der Fläche denkt, und wenn man annimmt, daß diese Tangente sich parallel zu sich selbst bewege, um ein Element einer, die Fläche tangirenden Cylinderfläche zu erzeugen, so wird das Element der Cylinderfläche die Umdrehungsfläche nach dem Kreisbogen berühren, und dieser Bogen wird senkrecht auf die gerade Erzeugungslinie seyn.

Sonach sind bey irgend einer Umdrehungsfläche die Krümmungslinien der einen Art der Krümmung die Meridiane der Fläche, und die Linien der andern Krümmung die Parallelen, und es ist einleuchtend, daß diese zwey Reihen von Kurven sich sämmtlich senkrecht auf der Fläche durchschneiden.

445. In Betreff der aufwickelbaren Fläche, haben wir bereits (Art. 432) gesehen, daß bey denselben die aufeinanderfolgenden Normalen längs den Punkten einer ihrer geraden Erzeugungslinien immer in einer nemlichen Ebene sind. Die geraden Erzeugungslinien sind daher bey diesen Flächen zugleich auch die Linien der einen Krümmung, welche Krümmung in der Richtung derselben Geraden unendlich klein oder Null ist.

Die Linien der größten Krümmung der aufwickelbaren Flächen sind sofort leicht zu finden, weil diese Linien durch die Bedingung bestimmt sind, daß sie auf der Fläche das System der geraden Erzeugungslinien, als den Linien der kleinsten Krümmung in allen Punkten senkrecht durchschneiden. Bey den Cylindern sind daher die geraden Schnitte derselben, das heißt die Schnitte durch Ebenen, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien sind, die Linien der größten Krümmung. Diese Linien der größten Krümmung sind bey den Kegelflächen die koncentrischen sphärischen Schnitte, nemlich die Schnitte der Fläche durch Reihen von Kugeln, welche ihren gemeinsamen Mittelpunkt in den Scheiteln der Kegel haben. Bey allen übrigen aufwickelbaren Flächen sind die auf den Flächen gezogenen Evolventen ihrer Rückkehrkanten, welche das System ihrer geraden Erzeugungslinien, überall unter rechten Winkeln durchschneiden (Art. 417) die Linien ihrer größten Krümmung.

Von den geometrischen Oertern der Normalen und der Krümmungsmittelpunkte der Flächen.

446. (Taf. XLII. Fig. 7.) Wenn man an allen Punkten einer von den Krümmungslinien L M N O P einer Fläche sich die Normalen zu der Fläche denkt, so haben wir gesehen, daß die zweyte Normale der Ersten in einem gewissen Punkte begegne; daß die Dritte der Zweyten in einem andern Punkte begegne, und so fort; das System dieser Normalen, deren zwey und zwey immer in einer nemlichen Ebene sind, bildet daher eine aufwickelbare Fläche, welche überall senkrecht auf die krumme Fläche ist, und dieselbe nach der Krümmungslinie schneidet. Diese Krümmungslinie, da sie selbst überall senk-

recht auf die Normalen ist, welche zusammen die aufwickelbare Fläche bilden, ist auch eine Krümmungslinie dieser letzten Fläche. Die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche, welche Kante eine der Evoluten der Linie L M N O P ist, ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte derselben Kurve, und sie ist auch der Ort der Mittelpunkte einer Krümmung der Fläche, für die Punkte derselben nemlich, welche auf der Kurve L M N O P liegen. Wenn man diese nemliche Bemerkung bey allen andern Krümmungslinien derselben Reihe, wie L′ M′ N′ O′ P′, L″ M″ N″ O″ P″.... ꝛc. macht, so können alle Normalen der krummen Fläche betrachtet werden, als bildeten sie eine Reihe aufwickelbarer Flächen, die sämmtlich senkrecht auf die Fläch sind, und das System der Rückkehrkanten aller dieser aufwickelbaren Flächen wird eine krumme Fläche bilden, welche der Ort aller Mittelpunkte von einer der beyden Krümmungen der krummen Fläche ist.

