

ERSTER ABSCHNITT.

FESTIGKEIT DER MATERIALIEN.

§. 1.

Vorbemerkungen.

In diesem Buche sind die nachstehenden Ausdrücke in dem Sinne der hier hinzugefügten Erklärungen gebraucht.

Flächendruck, Druck auf die Flächeneinheit.

Spannung, gewöhnlich nur bei Anwendungen der Festigkeitslehre gebraucht, die auf die Flächeneinheit zurückgeführte Anspannung der Molekularfasern; allgemein: Kraft pro Flächeneinheit.

Tragmodul*), die Spannung, welche der Elasticitätsgrenze entspricht. Der Zug- und der Druckfestigkeit entsprechen ein Zug- und ein Drucktragmodul.

Bruchcoefficient oder Bruchmodul, die Spannung, welche den Bruch einer Molekularfaser herbeiführt.

Elasticitätsmodul (das Maass der elastischen Nachgiebigkeit eines Materials), die Spannung, bei welcher ein prismatischer, in seiner Längenrichtung beanspruchter Körper um seine ganze Länge ausgedehnt oder zusammengepresst wird (eine solche Formänderung als möglich vorausgesetzt.)

Theoretische Tragkraft heisst die Kraft, welche in einem von ihr irgendwie (auf Zug, Druck, Drehung, Biegung etc.) beanspruchten Körper in der stärkst gespannten Faser eine Spannung gleich dem Tragmodul hervorruft, also die Festigkeit des Körpers bis zur Elasticitätsgrenze in Anspruch nimmt.

*) In der „Constructionslehre für den Maschinenbau“: Coefficient der stabilen Festigkeit genannt.

Praktische Tragkraft oder Tragkraft schlechthin wird dieselbe Kraft genannt, wenn sie jene Spannung nur bis zu einer beabsichtigten und für zulässig erachteten Höhe unterhalb der Elasticitätsgrenze treibt. („Tragkraft“ der Eisenbahnwagen.)

Tragsicherheit, das Verhältniss zwischen der theoretischen Tragkraft und der Belastung des Körpers, oder was dasselbe ist, zwischen dem betreffenden Tragmodul und der stärksten eintretenden Spannung.

Bruchkraft oder Bruchbelastung heisst die obige Kraft, wenn sie in der stärkst gespannten Faser des Körpers eine Spannung gleich dem Bruchmodul hervorruft; die Bruchkraft ist in besonderen Fällen die Kraft zum Zerreißen, Zerdrücken, Abscheeren, Abwinden, Abbrechen etc.

Bruchsicherheit, Sicherheit gegen den Bruch, das Verhältniss zwischen der Bruchkraft und der Belastung.

Beanspruchung, der umgekehrte Werth der Sicherheit.

Als allgemeine Regel für den Maschinenbau kann es gelten, dass in der Regel eine zweifache Tragsicherheit den auf einen Constructionstheil einwirkenden statischen Kräften gegenüber passend ist. Unter Umständen muss indessen nach oben oder unten von dem genannten Maasse abgewichen werden; nach oben darf um so mehr abgewichen werden, je genauer die Aufsuchung der statischen Kräfte stattgefunden hat. Nie soll man einen Maschinentheil bei seinem Gebrauche über seine theoretische Tragkraft hinaus belasten; dagegen sind bei einzelnen Materialien, namentlich z. B. beim Schmiedeeisen, solche Probelastungen, welche den Körper bloss über eine seiner Elasticitätsgrenzen hinaus beanspruchen, ohne sich der Bruchkraft zu sehr zu nähern, allem Anschein nach nicht schädlich. (Siehe §. 2.)

Fällt die Belastung eines Körpers zwischen die theoretische Tragkraft und die Bruchkraft, so ruft sie bleibende Formänderungen in dem Körper hervor; erreicht sie die Bruchkraft, so werden die stärkst gespannten Fasern zerrissen oder zerdrückt. Die Ermittlung der Bruchkraft und somit die Benutzung der Bruchmodel beschränkt sich vorzugsweise auf diejenigen Fälle, wo der Bruch (das Zerreißen, Zerbrechen etc.) eines Körpers geradezu bezweckt wird; für die Berechnung von bleibenden Constructionen ist der Hauptwerth auf die Tragmodel zu legen.

Das in den Zahlenbeispielen gebrauchte Zeichen „“ bedeutet: „sei“ oder „abgerundet auf“.

§. 2.

Festigkeits-Coëfficienten.

Die in nachstehenden Tabellen zusammengestellten Coëfficienten sind Mittelwerthe aus zahlreichen, von vielen Experimentatoren an den verschiedensten Gattungen der aufgeführten Materialien angestellten Versuchen; sie können deshalb unter Umständen von dem wahren bei einem zu brauchenden Material sich findenden Werth abweichen, ohne deshalb ihren Werth als gute Mittelzahlen einzubüssen. Schädliche Wirkungen jener allfälligen Abweichungen vermeidet man durch Einsetzung von Spannungen, welche genügend unter den Tragmodeln bleiben. Die Buchstaben sind in den Spaltenüberschriften ausreichend erklärt. Bei dem „Holz“ sind die Mittelwerthe für Eichen-, Buchen-, Tannen und Eschenholz, als wenig von einander abweichend, zusammengefasst.

Man findet die Werthe der zweiten Tabelle aus denen der ersten (wo die Zahlen abgerundet sind) durch Multiplication derselben mit 1368. Zur Umwandlung in Schweizermaass (Zoll = 30 Millimeter, Pfund = $\frac{1}{2}$ Kilogramm) dient der Multiplicator 1800, für englisches Maass (engl. Zoll und Pfund av. dup.) 1316, für österreichisches Maass (österr. Zoll und Pfund) 1214.

Materialien, welche grosse Unterschiede zwischen den zusammengehörigen Bruch- und Tragmodeln zeigen, besitzen in hohem Grade die Eigenschaft der Zähigkeit. Die Versuche am Schmiedeeisen zeigen, dass eine nicht gar zu weit über die Elasticitätsgrenze hinaus getriebene Belastung, welche also eine bleibende Formänderung in dem belasteten Körper hervorruft, den Elasticitätsmodul nicht verändert, den Tragmodul aber erhöht. So zeigt z. B. ein Schmiedeeisenstab, der mit 20^k pro Quadratmillimeter ausgedehnt wurde, in dem neuen Zustande bei Erneuerung der Belastung einen Zugtragmodul von 20 statt von 15^k. (Benutzung dieser Erscheinung beim Drahtziehen.) Die Zähigkeit ist eine sehr gute Eigenschaft für ein Constructionsmaterial; sie kann wenigstens annä-

hernd bemessen werden aus den Quotienten $\frac{K}{T}, \frac{K_1}{T_1}$. Geschwächt wird sofort der obige übertrieben belastete Eisenstab, wenn man ihn nach dem Ausdehnen über die andere Elasticitätsgrenze hinaus zusammenpresst; zu seinem anfänglichen Tragmodul kehrt er nach jener ersten Streckung zurück, wenn man ihn ausglüht.

Festigkeitscoëfficienten für das metrische Maasssystem.
 Millimeter und Kilogramm.

Material.	Elasti- citäts- modul <i>E</i>	Tragmodul		Bruchmodul	
		für Zug <i>T</i>	für Druck <i>T</i> ₁	für Zug <i>K</i>	für Druck <i>K</i> ₁
Schmiedeeisen, fer forgé	20000	15	15	40	22
Eisendraht, fil de fer	20000	30	—	70	—
Eisenblech, fer en tôle laminé	17000	—	—	32	—
Gusseisen, fer fondu, fonte	10000	7,5	15	11	63
Stahl, acier	20000	25	—	80	—
Gussstahl, ungehärtet, acier fondu brut	20000	30	—	80	—
Gussstahl, geh. u. angelassen, acier f. trempé et recuit	30000	65 bis 150	—	100	—
Kupfer, gehämmert, cuivre rouge battu	11000	2,5	—	30	70
Kupferdraht, fil de cuivre	13000	12	—	40	—
Messing, laiton	6500	4,8	—	12	110
Messingdraht, fil de laiton	10000	13	—	50	—
Glockengut, bronze	3200	2 (?)	—	23	—
Blei, plomb	500	1	—	1,3	5
Holz, bois de construction	1100	2	1,8	9	5
Hanfseil, neu, corde en chanvre	250 (?)	5 (?)	—	12	—
Hanfseil, alt	50 (?)	1 (?)	—	5	—
Maschinenriemenleder, gebraucht, courroie en cuir	15 bis 20	1,6	—	2,9	—
Basalt, basalte	—	—	—	—	9
Granit, granite	—	—	—	—	8
Kalkstein, pierre à chaux	—	—	—	—	5
Quarz, quartz	—	—	—	—	12
Sandstein, grès dur	—	—	—	—	7
Ziegelstein, brique	—	—	—	—	0,6
Mörtel, mortier	—	—	—	—	—
Kalksteinmauerwerk, mur en pierres à chaux	—	—	—	—	5
Sandsteinmauerwerk, mur en grès dur	—	—	—	—	1,5
Ziegelmauerwerk, mur en briques	—	—	—	—	0,4

Bei Rechnungen mit den Werthen dieser Tabelle sind die Längen in Millimetern, die Kräfte in Kilogrammen einzusetzen.

Festigkeitscoefficienten für das preuss. Maasssystem.

Preuss. Zoll = $\frac{1}{12}$ preuss. Fuss und Neupfund.

Material.	Elasticitätsmodul E	Tragmodul		Bruchmodul		Specificisches Gewicht. γ
		für Zug T	für Druck T_1	für Zug K	für Druck K_1	
Schmiedeeisen	27360000	20520	20520	54720	30096	7,60 — 7,80
Eisendraht . . .	27360000	41040	—	95760	—	7,60 — 7,80
Eisenblech . . .	23256000	—	—	43776	—	7,60
Gusseisen . . .	13680000	10260	20520	15048	86148	7,00 — 7,50
Stahl	27360000	34200	—	109440	—	7,50 — 7,80
Gussstahl, ungehärtet . .	27360000	41040	—	109440	—	7,50 — 7,80
Gussstahl, geh. u. angelassen . .	41040000	88920	—	136800	—	7,83 — 7,92
Kupfer, gehämmert . .	15048000	3400	—	41000	95800	8,88 — 9,00
Kupferdraht . . .	17784000	16400	—	54720	—	8,78 — 8,95
Messing	8892000	6566	—	16416	150480	8,40 — 8,71
Messingdraht	13680000	17784	—	68400	—	8,34 — 8,73
Glockengut . . .	4377600	2736(?)	—	31464	—	8,81
Blei	684000	1368	—	1778	6840	11,33 — 11,45
Holz	1504800	2736	2462	12312	6840	0,59 — 0,82
Hanfseil, neu	342000	6840(?)	—	16416	—	0,14 — 0,21
„ alt	68400	1368(?)	—	6840	—	—
Maschinenriemen . .	21000 bis 27300	2200	—	4000	—	—
Basalt	—	—	—	—	12312	2,36 — 2,72
Granit	—	—	—	—	10944	2,50 — 3,05
Kalkstein	—	—	—	—	6840	2,46 — 2,84
Quarz	—	—	—	—	16416	2,30 — 2,70
Sandstein	—	—	—	—	9576	1,90 — 2,70
Ziegelstein	—	—	—	—	881	1,40 — 1,20
Mörtel	—	—	—	—	—	—
Kalksteinmauerwerk	—	—	—	—	6840	1,47 — 1,70
Sandsteinmauerwerk	—	—	—	—	2052	2,05 — 2,12
Ziegelmauerwerk	—	—	—	—	547	2,40 — 2,46

Bei Rechnungen mit den Werthen dieser Tabelle sind die Längen in preuss. Zoll, die Kräfte in preuss. Pfunden einzusetzen.

§. 3.

Zug- und Druckfestigkeit.

Ein Stab ist auf Zugfestigkeit beansprucht, wenn die an- greifende Kraft P ihn in seiner Längenrichtung auszudehnen sucht. Ist dagegen die Kraft gerade entgegengesetzt gerichtet, so beansprucht sie den Körper auf Druckfestigkeit, vorausge- setzt übrigens, dass die Länge des Stabes gegen dessen Quer- schnittmaasse nicht zu gross sei (vergl. §. 14).

Nennt man noch:

q die Grösse eines zu betrachtenden Querschnittes des Stabes,

\mathcal{S} die in demselben durch die Kraft P hervorgerufene Spannung,

so ist bei Vernachlässigung des Eigengewichtes des Stabes die Tragkraft bei der Spannung \mathcal{S} :

$$P = \mathcal{S}q \dots \dots \dots (1)$$

Beispiel. Ein Dachstuhl übe an seinem Fusse einen Horizontal- schub von 10000^k aus, welcher durch eine horizontale runde Querstange aufgenommen werden soll. Gestattet man in derselben die Spannung

$\mathcal{S} = 5^k$, so ist zu setzen bei der Stangendicke d : $\mathcal{S}q = 5 \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 10000$;

woraus $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} 2000} = 50,42, \rightsquigarrow 50\text{mm}$.

Die Hauptformänderungen, welche die Beanspruchung auf Zug- oder Druckfestigkeit in einem Körper hervorrufft, sind Ver- längerung oder Verkürzung desselben. Ein prismatischer, durch die Kraft P auf Zug beanspruchter Körper verlängert sich dadurch um die Grösse λ , für welche bei der ursprünglichen Länge l des Stabes gilt:

$$\frac{\lambda}{l} = \frac{\mathcal{S}}{E} \dots \dots \dots (2)$$

welche Formel so lange richtig bleibt, als \mathcal{S} nicht grösser als der Zugtragmodul T ist. — Dieselbe Formel gilt für die Zusammen- drückung des Stabes durch die Kraft P , wobei der Drucktrag- modul T_1 die Grenze der Gültigkeit der Formel angiebt.

Beispiel. Die oben berechnete Querstange sei vor dem Einsetzen 35^m lang; sie wird sich dann bei eintretender Belastung verlängern

um: $\lambda = \frac{35000 \cdot 5}{20000} = \frac{35}{4} \rightsquigarrow 9\text{mm}$.

Formel (1) gilt, weil bei Zug- und Druckfestigkeit alle Querschnittelemente gleichstark beansprucht werden, auch über die Elasticitätsgrenze hinaus, so dass man mittelst derselben die Kraft finden kann, welche einen Körper zerreisst oder zerdrückt. Man hat dafür die betreffenden Bruchmodel einzusetzen.

