# Anhang.

## §. 1.

## Ueber die Kegelschnittslinien.

Um das Studium der darstellenden Geometrie zu beginnen, sind strenge genommen keine weiteren Vorkenntnisse erfoderlich, als die der Elementargeometrie. Allein als Beyspiele der krummen Flächen, die man in der darstellenden Geometrie betrachtet, wählt man diejenigen, welch durch ihre Einfachheit und ihre Regelmäßigkeit eine häufige Anwendung in den mechanischen Künsten finden. Es sind dieses diejenigen Flächen, welche die einfachsten Erzeugungslinien haben, nemlich die gerade Linie, der Kreis, die Kegelschnitte und wenige andere. Man muß daher ehe man die darstellende Geometrie zu betreiben anfängt, diese Linien konstruiren und einzeln, oder in Verbindung auf ihnen arbeiten können. Da man aber die Kegelschnitte in der Elementargeometrie gewöhnlich nicht vorträgt, so soll hier die Konstruktion derselben, und die wichtigsten dahin bezüglichen Aufgaben vorgetragen werden.

### Die Ellipse.

Die Ellipse (Fig. 1. Taf. XLIV.) ist eine geschlossene in sich selbst zurücklaufende Linie von länglicht runder Form. Sie hat einen Mittelpunkt O, das heißt einen Punkt, welcher jede durch denselben gezogene und an dem Umfange beendigte gerade Linie, wie *l* O *m* in zwey gleiche Theile theilt. Eine solche Gerade *l* O *m* heißt ein Durchmesser der Ellipse und sie theilt die Linie selbst in zwey gleiche Theile, die einander decken, wenn man nemlich den Durchmesser sich so umgekehrt denkt, daß ein Ende desselben an die Stelle des andern tritt.

Die Durchmesser einer Ellipse sind alle von ungleicher Größe; den größten von ihnen A B nennt man die große Axe; der auf diesem senkrechten Durchmesser C D ist der kleinste, und heißt die kleine Axe. Jede der beyden Axen A B, C D theilt die Ellipse in zwey gleiche und symetrische Theile, nemlich jede mit einer Axe parallele Sehne wie G H wird durch die andere Axe in zwey gleiche Theile getheilt. Die vier Begegnungspunkte A, B, C, D der Axen mit dem Umfange der Ellipse heißen die Scheitel der Linie.

Wenn man den Mittelpunkt der Ellipse als Mittelpunkt eines Kreises nimmt, der die große Axe als Durchmesser hat, und man verlängert C O und die damit parallele G P bis an den Kreis nach C′, G′, so hat man immer C′ O : G′ P :: C O : G P, das heißt die Senkrechte

G P ist eine vierte Proportionale zu den Geraden C′ O, G′ P und C O. Die analoge Proportion findet statt, wenn man die kleine Axe als Durchmesser des konzentrischen Kreises nähme.

Nimmt man dieses Gesetz als die Erklärung der Ellipse, so läßt sich beweisen, daß dasselbe bey jeder Projektion eines Kreises statt finde, oder mit andern Worten, daß jede Projektion eines Kreises auf einer mit demselben nicht parallelen Ebene eine Ellipse ist.

In der That, nehmen wir an, der Kreis A C′ B D′ habe sich um A B gedreht, bis seine Ebene mit ihrer ursprünglichen Lage einen Winkel gleich *c* O C macht, wobey *c* C senkrecht auf C O ist. Sucht man die Projektion des Kreises nach seiner neuen Stellung, so erhält man C als die Projektion des Punktes C′; G als die Projektion des Punktes G′, wobey *g* P = G′ P und der Winkel *g* P G = *c* O C, und so weiter fort, und man hat daher wegen der Aehnlichkeit der Dreyecke *c* O C, *g* P G bey allen Punkten der Projektion des Kreises wiederum dieselbe Proportion wie oben und folglich auch dieselbe Linie.

Wenn man auf der großen Axe A B einer Ellipse (Fig 2) zwey Punkte F und F′ nimmt, deren Entfernungen von den Enden C und D der kleinen Axe gleich der Hälfte der großen Axe ist, so haben diese Punkte die merkwürdige Eigenschaft, daß die Summe der Abstände eines jeden Punktes *m* von diesen zwey Punkten gleich der großen Axe ist; nemlich F *m* + F′ *m* = A B. F und F′ heißen die Brennpunkte der Ellipse und jede Gerade wie F *m* oder F′ *m* ein Leitstrahl. Es ist aus dem Gesagten ersichtlich, daß ein Kreis als eine Ellipse betrachtet werden könne, deren Axen gleich sind, oder deren Mittelpunkt und Brennpunkte in eines zusammenfallen.

## Beschreibung der Ellipse.

1te Art. Wenn die beyden Axen gegeben sind, suche man wie angegeben, die beyden Brennpunkte F, F′ (Fig. 2). Zwischen dem Mittelpunkte O und einem Brennpunkte F nehme man auf der großen Axe A B einem Punkt Y; aus jedem Brennpunkte als Mittelpunkt, und mit Y B als Halbmesser beschreibe man in *m*, *n*, *o*, *p* vier Kreisbögen. Aus jedem Brennpunkte beschreibe man hierauf mit dem noch übrigen Stück der großen Axe A Y vier neue Bögen, welche die ersten im *m*, *n*, *o*, *p* schneiden, so liegen diese Durchschnittspunkte auf dem Umfange der Ellipse. Durch die Veränderung des Punktes Y erhält man eine neue Abtheilung der großen Axe, und wenn man mit diesen Theilen eben so verfährt, erhält man vier neue Puukte des Umfanges, und so weiter fort. Die gefundenen Punkte sind nun durch einen freyen Zug zusammen zu hängen. Diese Zeichnungsart ist die einfachste und genaueste.

2te Art. Es seyen A B, C D Fig. 3 die zwey Axen. An dem Endpunkte der einen von beyden ziehe man unter beliebigem Winkel eine Gerade A B′ gleich der andern Axe und über dieser Geraden als Durchmesser beschreibe man einen Halbkreis A D′ B. Auf A B′ nehme man eine beliebige Zahl von Punkten *m*, *n*, *o*....; durch jedem ziehe man auf B eine Senkrechre *l r*, *m s*... und mit B B′ eine Parallele *l* L, *m* M. Wo diese letzteren die Axe A B treffen, ziehe man mit der zweyten Axe die Parallelen L R, L R′, M S, M S′...., trage sodann auf einer jeden die entsprechende halbe Sehne *l r*, *m s*.... auf, so gehören die Punkte R, S.. R′, S′... dem Umfange der Ellipse an.

Hat man in einem Kreise zwey unter sich senkrechte Durchmesser, so schneidet ein jeder von ihnen alle zu dem andern parallelen Sehnen in ihren Mitten. Bey der Projektion dieses Kreises auf einer Ebene werden diese Durchmesser, Durchmesser der Ellipse, die jedoch im Allgemeinen nicht mehr senkrecht unter sich sind; aber jeder von diesen Durchmessern theilt abermals die Projektionen aller zu dem andern parallelen Sehnen, welche nun Sehnen der Ellipse sind, in zwey gleiche Theile; und die Durchmesser der Ellipse heißen deßhalb zusammengehörig.

Sind statt der zwey Axen zwey zusammengehörige Durchmesser einer Ellipse gegeben, so verfährt man bey der Verzeichnung der Ellipse ebenfalls wie oben angegeben. Die Figur 4 ist nach dieser Annahme gezeichnet, und die gleichnamigen Linien mit der Figur 3 auf gleiche Weise bezeichnet. *) Als zusammengehörige Durchmesser einer Ellipse kann man je zwey Geraden nehmen, die sich gegenseitig halbiren.