Diese so eben bey einer der zwey Krümmungen der Fläche gemachten Bemerkungen gelten gleichmäßig bey der andern Krümmung. In der That, wenn man an allen Punkten L, L′, L″, L‴.... ꝛc. einer Linie der andern Krümmung sich die Normalen zu der Fläche denkt, so sind diese Geraden aufeinanderfolgend zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene, ihr System bildet eine aufwickelbare Fläche, die überall senkrecht auf die Fläche ist, und die derselben in der Krümmungslinie L L′ L″ L‴...... begegnet, welche selbst auch eine Krümmungslinie der aufwickelbaren Fläche ist. Die Rückkehrkante dieser letzten Fläche ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Linie L L′ L″ L‴...., und zugleich der Ort der Mittelpunkte der zweyten Krümmung der krummen Fläche, für alle Punkte der Linie L L′ L″ L‴..... Dasselbe findet statt bey den übrigen, durch die Punkte der anderen Krümmungslinien M M′ M″ M‴, N N′ N″ N‴.... geführten Normalen, so daß alle Normalen der krummen Fläche wiederum betrachtet werden können, als bildeten sie eine zweyte Reihenfolge aufwickelbarer Flächen, die sämmtlich senkrecht auf die Fläche sind, und das System der Rückkehrkanten aller dieser neuen aufwickelbaren Flächen, wird eine zweyte krumme Fläche bilden, welche der Ort der Mittelpunkte der zweyten Krümmung der Fläche ist.

447. In einigen besondern Fällen sind die Flächen der Mittelpunkte der zwey Krümmungen einer nemlichen krummen Fläche, unter einander verschieden; das heißt, sie können auf abgesonderte Weise erzeugt werden, oder sie haben ihre Gleichungen abgesondert. Ein Beyspiel hievon sieht man bey den Umdrehungsflächen, bey denen eine jener Flächen sich auf die Rotationsaxe selbst reduzirt, während die Andere ebenfalls eine Umdrehungsfläche ist, die durch die Rotation der ebenen Evoluten des Meridianes um dieselbe Axe erzeugt ist.

Aber am öftesten, und im Allgemeinen, sind jene zwey Flächen nicht verschieden; sie können nicht abgesondert erzeugt werden; sie haben die nemliche Gleichung, und sie sind nur zwey verschiedene Netze einer nemlichen krummen Fläche.

Man sieht hieraus, daß alle Normalen einer krummen Fläche, als die Durchschnitte von zwey Reihen solcher aufwickelbaren Flächen betrachtet werden können, daß jede dieser aufwickelbaren Flächen der krummen Fläche rechtwinklig begegnet, und sie nach einer Kurve schneidet, welche zu gleicher Zeit Krümmungslinie der krummen Fläche, und Krümmungslinie der aufwickelbaren Flächen ist; und daß jede von den aufwickelbaren Flächen der ersten Reihe alle jene der zweyten Reihe nach geraden Linien und in rechten Winkeln durchschneidet.

448. Die folgenden Beyspiele, wovon das erste aus der Baukunst genommen ist, zeigen, welche Anwendungen verschiedene Künste von den eben vorgetragenen Eigenschaften machen können.

Die aus behauenen Steinen aufgeführten Gewölbe bestehen aus abgesonderten Stücken, denen man die Geschlechtsbenennung der Gewölbsteine oder auch Werkstücke gegeben hat. Jeder Gewölbstein hat mehrere Seitenflächen, welche die größte Aufmerksamkeit bey ihrer Verfertigung erfodern; 1tens die Seite, welche einen Theil der sichtbaren Oberfläche des Gewölbes (Intrados) bildet, und welche deßhalb mit der größten Präzision ausgeführt werden muß; man nennt diese Seite die Bogenfläche (douelle) 2tens die Seiten, mittelst welcher die aufeinanderfolgenden Gewölbsteine sich aneinander anlehnen, man nennt sie im Allgemeinen die Fugen oder Fugenschnitte. Die Fugen erfodern ebenfalls die größte Genauigkeit in ihrer Verfertigung; denn da der Druck sich von einem Gewölbsteine auf den andern senkrecht auf die Fugenfläche überpflanzt, so ist es nothwendig, daß die zwey Steine sich in der größt möglichen Anzahl von Punkten berühren, damit der Druck bey jedem Berührungspunkte der geringste sey, und daß er bey Allen die möglichste Gleichförmigkeit habe. Bey jedem Gewölbsteine müssen daher die Fugen sich so viel als möglich der wahren Gestalt der Fläche nähern, von der sie einen Theil ausmachen sollen, und damit dieser Zweck am leichtesten zu erfüllen ist, so müssen die Fugenflächen von der einfachsten Beschaffenheit, und ihre Verfertigungsart der größten Präzision fähig seyn. Aus diesem Grunde macht man die Fugenflächen gewöhnlich eben; aber nicht alle Gewölbflächen lassen diese Anordnung zu, und bey einigen würde man die nothwendigen Rücksichten, von denen wir im Augenblicke reden werden, zu sehr verletzen, wenn man den Fugen keine krumme Oberfläche gäbe. In diesem Falle sind unter allen krummen Flächen, welche außerdem auch noch den andern Bedingungen entsprechen können, diejenigen zu wählen, deren Erzeugung die einfachste ist und deren