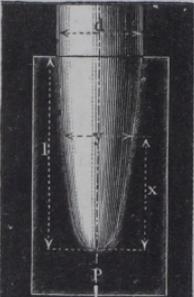
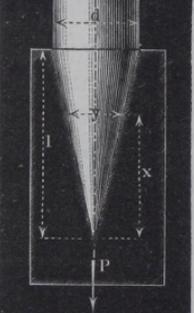
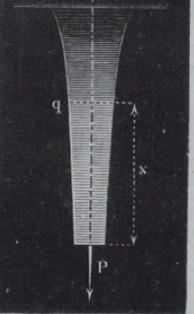
Beispiel. Zum Zerreißen der oben berechneten Stange bedarf es einer Zugkraft $P = K \cdot q$ oder, der Tabelle §. 2 gemäss, $P = 40 \cdot 50^2 \frac{\pi}{4} = 78540k$; zum Zerdrücken eines niedrigen Stückes derselben bedürfte es einer Kraft $P_1 = K_1 q = 22 \cdot 50^2 \frac{\pi}{4} = 43197k$.

§. 4.

Körper von gleicher Zug- und Druckfestigkeit.

Körperformen von gleicher Festigkeit ergeben sich, wenn man in einem Körper die Querschnitte so wählt, dass in allen die Spannung \mathcal{S} dieselbe Grösse erhält, wodurch eine verhältnissmässig sehr günstige Materialverwendung erzielt werden kann. Solche Körperformen werden indessen selten mit Genauigkeit, sondern gewöhnlich nur näherungsweise zur Ausführung gebracht; sie dienen in vielen Fällen sogar nur als stilistische Grundformen, die einer Construction nur den Ausdruck der gleichen Festigkeit zu verleihen haben, ohne dass diese streng eingehalten würde. Dem Constructeur sind sie aus beiden Gründen von Werth; ja es möchte der Zahl nach die zweite Benutzungsart, die des stilistischen Vorbildes, häufiger sein als die erstere. Sind dem Construierenden die Festigkeitsformen recht geläufig geworden, und hat er sich frei gemacht von dem Gedanken, dass die für die Gleichhaltung der Festigkeit erforderlichen Curven streng eingehalten werden müssten; so wird er bald dahin gelangen, stets ansprechende gefällige Linien für schwer zu belastende Constructionstheile zu finden, indem er die Grundform, welche der starre mathematische Ausdruck liefert, mit künstlerischer Freiheit und Selbständigkeit in das Leben überträgt.

Nachfolgend gegebene Formen gelten für Zug- wie für Druckfestigkeit. Als Beispiele technischer Nützlichkeit der beiden ersten Formen können die Holzschrauben, die eingegossenen Schraubenstifte, Säulchen etc., für die der dritten Form die erst neuerdings so gebauten steinernen Kamine mit leiser Einziehung im Schafte dienen.

Form.	Gleichung.	Bemerkungen.
	$\frac{y}{d} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P}{\sigma}}$	<p>P ist gleichförmig auf die ganze Länge des Stabes vertheilt. Die Querschnitte des Stabes sind kreisförmig. Profil: Parabel. Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem Enddurchmesser $\frac{d}{2}$.</p>
	$\frac{y}{d} = \frac{x}{l}$ $d = \sqrt{\frac{4}{\pi} \frac{P}{\sigma}}$	<p>P ist gleichförmig abnehmend von oben nach unten vertheilt. Querschnitte: kreisförmig. Körperform: Normalkegel.</p>
	$q = \frac{P}{\sigma} e^{\frac{\gamma}{e} x}$ <p>$e = 2,718 \dots =$ Basis der natürlichen Logarithmen.</p> $\log. q = \log. \frac{P}{\sigma}$ $+ 0,434 \frac{\gamma}{\sigma} x.$	<p>Der Körper ist ausser durch P durch sein Eigengewicht belastet, welches pro Cubikeinheit $= \gamma$ gesetzt ist. Die Querschnitte wachsen nach der Befestigungsstelle hin wie die Abscissen einer Logistik.</p>

§. 5.

Schub- oder Gleitungsfestigkeit.

Ein Körper wird in einem Querschnitt auf Schub- oder Gleitungsfestigkeit, die auch Abscheerungsfestigkeit genannt wird, beansprucht, wenn die angreifende Kraft P in der Ebene des Querschnittes wirkt.

Ist wieder q die Grösse des Querschnittes, und \mathfrak{S} die darin eintretende Spannung, so hat man wie bei Zug- und Druckfestigkeit für die Tragkraft:

$$P = \mathfrak{S}q \dots \dots \dots (3)$$

Die Elasticitätsgrenze wird erreicht, wenn $\mathfrak{S} = \frac{4}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodel des Materials wird, also beim Schmiedeisen, wo $T = T_1 = 15$, bei $\mathfrak{S} = 12$, für Gusseisen, wo $T < T_1$ und $= 7,5$ bei $\mathfrak{S} = 6$. Es tritt nämlich hier die Maximalspannung nicht in der Ebene des Querschnittes, sondern geneigt dazu ein, und hat die $\frac{5}{4}$ fache Grösse von \mathfrak{S} .

Die Querverschiebung, welche die zwei Flächen des auf Gleitungsfestigkeit beanspruchten Querschnittes erleiden, ist innerhalb der Elasticitätsgrenze unmerklich klein.

Gleichung (3) gilt auch für solche Fälle, wo die Trennung der beanspruchten Flächen bezweckt wird, also für das Abschneiden, Ausstossen, Durchlochen (d. i. das Arbeiten mit denjenigen Maschinen, welche man neuerdings häufig unter dem Namen Durchbruch-Maschinen zusammenfasst). Die Spannung \mathfrak{S} , bei welcher der Bruch erfolgt, zeigt sich etwas wenig abweichend von dem Bruchmodul für Zug (K). Die Abweichung erklärt sich daraus, dass K und K_1 beim Abscheeren gleichzeitig zur Wirkung kommen (s. übrigens: v. Reiche, Ueber das Lochen der Metallplatten, Civ. Ing. 1864, S. 235). Für die Berechnung der Durchbruch-Maschinen genügt es, etwa $1,1 K$ als Bruch-Coëfficient einzuführen.

§. 6.

Biegungsfestigkeit.

Tragkraft und elastische Linie.

Ein stabförmiger Körper, an welchem solche äussere Kräfte sich das Gleichgewicht halten, welche senkrecht zur Stabachse gerichtet sind, ist auf Biegungsfestigkeit beansprucht. So lange die Beanspruchung die Elasticitätsgrenze nicht überschreitet, tritt für jeden Normalquerschnitt des Stabes Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten

der in dem Querschnitt widerstehenden inneren Kräfte andererseits, beide bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes. Diese geht durch den Schwerpunkt des Querschnittes und steht senkrecht auf der Biegungsebene. Sie theilt den Querschnitt in zwei Theile, von denen in dem einen alle zur Stabachse parallelen Fasern proportional ihrer Entfernung von der neutralen Achse auf Zug beansprucht sind (Zugseite des Querschnittes), während in dem anderen die Fasern auf Druck beansprucht werden (Druckseite des Querschnittes), und zwar ebenfalls proportional ihrem Abstand von der neutralen Achse. Gleichweit von der neutralen Achse entfernte Fasern auf Zug- und Druckseite erleiden dabei gleiche aber entgegengesetzt gerichtete Formänderungen. Die Biegungsfestigkeit ist sonach eine Vereinigung von Zug- und Druckfestigkeit, wobei beide in einer höheren Ordnung, nämlich mit Achsendrehung, vorkommen.

Ist nun:

M das statische Moment der einen Querschnitt auf Biegung beanspruchenden Mittelkraft, bezogen auf die neutrale Achse des Querschnittes, oder das sogenannte Kraftmoment,

J das Trägheitsmoment des Querschnittes zu seiner neutralen Achse, a der Abstand der stärkst gespannten, d. h. der von der neutralen Achse am weitesten entfernten Faser auf der Zug- oder der Druckseite des Querschnittes,

\mathfrak{S} die in dieser Faser eintretende Spannung,

so ist:

$$M = \mathfrak{S} \frac{J}{a} \dots \dots \dots (4)$$

Das Produkt $\mathfrak{S} \frac{J}{a}$ heisst das Spannungsmoment des untersuchten Querschnittes, oder auch dessen Tragemoment für die Spannung \mathfrak{S} . Ist der gebogene Stab prismatisch, die biegende Mittelkraft P und ihr Hebelarm für irgend einen Querschnitt x , so wird zunächst $M = Px$ für jeden Querschnitt einen anderen Werth haben. Derjenige Querschnitt, für welchen Px seinen grössten Werth annimmt, heisst der gefährliche Querschnitt, und die biegende Kraft P , welche in ihm die Spannung \mathfrak{S} hervorruft, ist die Tragkraft des Stabes für die Spannung \mathfrak{S} , so dass man für die Tragkraft hat:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J}{x_m a} \dots \dots \dots (5)$$

wobei x_m denjenigen Werth von x bezeichnet, bei welchem (Px) ein Maximum ist.

Die die Schwerpunkte der Stabquerschnitte verbindende Achse des Stabes erfährt bei der Biegung keine Längenänderung; sie wird nur gebogen, und zwar heisst die Curve, nach welcher sie sich krümmt, eine elastische Linie, für deren Gleichung der allgemeine Ausdruck

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M}{JE} \dots \dots \dots (6)$$

gilt. Für den Krümmungshalbmesser ρ der Curve ist sodann:

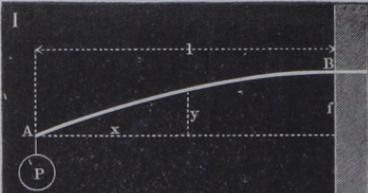
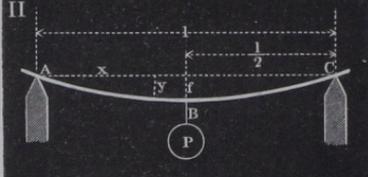
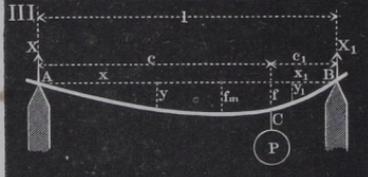
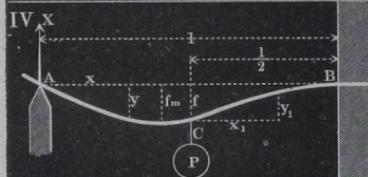
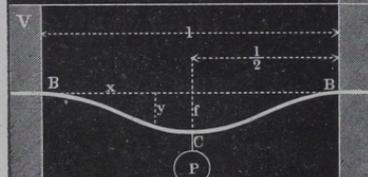
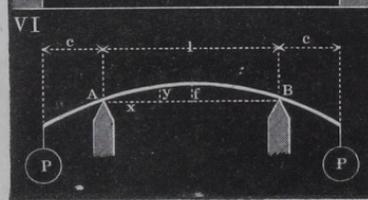
$$\rho = \frac{JE}{M} \dots \dots \dots (7)$$

In der folgenden Tafel sind nun für eine Reihe von Angriffarten einer biegenden Kraft auf einen prismatischen Stab die Werthe zusammengestellt für

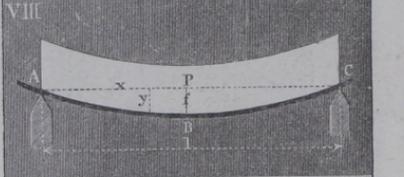
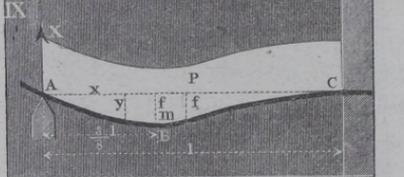
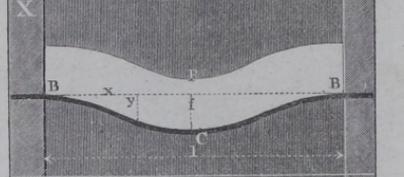
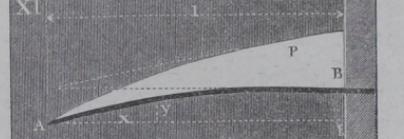
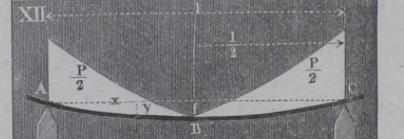
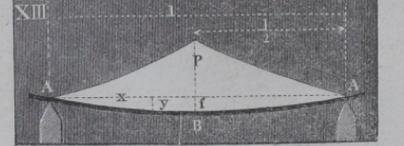
- das Kraftmoment M für den Punkt x ,
- die Tragkraft P nach Formel (5),
- die Coordinaten x, y der elastischen Linie,
- für den Werth f der Abscisse y am Angriffspunkt der Kraft bei den Belastungsweisen Nro. I. bis VI.,
- und endlich für die stärkste Einsenkung f bei den Fällen VII. bis XIII.

Bei sämtlichen aufgeführten Fällen ist das eigene Gewicht des betrachteten Balkens vernachlässigt, was bei zahlreichen praktischen Fällen, namentlich des Maschinenbaufaches, zulässig ist (weniger beim Brückenbaufach). Die Fälle VII. bis X. können als solche benutzt werden, bei denen das Stabgewicht berücksichtigt werden soll. In den Fällen XI. und XII. ist gezeigt, wie eine passende ungleichförmige Vertheilung der Last eines Balkens dessen Tragkraft wesentlich erhöhen kann, indem bei der Belastungsweise nach XI. und XII. die Tragkraft $1\frac{1}{2}$ mal so gross ausfällt, als bei Nro. VII. und VIII. Gleichzeitig liefern auch die Lastvertheilungen in XI. und XII. noch obendrein kleinere Einsenkungen als Nro. VII. und VIII. Diese Umstände sind für die Belastung von Magazinen, Speichern etc. von wesentlichem, praktischem Werth. Die Lastvertheilung in Nro. XIII. ist dagegen ungünstig für die Tragkraft; sie zieht dieselbe auf das $\frac{3}{4}$ fache des Falles Nro. VIII. herab und macht auch die Einsenkung f grösser als dort.

Zu beachten ist, dass die Einsenkung f durchgehends mit der dritten Potenz der Längenabmessungen wächst, und dass sie bei verschiedener Auflagerungsart des Stabes sehr stark verändert auftritt.