3te Art. Wenn die beyden Axen gegeben sind. Fig. 5. Man schneide einen Streifen Papier Y auf einer Seite nach gerader Linie, und bemerke auf dem Rande zu beyden Seiten eines beliebigen Punkts $a$ die Länge $a\,c$ der halben keinen Axe, die Länge $a\,b$ der halben großen. In jeder Stellung des Papierstreifens, wo der Punkt $c$ auf der großen Axe oder deren Verlängerung liegt, und der Punkt $b$ auf der kleinen, gehört der Punkt $a$ dem Umfange der Ellipse an. Hätte man auf dem Papierstreifen Z die halbe kleine Axe von $a'$ aus nach $c'$ und die halbe große Axe auf der nemlichen Seite nach $b'$ getragen, so würde man abermals auf die ähnliche Art arbeiten, wie aus der Figur 5 ersichtlich ist.

Wir begnügen uns diese Konstruktion angeführt zu haben, ohne die Beweise dazu beyzubringen.

## Von den Tangenten der Ellipse.

1tens. Eine Tangente zu der Ellipse zu ziehen, wenn der Berührungspunkt gegeben ist. Fig. 2. Es sey $m$ der gegebene Berührungspunkt. Man ziehe die beyden Leitstrahlen $m\,F$, $m\,F'$ verlängere einen derselben nach G und halbire den Winkel $F'\,m\,G$, so ist die Halbirungslinie $m\,P$ die verlangte Tangente. Daß diese Lienie $m\,P$, welche mit beyden Leitstrahlen gleiche Winkel macht, wirklich Tangente sey, läßt sich auf folgende Art erweisen. Von einem beliebigen Punkt P der $m\,P$ ziehe man $P\,F$, $P\,F'$; mache $P\,G = P\,F$, so ist $F\,P + F'\,P = F'\,P + P\,G$ größer als $F'\,G$, oder größer als $F'\,m + m\,F$, daher liegt der Punkt P der $m\,P$ außerhalb der Ellipse, und folglich kann die $m\,P$ die Ellipse nur in $m$ berühren.

2tens. Wenn der Punkt, durch welchen die Tangente gehen soll, außerhalb der Linie gegeben ist Fig. 2. Es sey P dieser gegebene Punkt. Aus P als Mittelpunkt und mit $F\,P$ als Halbmesser beschreibe man einen Bogen $F\,G$. Aus dem andern Brennpunkte und mit einem Halbmesser gleich der großen Axe beschreibe man einen zweyten Bogen, welcher

---

*) Bey der Anwendung der Algebra auf die Geometrie nennt man die halben Sehnen des Kreises und der Ellipse wie in den Figuren 3 und 4 die Ordinaten dieser Linie, und die Durchmesser A B, A B' sind die zu diesen Ordinaten gehörigen Abscissenlinien. Die Abscissen werden immer auf einer Axe oder einem zusammengehörigen Durchmesser gezählt, und die Ordinaten sind immer mit der andern Axe oder dem andern Durchmesser parallel.

jenen ersten in G schneidet, und ziehe F′ G; der Begegnungspunkt $m$ dieser Geraden mit der Ellipse ist der Berührungspunkt für die durch P gehende Tangente. Auf gleiche Weise würde man durch P noch die zweyte Tangente P $m'$ an die Ellipse gezogen haben. Die Richtigkeit dieser Konstruktion ist leicht einzusehen.

3tens. Wenn die Tangente zu einer gegebenen Geraden parallel seyn soll. Sind in einem Kreise zwey Durchmesser unter sich senkrecht; so ist die Tangente an dem Ende des einen parallel mit dem andern.

Bey der Projektion dieses Kreises bleiben die Tangenten, Tangenten zu der Ellipse, welche aus der Projektion des Kreises entsteht, und sie bleiben auch noch wechselseitig zu den entsprechenden Durchmessern parallel, aber diese Durchmesser werden zwey zusammengehörige. Hieraus ergiebt sich folgende Konstruktion.

Es soll an die Ellipse A B C D (Fig. 6) eine Tangente parallel zu der Geraden L M gezogen werden. Nachdem man zwey Sehnen G H, A J parallel zu L M gezogen, und ihre Mitten durch die Gerade E E′ verbunden, so hat man einen Durchmesser, welcher mit demjenigen zusammengehörig ist, der parallel zu L M wäre, die Enden E, E′ dieses Durchmessers sind die Berührungspunkte der zu L M parallelen Tangenten E M′, E′ M″.

Den Durchmesser E E′ kann man noch einfacher finden, wenn man an einem der vier Scheitel, A zum Beyspiel, eine zu L M parallele Sehne A J zieht, den gegenüberliegenden Scheitel B mit J verbindet, so ist B J mit E E′ parallel.

Die Senkrechte E K auf die Tangente an dem Berührungspunkt nennt man die Normale. Das Stück $p$ $h$ der Axe zwischen der Ordinate E $h$ des Berührungspunktes und dem Begegnungspunkt $p$ der Tangente und derselben Axe heißt die Subtangente und das Stück $h$ K der Axe die Subnormale.

Verschiedene Aufgaben. Der Umfang einer Ellipse ist gegeben (Fig. 6.); man soll den Mittelpunkt und die Axen finden. Nachdem man in beliebiger Richtung zwey parallele Sehnen A J, G H gezogen, und ihre Mitten durch eine Gerade E E′ verbunden, so hat man einen Durchmesser; dieser in O halbirt giebt den Mittelpunkt. Ist dieses geschehen, so beschreibe man aus diesem Mittelpunkt E (Fig. 5) mit willkührlichem Halbmesser einen Bogen, welcher den Umfang in drey Punkten $p$, $q$, $s$ schneidet und ziehe $p$ $q$, $p$ $r$, so ist jede von diesen eine Parallele zu einer Axe.

Es ist eine Axe A B (Fig. 5) und ein Punkt $a$ des Umfanges gegeben; man soll die zweyte Axe bestimmen. Hat man A B in E halbirt, und die Senkrechte C E D gezogen, so ist dieses die Richtung der zweyten Axe. Mit der halben gegebenen Axe als Halbmesser beschreibe man aus $a$ einen Bogen, welcher die verlängerte C D in $b$ trifft; ziehe $b$ $a$ $c$, so ist $a$ $c$ gleich der haben zweyten Axe. Ein zweytes Verfahren ist noch aus derselben Figur zu ersehen.

Die nachstehenden Konstruktionen, in Betreff der Parabel und der Hyperbel haben eine große Uebereinstimmung mit den so eben für die Ellipse vorgetragenen. Wir haben deßhalb in den folgenden Figuren bey den gleichnamigen Aufgaben überall dieselben Buchstaben beygesetzt.

## Die Parabel.

Die Parabel ist eine offene, zu beyden Seiten sich ins Unendliche erstreckende Linie $m\ p\ A\ p'\ n$ Fig. 7. Sie hat eine Axe A B von unendlicher Größe, und einen Scheitel A, welcher der Begegnungspunkt der Linie mit ihrer Axe ist, aber sie hat keinen Mittelpunkt; die Parabel ist symetrisch in Bezug auf ihre Axe, das heißt, alle auf A B senkrechten Sehnen werden von dieser Geraden in ihren Mitten geschnitten. Die Parabel hat einen Brennpunkt F. Verlängert man die A B um eine Länge A G = A F, und zieht V W senkrecht auf A B, so heißt diese Gerade die Leitlinie der Parabel. Zieht man von einem Punkte $m$ des Umfanges den Leitstrahl $m$ F, so ist die Entfernung $m$ F immer gleich der Senkrechten $m$ V auf die Leitlinie.

Wenn man annimmt, eine Ellipse verlängere sich immer mehr und mehr, so werden die beyden Brennpunkte immer in eine größere Entfernung von einander kommen, und wenn man bey einem Brennpunkte stehen bleibt, so nimmt die Ellipse in der Gegend dieses Brennpunktes stets mehr und mehr die Gestalt der Parabel an, und sie erreicht diese Gestalt vollkommen, wenn man annimmt, die beyden Brennpunkte seyen in eine unendlich große Entfernung von einander übergegangen.

Jede Parallele mit der Axe einer Parabel, wie $m\ p$ heißt ein Durchmesser, das heißt, diese Gerade schneidet ein gewisses System von parallelen Sehnen in ihren Mitten.