Verfertigung die größte Genauigkeit zuläßt. Nun aber sind es unter allen krummen Flächen, diejenigen, welche durch die gerade Linie erzeugt sind, und besonders die aufwickelbaren, welche am leichtesten ausgeführt werden können. Wenn es sonach erfoderlich ist, daß die Fugen der Gewölbsteine krumme Flächen seyen, so bildet man dieselben, so viel als möglich aus aufwickelbaren Flächen.

Eine der hauptsächlichsten Bedingungen, denen die Gestalt der Fugen der Gewölbsteine genügen muß, ist, daß sie überall senkrecht auf Oberfläche des Gewölbes aufstehen, das jene Gewölbsteine bilden. Denn wenn die zwey Winkel, welche eine nemliche Fuge mit der Oberfläche des Gewölbes macht, merklich ungleich wären, so würde derjenige von diesen Winkeln, welcher den rechten Winkel überstiege, eines größeren Widerstandes fähig seyn als der Andere; und bey der Wirkung, welche zwey aufeinanderfolgende Gewölbsteine gegen einander äußern, würde der Kleinere als ein rechter Winkel dem Zerspringen ausgesetzt seyn, was aufs Wenigste das Gewölbe verunstaltete, und was selbst seine Festigkeit gefährden, und die Dauer des Gebäudes vermindern könnte. Sobald daher die Fläche einer Fuge krumm seyn muß, so ist es nöthig, dieselbe durch eine Gerade zu erzeugen, welche überall senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes ist; und wenn man noch weiter verlangt, daß die Fläche der Fuge aufwickelbar seyn soll, so ist es erfoderlich, daß alle Normalen zu der Oberfläche des Gewölbes, und welche, um sich so auszudrücken, die Fuge bilden, zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene liegen.

Nun aber haben wir gesehen, daß diese Bedingung nicht erfüllt werden kann, außer wenn alle Normalen durch eine nemliche Krümmungslinie der Oberfläche des Gewölbes gehen; wenn daher die Fugenschnitte der Werkstücke eines Gewölbes aufwickelbar seyn müssen, so ist nothwendig erfoderlich, daß diese Flächen die Oberfläche des Gewölbes nach seinen Krümmungslinien durchschneiden.

Außerdem noch, mit welcher Genauigkeit die Gewölbsteine eines Gewölbes verfertigt seyn mögen, so ist ihre Eintheilung immer auf der Oberfläche des Gewölbes sichtlich; sie zeichnet daselbst sehr bemerkbare Linien, diese Linien müssen allgemeinen Gesetzen unterliegen, und, je nach der Beschaffenheit der Oberfläche des Gewölbes, besondern Rücksichten entsprechen. Unter den allgemeinen Gesetzen beziehen sich die Einen auf die Festigkeit des Gebäudes, und die Andern, auf die Dauerhaftigkeit desselben. Von dieser letztern Zahl ist die Regel, welche vorschreibt, daß die Fugenflächen eines nemlichen Gewölbsteines, rechtwinklich unter sich seyen, aus demselben Grunde, aus welchem sie selbst senkrecht auf die Gewölbfläche seyn müssen. Auch müssen die Abtheilungslinien der Gewölbsteine, so beschaffen seyn, daß diejenigen, welche das Gewölbe in Schichten theilen, sämmtlich senkrecht auf diejenigen sind, welche eine nemliche Schichte in Gewölbsteine abtheilen.

Was die besonderen Bedingungen betrifft, so giebt es derselben von mehreren Arten, deren Aufzählung jedoch hier unser Gegenstand nicht ist; aber eine hauptsächliche, unter denselben besteht darinn, daß die Abtheilungslinien der Gewölbsteine, welche, wie wir gesehen haben, von zweyerley Art sind, und welche sich sämmtlich rechtwinklig begegnen müssen, auch den Charakter der Fläche, zu der sie gehören, haben müssen. Nun aber giebt es auf der krummen Fläche keine Linie, welche zu gleicher Zeit alle diese Bedingungen erfüllen könnte, als die zwey Reihen der Krümmungslinien, und diese erfüllen sie vollständig.