Angriffsweise.	Kraftmoment M .	Tragkraft.
	$M = Px$	$P = \frac{\epsilon J}{la}$
	$M = \frac{Px}{2}$	$P = 4 \frac{\epsilon J}{al}$
	<p>Für AC: $M = \frac{Pc_1x}{l}$ Für BC: $M = \frac{Pcx_1}{l}$</p>	$P = \frac{l}{cc_1} \frac{\epsilon J}{a}$
	<p>Für AC: $M = \frac{5}{16} Px$ Für BC: $M = \frac{11}{32} Pl \left(\frac{5}{11} - 2 \frac{x_1}{l} \right)$</p>	$P = \frac{16}{3} \frac{\epsilon J}{la}$
	$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \right)$	$P = 8 \frac{\epsilon J}{la}$
	<p>Für AB: $M = Pc$</p>	$P = \frac{\epsilon J}{ca}$

Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f .	Bemerkungen.
$y = \frac{Pl^3}{2JE} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{3}$	<p>Freiträger.</p> <p>Gefährlicher Querschnitt bei B.</p>
$y = \frac{Pl^3}{16JE} \left[\frac{x}{l} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{48}$	<p>Frei aufliegender Träger.</p> <p>Gef. Querschnitt in der Mitte.</p>
$y = \frac{P}{JE} \frac{c^2 c_1^2}{6l} \left[2 \frac{x}{c} + \frac{x}{c_1} - \frac{x^3}{c^2 c_1} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{c_1^2 c^2}{6l} \left[2 \frac{x_1}{c_1} + \frac{x_1}{c} - \frac{x_1^3}{c_1^2 c} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3 c^2 c_1^2}{3 l^2 l^2}$ <p>f_{max} bei</p> $x = c \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} \frac{c_1}{c}}$	<p>Gef. Querschnitt bei C.</p> <p>Kraft $X = P \frac{c_1}{l}$</p> <p>„ $X_1 = P \frac{c}{l}$</p>
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[\frac{x}{l} - \frac{5}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$ $y_1 = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{32} \left[\frac{1}{4} \frac{x_1}{l} + \frac{5}{2} \frac{x_1^2}{l^2} - \frac{11}{3} \frac{x_1^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{7l^3}{768}$ $f_{max} = \sqrt{\frac{1}{5}} \frac{Pl^3}{48JE}$ <p>bei $x = l \sqrt{\frac{1}{5}}$</p>	<p>Halb eingespannter Träger.</p> <p>Gef. Querschnitt bei B.</p> <p>Kraft $X = \frac{5}{16} P$.</p>
$y = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{16} \left[\frac{x^2}{l^2} - \frac{4}{3} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3}{192}$	<p>Eingespannter Träger.</p> <p>Gef. Querschnitt bei B und C.</p>
$y = f - (\varrho - \sqrt{\varrho^2 - x^2})$ <p>wobei $\varrho = \frac{JE}{Pc}$</p>	$f = \frac{P}{JE} \frac{l^3 c}{8 l}$	<p>Gef. Quersch. an einer beliebigen Stelle zwischen A und B.</p>

Angriffsweise.	Kraftmoment M .	Tragkraft P .
<p>VII</p> 	$M = \frac{Px}{2} \frac{x}{l}$	$P = 2 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>VIII</p> 	$M = \frac{Px}{2} \left(1 - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>IX</p> 	$M = \frac{Px}{2} \left(\frac{3}{4} - \frac{x}{l}\right)$	$P = 8 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>X</p> 	$M = \frac{Pl}{2} \left(\frac{1}{6} - \frac{x}{l} + \frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 12 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>XI</p> 	$M = \frac{Px}{3} \frac{x^2}{l^2}$	$P = 3 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>XII</p> 	$M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} + \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 12 \frac{\mathcal{E}J}{la}$
<p>XIII</p> 	$M = Px \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{3} \frac{x^2}{l^2}\right)$	$P = 6 \frac{\mathcal{E}J}{la}$

Gleichung der elastischen Linie.	Einsenkung f .	Bemerkungen.
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{6} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{4} \frac{x^3}{l^3} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{8}$	Freitrag. Gefährlicher Querschnitt bei B .
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{12} \left[2 \frac{x^3}{l^3} - \frac{x^4}{l^4} - \frac{x}{l} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{5}{384}$	Frei aufliegender Träger. Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{48} \left[\frac{x}{l} - 3 \frac{x^3}{l^3} + 2 \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{192}$	Gef. Querschnitt bei C . Stärkste Senkung bei $x = \frac{l}{16} (1 + \sqrt{33})$ Kraft $X = \frac{3}{8} P$. Wendepunkt bei $x = \frac{3}{4} l$.
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{24} \left[\frac{x^2}{l^2} - 2 \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{384}$	Gef. Querschnitt bei B . Wendepunkt bei $x = \frac{l}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}} \right)$
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{12} \left[\frac{x}{l} - \frac{1}{5} \frac{x^5}{l^5} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{15}$	Freitrag. Gef. Querschnitt bei B .
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{12} \left[\frac{3x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{x^4}{l^4} - \frac{2x^5}{5l^5} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{3}{320}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.
$y = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{12} \left[\frac{5x}{8l} - \frac{x^3}{l^3} + \frac{2x^5}{5l^5} \right]$	$f = \frac{P l^3}{JE} \frac{1}{60}$	Gef. Querschnitt in der Mitte.

§. 7.

Querschnitt-Tabelle.

Der Werth $\frac{J}{a}$ in Gleichung (4) hängt bloss von Abmessungen des Stabquerschnittes ab, und wird im Folgenden als Querschnittsmodul bezeichnet. Für eine Reihe von Querschnittformen sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt die Werthe für: das Trägheitsmoment J zur neutralen Achse (welche den Figuren punktirt eingezeichnet ist); die grösste Faserentfernung a auf Zug- und Druckseite, oder für jede Seite einzeln (a' und a''), wenn der Querschnitt nicht zweiachsig symmetrisch ist;

den Querschnittsmodul $Z = \frac{J}{a}$, für welchen sich auch zwei

Werthe ergeben, wenn $a' \leq a''$,

und dem Flächeninhalt F des Querschnittes, welcher bei Gewichtberechnungen dienlich ist.

Wo in der Spalte für a angegeben steht: „durch Versuche zu bestimmen“, sind die Ausdrücke zu verwickelt, um noch praktisch genannt werden zu können. Für diese Fälle schneidet man ein Modell des zu betrachtenden Querschnittes aus Carton aus und sucht dessen Schwerpunkt durch Abwägen auf einer Schneide.

Hilfsatz zur Gewinnung der Trägheitsmomente.

Bezeichnet:

J das Trägheitsmoment einer Fläche zu einer durch ihren Schwerpunkt gehenden Achse,

F ihren Flächeninhalt,

J' ihr Trägheitsmoment zu einer zweiten Achse, welche zu jener Schwerpunktsachse parallel ist,

e den Abstand der beiden Achsen,

so ist:

$$J' = J + e^2 F \quad \dots \quad (6)$$

Beispiel. Das Trägheitsmoment eines Rechteckes (Nro. I.) zu einer mit der Seite b zusammenfallenden Achse ist somit:

$$J' = \frac{bh^3}{12} + \frac{h^2}{4} bh = \frac{bh^3}{3}.$$

Das Trägheitsmoment eines Kreises (Nro. XX.) zu einer ihn tangierenden Achse ist:

$$J' = \frac{\pi}{64} d^4 + \frac{d^2}{4} \frac{\pi}{4} d^2 = \frac{5\pi}{64} d^4.$$

Die Benutzung der Querschnitt-Tafel wird aus folgendem Beispiel klar werden.

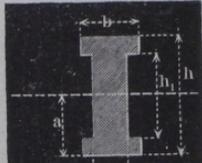
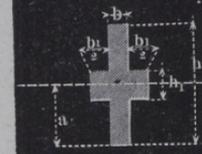
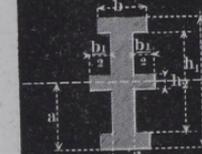
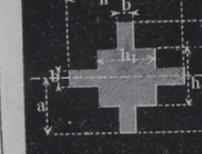
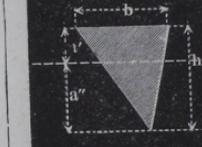
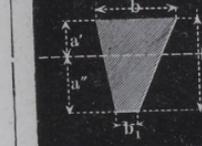
Beispiel. Man sucht das Trägheitsmoment eines kreisförmigen Querschnittes von 104^{mm} Durchmesser. Nach Nro. XX. der folgenden Tafel ist dasselbe: $J = \frac{\pi}{64} 104^4 \approx 5742500$. In preuss. Zoll gemessen würde $d = 4$ sein, daher für Rechnungen in preussischem Maasssystem zu nehmen ist: $J = \frac{\pi}{64} 4^4 = 42,56$.

Durch passende Theilung und Verbindung der gegebenen Querschnittfiguren lassen sich dieselben in andere verwandeln, für welche dann die hier stehenden Formeln gelten. So lässt sich aus dem Querschnitt Nro. VIII. der eines rechteckigen Rohres machen, aus Nro. XI. ein E-förmiger u. s. w. Nicht unwichtig ist es ferner, auf einzelne allgemeine Aufschlüsse hinzudeuten, welche die Tafel liefern kann. Vor allem zeigen die einzelnen Werthe den starken Einfluss der Höhenabmessungen der Querschnitte, und zugleich denjenigen solcher Querschnitttheile, welche weit von der neutralen Schicht entfernt liegen. Hiermit steht im Zusammenhang die eigenthümliche Wirkung der Verstärkungsrippen, deren man sich namentlich bei gusseisernen Theilen so vielfach bedient. Diese Rippen wirken nämlich bei den auf Biegung beanspruchten Körpern nicht sowohl durch ihr eigenes Material, als dadurch, dass sie die neutralen Schichten der übrigen Theile günstig verlegen, d. h. sie weit von der Hauptmasse des Materials abrücken. Sie treten also erst mittelbar in Thätigkeit, leisten aber dabei vortreffliche Dienste, und müssen in dieser Hinsicht von dem Construierenden stets wohl beachtet werden. Ein Beispiel wird das Ausgesprochene vollends deutlich machen.

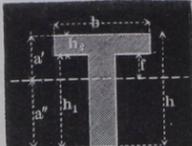
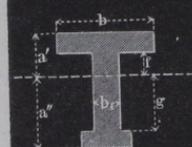
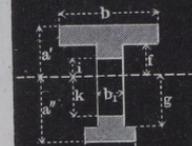
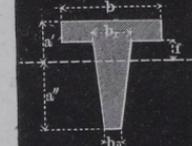
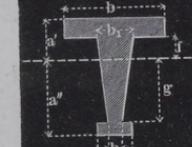
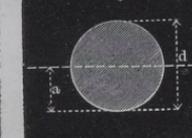
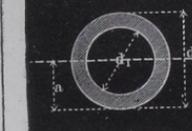
Es sei ein Querschnitt von der Form Nro. XV. gegeben, und zwar mit den Verhältnissen $b = 8b_1$, $h = 12b_1$, $h_1 = 11b_1$ (siehe Nro. I. §. 9). Diesen Schnitt denke man sich nun zerlegt in den senkrechten und den horizontalen Theil, und beide einzeln ausgeführt. Dann haben die beiden Theile die Querschnittmodel: $\frac{11^2 \cdot b_1^3}{6} = 20\frac{1}{6}b_1^3$ und $\frac{8b_1^3}{6}$, zusammen also $21,5b_1^3$. Derselbe Querschnitt aber hat, als Ganzes aufgefasst (siehe §. 9) den Modul $Z = 34,8b_1^3$, d. i. er bietet mehr als das $1\frac{1}{2}$ fache an Festigkeit, und zwar hat die senkrechte Rippe die Festigkeit der waagerechten Platte auf etwa das 10fache des Werthes gesteigert, den sie im vereinzeltten Zustande besitzen würde. Andere Querschnittformen liefern oft noch günstigere Erhöhungen.

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
I.		$\frac{b h^3}{12}$
II.		$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{12}$
III.		$\frac{b^4}{12}$
IV.		$\frac{b^4}{12}$
V.		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4 = 0,5413 b^4$
VI.		$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^4$
VII.		$\frac{1 + 2 \sqrt{2}}{6} b^4 = 0,638 b^4$

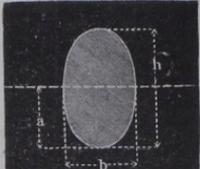
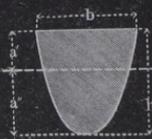
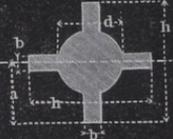
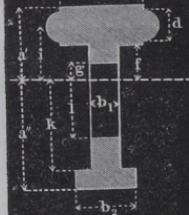
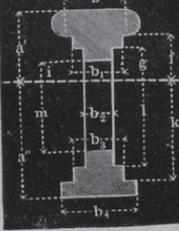
Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^2}{6}$	$b h$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3)}{6 h}$	$b (h - h_1)$
$\frac{b}{2}$	$\frac{b^3}{6}$	b^2
$\frac{b}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{2}}{12} b^3 = 0,118 b^3$	b^2
$b \sqrt{\frac{3}{4}} = 0,866 b$	$\frac{5}{8} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2 = 2,598 b^2$
b	$\frac{5 \sqrt{3}}{16} b^3$	$\frac{3 \sqrt{3}}{2} b^2$
0,924 b	0,677 b^3	2,828 b^2

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
VIII.		$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{12}$
XI.		$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{12}$
X.		$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{12}$
XI.		$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{12}$
XII.		$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{12}$
XIII.		$\frac{b h^3}{36}$
XIV.		$\frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{36 (b + b_1)} h^3$

Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_1) h_1^3}{6 h}$	$b h - (b - b_1) h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b (h^3 - h_1^3) + b_1 (h_1^3 - h_2^3)}{6 h}$	$b (h - h_1) + b_1 (h_1 - h_2)$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + b_1 h_1^3}{6 h}$	$b h + b_1 h_1$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 - (b - b_2) h_1^3 + b_1 h_2^3}{6 h}$	$b h - (b - b_2) h_1 + b_1 h_2$
$\frac{h}{2}$	$\frac{b h^3 + (h_1 - b) h_1^3 + (h - h_1) b^3}{6 h}$	$b h + (h_1 - b) h_1 + (h - h_1) b$
$a' = \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2}{3} h$	$Z' = \frac{b h^2}{12}$ $Z'' = \frac{b h^2}{18}$	$\frac{b h}{2}$
$a' = \frac{b + 2 b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$ $a'' = \frac{2 b + b_1}{b + b_1} \frac{h}{3}$	$Z' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (b + 2 b_1)} h^2$ $Z'' = \frac{b^2 + 4 b b_1 + b_1^2}{12 (2 b + b_1)} h^2$	$\frac{b + b_1}{2} h$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
XV.		$\frac{1}{3} [b(a^3 - f^3) + b_1(f^3 + a'^3)]$
XVI.		$\frac{1}{3} [b(a^3 - f^3) + b_1(f^3 + g^3) + b_2(a'^3 - g^3)]$
XVII.		$\frac{1}{3} [b(a^3 - f^3) + b_1(f^3 + g^3 - i^3 - k^3) + b_2(a'^3 - g^3)]$
XVIII.		$\frac{1}{3} \left[\frac{b_1 - b_2}{4(f + a'')} (a'^4 - f^4) + b(a^3 - f^3) + b_2(f^3 + a'^3) \right]$
XIX.		$\frac{1}{3} \left[\frac{b_1 - b_2}{4(f + g)} (g^4 - f^4) + b(a^3 - f^3) + b_2(f^3 + g^3) + b_3(a'^3 - g^3) \right]$
XX.		$\frac{\pi}{64} d^4 = 0,0491 d^4$
XXI.		$\frac{\pi}{64} (d^4 - d_1^4) = 0,0491 (d^4 - d_1^4)$

Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
$a' = \frac{b h_2^3 + b_1 h_1 (h + h_2)}{2 [b h - (b - b_1) h_1]}$ $a'' = h - a'$	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b_1 h_1 + b h_2$
<p>Durch Versuche zu bestimmen.</p>	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + b_1 (f + g) + b_2 (a'' - g)$
<p>Durch Versuche zu bestimmen.</p>	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + b_1 (f + g - i - k) + b_2 (a'' - g)$
<p>Durch Versuche zu bestimmen.</p>	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + a'')$
<p>Durch Versuche zu bestimmen.</p>	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b (a' - f) + \frac{b_1 + b_2}{2} (f + g) + b_3 (a'' - g)$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} d^3$	$\frac{\pi}{4} d^2$
$\frac{d}{2}$	$\frac{\pi}{32} \frac{d^4 - d_1^4}{d}$	$\frac{\pi}{4} (d^2 - d_1^2)$

Nro.	Querschnitt.	Trägheitsmoment J .
XXII.		$\frac{\pi}{64} b h^3$
XXIII.		$0,110 r^4$
XXIV.		$\text{(Parabelabschnitt.) } \frac{8}{175} b h^3 = 0,0457 b h^3$
XXV.		$\frac{1}{12} \left[\frac{3\pi}{16} d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h - d) \right]$
XXVI.		$\frac{1}{3} \left[b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 - g^3 + k^3 - l^3) + b_2 (a''^3 - k^3) \right] + \frac{\pi}{64} (d^4 + 16 d^2 i^2)$
XXVII.		$\frac{1}{3} \left[b (a'^3 - f^3) + b_1 (f^3 - g^3) + b_2 (g^3 - i^3 + l^3 - m^3) + b_3 (k^3 - l^3) + b_4 (a''^3 - k^3) \right] + \frac{\pi}{64} \left[(a' - f)^4 + 8 (a' + f) (a' - f)^2 \right]$

Abstand a .	Querschnittmodul Z .	Flächeninhalt F .
$\frac{h}{2}$	$\frac{\pi}{32} b h^2$	$\frac{b h \pi}{4}$
$a' = 0,5765 r$ $a'' = 0,4244 r$	$Z' = 0,19 r^3$ $Z'' = 0,26 r^3$	$\frac{r^2 \pi}{2}$
$a' = \frac{2}{5} h$ $a'' = \frac{3}{5} h$	$Z' = \frac{4}{35} b h^2 = 0,114 b h^2$ $Z'' = \frac{8}{105} b h^2 = 0,076 b h^2$	$\frac{2}{3} b h$
$\frac{h}{2}$	$\frac{1}{6h} (0,589 d^4 + b (h^3 - d^3) + b^3 (h-d))$	$\frac{\pi}{4} d^2 + 2 b (h - d)$
Durch Versuche zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a' - f) + b_1(f - g + k - l)$ $+ b_2(a'' - k) + \frac{\pi}{4} d^2$
Durch Versuche zu bestimmen.	$Z' = \frac{J}{a'}$ $Z'' = \frac{J}{a''}$	$b(a - f) + b_1(f - g)$ $+ b_2(g - i + l - m)$ $+ b_3(k - l) + b_4(a - k)$ $+ \frac{\pi}{4} (a' - f)^2$

§. 8.

Werthe der Spannung \mathfrak{S} .

Die Elasticitätsgrenze wird in einem gebogenen Stab auf Zug- und Druckseite einzeln erreicht, wenn die dort eintretende Spannung $\mathfrak{S} =$ dem betreffenden Tragmodul wird. Man darf daher für \mathfrak{S} nie einen so grossen Werth einsetzen, dass auf einer der beiden Seiten der Tragmodul überschritten würde. Diese Bedingung wird bei zweiachsig symmetrischen Querschnitten erfüllt, wenn man für \mathfrak{S} den durch die Sicherheit dividirten kleineren Tragmodul setzt, so bei Gusseisen die Sicherheit stets auf den Zugtragmodul bezieht.

Bei solchen Querschnitten hingegen, wo $a' \leq a''$ untersuche man zunächst, welche Seite die Zugseite, und welche die Druckseite des Querschnittes ist. Ist dann

a der grösste Faserabstand auf der Zugseite,

a_1 der auf der Druckseite,

T der Zugtragmodul,

T_1 der Drucktragmodul,

M das Moment der biegenden Kraft,

m der Sicherheitscoëfficient, so dass bei 2facher, 3facher, 4facher Sicherheit $m = 2, 3, 4$ ist,

so nehme man:

Wenn $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m} \frac{J}{a}$
Wenn $\frac{a}{a_1} < \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T_1}{m} \frac{J}{a_1}$
Wenn $\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1}$	$M = \frac{T}{m} \frac{J}{a}$ oder $\frac{T_1}{m} \frac{J}{a_1}$

Beispiel. Bei Gusseisen ist $\frac{T}{T_1} = \frac{1}{2}$; ferner sei bei dem parabolischen Querschnitt Nro. XXIV die Sehne auf der Zugseite gelegen, so

ist dort $a = \frac{2}{5} h$, $a_1 = \frac{3}{5} h$, $\frac{a}{a_1} = \frac{2}{3}$. Hier ist demnach $\frac{a}{a_1} > \frac{T}{T_1}$, also für \textcircled{C} der Werth $\frac{T}{m}$ oder $\frac{7,5}{m}$ zu setzen, und dabei $M = \frac{7,5}{m} \frac{4}{35} b h^2$ zu machen. — Bei Schmiedeeisen, wo $T = T_1$, ist die Untersuchung nicht nöthig, wie dieselbe denn überhaupt bei der leider so geringen Zahl bekannter Tragmodul einstweilen nur beim Gusseisen eine Anwendung finden kann.

§. 9.

Beste Materialverwendung.

Querschnitte von gleicher Festigkeit.

Um das Material bei Trägern, welche auf Biegung beansprucht sind, gut zu verwenden, ist dasselbe, unter Erhaltung einer guten Verbindung aller Querschnitttheile, möglichst entfernt von der neutralen Schicht anzubringen. Zugleich gewinnt man eine gute Materialbenutzung, wenn man die Querschnittform so wählt, dass bei einer genügend weit getriebenen Belastung die Spannungen auf Zug- und Druckseite gleichzeitig die Elasticitätsgrenze erreichen. Man hat hierfür zu machen:

$$\frac{a}{a_1} = \frac{T}{T_1} \dots \dots \dots (7)$$

Querschnitte, bei denen dieses Verhältniss eingehalten ist, heissen Querschnitte von gleicher Festigkeit*). Bei Schmiedeeisen sind demnach die zweiachsig symmetrischen Querschnitte am zweckmässigsten, weil hier $T = T_1$. Bei Gusseisen sind unter der Voraussetzung, dass die biegende Kraft eine constante Richtung habe, solche Querschnitte am besten, wo $a_1 = 2a$, weil hier $T_1 = 2T$. Unter Berücksichtigung dieses Verhältnisses sind die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Querschnitte ermittelt.

Die Zugseite ist die der neutralen Achse zunächstliegende. Als Querschnittmodul ist der Werth $\frac{J}{a_1}$ ausgerechnet, so dass für \textcircled{C} stets $\frac{T_1}{m}$ einzuführen ist. F bezeichnet wieder den Flächen-

*) Das hier gegebene Verfahren liefert nicht ganz streng die beste Materialverwendung; genaueres findet man in Klose's Theorie der eisernen Träger mit Doppelflantschen, Hannover 1862.

inhalt und φ den verhältnissmässigen Materialaufwand, denjenigen von Nro. I. gleich 1 gesetzt.

Man erhält φ aus:

$$\varphi = \frac{\beta_1}{\beta} \left(\frac{\alpha}{\alpha_1} \right)^{1/3} \left(\frac{\mathfrak{S}}{\mathfrak{S}_1} \right)^{2/3} \dots \dots \dots (8)$$

wobei sich die bezifferten Buchstaben auf den zu untersuchenden Querschnitt, die unbezifferten auf den bekannten, mit dem Materialaufwand 1 beziehen, und $\beta = \frac{F}{b^2}$, $\alpha = \frac{Z}{b^3}$, $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}_1$ zu setzen ist. \mathfrak{S} und \mathfrak{S}_1 fallen nur dann verschieden aus, wenn $\frac{a}{a_1}$ nicht bei beiden Querschnitten gleich ist. Man sieht indessen aus (8), dass kleine Abweichungen von dem genauen Verhältniss nur wenig merkbar werden.

Greift die biegende Kraft abwechselnd in entgegengesetzter Richtung an, so ist auch für Gusseisen der zweiachsig symmetrische Querschnitt am besten, und stets der kleinere Tragmodul als Grenzwert für \mathfrak{S} einzuführen.

Aendert sich die Krafrichtung endlich fortwährend so, dass sich die neutrale Achse um den Schwerpunkt des Querschnittes dreht (Tragachsen), so ist der Kreisringquerschnitt am vortheilhaftesten, sehr gut sind aber auch dann kreuz- und sternförmige Querschnitte nach Art von Nro. IX, XI und XXIV, Tabelle §. 7. weil beim Drehen hier stets wieder weit abstehende Querschnitt-elemente in die Biegungebene gerückt werden.

Beispiel. Es sei ein gusseiserner freitragender Arm, belastet nach Fall I., §. 6, S. 12, für eine Last $P = 2500^k$ bei einer Länge $l = 2^m$ zu construiren. Wir wählen den Querschnitt Nro. V. der folgenden Tabelle, und haben in die Gleichung (4): $M = \mathfrak{S} \frac{J}{a} = \mathfrak{S} Z$ zu setzen: $M = 2500 \cdot 2000$, $\frac{J}{a} = Z = 16b^3$. Bei zweifacher Tragsicherheit ist zu nehmen: $\mathfrak{S} = \frac{15}{2} = 7,5$. Diese Werthe eingeführt gibt: $2500 \cdot 2000 = 7,5 \cdot 16 b^3$, woraus $b = 100 \sqrt[3]{\frac{5}{16 \cdot 7,5}} = \sqrt[3]{\frac{100}{24}} = 34,7$, wofür man nehmen würde 35^{mm} . Die Querschnittfläche beträgt dabei $13,3 \cdot 35^2 = 16292,5$ Quadratmillimeter. Die übrigen Querschnittmaasse ergeben sich aus den der Figur V eingeschriebenen Verhältnisszahlen. Sollte die Rechnung für preuss. Maass ausgeführt werden, so hätte man $P = 5000$ Pfund, $l = 2 \cdot 33,23 = 76,46$ Zoll, \mathfrak{S} nach Tabelle §. 2 = $\frac{20520}{2}$, wofür wir 10000 nehmen, zu setzen

$$\text{Dies liefert: } b = \sqrt[3]{\frac{5000 \cdot 76,46}{10000 \cdot 16}} = 1,34 \text{ Zoll.}$$

Nro.	Querschnittform.	J	a	Z	F	φ
I.		$278b^4$	$8b$	$34,8b^3$	$19b^2$	1
II.		$269b^4$	$8b$	$33,6b^3$	$19,2b^2$	1,03
III.		$295b^4$	$8b$	$36,9b^3$	$23,1b^2$	1,19

Nro.	Querschnittform.	J	a	Z	F	φ
IV.		$922b^4$	$9b$	$102,4b^3$	$40,8b^2$	1,04
V.		$80b^4$	$5b$	$16b^3$	$13,3b^2$	0,91
VI.		$119b^4$	$6b$	$19,8b^3$	$10,5b^2$	0,67

§. 10.

Körper von gleicher Biegungsfestigkeit.

Man erhält einen Körper von gleicher Biegungsfestigkeit oder gleichem Biegungs widerstand, wenn man in einem der Biegungs ausgesetzten Stabe die Querschnitte so wählt, dass in allen die Maximalspannung σ auf Zug- oder Druckseite denselben Werth erhält; demnach lässt sich gemäss Formel (4) die Gleichung für die Körperform entwickeln aus:

$$\frac{M a}{J} = \text{Const.} \dots \dots \dots (11)$$

Die Körperformen von gleicher Biegungsfestigkeit und besonders ihre Annäherungen finden zahlreiche Anwendungen im Maschinenbau; von ihnen gilt übrigens ebenfalls das in §. 4 Gesagte in vollem Maasse. Eine Reihe derselben ist in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Die Biegungs, welche Körper von gleicher Festigkeit in Folge der Belastung annehmen, ist nothwendig grösser, als bei prismatischen Körpern von derselben Angriffweise der biegungs Kraft. Bei den Fällen I. und V. der folgenden Tafel ist die Einsenkung f angegeben; sie ist bei I. doppelt, bei V. $1\frac{1}{2}$ mal so gross als bei dem gleicherweise angegriffenen prismatischen Stabe. Im allgemeinen gilt für die elastische Linie derjenigen (genau geformten) der folgenden Körper, deren Achse im unbelasteten Zustande gerade ist, der Ausdruck:

$$\frac{d_2 y}{dx^2} = \frac{M_0}{E J_0} \frac{a_0}{a_x} \dots \dots \dots (12)$$

wenn

M_0 das Moment der biegungs Kraft für irgend einen Querschnitt, z. B. den an der Befestigungsstelle,

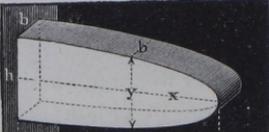
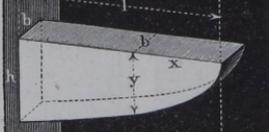
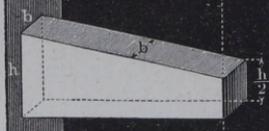
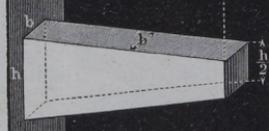
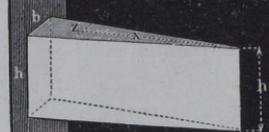
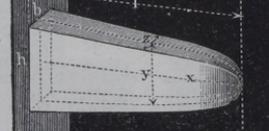
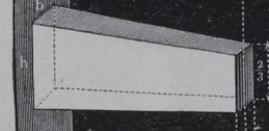
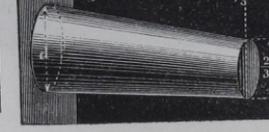
J_0 dessen Trägheitsmoment,

a_0 dessen grössten Faserabstand, und

a_x den grössten (auf derselben Seite wie a_0 gelegenen) Faserabstand des bei x gelegenen Querschnittes bezeichnet.