### Beschreibung der Parabel.

1tens. Es ist die Axe, der Scheitel und der Brennpunkt gegeben. Fig. 7. Es sey A der Scheitel, F der Brennpunkt und folglich A F B die Axe. Man bestimme wie angegeben die Leitlinie V W. Unter dem Punkte A ziehe man eine beliebige Zahl von Senkrechten auf A B, wie $m$ M $n$. Mit der Entfernung M G einer jeden Senkrechten von der V W beschreibe man aus F zwey Bogen, welche in $m$ und $n$ die Senkrechte schneiden, so hat man zwey Punkte des Umfanges.

Die durch den Brennpunkt F gehende Sehne $p$ F $p'$ ist nach dieser Konstruktion viermal so groß als die Entfernung A F. Diese Größe $p$ F $p'$ ist das, was man den Parameter der Parabel nennt.

2tens. Es ist die Richtung der Axe der Scheitel und ein Punkt des Umfanges gegeben. A B Fig 7 sey die Axe, ihr Ende A der Scheitel und $n$ ein Punkt des Umfanges. Man ziehe $n$ A, $n$ M senkrecht auf A B und $n\ o$ senkrecht auf $n$ A und bis zur Axe A B verlängert. Die Entfernung $o$ M ist gleich dem Parameter der Parabel und folglich der vierte Theil davon, gleich der Entfernung A F. Die Konstruktion vollendet sich wie im ersten Falle.

### Tangenten der Parabel.

1tens. Wenn der Berührungspunkt $m$ Fig. 8 gegeben ist, und 2tens, wenn die Tangente durch einen Punkt P außerhalb des Umfanges gehen soll.

Die Lösungen sind ganz analog mit jener der Ellipse und die gleichnamigen Linien mit denselben Buchstaben wie Fig. 2 bezeichnet. Zu Bemerken hiebey ist, daß die Subtangente $n\ p$ durch den Scheitel A in zwey gleiche Theile getheilt wird.

3tens. Wenn die Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden L M Fig. 8 seyn soll. Man ziehe durch den Scheitel A die Sehne A J parallel zu L M und durch ihre Mitte den Durchmesser E E′, so ist E der Berührungspunkt der zu bestimmenden Tangente.

Verschiedene Aufgaben. Es ist der Umfang einer Parabel verzeichnet, man soll die Richtung ihrer Durchmesser bestimmen. Man ziehe Fig. 8 zwey beliebige unter sich parallele Sehnen A J, G H, halbire beyde und ziehe durch ihre Mitten eine Gerade E E′, so ist diese ein Durchmesser.

Man soll die Axe einer verzeichneten Parabel finden. Fig. 8. Nachdem man wie eben gesagt einen Durchmesser E E′ bestimmt hat, ziehe man eine auf denselben senkrechte Sehne *m r*, und durch die Mitte *h* derselben mit dem Durchmesser eine Parallele A B, so hat man die Richtung der Axe.

## Die Hyperbel.

Die Hyperbel besteht aus zwey offenen einander entgegenstehenden Zweigen *n* A *m*, *p* B *q*, Fig. 9. die sich beyde ins Unendliche erstrecken. Sie hat eine Axe A B; es ist dieses die kürzeste Gerade, die man zwischen den zwey Aesten der Linie ziehen kann. Die Mitte O dieser Axe ist der Mittelpunkt der Linie. Die Enden A, B der Axe sind zwey Scheitel der Hyperbel. Die Linie hat zwey auf der Verlängerung der Axe gelegene Brennpunkte F, F′. Zieht man von irgend einem Punkte *m* des Umfanges nach den beyden Brennpunkten die zwey Leitstrahlen *m* F, *m* F′, so ist die Differenz dieser Geraden unveränderlich und immer gleich der Axe A B.

Vergleiche man die Gestalt der Hyperbel mit einer Parabel, welche die gleiche Axe hat und den gleichen Scheitel, so wird man finden, daß die Aeste der Hyperbel viel schneller gerade werden als die Parabel, so daß jene am Ende immer aus dieser letzteren heraus tritt.

So verschieden auch die Gestalt der Hyperbel im Vergleich mit der Ellipse ist, so findet doch eine merkwürdige Uebereinstimmung zwischen den Eigenschaften dieser Linien statt. Um diese Uebereinstimmung zu vervollständigen, giebt man einer Senkrechten C D auf die Mitte der Axe A B den Namen der zweyten oder eingebildeten Axe, wogegen man die erste A B die reelle oder auch Zwerchaxe nennt. Man bestimmt die Größe von C D, indem man aus A, als Mittelpunkt und mit ihrem Abstande O F des Mittelpunktes von einem Brennpunkte als Halbmesser einen Kreis beschreibt, welcher auf der zweyten Axe die Punkte C, D abschneidet. Jede Axe theilt die Hyperbel in zwey symetrische Theile. Jede durch O gezogene und von dem Umfange der Hyperbel beendigte Gerade ist ein Durchmesser, und zwey Durchmesser, die wechselseitig alle zu dem andern parallele Sehnen halbiren, sind zusammengehörig.

Konstruktion der Hyperbel. Die Axe A B und die Brennpunkte F, F′ sind bekannt. Man nehme auf der verlängerten A B von A aus eine beliebige Länge A Y, die jedoch größer als A F seyn muß, und beschreibe mit dieser Länge als Halbmesser aus jedem Brennpunkte zwey Bögen ober- und unterhalb der Axe; sodann nehme man den Unterschied B Y zwischen A Y und A B als zweyten Halbmesser und beschreibe aus jedem Brennpunkte wiederum zwey Bögen, welche die ersten in *m*, *n*, *p*, *q* treffen, so liegen diese Punkte auf dem Umfang der

Hyperbel. Durch das nemliche wiederholte Verfahren bestimme man so viele Punkte des Umfanges als man verlangt.

**Tangenten zu der Hyperbel.** Wenn der Punkt, durch welchen die Tangente gehen soll, auf dem Umfange oder außerhalb gegeben ist, oder wenn die Tangente parallel zu einer gegebenen Geraden seyn soll, so finden ganz die ähnlichen Konstruktionen, wie in den gleichen Aufgaben bey der Ellipse statt, weßhalb wir blos die Fig. 9 und 12 anführen, wo die gleichnamigen Punkte und Linien wie bey Fig 2 und 6 bemerkt sind.

Es giebt bey der Hyperbel zwey gerade Linien, die sich in dem Mittelpunkte kreuzen, mit der Axe gleiche Winkel machen, und welche die merkwürdige Eigenschaft haben, daß sie sich unaufhörlich den Linien nähern, ohne dieselbe jemals erreichen zu können, wie weit man sie beyderseits verlängern möge. Es sind diese Linien zwey Tangenten, deren Berührungspunkt in einer unendlichen Entfernung liegt. Man bestimmt die Stellung der Asymptoten, Fig. 10, wenn man durch ein Ende B der reellen Axe eine Senkrechte *c d* errichtet, diese gleich der eingebildeten Axe C D' macht, und ihre Enden *c*, *d* mit dem Mittelpunkte O verbindet.

**Verschiedene Aufgaben. Es sind die zwey Asymptoten X X', Z Z' und ein Punkt R des Umfanges gegeben, man soll die Hyperbel beschreiben.** Man ziehe durch R in beliebiger Richtung eine Gerade M R M' beyderseits an den Asymptoten beendigt. Die Entfernung M R trage man von M' nach R', so ist dieses ein Punkt des Umfanges. Dieses Verfahren wiederhole man so oft als man Punkte R', R'' ꝛc. erhalten will. Um die Zeichnung an der Stelle des Punkts R nicht zu sehr abzunützen, arbeite man bey einem andern gefundenen Punkt, wie bey R angegeben. Zieht man durch R eine Gerade in der Richtung von R T S und trägt R T von T' nach S, so ist dieses ein Punkt des zweyten Astes der Hyperbel. Bey diesem Punkte kann man abermals wie bey R arbeiten.