Demnach muß die Abtheilung eines Gewölbes in Gewölbsteine immer durch die Krümmungslinien der Oberfläche des Gewölbes gemacht werden, und die Fugen müssen Stücke aufwickelbarer Flächen seyn, gebildet durch die Reihe der Normalen zu der Fläche, welche, aufeinanderfolgend betrachtet, zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene sind; dergestalt, daß bey jedem Gewölbstein die Oberflächen der vier Fugen, und die des Gewölbes sämmtlich rechtwinklig seyen.

Vor der Erfindung der geometrischen Betrachtungen, auf welche alles eben Gesagte gegründet ist, hatten die Künstler verworrene Begriffe von den Gesetzen, zu welchen sie führen, und nur in einigen einfachen Fällen hatten sie die Lösung der Aufgabe erreicht. So, zum Beyspiele, wenn die Oberfläche des Gewölbes durch Umdrehung erzeugt war, sey es ein Kuppelgewölbe in Form eines Sphäroids, oder ein umlaufendes Tonnengewölbe, so theilten sie ihre Gewölbsteine nach Meridianen und Parallelen ab, das heißt nach den Krümmungslinien der Oberfläche des Gewölbes.

Die Fugenschnitte, welche den Meridianen entsprachen, waren die, durch die Umdrehungsaxe geführten Ebenen; diejenigen Fugen, welche den Parallelen entsprachen, waren Kegelflächen, durch Umdrehung um dieselbe Axe erzeugt; und diese zwey Arten von Fugen waren rechtwinklig unter sich, und senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes.

Aber, wenn die Oberflächen der Gewölbe keine so einfache Erzeugung hatten, und wenn ihre Krümmunglinien sich auf keine so ausgeprägte Art darstellten, wie bey den Gewölben in Form länglichter Sphäroide, und bey vielen Andern, so konnten die Künstler nicht mehr allen Bedingungen zugleich Genüge leisten, und sie opferten in jedem einzelnen Falle diejenigen auf, welche ihnen die größten Schwierigkeiten entgegensetzen.

Es wäre daher nöthig, daß man in jeder Schule der darstellenden Geometrie sich mit der Bestimmung und der Konstruktion der Krümmungslinien derjenigen Flächen beschäftigte, welche in den Künsten gewöhnlich angewendet werden, damit die Künstler, welchen zu derartigen Untersuchungen nicht viele Zeit bleibt, hier im benöthigten Falle um Rath fragen, und die erhaltenen Resultate benutzen könnten.

449. Das zweyte Beyspiel, das wir anführen wollen, ist aus der Kupferstecherkunst entlehnt.

In der Kupferstecherey werden die Töne der verschiedenen Theile der Oberfläche der vorgestellten Gegenstände durch Schraffirungen ausgedrückt, welche man um so stärker und um so dichter macht, je dunkler man den Ton haben will.

Wenn die Entfernung, aus welcher ein Kupferstich betrachtet werden soll, groß genug ist, damit die einzelnen Striche der Schraffirung nicht mehr erkannt werden können, so ist die Art der Schraffirung ziemlich gleichgültig, und, welches auch der Kontur dieser Striche seyn mag, so kann der Künstler sie immer dergestalt verstärken und vervielfältigen, daß er den Ton erhält, den er wünscht, und somit die verlangte Wirkung hervorbringt. Wenn aber, wie es am gewöhnlichsten der Fall ist, der Kupferstich die Bestimmung hat, in solcher Nähe betrachtet zu werden, daß die Umrisse der Striche der Schraffirung zu erkennen sind, so ist die Gestalt jener Konturen nicht mehr gleichgültig. Für einen jeden Gegenstand, und für einen jeden Theil der Oberfläche eines Gegenstandes, giebt es Umrisse der Schraffirungen, die mehr als andere dazu geeignet sind, einen Begriff von der Krümmung der Fläche zu geben. Diese besonderen Konturen sind immer zwey an der Zahl, und manchmal wenden die Kupferstecher beyde zugleich an, wenn sie, um ihre Töne leichter zu verstärken die Schraffirungen kreuzen.

Diese Konturen, wovon die Künstler bis jetzt noch ein nur sehr dunkeles Gefühl haben, sind die Projektionen der Krümmungslinien der Oberfläche, welche sie ausdrücken wollen.