Für den Krümmungshalbmesser ρ der elastischen Curve an der Stelle xy ist dann:

$$\rho = \frac{E J_0}{M_0 a_0} a_x \dots \dots \dots (13)$$

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.
I.			<p>Für den Rechteckquerschnitt ist:</p> $\frac{z y^2}{b h^2} = \frac{x}{l},$ <p>Fall I. und II., $z = b$,</p> $\frac{y}{h} = \sqrt{\frac{x}{l}}.$
II.			<p>Parabolisch abgestumpfter Keil.</p>
III.			<p>Annäherung an Form I. Abgestumpfter Keil.</p>
IV.			<p>Annäherung an Form II. Abgestumpfter Keil.</p>
V.			<p>$y = h; \frac{z}{b} = \frac{x}{l}.$ Normalkeil.</p>
VI.			<p>$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}.$ Cubisch-parabolisch abgestumpfte Pyramide.</p>
VII.			<p>Annäherung an Form VI. Abgestumpfte Pyramide.</p>
VIII.			<p>Normalkegel-Stumpf. Annäherung an die strenge Form von der Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$</p>

Die Last P greift am freien Ende an, Fall I., Tabelle S. 6.

Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3}bhl$	Einsenkung des freien Endes: $f = \frac{2}{3} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{2}{3}bhl$	Die elastische Linie ist im Normalzustande eine Parabel.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4}bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Einmauerungsstelle.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{3}{4}bhl$	Die elastische Linie halbirt im Normalzustande den Spitzenwinkel des Keiles.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{1}{2}bhl$	Elastische Linie ein Kreisbogen. $f = \frac{1}{2} \frac{Pl^3}{J_0 E}; J_0 = \frac{bh^3}{12}$.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{3}{5}bhl$	Die Gleichung $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ gilt hier überhaupt, wenn die Querschnitte alle ähnlich sind.
$P = \frac{\mathfrak{E}bh^2}{6l}$	$\frac{19}{27}bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Einmauerungsstelle.
$P = \frac{\mathfrak{E}\pi}{32} \frac{d^3}{l}$	$\frac{19}{108} \pi l d^2$	Für gleiche Tragkraft mit Fall I. bis VII. hat man: $\frac{d}{h} = \sqrt[3]{\frac{16}{3\pi} \frac{b}{h}}$.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.
IX.		Last <i>P</i> gleichförmig vertheilt. Fall VII, Tabelle S. 6.	Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{x^2}{l^2};$ $z = b; \frac{y}{h} = \frac{x}{l} \text{ Keil.}$
X.			$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}.$ Parabolisch zugespitzter Keil.
XI.			$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x^2}{l^2}}.$ Pyramide abgestumpft nach semi-cubischen od. Neil'schen Parabeln.
XII.			Annäherung an Form XI. Abgestumpfte Pyramide.
XIII.			Last <i>P</i> gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XI, Tabelle S. 6.
XIV.		$y = h; \frac{x}{l} = \sqrt{\frac{z}{b}}.$ Nach cubischen Parabeln zugespitzter Keil.	
XV.		$\frac{z}{y} = \frac{b}{h}; \frac{y}{h} = \frac{x}{l}.$ Pyramide.	

Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{3l}$	$\frac{1}{2} bhl$	Unter Abstumpfung der Endschärfe (gut verwendbar.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{3l}$	$\frac{1}{3} bhl$	Lässt sich durch einen Normalkeil gut annähern.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{3l}$	$\frac{3}{7} bhl$	Zeigt eine gute Grundform für ar- chitektonische Tragsteine.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{3l}$	$\frac{13}{27} bhl$	Gefährlicher Querschnitt an der Einmauerungsstelle.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{2l}$	$\frac{2}{5} bhl$	Ausdrucksvolle architektonische Grundform.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{2l}$	$\frac{1}{4} bhl$	Die Parabelspitze berühren ein- ander am freien Ende des Trägers.
$P = \frac{\mathfrak{S}bh^2}{2l}$	$\frac{1}{3} bhl$	Bemerkenswerth wegen der Ein- fachheit der Form.

Nro.	Form.	Angriffsweise.	Gleichung.
XVI.		<p>Die Last <i>P</i> ist gleichförmig vertheilt. Fall VIII., Tabelle S. 6.</p>	<p>Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{l^2 - 4x^2}{l^2};$ $z = b; \frac{y}{h} = \frac{z}{l} \sqrt{\frac{l^2 - x^2}{4 - x^2}}.$ <p>Halber Ellipsencylinder.</p> </p>
XVII.			<p>Annäherung an Form XVI. Obere Begrenzung cylindrisch.</p>
XVIII.			<p>$y = h; \left(\frac{x}{l}\right) = \sqrt{\frac{b-z}{b}}.$ <p>Prisma mit parabolisch begrenzter Grundfläche.</p> </p>
XIX.		<p>Die Last <i>P</i> ist nach der Mitte zu gleichförmig abnehmend vertheilt. Fall XII., Tabelle S. 6.</p>	<p>Beim Rechteckquerschn. allgemein: $\frac{zy^2}{bh^2} = \frac{l^3 - 8x^3}{l^3};$ $z = b; \frac{y^2}{h^2} = 1 - 8\frac{x^3}{l^3}.$ </p>
XX.			<p>Annäherung an Form XIX. Obere Begrenzung cylindrisch.</p>
XXI.			<p>$y = h; \left(\frac{x}{l}\right) = \sqrt[3]{\frac{b-z}{b}}.$ <p>Prisma mit cubisch-parabolisch begrenzter Grundfläche.</p> </p>
XXII.		<p>Annäherung an Form XXI. Die beiden krummen Flächen sind cylindrisch.</p>	

Tragkraft.	Körper-Inhalt.	Bemerkungen.
$P = \frac{4 \mathcal{E} b h^2}{3 l}$	$\frac{\pi}{4} b h l$	Die Formen XVI. bis XVIII. gelten auch, wenn P in einem durch die Länge l beweglichen Punkte angebracht ist; nur ist dann die Tragkraft kleiner, nämlich $P = \frac{2}{3} \frac{\mathcal{E} b h^2}{l}$.
$P = \frac{4 \mathcal{E} b h^2}{3 l}$	Annähernd $\frac{5}{6} b h l$	
$P = \frac{4 \mathcal{E} b h^2}{3 l}$	$\frac{2}{3} b h l$	Die Parabeln können durch (sie einschliessende) Kreisbögen angenähert werden, die durch die Scheitel und die Endpunkte gehen.
$P = \frac{2 \mathcal{E} b h^2}{l}$	Annähernd $\frac{5}{6} b h l$	Die Curve besteht aus zwei in der Mitte in einander übergehenden Stücken.
Annähernd wie bei XIX.	Annähernd $\frac{11}{12} b h l$	Zwei gefährliche Querschnitte liegen zu beiden Seiten des mittleren Schnittes.
$P = \frac{2 \mathcal{E} b h^2}{l}$	$\frac{3}{4} b h l$	Kreisbögen durch die Scheitel und die Endpunkte fallen innerhalb der Curven.
Annähernd wie bei XXI.	Annähernd $\frac{7}{9} b h l$	Zwei gefährliche Querschnitte liegen zu beiden Seiten des mittleren Schnittes.

Mit den vorstehend gegebenen Formen sind nur die allereinfachsten der sich hier darbietenden Fälle erschöpft; leicht würden dieselben auf eine grosse Anzahl zu vermehren sein. (Uebungsaufgaben.) Hierfür brauchte man z. B. nur die Veränderlichkeit der Breiten- oder Höhenabmessungen etwas verwickelter einzuführen, als es geschah. So ergibt sich z. B., wenn man bei I. den Grundriss parabolisch gestaltet, d. i. $\frac{z}{b} = \sqrt{\frac{x}{l}}$ macht, $\frac{y}{h} = \sqrt[4]{\frac{x}{l}}$ (biquadratische Parabel) u. s. w. Zusammengesetztere Querschnitte liefern ebenfalls neue Körpergebilde, deren mannigfaltige Abänderungen einen reichen Wechsel von Formen darzubieten vermögen. Beispiele hierzu finden sich u. a. bei den Tragachsen, Kapitel VII. Siehe übrigens auch §. 18, Seite 57.

§. 11.

Drehungsfestigkeit.

Tragkraft und Verdrehungswinkel.

Ein stabförmiger Körper, den entgegengesetzt gerichtete Kräftepaare um seine geometrische Achse zu drehen suchen, wird auf Drehungsfestigkeit in Anspruch genommen. Hierbei widerstehen die Elemente eines Normalschnittes mit ihrer Schub- oder Gleitungsfestigkeit, und zwar tritt bei Beanspruchungen innerhalb der Elasticitätsgrenze Gleichgewicht ein zwischen dem Moment der verdrehenden äusseren Kräfte einerseits, und den Momenten der Spannungen in den verschiedenen Querschnittelementen andererseits, beide bezogen auf die polare Schwerpunktachse des Querschnittes, d. h. auf die im Schwerpunkt des Querschnittes senkrecht auf ihm stehende Achse. Die Drehungsfestigkeit ist somit eine höhere Gattung der Schubfestigkeit, zu welcher sie in ähnlichem Verhältniss steht, wie die Biegefestigkeit zur Zug- und Druckfestigkeit.

Nimmt man nun:

- M das statische Moment der auf einen Stabquerschnitt wirkenden verdrehenden Kräfte oder das Kraftmoment,
 J_p das polare Trägheitsmoment des Querschnittes, d. h. dessen Trägheitsmoment zu seiner polaren Schwerpunktachse*).

*) Eine bei einzelnen Querschnittformen anzubringende Correction vorbehalten, vergl. §. 12.

a den Abstand des entferntesten Elementes des Querschnittes von dessen Schwerpunkt,

\mathfrak{S} die in diesem Element eintretende Schubspannung,

so ist

$$M = \frac{\mathfrak{S} J_p}{a} \dots \dots \dots (14)$$

Wenn der Stab lauter gleiche Querschnitte besitzt, so ist $\frac{J_p}{a}$ constant. Führt man dann das Moment M auf einen Arm A , an welchem die verdrehende Kraft P angreift, zurück, so ist der gefährliche Querschnitt derjenige, für welchen M seinen Maximalwerth annimmt, und demnach die Tragkraft des Stabes:

$$P = \frac{\mathfrak{S} J_p}{A_m a} \dots \dots \dots (15)$$

wenn A_m den dem Maximum von M entsprechenden Werth von A bezeichnet.

Die Elasticitätsgrenze wird wie bei der Schubfestigkeit erreicht, wenn $\mathfrak{S} = \frac{1}{5}$ des kleineren der beiden Tragmodul des Materials, aus welchem der Stab besteht. (Vergl. §. 5.)

Die Verdrehung, welche zwei von einander abstehende Querschnitte des Stabes annehmen, heisst der Verdrehungs- oder Torsionswinkel. Er werde mit ϑ bezeichnet; für den Abstand x der beiden Querschnitte hat man allgemein:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_p G} \dots \dots \dots (16)$$

wobei G den Drehungsmodul des Materials bezeichnet, welcher $\frac{2}{5}$ des Elasticitätsmoduls E ist.

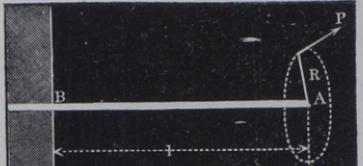
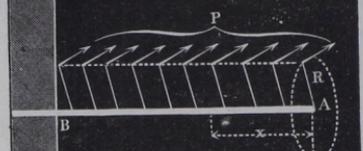
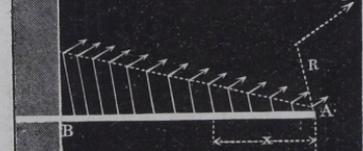
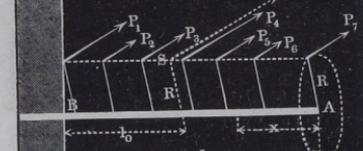
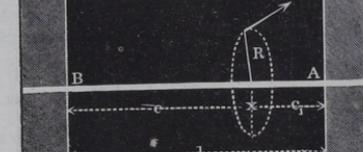
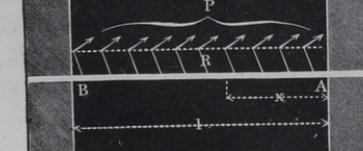
Die folgende Tafel enthält nun für eine Reihe von Angriffsarten der verdrehenden Kräfte an einem prismatischen Stab die Werthe für:

das Moment M an einer beliebigen Stelle (x) des Stabes,

die Tragkraft P nach Formel (15)

und den in Bogenmaass ausgedrückten Verdrehungswinkel ϑ des Stabes,

wobei mit PR das Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte bezeichnet ist. Ausserdem bedeutet beim Fall Nro. IV. S den Angriffschwerpunkt sämmtlicher dort den Stab auf Verdrehung beanspruchenden Kräfte, welche alle auf den Hebelarm R zurückgeführt sind; l_0 ist dabei der Abstand des Punktes S von der Befestigungsebene des Stabes.

Nro.	Angriffsweise.	Kraftmoment M .
I.		$M = PR$ <p>für alle Punkte zwischen A und B.</p>
II.		$M = PR \frac{x^2}{l}$
III.		$M = PR \frac{x^2}{l^2}$ <p>PR = dem Gesamtmoment der verdrehenden Kräfte.</p>
IV.		<p>M = Summe der innerhalb der Länge x angreifenden Momente.</p>
V.		<p>Im Stück c: $M = PR \frac{c_1}{l}$.</p> <p>Im Stück c_1: $M = PR \frac{c}{l}$.</p>
VI.		$M = PR \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{l} \right)$

Tragkraft P .	Verdrehungswinkel ϑ .	Bemerkungen.
$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{P R \cdot l}{J_p G} \\ &= \frac{\mathfrak{E} l}{G a} \end{aligned}$	Alle Querschnitte zwischen A und B sind gleich fest.
$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{2} \frac{P R \cdot l}{J_p G} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\mathfrak{E} l}{G a} \end{aligned}$	Gefährlicher Querschnitt bei B .
$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{3} \frac{P R \cdot l}{J_p G} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\mathfrak{E} l}{G a} \end{aligned}$	Die drehenden Kräfte sind gleichförmig abnehmend von B nach A vertheilt. Gefährlicher Querschnitt bei B .
$P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{P R \cdot l_0}{J_p G} \\ &= \frac{\mathfrak{E} l_0}{G a} \end{aligned}$	Allgemeine Form für die Fälle I., II. und III. Gefährlicher Querschnitt bei B . Der Werth von ϑ in III. wird aus dem in IV. erhalten, wenn man für l_0 den dort sich ergebenden Werth $\frac{l}{3}$ einsetzt u. s. w.
Wenn $c_1 < c$, so ist: $P = \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R} \frac{l}{c}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{P R c c_1}{J_p G l} \\ &= \frac{\mathfrak{E} c_1}{G a} \end{aligned}$	Gefährlicher Querschnitt im Stücke c_1 als im kürzeren Stücke.
$P = 2 \frac{\mathfrak{E} J_p}{a R}$	$\begin{aligned} \vartheta &= \frac{1}{8} \frac{P R \cdot l}{J_p G} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{E} l}{G a} \end{aligned}$	Gefährliche Querschnitte bei A und B .