**Es sind die beyden Aeste einer Hyperbel gegeben, man soll den Mittelpunkt O und die Axen A B, C D finden.** Fig. 11. Man ziehe zwey beliebige parallele Sehnen *m l*, *p q*, halbire dieselben und ziehe durch die Halbirungspunkte den Durchmesser G O H. Dieser ist zusammengehörig zu demjenigen, welcher parallel zu *m l* oder *p q* wäre, und auf seiner Hälfte liegt der Mittelpunkt O der Hyperbel. Beschreibt man über S T als Durchmesser einen Umkreis *a* S B; zieht durch einen Begegnungspunkt *a* desselben mit dem Umfange der Hyperbel die Geraden *a* S, *a* T und durch den Mittelpunkt wechselsweise die Parallelen A B, C D zu diesen Geraden, so hat man die erste Axe und die Richtung der zweyten. Die Größe dieser letzten ergiebt sich aus folgender Konstruktion. Parallel zu A B ziehe man eine beliebige, zu beyden Seiten durch die Aeste der Hyperbel begränzte Gerade, *v o* und über derselben als Durchmesser einen Halbkreis *o x y v*. In einer Entfernung gleich der Hälfte von A B, ziehe man zu *o v* die Parallele *x y*, fälle aus *y* auf *o v* die Senkrechte *y* Z, ziehe endlich O Z, so hat man eine Asymptote; die zweyte wird man auf ganz gleiche Weise erhalten. Die Länge der zweyten Axe und die Stellung der Brennpunkte ergiebt sich sofort, wie bereits angegeben.

---

## §. 2.

## Ueber die Tangenten.

Im zweyten Buche, Art. 78 ist die Aufgabe gelößt: durch einen gegebenen Punkt einer Cylinderfläche eine tangirende Ebene zu dieser Fläche zu führen. Man hat daselbst gesehen, daß wenn die Cylinderfläche vollkommen definirt ist, die durch den angegebenen Punkt gehende gerade Erzeugungslinie der Leitlinie in einem Punkte begegne, und daß die Tangente an diesem Punkte der Leitlinie sammt der geraden Erzeugungslinie die verlangte Berührungsebene bestimmen.

Es soll hier vorerst eine Lösung derselben Aufgabe vorgetragen werden, die unabhängig von der gewöhnlichen Methode der Tangenten ist.

Man denke sich durch den gegebenen Punkt der Cylinderfläche die tangirende Ebene wirklich geführt, und in dieser Ebene die gerade Berührungslinie G und eine andere Gerade G′, welche durch den Punkt geht, wo die Gerade G die Leitlinie trifft. Der Winkel dieser zwey Geraden ist willkührlich, und soll mit S bezeichnet werden. Es ist klar, daß wenn diese zweyte Gerade G bekannt wäre, die Berührungsebene durch die zwey Schenkel G, G′ des Winkels S gienge, dessen Scheitel auf der Leitlinie der Cylinderfläche liegt, und daß diese Ebene folglich bekannt wäre. Um nun die Gerade G′ zu finden, bemerke man, daß sie zwey geometrische Oerter hat; nemlich 1tens eine gerade Kegelfläche, deren Scheitel auf der Leitlinie der Cylinderfläche liegt, deren Axe die Gerade G dieser Fläche ist, und deren Kanten einen Winkel S mit der Axe machen; 2tens eine windische Fläche, deren gerade Erzeugungslinie den drey Bedingungen unterliegt, durch die Leitlinie der Cylinderfläche zu gehen, durch die Gerade G, und mit dieser Geraden einen unveränderlichen Winkel S zu machen: woraus nun folgt, daß die Gerade G′ der gemeinsame Durchschnitt eines geraden Kegels und einer bestimmten windischen Fläche ist. Der Scheitel des Winkels S gehört dieser Geraden an, und um einen zweyten Punkt derselben zu finden, ist es nur nöthig, den Kegel und die windische Fläche durch eine auf die Gerade G senkrechte Ebene zu schneiden. Der Schnitt des Kegels wird ein Kreis seyn, und der Schnitt der windischen Fläche eine Kurve, welche den Kreis in zwey Punkten schneidet. Die Geraden G′, G″, welche jeden dieser Punkte mit dem Scheitel S verbinden, liegen in der Berührungsebene zu der Cylinderfläche und bestimmen die Stellung dieser Ebene.

Obschon nun die hier angewendete windische Fläche vollkommen definirt ist, so bleibt doch die Stellung der geraden Erzeugungslinie, wenn sie durch den Scheitel S geht, unbestimmt, weil, da dieser Punkt der Geraden G und der krummen Leitlinie zugleich angehört, zwey von den Bedingungen, welche die Bewegung der Erzeugungslinie festsetzen, hier auf eine einzige zurückkommen, das heißt also, die Gerade G′ oder G″ ist unbestimmt, und man erhält als Durchschnitt der windischen Fläche durch eine auf die Gerade G senkrechte Ebene wie Art. 131 eine Kurve von zwey Zweigen $'''g\ ''g\ 'g,\ g'\ g''\ g'''$, die durch ein unendlich kleines Element $'g\ g'$ getrennt sind, die aber nach einem Punkt $g$ zulaufen, wo sie sich dergestalt vereinigen müssen, daß sie daselbst eine gemeinsame Tangente haben.

Will man mittelst dieser Methode eine Tangente zu irgend einer Kurve ziehen, so nimmt man sie als Leitlinie einer Cylinderfläche, statt einer windischen Fläche, wie Art. 328, konstruirt die tangirende Ebene zu dieser Cylinderfläche an einem gegebenen Punkt der Kurve, so wäre, wenn diese

Kurve eben ist, der Durchschnitt jener Berührungsebene und der Ebene der Kurve Tangente zu dieser an dem gegebenen Punkt.

Eine Kurve von doppelter Krümmung müßte man zugleich auf zwey Cylinderflächen versetzen, durch einen bestimmten Punkt der Kurve zu jeder Cylinderfläche nach der angegebenen Art eine tangirende Ebene führen; der gemeinsame Durchschnitt dieser Ebenen wäre die Tangente der Kurve an dem genommenen Punkte.

* * *

## Roberval'sche Methode der Tangenten.

Diese Methode ist auf den Fall berechnet, wo eine Kurve durch das Bewegungsgesetz eines Erzeugungspunktes gegeben ist. *) Wenn nach diesem Bewegungsgesetze ein Erzeugungspunkt beständig nach einem Punkte des Raumes geschoben wird, so ist die Linie, die er in Folge desselben Gesetzes durchläuft, gerade: aber wenn er in jedem Augenblicke seiner Bewegung zu gleicher Zeit nach zwey Punkten hin geschoben wird, so ist die von ihm durchlaufene Linie, welche in gewissen Fällen abermals gerade seyn kann, im Allgemeinen eine krumme Linie. Man wird die Tangente zu dieser Kurve erhalten, wenn man durch den, auf der Kurve genommenen Punkt, nach den zwey verschiedenen Richtungen des Erzeugungspunktes zwey gerade Linien zieht; auf diesen Richtungen und nach der gehörigen Seite hin proportionale Theile zu den zwey respektiven Geschwindigkeiten des Erzeugungspunktes aufträgt; das Parallelogramm vollendet, und die Diagonale zieht, die die verlangte Tangente ist: denn diese Diagonale liegt in der Richtung des beschreibenden Punktes an der Stelle der Kurve, die man betrachtet hat.

Zum Beyspiele (Man bittet den Leser die Figur selbst zu entwerfen).

Ein durch die gebrochene Linie A M B vorgestellter Faden seye an seinen Enden A und B befestigt; wenn man diesen Faden mittelst eines Stiftes M anspannt und den Stift so bewegen läßt daß der Faden stets angespannt bleibt, so wird der Stift eine Kurve durlaufen, welche, wie bekannt, eine Ellipse ist, von der A und B die Brennpunkte sind. Nach dieser Erzeugung der Kurve ist es leicht, zu ihr eine Tangente nach der Roberval'schen Methode zu ziehen. Denn da die Länge des Fadens A M B sich nicht verändert, so verlängert sich der Strahl A M genau um so viel, als der Strahl M B sich verkürzt. Daher ist die Geschwindigkeit des beschreibenden Punkts in der Richtung von M A gleich seiner Geschwindigkeit in der Richtung von M B. Wenn man daher auf M B und auf die Verlängerung von A M gleiche Theile M Q, M P aufträgt und sodann über diesen Seiten das Parallelogramm Q M P R vollendet, so giebt die Diagonale M R dieses Parallelogramms die Richtung des Erzeugungspunktes bey M an, und ist folglich Tangente zu der Kurve an eben diesem Punkte.