Da die Oberflächen der meisten Gegenstände keiner strengen Definition fähig sind, so sind auch ihre Krümmungslinien nicht von der Beschaffenheit, um entweder durch Rechnung oder durch zeichnende Konstruktionen bestimmt werden zu können. Aber wenn die Künstler in ihrer Jugend gewöhnt worden wären, die Krümmungslinien einer großen Zahl, genauer Definition fähiger krummer Flächen aufzusuchen, so würden sie, selbst bey weniger bestimmten Gegenständen viel empfänglicher für die Gestalt und die Stellung dieser Linien seyn; sie würden dieselben mit mehr Richtigkeit auffassen, und ihre Werke würden mehr Ausdruck haben.

450. Wir halten uns nicht länger bey diesem Gegenstande auf, welcher wohl nur den kleinsten Vortheil zeigt, den die Künste und die Industrie von der Errichtung einer Schule der darstellenden Geometrie in jeder bedeutenden Stadt zögen.

Unsere Leser finden in Dupin's Développements de Géométrie die vollständige Theorie der Krümmung der Linien und Flächen, und insbesondere jener der zweyten Ordnung. Uebrigens können wir uns nicht versagen, die Konstruktion der Krümmungslinien des Ellipsoides aus Monge's feuilles d'analyse appliquée à la géométrie hier anzuführen.

Konstruktion der Krümmungslinien des Ellipsoids.

451. Es sey A B C D (Taf. XLIII. Fig. 1) der elliptische Hauptschnitt des Ellipsoids, dessen Ebene durch die größte Axe A B der Fläche und durch die mittlere Axe C D geht. (Art. 215 und 216.) C E D sey die Hälfte des Hauptschnittes der durch die mittlere Axe und durch die kleinste Axe = 2 K E geht, und dessen Ebene auf die Horizontalebene zurückgelegt angenommen ist.

Man konstruire einen Viertelsbogen einer Ellipse O L G, und ein Stück eines hyperbolischen Bogens O H J, welche konzentrisch mit der Ellipse A B C D sind, und deren gemeinschaftliche halbe Axen K O, K G, welche mit den Axen der Ellipse A B C D einerley Richtung haben, wir sogleich bestimmen werden. Wir nennen diese Kurven Hülfs-Hyperbel und Hülfs-Ellipse. Wenn man sofort von einem Punkt H der Hyperbel zwey Senkrechte H M, H N auf die entsprechenden Axen C D und A B fällt, und eine mit A B C D konzentrische Ellipse M N M′ N′ konstruirt, welche die Geraden K M und K N als halbe Axen hat, so hat man die Projektion einer Krümmungslinie des Ellipsoids, auf der Ebene der größten und mittleren Axe. Konstruirt man auf dieselbe Weise so viele Ellipsen als man will, so erhält man die Projektionen der ganzen Reihe von Linien der einen Krümmung des Ellipsoids.

Eben so, wenn man aus einem Punkte L der Hülfsellipse zwey Senkrechte L P, L Q auf die Axen A B, C D fällt, und eine mit der Ellipse A B C D konzentrische Hyperbel P R R′, P′ S S′ konstruirt, welche die Geraden K P, K Q zu halben Axen hat, so hat man eine Linie der andern Krümmung. Jede auf diese Art konstruirte Hyperbel durchschneidet alle Ellipsen, und umgekehrt.

452. Da die gemeinschaftliche Axe O O′ der Hülfsellipse und die Hülfshyperbel immer kleiner ist als die große Axe A B des Ellipsoids, und folglich der gemeinschaftliche Scheitel O immer ins Innere der Hauptellipse A B C D fällt, so folgt daraus, daß die kleinste Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungslinie ist, als halbe große Axe diese gemeinschaftliche halbe Axe K O habe, und daß ihre kleine Axe Null sey. Sie vermischt sich daher mit der Linie A B, woraus sich ergiebt, daß der elliptische Hauptschnitt, welcher durch die größte und die kleinste Axe des Ellipsoids geht, selbst eine Krümmungslinie der Fläche sey. Nach Maasgabe als die große Axe der Ellipsen wächst, nimmt auch die kleine Axe derselben zu, und wenn die erste dieser Axen gleich der großen Axe des Ellipsoids ist, so fällt die entsprechende Ellipse mit dem elliptischen Hauptschnitte A B C D zusammen, welche folglich ebenfalls eine Krümmungslinie des Ellipsoids ist. Es wäre überflüssig größere Ellipsen zu konstruiren als diese Letztere, sie fielen sämmtlich außerhalb des Ellipsoides, und haben demnach keinen Bezug auf unsern Gegenstand.