§. 12.

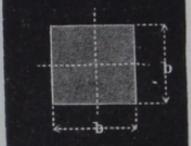
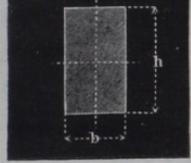
Polare Trägheitsmomente und Querschnittsmodell.

Das polare Trägheitsmoment J_p eines Querschnittes bestimmt sich leicht, indem man hat:

$$J_p = J_1 + J_2 \dots \dots \dots (17)$$

wenn J_1 und J_2 die Trägheitsmomente desselben Querschnittes zu zwei seiner, einander rechtwinklig schneidenden Schwerlinien bezeichnen, deren Werthe für eine Menge von Querschnitten aus Tabelle §. 7 bekannt sind. Man kann demnach den polaren Querschnittsmodul $\frac{J_p}{a} = Z_p$ leicht für die in der Praxis vorkommenden Fälle bestimmen. Eine Ausnahme machen indessen diejenigen Querschnitte, bei denen nicht $J_1 = J_2$, was z. B. bei Nro. III., VII., XII., XX., XXV. etc. §. 7 der Fall ist. Bei ihnen bedürfen die Ausdrücke J_p und $\frac{J_p}{a} = Z_p$ einer besonderen, durch weitläufige Rechnungen zu ermittelnden Correction, da bei denselben das Windschiefwerden der Querschnitte in Folge der Verdrehung einen stark bemerklichen Einfluss ausübt. Für das Rechteck, den einzigen für die Praxis wichtigen jener Querschnitte, sind in der folgenden kleinen Tabelle die corrigirten Werthe von J_p und $Z_p = \frac{J_p}{a}$ aufgeführt, während für Kreis und Quadrat die einer Correction nicht bedürftigen, aus (17) erhaltenen Werthe gegeben sind.

Beispiel. Ein cylindrischer schmiedeiserner Stab sei nach der An-
griffweise Nro. I. des vorigen Paragraphen von einer Kraft $P = 450^k$ an
einem Hebelarm $R = 600^{mm}$ ergriffen, und habe einen Durchmesser $d =$
 100^{mm} bei einer Länge $l = 1200^{mm}$. Dann ist die Spannung \mathcal{E} an seinem
Umfang: $\mathcal{E} = \frac{a}{J_p} P R = \frac{16}{\pi} \frac{270000}{100^3} = 1,38$, und der entstehende Ver-
drehungswinkel: $\vartheta = \frac{1,38 \cdot 1200}{8000 \cdot 50} = 0,00414$, was einem Winkel von $0^\circ 14'$
entspricht. Soll nun d verkleinert werden, so dass $\mathcal{E} =$ dem halben Trag-
modul für Verdrehung, d. i. $= \frac{1}{2} \frac{4}{5} \cdot 15 = 6$ wird, so ist zu nehmen:
 $d = \sqrt[3]{\frac{16}{\pi \mathcal{E}} P R} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 270000}{\pi \cdot 6}} = 61,2$ wofür wir setzen $d = 61^{mm}$.
Dann wird der Verdrehungswinkel: $\vartheta = \frac{6 \cdot 1200}{8000 \cdot 30,5} = 0,0294$, in Graden
 $1^\circ 40'$.

Nro.	Querschnitt.	Polares Trägheitsmoment J_p .	Polarer Querschnittmodul $Z_p = \frac{J_p}{a}$.
I.		$\frac{\pi}{32} d^4$	$\frac{\pi}{16} d^3$
II.		$\frac{b^4}{6}$	$\frac{b^3}{3 \sqrt{2}}$
III.		$\frac{1}{3} \frac{b^3 h^3}{b^2 + h^2}$	$\frac{b^2 h^2}{3 \sqrt{b^2 + h^2}}$ Annähernd: $\frac{b^2 h^2}{3 (0,4 b + 0,96 h)}$

§. 13.

Körper von gleicher Drehungsfestigkeit.

Um einen Körper von gleicher Drehungsfestigkeit zu erhalten, hat man dessen Querschnittsverhältnisse aus (14) zu entwickeln, indem man \mathcal{E} constant annimmt, also setzt:

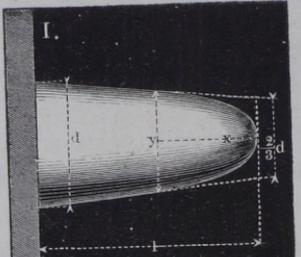
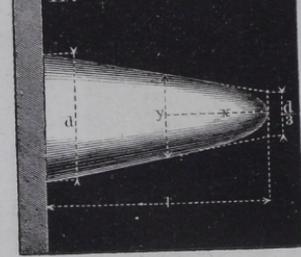
$$\frac{M a}{J_p} = \text{Const.} \dots \dots \dots (18)$$

Für den Fall I. in Tabelle §. 11 hat man $M = PR$ für alle Querschnitte: demnach sind diese dort nur alle gleich, d. h. den Körper prismatisch zu machen, um ihm überall dieselbe Festigkeit zu geben. Die Fälle II. und III. geben die in der nachfolgenden kleinen Tabelle zusammengestellten Formen. Der Verdrehungswinkel muss bei den Körpern von gleicher Festigkeit grösser sein,

als bei den prismatischen Stäben; er ist bei den beiden unten gegebenen Körpern mitgeteilt. Man erhält ihn aus der Formel:

$$\frac{d\vartheta}{dx} = \frac{M}{J_x G} \dots \dots \dots (19)$$

wobei J_x das polare Trägheitsmoment des Querschnittes am Punkte (x) bedeutet.

Form.	Angriffsweise.	Gleichung und Verdrehungswinkel.
	Fall Nro. II. §. 11.	<p style="text-align: center;">Kreisquerschnitt:</p> $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}; PR = \ominus \frac{\pi}{16} d^3;$ $\vartheta = 3 \frac{\ominus}{G} \frac{l}{d}.$ <p style="text-align: center;">Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem oberen Durchmesser $\frac{2}{3} d$.</p>
	Fall Nro. III. §. 11.	<p style="text-align: center;">Kreisquerschnitt:</p> $\frac{y}{d} = \sqrt[3]{\frac{x^3}{l^2}}; PR = \ominus \frac{\pi}{16} d^3;$ $\vartheta = 6 \frac{\ominus}{G} \frac{l}{d}.$ <p style="text-align: center;">Annäherungsform: Kegelstumpf mit dem oberen Durchmesser $\frac{d}{3}$.</p>

Ueber andere Körper von gleicher Drehungsfestigkeit siehe §. 18. S. 59.

§. 14.

Rückwirkende, Zerknickungs- oder Strebfestigkeit.

Ein prismatischer Stab wird auf rückwirkende, Zerknickungs- oder Strebfestigkeit, wie man sie auch nennen kann, beansprucht, wenn er in der Richtung seiner Längsachse zusammengedrückt wird und gleichzeitig seine Querschnittabmes-

sungen nicht gross im Verhältniss zu seiner Länge sind. Bei dieser Beanspruchung kommen Druck- und Biegungsfestigkeit gleichzeitig in Betracht, und zwar letztere in der Eigenthümlichkeit, dass nicht die Abscisse der elastischen Linie der Hebelarm der biegenden Kraft ist, wie bei der Biegungsfestigkeit, sondern die Ordinate dieser Curve. Daher rührt es, dass diejenige zusammendrückende Kraft P , welche überhaupt eine Biegung des Stabes hervorbringen kann, dieses bei jeder Grösse der Biegung vermag, also auch bis zum Bruch, vorausgesetzt, dass bis zu diesem die Gesetze der vollkommenen Elasticität Gültigkeit hätten. Dies aber angenommen, würde jene Kraft P die theoretische Tragkraft und theoretische Bruchkraft gleichzeitig sein, da ihr die Elasticitätskräfte des Stabes sowohl das Gleichgewicht zu halten vermögen, als diese Kräfte auch bei einmal eingetretener Bewegung des Lastpunktes von P überwunden werden können.

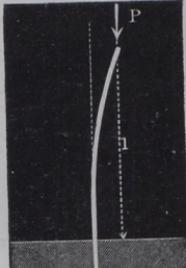
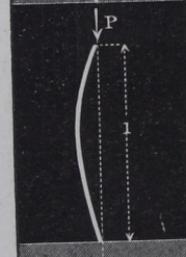
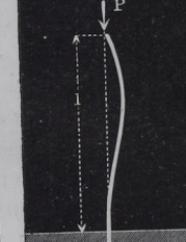
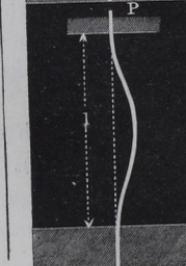
In der folgenden Tabelle sind für einige der wichtigsten Angriffarten der zusammendrückenden Kraft die Hauptformeln für die rückwirkende Festigkeit angegeben. Es bezeichnet in den Formeln:

E den Elasticitätsmodul des Materials des Stabes, welcher als prismatisch angesehen ist;

J das kleinste Trägheitsmoment seines Querschnittes, bezogen auf eine Schwerlinie, also z. B. beim Rechteck, von der kleineren Seite b , der grösseren h , nach §. 7 $\frac{hb^3}{12}$.

Zu den nachstehenden Angaben ist zunächst zu bemerken, dass die sehr schätzbaren Versuche von Hodgkinson in der Regel eine etwas kleinere Bruchkraft ergeben, als sie sich aus den obigen Formeln ergibt; dies thut aber dem Werth der letzteren keinen Eintrag, da diese nur für den vollkommen elastischen Körper aufgestellt sind, und deshalb richtig bleiben, wenn man als Belastung einen genügend kleinen Proportionaltheil der Bruchkraft P anwendet. Es kann empfohlen werden, bei Gusseisen $\frac{1}{6}$, bei Schmiedeeisen $\frac{1}{4}$, bei Holz $\frac{1}{12}$ der theoretischen Bruchkraft als obere Grenze der zulässigen Belastung zu betrachten.

Die Hodgkinson'schen Versuche haben ferner noch gezeigt, dass flach aufstehende Säulen sich ungefähr so verhalten, als ob sie an dem abgeflachten Ende eingeklemmt wären.

Nro.	Angriffsweise.	Theoretische Trag- und Bruchkraft.	Bemerkungen.
I.		$P = \frac{\pi^2 JE}{4 l^2}.$	<p>Freitragende Strebe. Das Ende B ist festgeklemmt; gefährlicher Querschnitt an der Befestigungsstelle.</p>
II.		$P = \pi^2 \frac{JE}{l^2}.$	<p>Lose Strebe. Beide Enden frei aufstehend und in der ursprünglichen Stabachse geführt. Gefährlicher Querschnitt in der Mitte.</p>
III.		$P = 2 \pi^2 \frac{JE}{l^2}.$	<p>Halbeingespannte Strebe. Das untere Ende festgeklemmt, das obere in der ursprünglichen Stabachse geführt.</p>
IV.		$P = 4 \pi^2 \frac{JE}{l^2}.$	<p>Eingespannte Strebe. Beide Enden festgeklemmt, und in der ursprünglichen Stabachse geführt. Gefährliche Querschnitte an den Enden und in der Mitte.</p>

Der Stab ist auf Druckfestigkeit zu berechnen, wenn:

beim Kreisquerschnitt $\frac{l}{d}$ kleiner als	beim Rechteckquerschnitt $\frac{l}{b}$ (b die kleinere Seite) kleiner als	und dabei das Material
5 12 6	$5\frac{3}{4}$ 14 8	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
10 24 $11\frac{1}{2}$	$11\frac{1}{2}$ 23 $13\frac{1}{2}$	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
14 33 16	16 33 19	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.
20 48 23	23 56 27	Gusseisen. Schmiedeeisen. Holz.

§. 15.

Körper von gleicher Strebfestigkeit.

Man erhält eine Körperform von gleicher rückwirkender oder Strebfestigkeit, wenn man die Querschnitte in einem der obigen Stäbe so vom gefährlichen Querschnitt aus abnehmen lässt, dass eine kleine eingetretene Biegung vorausgesetzt, die Maximalspannung in jedem Querschnitt denselben Werth erhält.

Für den Fall Nro. II. des vorigen Paragraphen kann man sich der folgenden Formel*) bedienen:

$$\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \left(\text{arc. sin. } \sqrt[3]{\frac{Z_x}{Z}} - \sqrt[3]{\frac{Z_x}{Z}} \sqrt{1 - \left(\frac{Z_x}{Z}\right)^{2/3}} \right) \quad (20)$$

wobei x und y die in der folgenden Figur eingeschriebenen Coordinaten, Z_x den Querschnittsmodul für die Stelle x , Z denselben für die Mitte des Stabes bezeichnet.