Aus diesem ist klar zu ersehen, daß bey der Ellipse die Tangente den Winkel B M P, welcher durch einen Leitstrahl und durch die Verlängerung des andern gebildet wird, in gleiche Theile theilt; daß die Winkel der Tangente mit beyden Leitstrahlen gleich sind, und daß die Kurve die Eigen-

*) Die Werke Roberval's sind in Memoiren der Pariser Akademie, von 1699 gesammelt.

thümlichkeit haben muß, die, aus einem Brennpunkte ausströmenden Lichtstrahlen nach dem andern Brennpunkte zurückzuwerfen.

Diese Methode läßt sich auch leicht auf den Fall von drey Dimensionen ausdehnen, und auf Kurven von doppelter Krümmung anwenden. In der That, wenn ein Erzeugungspunkt sich im Raume bewegt, dergestalt, daß er nach drey verschiedenen Richtungen fortgetrieben wird, so ist die, von ihm durchlaufene Linie, welche in gewissen Fällen eben seyn kann, und sogar gerade, im Allgemeinen jedoch von doppelter Krümmung. Man erhält die Tangente zu dieser Kurve an irgend einem ihrer Punkte, wenn man durch diesen Punkt drey gerade Linien zieht, nach den drey verschiedenen Bewegungsrichtungen des Erzeugungspunktes; wenn man auf diesen Geraden, und nach den gehörigen Seiten proportionale Theile zu den drey respektiven Geschwindigkeiten dieses Punktes aufträgt, das Parallelepipedum vollendet und die Diagonale dieses Parallelepipedums zieht, welche Tangente zu der Kurve an dem betrachteten Punkte ist.

Als Beyspiel soll ein ähnlicher Fall mit der Ellipse angeführt werden. (Die Zeichnung bleibt abermals dem Leser überlassen.)

Drey Punkte A, B, C sind im Raume gegeben. Es sey ein erster Faden A M B mit seinen beyden Enden in A und B befestigt; ein zweyter Faden A M C, dessen Größe unabhängig von jener des ersten Fadens ist, sey mit seinen Enden an den Punkten A und C befestiget. Wenn ein Erzeugungspunkt M diese beyden Fäden zugleich ergreift, und sich so bewegt, daß die Fäden immer angespannt sind, so beschreibt er eine Linie von doppelter Krümmung. *) Um zu dieser Kurve eine Tangente an dem Punkte M zu ziehen, muß man bemerken, daß, da die Länge des ersten Fadens konstant ist, die Größe, um welche A M sich verlängert gleich sey der Größe, um welche B M sich verkürzt, und daß die Geschwindigkeit des Erzeugungspunkts in der Richtung von M A gleich sey seiner Geschwindigkeit in der Richtung von M B. Gleicherweise, da die Länge des Fadens A M C konstant ist, so ist die Geschwindigkeit des beschreibenden Punktes in der Richtung M C auch noch gleich seiner Geschwindigkeit in der Richtung von A M. Wenn man daher auf der Verlängerung von A M und auf den Geraden M B, M C die gleichen Theile M P, M Q, M R aufträgt, und das Parallelepipedum M Q P R S vollendet so ist die Diagonale M S dieses Parallelepipedums die verlangte Tangente.

Da die Roberval'sche Methode der Tangenten auf das Prinzip der Zusammensetzung der Bewegung gebaut ist, so wird man leicht entnehmen, daß man in weniger einfachen Fällen, als die vorgetragenen Beyspiele, bekannte Methoden zu Hülfe nehmen könnte, um die mittlere Kraft zu finden, von mehreren nach einem Punkte gerichteten, und deren Größen und Richtungen bekannt sind.

---

*) Die von dem Punkt M durchlaufene Linie ist offenbar der Durchschnitt zweyer Umdrehungs-Ellipsoide, welche den Punkt A als gemeinschaftlichen Brennpunkt haben, und das Eine noch den Punkt B, das Andere den Punkt C als zweyten Brennpunkt. Aber zwey Ellipsoide, die einen gemeinsamen Brennpunkt haben, schneiden sich nach einer Ellipse und nicht nach einer doppelt gekrümmten Linie, welcher Satz erst in neuester Zeit von Dupin bewiesen wurde. Da jedoch dieser Umstand an der Betrachtungsweise des vorliegenden Falles nichts verändert, so haben wir das Beyspiel, weil es außerdem einfach und klar ist, beybehalten.

## §. 3.

# Ueber die Ausführung der geometrischen Zeichnungen.

Man betrachtet gewöhnlich diejenigen Konstruktionen, welche nur die Anwendung des Kreises und der geraden Linie erfodern, als die leichtesten, und deßwegen auch als die genauesten; weil man sich zum Ziehen dieser Gattungen von Linien der leicht zu handhabenden Instrumente, des Lineals und Zirkels bedienen kann, während man fast bey allen übrigen Kurven sich genöthigt sieht, eine mehr oder minder große Zahl von Punkten ihres Umfanges zu bestimmen, und diese Punkte durch einen Zug aus freyer Hand zu verbinden, welches, wie man sagt, immer mit mehr oder weniger Willkühr geschieht und folglich auch mit mehr oder weniger Inexaktität. Diese Ansichten haben gewöhnlich alle Ungeübten im praktischen Zeichnen; allein sie sind in mehrerer Beziehung unrichtig.

Erstlich, die Konstruktionen mit Kreisbögen und geraden Linien sind nicht immer die genauesten, und oft auch nicht die einfachsten; denn wenn, zum Beyspiel, ein Punkt durch das Zusammentreffen zweyer geraden Linien, oder zweyer Kreisbögen gefunden werden soll, so ist bey der Breite, die jede physische Linie hat, die Stellung dieses Punktes um so unbestimmter, je spitzer der Winkel ist, unter welchem jene Linien sich schneiden. Eine gerade Linie ist sehr häufig durch zwey Punkte gegeben, die richtige Stellung dieser Geraden ist aber um so schwerer zu bestimmen, je mehr die Punkte wirkliche Ausdehnung haben und je näher sie beysammen liegen u. s. w. Diese Umstände können sich bey einer nemlichen Konstruktion anhäufen, so daß das endliche Resultat nichts weniger als genau ist.

Zweytens, was die Ungenauigkeiten im Ziehen der Kurven betrifft, die durch eine gewisse Zahl von Punkten gehen sollen, oder was oft vorkommt, aber noch schwieriger ist, die berührend an eine Reihe anderer Linien gezogen werden müssen, so wird man sich meist glücklich aus diesen Umständen ziehen, wenn man durch häufige Uebung eine feste und leichte Hand erworben hat, und ein richtiges, besonders an geometrische Stetigkeit gewöhntes Auge. Die Konstruktion einer großen Anzahl von Durchschnitten krummer Flächen sind unabhängig von dem weiteren Nutzen dieser Arbeiten, das sicherste Mittel diesen Zweck zu erreichen, wobey besonders zu empfehlen ist, daß man große Dimensionen anwende. Hat man eine Zahl von Punkten bestimmt, die einer krummen Linie angehören, so wird ein geübter Zeichner leicht erkennen, ob sie alle richtig gelegen sind oder nicht, und er wird die Stellung derjenigen berichtigen, die ihm als falsch auffallen.

Diese Punkte sind nun aber sehr häufig aus Durchschnitten von geraden Linien und Kreisen bestimmt, das Auge allein muß daher hier die Unrichtigkeiten dieser Ergebnisse erkennen.

