutzt wird, wie früher [Formel (90)].

Oft greifen die biegenden Kräfte bei dieser sich häufig bietenden Aufgabe in nicht so einfacher Weise an, als hier vorausgesetzt wurde; das Seilpolygon ist aber dann jederzeit nach den im fünften Kapitel gegebenen Anleitungen zu erhalten, worauf das Verfahren wie oben ausgeführt werden kann. Ein mehr verwickeltes und sehr vollständiges Beispiel ist in Kap. XVI. gegeben, wo zugleich eine etwas andere Form für die Zusammensetzung eines drehenden mit einem biegenden Momente angewandt ist.