Sind die Querschnitte Kreise, so wird beim Durchmesser h des Querschnittes in der Mitte:

$$\sqrt[3]{\frac{Z_x}{Z}} = \frac{y}{h}$$

und:

$$\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{2}{\pi} \left(\text{arc. sin. } \frac{y}{h} - \frac{y}{h} \sqrt{1 - \left(\frac{y}{h}\right)^2} \right) \quad (21)$$

Uebersichtlicher gestaltet sich diese Formel, wenn man sie in eine Doppelgleichung auflöst, indem man setzt:

$$\frac{y}{h} = \sin. \varphi \quad \dots \dots \dots (22)$$

worauf man erhält:

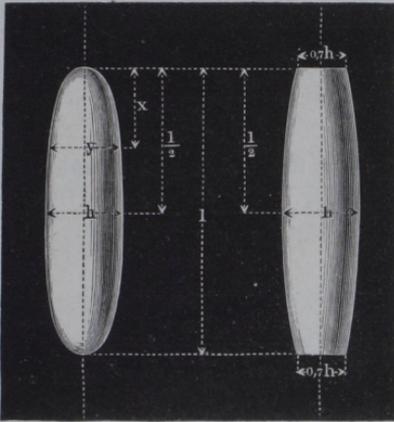
$$\frac{x}{\left(\frac{l}{2}\right)} = \frac{1}{\pi} (2\varphi - \sin. 2\varphi) \quad \dots \dots \dots (23)$$

Diese Gleichung gestattet unschwer ein graphisches Auffinden der Begrenzungscurve, deren Abscissengleichung (23) mit der

*) Von Redtenbacher.

jenigen einer Cycloide, und deren Ordinatengleichung (22) mit derjenigen einer Sinoide übereinstimmt und deshalb eine cycloidische Sinoide genannt werden kann. Eine Verzeichnungsmethode dieser Curve ist in Kap. XVIII. angegeben; die durch sie gelieferte Körperform wird angenähert durch die zweite der in Fig. 1 angegebenen Formen, bei welcher die Erzeugungslinie ein Kreisbogen (der Krümmungskreis für den Curvenpunkt bei $x = \frac{l}{2}$)

Fig. 1.



oder überhaupt eine schwach gekrümmte Linie ist. Eine solche Annäherung ist durchaus statthaft, da wirkliche Biegungen der Strebe doch nicht vorausgesetzt werden. Die vorstehende lose Strebe berechnet sich zu $\frac{3}{4}$ der Festigkeit einer cylindrischen von der gleichen Dicke h und Länge l .

§. 16.

Zusammengesetzte Festigkeit.

Vielfach kommt es vor, dass mehrere Kräfte zugleich die Festigkeit eines Körpers in verschiedener Art beanspruchen, so dass z. B. ein Querschnitt auf Zug und Biegung, auf Drehung und Biegung u. s. w. gleichzeitig angestrengt wird. Die Tragkraft oder die eintretende Maximalspannung sind dann anders zu bestimmen, als gewöhnlich. Für einige der am häufigsten vorkommenden und wichtigsten Fälle dieser sogenannten zusammengesetzten Festigkeit sind die Hauptformeln in der folgenden Tafel zusammengestellt. Es bezeichnet in derselben:

§ die grösste im gefährlichen Querschnitt eintretende Spannung,

Z den Querschnittmodul des gefährlichen Querschnittes, welcher durch B in den Figuren bezeichnet ist,

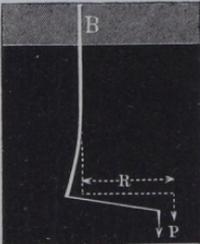
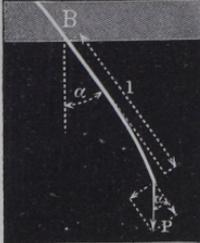
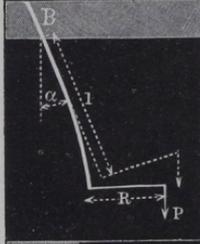
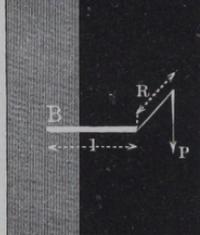
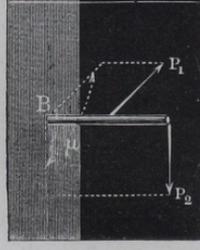
F den Flächeninhalt des Querschnittes,

J dessen Trägheitsmoment nach §. 7,

M_b ein biegendes, M_d ein verdrehendes Moment,

M_i ein ideelles Moment, und zwar insbesondere

$(M_b)_i$ ein ideelles biegendes, $(M_d)_i$ ein ideelles verdrehendes Moment.

Nro.	Angriffsweise.	Tragkraft.
I.		$P = \frac{\varepsilon F}{1 + R \frac{F}{Z}}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\varepsilon bh}{1 + 6 \frac{R}{h}}$
II.		$P = \frac{\varepsilon F}{\cos a + \frac{F}{Z} l \sin a}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\varepsilon bh}{\cos a + 6 \frac{l}{h} \sin a}$
III.		$P = \frac{\varepsilon F}{\cos a + \frac{F}{Z} (l \sin a + R \cos a)}$ <p>Beim Rechteckquerschnitt (bh)</p> $P = \frac{\varepsilon bh}{\cos a + 6 \frac{l}{h} (\sin a + \frac{R}{l} \cos a)}$
IV.		$P = \frac{\varepsilon Z}{\frac{3}{8} l + \frac{5}{8} \sqrt{l^2 + R^2}}$ <p>Pl ist ein biegendes Moment M_1, PR ein verdrehendes Moment M_2.</p>
V.		$l = \frac{\varepsilon Z}{\sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2M_1 M_2 \cos \mu}}$ <p>wobei M_1 das (biegende) Moment von P_1, M_2 dasjenige von P_2 be- zeichnet.</p>

Ideelle Momente.

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(R + \frac{Z}{F} \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt (bh):	Beim Rechteckquerschnitt (bh):
$(M_b)_i = P \left(R + \frac{d}{8} \right)$	$(M_b)_i = P \left(R + \frac{h}{8} \right)$	$(M_b)_i = P R + \frac{h}{6}$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt (bh):	Beim Rechteckquerschnitt (bh):
$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i = P \left(l \sin \alpha + \frac{h}{6} \right) \cos \alpha$

Ideelles biegendes Moment $(M_b)_i$ f. d. Spann. \mathcal{E} : $(M_b)_i = P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{Z}{F} \cos \alpha \right)$.

Beim Kreisquerschnitt (d):	Beim Ellipsenquerschnitt (bh):	Beim Rechteckquerschnitt (bh):
$(M_b)_i =$ $P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{d}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i =$ $P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{8} \cos \alpha \right)$	$(M_b)_i =$ $P \left(R \cos \alpha + l \sin \alpha + \frac{h}{6} \cos \alpha \right)$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_b)_i = \frac{3}{8} M_b + \frac{5}{8} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ideelles verdrehendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_d)_i = \frac{3}{4} M_b + \frac{5}{4} \sqrt{M_b^2 + M_d^2}$$

Ideelles biegendes Moment für die Spannung \mathcal{E} :

$$(M_b)_i = \sqrt{M_1^2 + M_2^2 + 2 M_1 M_2 \cos \mu}$$

In den Fällen IV. und V. ist vorausgesetzt, dass der Querschnitt des Stabes zu denjenigen gehöre, welche durch zwei rechtwinklige Schwerlinien in vier congruente Stücke getheilt werden.

Eine Betrachtung dieser Formeln zeigt, dass man manchmal die zusammengesetzte Beanspruchung wohl beachten muss. Wenn z. B. im Fall I. $R = \frac{h}{2}$ ist, d. h. die an einer Stange aufgehängte Last am Rand des Querschnittes ihren Schwerpunkt hat, so ist $P = \frac{\mathfrak{E}bh}{4}$, also die Tragkraft nur $\frac{1}{4}$ so gross, als bei einer genau centralen Aufhängung. Ist der Querschnitt ein Kreis (d), so

wird $P = \frac{\mathfrak{E} \frac{\pi}{4} d^2}{1 + 8 \frac{R}{d}}$, d. i. wenn wieder die Last am Rande an-

gebracht, also $R = \frac{d}{2}$ gemacht wird, $P = \frac{\mathfrak{E}}{5} \frac{\pi}{4} d^2$, die Tragkraft ist also noch kleiner als beim Rechteckquerschnitt. Die Fälle I. und II. leiten sich aus III. ab, indem man dort beziehlich α oder $R = 0$ setzt.

Eine besondere Brauchbarkeit haben namentlich für den aufmerksamen Rechner die angegebenen ideellen Momente. Es ist zu beachten, dass beim Ellipsen- und dem Rechteckquerschnitte h als in der Biegungsebene liegend angenommen ist. Kennt man diese Dimension im voraus, was bei Annahme des Profils eines zu konstruirenden Trägers sehr häufig der Fall ist, so lässt sich mit Hilfe der ideellen Momente die zusammengesetzte Festigkeit leicht in Betracht ziehen, indem der in der Klammer zur Rechten enthaltene Ausdruck den Hebelarm der gegebenen Kraft P für das ideelle Moment angibt. Derselbe ist meistens, namentlich graphisch, sehr leicht zu bestimmen, und man kann alsdann gerade so wie bei einer gewöhnlichen Biegungsbeanspruchung rechnen. Ist z. B. im Falle II. bei $\alpha = 45$, also $\cos \alpha = \sin \alpha = 0,707$ die Rechteckhöhe h gewählt, so ist der Querschnitt bei B so zu berechnen, als griffe eine biegende Kraft P an dem Arme $0,707l$ (der Projection von l auf die Befestigungsebene) $+ 0,707 \frac{h}{6}$ an. Im Falle I. erhält

man bei $R = 0$ für den Kreisquerschnitt $(M_b)_i = P \frac{d}{8}$, was gleichzusetzen ist $\mathfrak{E} \frac{\pi}{32} d^3$; dies giebt $P = \mathfrak{E} \frac{\pi}{4} d^2$, wie kommen muss, weil bei $R = 0$ der Stab nur auf Zugfestigkeit beansprucht ist. $\frac{d}{8}$ ist danach also der Hebelarm, an welchem angreifend eine biegende Kraft P den Stab ebenso stark beansprucht, als eine in

der Achsenrichtung ziehende von gleicher Grösse. Dies gilt allerdings strenggenommen nur unter Vernachlässigung der Schubspannungen bei Berechnung der Biegung. — Viele nützliche Anwendungen finden auch die Formeln der Fälle IV. und V. (s. Kap. VII.).

§. 17.

Festigkeit der Gefässwände.

Zur Beurtheilung der Festigkeit runder Gefässe können die in folgender Tabelle zusammengestellten Werthe, welche sich auf die wichtigsten Fälle der Maschinenpraxis beziehen, gebraucht werden. Die Theorie der Gefässfestigkeit ist zwar als noch lange nicht abgeschlossen zu betrachten; jedoch weichen die von verschiedenen Ausgangspunkten erzielten Resultate wenigstens in den mittleren Fällen nicht so viel von einander ab, dass etwa die folgenden Formeln als unzuverlässig zu bezeichnen wären. Sehr unsicher erscheint bis dahin die Theorie des von aussen gepressten Cylinders, weshalb die bezüglichen Formeln weggelassen wurden. In den umstehenden Ausdrücken bezeichnet:

p den auf die Gefässwand wirkenden Flächendruck (nach Abzug des gegenseitigen),

\mathfrak{S} die im Material der Wand eintretende Maximalspannung,

E den Elasticitätsmodul des Materials,

r und δ Gefässhalbmesser und -Wanddicke.

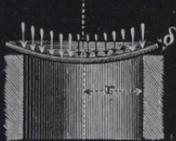
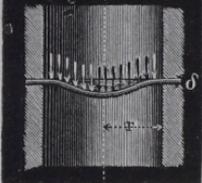
Die Formeln unter (I.) und (II.) haben eine bis zur Bruchgrenze gehende Gültigkeit, immerhin aber als Annäherungswerthe.

1. *Beispiel.* Für ein schmiedeisernes cylindrisches Gefäss von 1000^{mm} Durchmesser und 10^{mm} Wanddicke sei eine Materialspannung $\mathfrak{S} = 8$ gestattet. Dann kann dasselbe nach (I.) einer inneren Ueberdruckspannung

$p = 8 \left(\sqrt{\frac{520}{500}} - 1 \right) = 8 \cdot 0,0198 = 0,158^k$ pro \square Millimeter ausgesetzt werden. In Atmosphären ausgedrückt beträgt dies $100 \cdot 0,158 = 15,8$ Atm. Das Gefäss würde zerspringen (wegen $K = 40$), wenn die innere Spannung etwa das 5fache oder 79 Atmosphären betrüge.

2. *Beispiel.* Ein kugelförmiges Gefäss von den genannten Angaben würde nach (II.) für $\mathfrak{S} = 8$ einer Spannung $p = \frac{16 \cdot 10}{500} = 0,32^k$ pro \square^{mm} , d. i. einem Drucke von 32 Atmosphären auszusetzen sein.

3. *Beispiel.* Ein dem ersten Gefässe angenieteteter ebener schmiedeiserner Boden würde nach (IV.) bei $\mathfrak{S} = 8$ folgende grosse Dicke δ haben müssen: $\delta = 500 \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt{\frac{0,158}{8}} = 500 \cdot 0,816 \cdot 0,14 = 57,12 \sim 57^{mm}$.

Nro.	Angriffsweise.	Tragkraft p .	Wanddicke δ .
I. Cylinder.		$p = \mathfrak{E} \left(\sqrt{1 + \frac{2\delta}{r}} - 1 \right) \quad \frac{\delta}{r} = \frac{p}{\mathfrak{E}} \left(1 + \frac{p}{2\mathfrak{E}} \right)$	
II. Kugel.		$p = 2 \mathfrak{E} \frac{\delta}{r}$	$\frac{\delta}{r} = \frac{p}{2\mathfrak{E}}$
III. Runde Platte.		$p = \mathfrak{E} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{p}{\mathfrak{E}}}$
IV. Runde Platte.		$p = \frac{3}{2} \mathfrak{E} \left(\frac{\delta}{r} \right)^2$	$\frac{\delta}{r} = \sqrt{\frac{2}{3}} \sqrt{\frac{p}{\mathfrak{E}}}$

Die Einbiegung f , welche die ebene runde Platte erfährt, lässt sich nach Grashof für den Fall III. berechnen aus:

$$\frac{f}{\delta} = \frac{5}{6} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E} \quad \dots \quad (24)$$

und für den Fall IV:

$$\frac{f}{\delta} = \frac{1}{6} \left(\frac{r}{\delta} \right)^4 \frac{p}{E} \quad \dots \quad (25)$$

4. Beispiel. Die in Beispiel 3. berechnete Platte würde sich hiernach wegen $E = 20000$ einbiegen um $f = \frac{57}{6} \cdot \left(\frac{500}{57} \right)^4 \cdot \frac{0,158}{20000} = 0,44 \text{ mm}$.

§. 18.

Berechnung der Federn*).

Die Constructionsmaterialien des Maschinenbauers sind alle mehr oder weniger elastisch nachgiebig, so dass sie äusseren Kräften nur unter Eingeheug einer Formänderung zu widerstehen vermögen, welche bei richtig gewählten Abmessungen nach Aufhören der äusseren Kraftwirkung wieder verschwindet. Diese Formänderung — Ausdehnung, Kürzung, Biegung, Verdrehung — sucht man gewöhnlich behufs möglicher Annäherung an die Starrheit der constructiven Systeme so viel als thunlich einzuschränken. Bei den Federn jedoch zieht man Vorthail aus derselben, indem man die elastische Nachgiebigkeit von übrigens widerstandsfähigen Systemen zur Aufnahme von Stosswirkungen (Buffer, Wagenfedern), zum Hervorbringen von Bewegungen (Uhren), zum Bilden weicher und doch haltbarer Unterlagen (Polster) verwerthet. Zu Federn eignen sich deshalb vor allem solche körperliche Systeme, welche innerhalb der Elasticitätsgrenzen verhältnissmässig grosse Formänderungen erleiden können, was sich nach deren Festigkeitseigenschaften beurtheilen lässt. Ihre Theorie findet deshalb hier einen passenden Platz.