Unter allen Fehlern einer geometrischen Zeichnung betrachtet man, außer groben Unrichtigkeiten, diejenigen als die größten, wenn die vorgestellten krummen Linien keine stetige, dem Auge gefällige Form haben, sondern Ecken bilden und dergleichen. Um an einer solchen Stelle die wahre Gestalt der Kurve am leichtesten zu finden, dient nichts sicherer, als die Tangente an diesem Punkt der Kurve auf eine oder die andere bekannte Art zu bestimmen. Es ist daher sehr zu berücksichtigen, daß man unter den verschiedenen Punkten einer Kurve, die man bestimmt, vorzugsweise jene bemerke, wobey zugleich die Tangenten bekannt sind.

Eine geometrische Zeichnung soll ferner nicht nur genau seyn, sie soll auch eine gewisse Art von Eleganz besitzen. Das beste Mittel, um jede krumme Linie mit einiger Sicherheit zu ziehen, besteht darinn, daß man die gefundenen Punkte der Kurve auf ein besonderes Stück starkes Zeichenpapier auftrage, die Linie daselbst so scharf als möglich ziehe, und sodann das Papier nach dieser Linie mit der Scheere ausschneide; man erhält dadurch eine Lehre oder Schablone, die man gehörig auf die Zeichnung auflegt, um die Reisfeder beym Ziehen an dieselbe anzuhalten.

Aus allem diesem ist wohl zu ersehen, daß ein Zeichner, der nur elementare Kenntnisse der Geometrie besitzt, in viele Fälle kommen kann, wo ihm kein anderer Ausweg bleibt, als aufs Gerathe wohl zu arbeiten, und deßhalb gewiß auch meistens unrichtig.

---

## §. 4.

## Ueber die Kugeln.

Das Problem, die Stellung und Größe einer Kugel zu bestimmen, welche durch vier Bedingungen von der Art gegeben ist, daß sie durch bekannte Punkte gehen, oder bekannte Gerade, Ebenen und Kugeln berühren soll, ist von den berühmtesten Geometern der neueren Zeit bearbeitet worden. Fermat, ein Mathematiker, der gegen Ende des 16ten Jahrhunderts lebte und sehr viel zur Verbreitung des geometrischen Studiums nach der Methode der Alten that, schrieb ebenfalls eine Abhandlung de tactionibus sphaericis, von der wir hier eine Uebersetzung geben; und die, da Fermats Schriften sehr zerstreut sind, immer von großem Interesse ist, obwohl sie an Allgemeinheit und an Eleganz den Arbeiten einiger Neueren nachstehen mag.

* * *

Die Bestimmung einer Kugel, nach der Bedingung, daß sie durch gegebene Punkte gehe, daß sie gegebene Ebenen oder Kugeln berühre, beruht auf folgenden fünfzehn Aufgaben.

### Aufgabe I.

1) Eine Kugel zu finden, welche durch vier gegebene Punkte geht. (Die Lösung dieser Aufgabe ist im 4ten Buche Art. 377 gegeben, weßhalb wir sie hier übergehen.)

### Aufgabe II.

2) Es sind drey Punkte und eine Ebene gegeben; eine Kugel zu finden, welche durch die drey Punkte geht und die Ebene berührt.

Auflösung. Da der Kreis, welcher durch die drey gegebenen Punkte geht, ein kleiner Kreis der verlangten Kugel ist, so enthält die Senkrechte auf die Ebene dieses Kreises, die durch seinen Mittelpunkt geführt ist, den Mittelpunkt der verlangten Kugel. Wenn man durch diese Gerade eine senkrechte Ebene auf die gegebene Ebene führt, welche den kleinen Kreis der Kugel nach einem Durchmesser schneidet, und die gegebene Ebene nach einer Geraden; so ist der Kreis, welcher zu dieser Geraden tangirend ist, und durch die Endpunkte des Durchmessers geht, ein größter Kreis der verlangten Kugel. Es seyen C C′ (Fig. 1. Taf. XLV) die Pollinie des kleinen Kreises der

Kugel; D E der Durchschnitt der gegebenen Ebene und der Ebene, welche durch die Gerade C C′ senkrecht auf die Gegebne geführt ist; A B der Diameter des kleinen Kreises, welcher die Gerade D E im Punkt D schneidet; der Kreis A B E, welcher durch die Punkte A und B geht, und welcher die Gerade D E im Punkt E berührt ist, ist ein größter Kreis der verlangten Kugel. Nun aber ist die Tangente D E eine mittlere Proportionale zwischen den bekannten Linien D A, D B; wenn man daher diese mittlere Proportionale von D nach E trägt, und wenn man die Senkrechte E C′ auf die Tangente D E errichtet, so ist der Punkt C Mittelpunkt der Kugel, welche durch die drey gegebenen Punkte geht, und welche eine Ebene von bekannter Stellung berührt.

## Aufgabe III.

3) Es sind drey Punkte und eine Kugel im Raume gegeben; eine Kugel zu finden, welche durch die drey Punkte geht, und die gegebene Kugel berührt.

Auflösung. Man denke sich den Kreis beschrieben, welcher durch die drey gegebenen Punkte geht, so schneidet die Ebene, welche durch die Pollinie dieses Kreises und durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel geführt ist, den kleinen Kreis nach einem seiner Durchmesser und die gegebene Kugel nach einem ihrer größten Kreise. Es seyen (Fig. 2) A B der Durchmesser des kleinen Kreises; G E F der größte Kreis der gegebenen Kugel, deren Mittelpunkt in O ist, und endlich C C′ die Pollinie des kleinen Kreises der verlangten Kugel.

Ein Kreis, dessen Mittelpunkt in irgend einem Punkte H der Linie C C′ liegt, und dessen Halbmesser H A oder H B ist, schneidet den größten Kreis G E F in den Punkten G und F, die verlängerte Sehne G F dieses Kreises schneidet die Gerade A B im Punkt D, welcher sich nicht verändert, welches auch der Halbmesser H A sey; wenn man daher die Tangente D E zu dem Kreis G E F zieht, so schneidet der Halbmesser O E C die Gerade C C′ im Punkte C′, dem Mittelpunkt der verlangten Kugel.

## Aufgabe IV.

4) Eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Ebenen berührt.

Auflösung. (Siehe 4tes Buch Art. 379.)

## Aufgabe V.

5) Es ist ein Punkt und drey Ebenen gegeben; die Kugel zu finden, welche durch den Punkt geht und die drey Ebenen berührt.

Auflösung. Da die Winkel der drey gegebenen Ebenen, durch drey neue Ebenen, deren jede den verlangten Mittelpunkt enthält, in zwey gleiche Theile getheilt werden; so liegt dieser Mittelpunkt in der Geraden, dem gemeinschaftlichen Durchschnitt dieser drey letzten Ebenen. Die Senkrechte, aus dem gegebenen Punkt, auf diese Gerade gefällt, bestimmt den Mittelpunkt und den Halbmesser eines kleinen Kreises der verlangten Kugel: wenn man daher auf diesem Kreise irgend drey Punkte nimmt, so reduzirt sich die Aufgabe darauf, eine Kugel zu finden, welche durch die drey Punkte geht, und welche irgend eine der drey gegebenen Ebenen berührt; (welche Aufgabe schon in Art. 2 aufgelößt ist.)

### Aufgabe VI.

6) Eine Kugel zu finden, welche drey gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt.

Auflösung. Wenn man sich die Kugel S denkt, welche die gegebenen drey Ebenen und die Kugel berührt, so ist der Abstand des Mittelpunkts der tangirenden Kugel S von dem Berührungspunkt beyder Kugeln gleich dem Abstande dieses nemlichen Mittelpunkts von jeder der drey gegebenen Ebenen; woraus folgt, daß die Kugel S mit einer andern Kugel S' koncentrisch ist, welche durch den Mittelpunkt der gegebenen Kugel gienge, und welche drey Ebenen berührte, deren Abstände von einer der drey bekannten Ebenen, gleich dem Halbmesser der gegebenen Kugel wäre. Nachdem man daher drey neue Ebenen geführt hat, welche von den drey gegebenen in einer Weite, gleich dem Radius der gegebenen Kugel abliegen, so ist die Aufgabe darauf zurück geführt, eine Kugel S' zu finden, welche drey Ebenen berührt, und durch einen Punkt geht. (Aufgelößte Aufgabe in Art. 5.)

### Aufgabe VII.

7) Es sind gegeben zwey Punkte und zwey Ebenen; eine Kugel zu finden, welche durch die zwey Punkte geht, und die zwey Ebenen berührt.

Auflösung. Die Ebene, welche den Winkel, den die zwey gegebenen Ebenen bilden, in zwey gleiche Theile theilt, und die Ebene, senkrecht auf die Mitte der Geraden, welche die zwey gegebenen Punkte verbindet, schneiden sich nach einer Geraden, welche den Mittelpunkt der verlangten Kugel enthält: wenn man daher von einem der gegebenen Punkte eine Senkrechte auf diese Gerade fällt, so ist der Fuß dieser Senkrechten der Mittelpunkt eines kleinen Kreises der verlangten Kugel. Nimmt man auf diesem kleinen Kreise drey Punkte, so ist die Aufgabe dahin zurückgebracht, eine Kugel zu finden, welche durch drey Punkte geht und eine der gegebenen Ebenen berührt. (Gelößte Aufgabe in Art. 2.)

Ehe wir weiter gehen, ist es nothwendig einige leicht zu beweisende Lehnsätze aufzustellen.

### Lehnsatz 1.

8) Hat man in einem Kreise einen Durchmesser und eine Sehne, welche beyde verlängert, sich in einem Punkte schneiden, den man als den Endpunkt zweyer Sekanten ansehen kann, deren eine durch den Mittelpunkt des Kreises geht, so beweißt man in den Anfangsgründen, daß die Produkte einer oder der andern ganzen Sekante und ihres äußeren Theiles unter sich gleich sind. Indem sich der Kreis um seinen Durchmesser dreht, erzeugt er eine Kugel und bey jeder Stellung des Kreises bleibt das Verhältniß zwischen den zwey Sekanten und ihren äußeren Theilen das nemliche.

### Lehnsatz 2.

9) Es sey A C M P (Fig. 3) die Gerade, welche die Mittelpunkte C und M zweyer Kreise verbindet, und D E L O P eine andere Gerade, welche die Erste im Punkt P schneidet, so daß man hat:

$$C P : M P :: \text{Halbm. } A C : \text{Halbm. } H M.$$

Um diesen Punkt zu konstruiren, ziehe man irgend zwey Halbmesser C D, L M parallel unter sich, und verbinde die Endpunkte D, L dieser Halbmesser durch eine Gerade D L P, welche die Gerade der Mittelpunkte C und M im Punkt P schneidet. Aus dieser Konstruktion folgt, so wie Vieta es bewiesen hat, daß Aehnlichkeit zwischen den Dreyecken P A D, P Q O statt findet, so wie zwischen den Dreyecken P G E und P H L und daß man die folgenden Gleichungen hat:

$$\left.\begin{aligned} AP \times PQ &= DP \times PO \\ GP \times PH &= EP \times PL \end{aligned}\right\} (E).$$

Wenn man annimmt, daß die zwey Kreise und die Gerade D P sich um die Gerade A P als Scharnier drehen, so erzeugen die Kreise Kugeln, und die Gerade D P erzeugt einen geraden Kegel; und jede, durch die Gerade A P geführte Ebene schneidet die Kugeln nach einem Kreise und den Kegel nach zwey geraden Linien, die sich in Punkten begegnen, deren Entfernungen unter sich die, durch die Gleichungen (E) ausgedrückten Verhältnisse haben.

Lehnsatz 3.

10) Es seyen zwey Kugeln A und B, von Halbmessern X M, Y N (Fig. 4), welche als Mittelpunkte, die Punkte X und Y der Geraden X Y haben. Nachdem man auf dieser Geraden einen Punkt V genommen, so daß man hat:

$$VX : VY :: \text{Halbm. } XM : \text{Halbm. } YN,$$

und so werde durch den Punkt V irgend eine Gerade V T S gezogen, und in zwey Theile getheilt, dergestalt, daß:

$$SV \times VT = VR \times VN;$$

eine Kugel T, welche durch die zwey Punkte T und S geht, und welche die Kugel B vom Halbmesser Y N im Punkt O berührt, berührt auch die Kugel A vom Halbmesser X M in einem Punkt Q, dem Durchschnitte dieser letzten Kugel A und der Geraden V O Q.

In der That, da dieser Punkt Q auf der Kugel A vom Halbmesser X M liegt, so hat man (Art. 9)

$$RV \times VN = QV \times VO;$$

aber nach der Hypothese

$$RV \times VN = SV \times VT:$$

daher,

$$SV \times VT = QV \times VO;$$

woraus folgt, daß die vier Punkte O, Q, T, S, einem größten Kreise der Kugel T angehören. Es ist nun noch zu beweisen, daß dieser größte Kreis den größten Kreis der Kugel A vom Halbmesser Q X im Punkt Q berühre.

Irgend eine Gerade V B, zunächst der V O, schneidet die zwey Kugeln A und B von den Halbmessern X M, Y N, und die Kugel T, vom Halbmesser Q T in sechs Punkten Z, D, H, K, P, B, so daß man immer V B > V P hat; denn man hat nach den Lehnsätzen 1 und 2 (Art. 8 und 9)

$$DV \times VP = ZV \times VB,$$

aber D V ist größer als Z V; daher ist V P kleiner als V B; daraus folgt, daß der Punkt B außerhalb der Kugel A vom Halbmesser X M liegt. Man beweist auf die nemliche Art, daß alle Punkte der Kugel T zunächst des, beyden Kugeln gemeinschaftlichen Punkts Q, außerhalb der Kugel A liegen; daher berühren sich diese beyden Kugeln A und T im Punkt Q.

Lehnsatz 4.

11) Es sey (Fig. 5) G D F ein größter Kreis einer Kugel; O B die Senkrechte, aus dem Mittelpunkt O dieser Kugel auf eine Ebene A C gefällt; B und F die Begegnungspunkte dieser Senkrechten mit der Ebene und mit der Kugel; nachdem man irgend eine Gerade F A gezogen hat, welche die Ebene im Punkt A schneidet und die Kugel im Punkt G, so hat man wegen den ähnlichen Dreyecken A F B, G F D

$$FB \times FD = FA \times FG.$$

Hieraus folgt, daß die vier Punkte A, B, G, D zu einem nemlichen Kreise gehören. Dasselbe Verhältniß findet bey allen Ebenen statt, welche durch die Gerade F B gehen.

Lehnsatz 5.

12) E G F (Fig. 6) seye ein größter Kreis einer Kugel, F O C der Durchmesser dieser Kugel, welcher senkrecht auf eine Ebene A C ist, und F H J irgend eine Gerade, auf welcher man zwey Punkte H und J genommen hat, dergestalt daß:

$$JF \times FH = CF \times FE.$$

Eine Kugel, welche durch die Punkte H und J geht und die Ebene A C berührt, berührt nothwendig die Kugel vom Halbmesser O F. Es sey B der Punkt, in welchem die Kugel J H B die Ebene A C berührt; die Gerade B F schneidet den Kreis J H B im Punkt N, welcher der Kugel vom Halbmesser O F angehört; denn man hat, nach der Hypothese

$$FJ \times FH = FB \times FN;$$

und da die vier Punkte J, H, B, N auf dem nemlichen Umkreise liegen, so hat man

$$FJ \times FH = FB \times FN;$$

aber man hat nach dem Lehrsatz 4 Art. 11,

$$FC \times FE = FB \times FN;$$

daher hat die Linie G N den nemlichen Werth, betrachte man sie als äußeren Theil der Sekante der Kugel J H N B, oder als Sehne der Kugel vom Halbmesser O F; daher gehört der Punkt N der einen und der andern Kugel an; überdem berühren die zwey Kugeln sich in diesem nemlichen Punkt. Um dies zu beweisen, werde irgend eine Gerade F R H' P K gezogen, welche die zwey Kugeln und die Ebene in den Punkten F, R, H', P, K schneidet, deren Abstände unter sich folgende Verhältnisse haben.

$$FC \times FE = FJ \times FH = FP \times FH' = FK \times FR;$$

wegen $FK > FP$, folgt daß $FH' > FR$; daher liegt der Punkt R außerhalb des Kreises H H' N. Es verhält sich eben so mit jedem andern Punkt, der auf der Kugel vom Halbmesser F O sehr nahe beym Punkt N genommen ist, daher ist der Punkt N der Einzige, welcher den beyden Kugeln J H N B, G R N E F gemein ist, daher berühren sich diese beyden Kugeln.