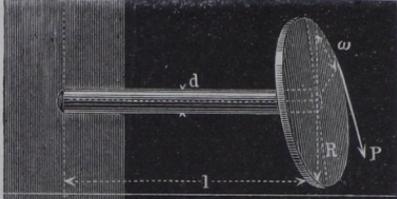
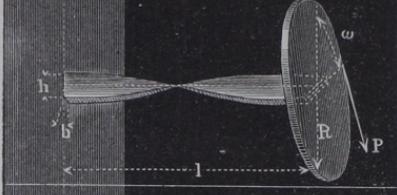
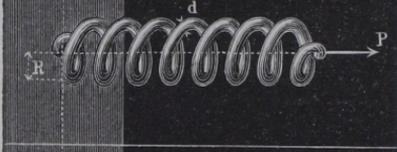
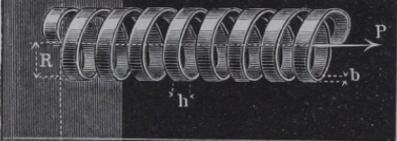
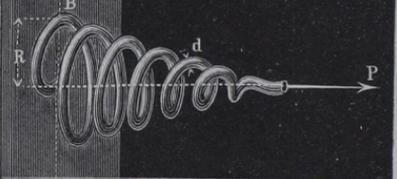
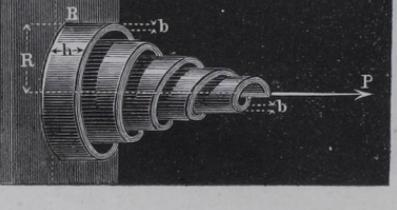
Beanspruchungen auf Zug- und Druckfestigkeit sind nur bei ganz besonders dehn- und pressbaren Stoffen, wie z. B. beim Kautschuck, zur Federbildung dienlich; bei den steiferen Materialien, den Hölzern und namentlich den Metallen, eignen sich vorwiegend nur die Biegungs- und die Drehungsfestigkeit. Indem der Kautschuck, als bislang zu wenig experimentell untersucht, hier unbeachtet bleibt, sind in der folgenden Tabelle die wichtigsten Biegungs- und Torsionsfedern zusammengestellt.

Neben grosser Aenderbarkeit der Form tritt als zweite wesentliche Eigenschaft der Federn der geringe Materialverbrauch, mit welchem die Raumbeanspruchung zusammenhängt, in den Vordergrund. Der Materialverbrauch wurde deshalb in der Zusammenstellung berücksichtigt, indem derselbe, gleiche Belastung und Verschiebung des Kraftangriffpunktes bei sämtlichen Federn vorausgesetzt, in der vorletzten Spalte angegeben ist. Das Volumen der Dreieckfeder ist dabei als Einheit angenommen.

*) Vergl. des Verfassers „Construction und Berechnung der wichtigsten Federarten“. Winterthur, Wurster et Comp., 1857.

Nro.	Form.	Benennung.	Tragkraft.
I.		Rechteckfeder. Cubisch parabolisch zugschärft.	$P = \frac{\mathcal{E}}{6} \frac{bh^2}{l}$
II.		Einfache Dreieckfeder.	$P = \frac{\mathcal{E}}{6} \frac{bh^2}{l}$
III.		Zusammengesetzte oder geschichtete Dreieckfeder.	$P = \frac{\mathcal{E}}{6} \frac{ibh^2}{l}$ <i>i</i> die Blätterzahl.
IV.		Spiralfeder, flachdrähtig.	$P = \frac{\mathcal{E}}{6} \frac{bh^2}{R}$
V.		Drehschraubenfeder, flachdrähtig.	$P = \frac{\mathcal{E}}{6} \frac{bh^2}{R}$
VI.		Drehschraubenfeder, runddrähtig.	$P = \frac{\mathcal{E}\pi}{32} \frac{d^3}{R}$

Federung.	Biegsamkeit.	Körperinhalt.	Bemerkungen.
$f = 6 \frac{Pl^3}{Eb h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	$\frac{3}{2}$	<p>In der Ausführung statt $\frac{y}{h} = \sqrt[3]{\frac{x}{l}}$ anzunähern durch ein Trapezprofil mit der Endhöhe $\frac{2}{3}h$.</p>
$f = 6 \frac{Pl^3}{Eb h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	<p>1</p>	<p>Körper von gleicher Biegsfestigkeit; in der Ausführung ist das freie Ende mit einer Verstärkung zu versehen.</p>
$f = 6 \frac{Pl^3}{Ei b h^3}$	$\frac{f}{l} = \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	<p>1</p>	<p>Verhält sich so, wie eine einfache Dreieckfeder von der Basisbreite ib (s. die Punktirung), und kann durch Zerschneidung und Schichtung einer solchen entstanden gedacht werden.</p>
$f = R\omega = 12 \frac{PlR^2}{Eb h^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	<p>1</p>	<p>l die Länge des gestreckt gedachten Federblattes.</p>
$f = R\omega = 12 \frac{PlR^2}{Eb h^3}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{h}$	<p>1</p>	<p>Alle drei Formen sind Körperformen von gleicher Biegsfestigkeit. Der Werth $\frac{f}{R}$ ist der Winkel ω der Verdrehung, welche die</p>
$f = R\omega = \frac{64}{\pi} \frac{PlR^2}{E d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathfrak{S}}{E} \frac{l}{d}$	<p>$\frac{4}{3}$</p>	<p>Belastung P hervorbringt.</p>

Nro.	Form.	Benennung.	Tragkraft.
VII.		Einfache Torsionsfeder, runddrätig.	$P = \approx \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
VIII.		Einfache Torsionsfeder, flachdrätig.	$P = \approx \frac{b^2 h^2}{3R \sqrt{b^2 + h^2}}$ <p>Annähernd ($h > b$)</p> $P = \approx \frac{b^2 h^2}{R \cdot 3(0,4b + 0,96h)}$
IX.		(Cylindrische) Schraubenfeder, runddrätig.	$P = \approx \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
X.		(Cylindrische) Schraubenfeder, flachdrätig.	$P = \approx \frac{b^2 h^2}{3R \sqrt{b^2 + h^2}}$ <p>Annähernd ($h > b$)</p> $P = \approx \frac{b^2 h^2}{R \cdot 3(0,4b + 0,96h)}$
XI.		Kegelschraubenfeder oder Kegelfeder, runddrätig.	$P = \approx \frac{\pi}{16} \frac{d^3}{R}$
XII.		Kegelfeder, flachdrätig.	$P = \approx \frac{b^2 h^2}{3R \sqrt{b^2 + h^2}}$ <p>Annähernd ($h > b$)</p> $P = \approx \frac{b^2 h^2}{R \cdot 3(0,4b + 0,96h)}$

Federung.	Biegsamkeit.	Körper- inhalt.	Bemerkungen.
$f = R\omega = \frac{32}{\pi} \frac{P}{G} \frac{R^2 l}{d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{4}{15}$	In den Fällen VII. bis X. ist die Feder ein Körper von gleicher Torsionsfestigkeit.
$f = R\omega = 3 \frac{PR^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{2}{5}$	Federn nach VII. und VIII. eignen sich auch zur Bildung von zusammengesetzten oder Bündelfedern.
$f = \frac{32}{\pi} \frac{PR^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = 2 \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{4}{15}$	In den Fällen IX. bis XII. ist l immer die Länge des gestreckt gedachten Drahtes.
$f = 3 \frac{PR^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{2}{6}$	Es ist gleichgültig, ob die grössere Querschnittsseite parallel, normal oder schief zur Achse steht.
Annähernd: $f = \frac{16}{\pi} \frac{PR^2 l}{G d^4}$	$\frac{f}{R} = \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l}{d}$	$\frac{8}{15}$	Hier wie in XII. ist die Feder bis zur Kegelspitze ausgeführt angenommen; in beiden Fällen gefährlicher Querschnitt bei B.
Annähernd: $f = \frac{3}{2} \frac{PR^2 l}{G} \frac{b^2 + h^2}{b^3 h^3}$	$\frac{f}{R} = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{S}}{G} \frac{l \sqrt{b^2 + h^2}}{bh}$	$\frac{4}{5}$	Lässt sich durch allmähliche Verkleinerung der Querschnittshöhe h von B aus nach oben zu einem Körper von gleicher Festigkeit machen.

In den Formeln der vorstehenden Tabelle bezeichnet immer:

E den Elasticitätsmodul,

G den Drehungsmodul des Materials der Feder, welcher
(s. §. 11) $= \frac{2}{5} E$ ist.

Die Festigkeitscoefficienten für die Materialien der Federn sind in §. 2 angegeben. Die Formeln behalten ihre Geltung, wenn die Richtung der Kraft P der in den Figuren angedeuteten entgegengesetzt wird. In allen angeführten Fällen ist das Volumen V der Feder zu erhalten aus dem Ausdrucke:

$$V = C. (P.f.) \frac{E}{\mathfrak{E}^2} \dots \dots \dots (26)$$

wobei C eine von der Federform abhängige Constante bezeichnet, und $(P.f)$ das Product aus Belastung und Federung oder die sogenannte Federungsarbeit ist. Dies hat die interessante Bedeutung, dass Federn von gleicher Grundform und gleichem Material bei gleicher Sicherheit für dieselbe Federungsarbeit Pf immer gleich schwer ausfallen, wie man auch die Länge l oder überhaupt die frei zu wählenden Abmessungen macht. Der Quotient $\frac{E}{\mathfrak{E}^2}$

zeigt, dass ein kleiner Elasticitätsmodul, namentlich aber ein hoher Tragmodul günstig für das Material der Federn ist. Man erhält nach Tabelle §. 2 für:

Gussstahl, gehärtet und angelassen	$\frac{E}{T^2} = \frac{30000}{65^2} =$	7,10
Gewöhnlicher Stahl (ungehärtet) . . .	$= \frac{20000}{25^2} =$	32,00
Messing	$= \frac{6500}{4,8^2} =$	28,21
Holz	$= \frac{1100}{2^2} =$	277,00

Der gehärtete und angelassene Gussstahl ist hiernach auch theoretisch weitaus das beste Federmaterial.

Bemerkenswerth ist noch für die sämtlichen aufgeführten Federn, dass bei ihnen die Federung oder Verschiebung des Kraftangriffpunktes proportional der Belastung ist.

Dieser Umstand hat zur Folge, dass die Schwingungen, welche die belastete Feder macht, in die Klasse der „einfachen“ oder „pendelartigen“ Schwingungen fallen, und eine leicht zu berechnende Dauer haben. Bei Vernachlässigung des Federgewichtes schwingt nämlich jede der obigen Federn bei

der Belastung P wie ein einfaches (mathematisches) Pendel von der Länge f^*), so dass die Zeit t einer einfachen Schwingung (eines Hinganges oder eines Herganges) ist:

$$t = \pi \sqrt{\frac{f}{g}} \dots \dots \dots (27)$$

wobei g die Beschleunigung der Schwere = $9,81^m = 31,25$ preuss. Fuss, für unsere gewöhnliche Rechnung in Millimetern 9810^{mm} ist

Beispiele zur Theorie der Federn. 1. Zu berechnen eine einfache Dreieckfeder nach Nro. II. für eine Last $P = 50^k$ und eine Federung $f = 20^{mm}$. Wir wählen als Material Gussstahl mit $E = 30000$ und setzen $\mathfrak{S} = 40^k$; nehmen hierauf die Länge l der Feder zu 400^{mm} an, und haben nun nach Spalte 6: $\frac{20}{400} = \frac{40}{30000} \cdot \frac{400}{h}$, woraus $h = \frac{40 \cdot 400 \cdot 400}{20 \cdot 30000} = 10\frac{2}{3}^{mm}$. Nun wird nach Spalte 4: $50 = \frac{40}{6} \frac{b \cdot 32^2}{400 \cdot 3^2}$, oder $b = 26,36^{mm} \sim 26,5^{mm}$. Das Volumen V wird $= \frac{bhl}{2} = \frac{26,5 \cdot 32 \cdot 400}{3 \cdot 2} = 56533$ Cub.-Millimeter.

2. Beispiel. Machen wir unter Beibehaltung des Materials $l = 300$, so wird $h = \frac{40 \cdot 300 \cdot 300}{20 \cdot 30000} = 6^{mm}$, $b = \frac{6 \cdot 300 \cdot 50}{40 \cdot 36} = 62,5^{mm}$; das Volumen also: $V = \frac{bhl}{2} = \frac{62,5 \cdot 6 \cdot 300}{2} = 56250$ Cubikmillimeter, d. i. abgesehen von dem durch die Abrundungen entstandenen Unterschiede, soviel wie vorher, wie es der Bemerkung zu Formel (26) entspricht.

3. Beispiel. Die vorige Feder sei durch eine cylindrische Schraubenfeder nach Nro. IX., die aus demselben Gussstahl gemacht werden soll, zu ersetzen. Wählen wir die Drahtdicke $d = 6^{mm}$, so kommt nach Spalte 4 Nro. IX.: $50 = \frac{40}{16} \pi \frac{6^3}{R}$, woraus $R = \frac{\pi \cdot 216}{20} = 32,36 \sim 32^{mm}$ folgt. Nach Spalte 6 ist nun zu nehmen die Drahtlänge $l = \frac{6 \cdot 20 \cdot 0,4 \cdot 30000}{32 \cdot 2 \cdot 40} = \frac{9000}{16} = 562,5$. Dies liefert eine Gewindefzahl $i = \frac{l}{2 \pi R} = \frac{562,5}{2 \cdot \pi \cdot 32} = 2,79 \sim 3^{mm}$. Wollte man mehr Windungen erhalten, so müsste man d kleiner angenommen haben. Das Volumen V_1 der Feder wird: $V_1 = l \cdot \frac{\pi}{4} d^2 = 562,5 \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 36 = 1588,5$ Cubikmillimeter. Dies Volumen mit dem oben gefundenen verglichen, liefert $\frac{V_1}{V} = \frac{1588,5}{56250} = \frac{1}{3541} = \frac{4}{14164}$, also sehr nahe $\frac{4}{15}$, wie nach Spalte 7 Nro. IX hätte kommen müssen, wenn nicht die Abrundungen stattgefunden hätten.

*) Siehe u. a. Eisenlohr's Physik, 6. Aufl. Stuttgart 1857, S. 57.