Diese Lehnsätze sind leicht zu verstehen und doch sehr schön (sagt Fermat), hauptsächlich der Dritte und Fünfte. In dem Dritten wird bewiesen, daß die Kugeln, in unendlicher Anzahl, welche durch zwey Punkte T und S gehen, (Fig. 4) und welche die Kugel des Halbmessers J N berühren, auch zugleich die Kugel des Halbmessers X M berühren. In dem fünften Lehnsatze berühren die Kugeln von unendlicher Anzahl, welche durch die Punkte J und H gehen, und welche eine Ebene berühren, zu gleicher Zeit auch die Kugel vom Halbmesser F O.

Nach diesen zu Grund gelegten Lehnsätzen gelangt man leicht zur Lösung folgender Aufgaben.

Aufgabe VIII.

13) Es sind zwey Punkte gegeben, eine Ebene und eine Kugel; man soll eine Kugel finden, welche durch die zwey Punkte geht, und zugleich die Ebene und die Kugel berührt.

Auflösung. Es seyen (Fig. 7) H und M die gegebenen Punkte, O Mittelpunkt der gegebenen Kugel, A B die Senkrechte, aus dem Mittelpunkt O auf die gegebene Ebene A B C gefällt, D E F ein größter Kreis der gegebenen Kugel, dessen Ebene durch den Punkt H und durch die Gerade O B geht.

Durch den Punkt E, in welchem die Gerade O B die gegebene Kugel schneidet, werde die Gerade H E gezogen, auf welcher man einen Punkt G nimmt, so daß man hat

$$EH \times EG = EB \times ED.$$

Die Kugel, welche durch die drey Punkt G, H, M geht, und welche die Ebene A B C berührt, berührt zu gleicher Zeit (5ter Lehnsatz. Art. 12) die Kugel vom Halbmesser O E; nun aber bestimmt man nach der Aufgabe II. (Art. 2) den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel, welche durch drey gegebene Punkte geht und eine gegebene Ebene berührt; daher kennt man den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel, welche durch zwey Punkte geht und eine Ebene und eine Kugel berührt.

Aufgabe IX.

14) Eine Kugel zu finden, welche durch zwey gegebene Punkte geht, und zwey gegebene Kugeln berührt.

Auflösung. Es seyen (Fig. 8) H und M die zwey gegebenen Punkte; die Ebene, welche durch den Punkt H und durch die Mittelpunkte B, E der gebenen Kugeln geführt ist, schneidet diese Kugeln nach zwey größten Kreisen, von den Halbmessern A B, E N. Es werde auf der Geraden B E der Mittelpunkte der Kugeln ein Punkt F genommen, so daß man hat

$$AB : EN :: BF : EF;$$

nachdem man die Punkte F und H durch eine Gerade F H verbunden hat, konstruire man auf dieser Geraden einen Punkt G, so daß:

$$NF \times FA = HF \times FG.$$

Nach der Aufgabe III. (Art. 3) findet man die Kugel, welche durch die drey Punkte G, H, M geht, und welche eine der zwey Kugeln von den Halbmessern A B, N E berührt; und nach dem Lehnsatz 3 (Art. 10) werden diese zwey letzten Kugeln von der Ersten berührt.

Aufgabe X.

15) Man soll eine Kugel finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und welche zwey gegebene Ebenen und eine gegebene Kugel berührt.

Auflösung. Man fälle aus dem Mittelpunkt O (Fig. 9) der gegebenen Kugel eine Senkrechte O C auf eine der gegebenen Ebenen B C D zum Beyspiel; durch den gegebenen Punkt H, und durch den Punkt F, in welchem die Gerade O C die gegebene Kugel durchschneidet, ziehe man die Gerade F H, auf welcher man einen Punkt J nimmt, so daß:

$$FH \times FJ = FC \times FE.$$

Nach der Aufgabe VII. (Art. 7) findet man eine Kugel, welche durch die beyden Punkte H und J geht, und welche die beyden Ebenen A B, B C berührt; und nach dem Lehnsatz 5 (Art. 12) berührt diese Kugel die gegebene Kugel vom Halbmesser O F.

### Aufgabe XI.

16) Eine Kugel zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und welche eine gegebene Ebene und zwey gegebene Kugeln berührt.

Auflösumg. Nach dem Lehnsatz 5 bestimme man einen zweyten Punkt der verlangten Kugel, so daß die vorgelegte Aufgabe auf die Aufgabe VIII (Art. 13) zurückgebracht ist, oder nach dem Lehnsatz 3 bestimme man auf der Geraden, welche die Mittelpunkte der zwey gegebenen Kugeln verbindet einen Punkt, so daß die vorgelegte Aufgabe abermals auf die Aufgabe VIII zurückgebracht ist.

### Aufgabe XII.

17) Eine Kugel zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und welche drey gegebene Kugeln berührt.

Auflösung. Es seyen A, B, C die drey gegebenen Kugeln, man bestimme auf der Geraden, welche die Mittelpunkte $a$ und $b$ der Kugeln A und B verbindet, einen Punkt F, so daß man hat

$$Fa : Fb :: \text{Halbm. } A : \text{Halbm. } B.$$

Auf der Geraden, welche den Punkt F und den gegebenen Punkt H verbindet, konstruire man einen zweyten Punkt H′, so daß nach dem Lehnsatz 3 die Kugel, welche durch die Punkte H und H′ geht, und welche die Kugeln A und C berührt, (welche Kugel man nach der Aufgabe IX bestimmt) nothwendigerweise die Kugel B berührt.

### Aufgabe XIII.

18) Eine Kugel zu finden, welche zwey gegebene Ebenen und zwey gegebene Kugeln berührt.

Auflösung. Die verlangte Kugel (Fig. 10) ist konzentrisch mit einer andern Kugel, welche durch den Mittelpunkt der kleinsten gegebenen Kugel gienge, und welche zwey Ebenen berührte, die parallel mit den zwey gegebenen Ebenen wären, und in einem Abstande von letzteren gleich dem Halbmesser der kleinsten Kugel. Nachdem diese parallelen Ebenen geführt sind, so kommt die Aufgabe dahin zurück, eine Kugel zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt gienge, und welche zwey Ebenen und eine Kugel, deren Halbmesser gleich der Differenz der Halbmesser der beyden gegebenen Kugeln wäre, berührte. Diese Aufgabe ist gelößt, Aufgabe X. (Art. 15.)

### Aufgabe XIV.

19) Eine Kugel zu finden, welche drey gegebene Kugeln und eine gegebene Ebene berührt.

Auflösung. Diese Aufgabe kommt darauf zurück, eine mit der verlangten Kugel konzentrische Kugel zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und welche zwey Kugeln und eine Ebene berührt.

### Aufgabe XV.

20) Eine Kugel zu finden, welche vier gegebene Kugeln berührt.

Auflösung. Diese Aufgabe kommt darauf zurück, eine konzentrische Kugel mit der Verlangten zu finden, welche durch einen gegebenen Punkt geht, und welche drey Kugeln berührt: sie ist aufgelößt, Aufgabe XII. (Art. 17).

Um dieser Abhandlung über die Berührung der Kugeln keine zu große Ausdehnung zu geben, werden wir uns nicht in die Untersuchung der besonderen Fälle einlassen.