Man sieht hieraus, daß jeder der zwey Scheitel O, O′ der Hülfsellipse und der Hülfshyperbel von derselben Seite durch alle Ellipsen umfaßt wird, welche sich immer mehr verengen, so wie ihre Scheitel sich denselben nähern, und welche ihre kleine Axe dann verlieren, wenn sie dieselben erreichen.

Was die Hyperbeln betrifft, so ist klar, daß keine derselben in der Richtung von A B eine größere Axe haben kann, als die Axe O O′. Diejenige, bey welcher die Axe diese Größe hat, hat ihre andere Axe Null, und fällt mit A B zusammen. Nach Maasgabe als diese Axe abnimmt, wächst die Andere, so daß, sobald diese Letztere die größt möglichste geworden ist, die Erstere ihrer Seits Null wird, und alsdann fallen die beyden Zweige der Hyperbel mit der Linie C D zusammen. Sonach ist der dritte elliptische Hauptschnitt ebenfalls, gleich den beyden Andern, eine Krümmungslinie des Ellipsoides. Jeder der gemeinschaftlichen Scheitel O, O′ der Hülfsellipse und Hülfshyperbel wird von allen Hyperbeln umfaßt, aber von der entgegengesetzten Seite, von welcher die Ellipsen dieselben umfassen. Die Hyperbeln verengen sich nach dem Maaße, als sie sich jenen Punkten nähern, und sie verlieren ihre kleine Axe, so wie ihr Scheitel dieselben erreicht.

453. Diese Punkte O, O′, gegen welche die Ellipsen und die Hyperbeln ihre Höhlung drehen, sind die Projektionen von vier merkwürdigen Punkten der Fläche; zwey derselben liegen oberhalb der Ebene der Axen A B, C D, und zwey unterhalb derselben. Es sind dieses vier Näbel, um welche die Linien der zwey Krümmungen gebogen sind, und zwar die des einen Systems von der einen, und die des andern Systems von der entgegengesetzten Seite. Diese Linien verengen sich, nach dem Maaße, als sie sich denselben nähern, und so wie sie sie erreicht haben, wechseln sie ihre Art.

Die meisten andern Flächen haben solche Näbel, ähnlich den so eben auf dem Ellipsoide bemerkten. Es sind dieses diejenigen Punkte, in denen die Linien der zwey Krümmungsarten sich ineinander umändern, und bey denen folglich die zwey Krümmungslinien zusammenfallen.

454. Die Konstruktionen der Punkte O, G, der Endpunkte der gemeinschaftlichen Axen der Hülfsellipse und der Hülfshyperbel sind in der Fig. 2 angegeben. Es sey A D die Hälfte des ersten Hauptschnittes, durch die größte und mittlere Axe, F, F seine Brennpunkte; A V e ein Viertel der vertikalen Ellipse, welche durch die größte und kleinste Axe geht, f, f ihre Brennpunkte. D U E die Ellipse, welche durch die mittlere und kleinste Axe geht, und f, f ihre Brennpunkte. Um den Punkt O zu konstruiren, trage man K f und K F auf die andere Axe von K nach f′ und F′, man ziehe die Gerade f B, und durch den Punkt F′ zu ihr die Parallele F′ O, welche durch ihr Zusammentreffen mit der Axe A B den Punkt O bestimmt. Eben so trage man K f auf der andern Axe von K nach f'; man ziehe die Gerade f' D, und durch den Punkt F zu ihr die Parallele F G, welche durch ihren Durchschnitt mit der verlängerten Axe K D den Punkt G bestimmt.

455. Die Projektionen der Krümmungslinien des Ellipsoids auf der Ebene der großen und mittleren Axe, welche Ebene wir als horizontal angenommen haben, sind krumme Linien von zweyerley Art, nemlich Ellipsen und Hyperbeln. Der gleiche Fall, und die ganz analogen Konstruktionen finden bey der Projektion dieser Linien auf der Ebene der kleinsten und mittleren Axe statt. Wählt man aber die Ebene, welche durch die größte und die kleinste Axe geht, so sind die Projektionen aller Krümmungslinien von der gleichen Art, und ihre Konstruktion eignet sich besser zur Anwendung in den Künsten.

456. Nachdem man daher über $A' B'$ Fig. 3. als größter, und über $E' E$ als kleinster Axe des Ellipsoids den mittleren elliptischen Hauptschnitt $A' E' B' E$ konstruirt hat, dessen Ebene wir als vertikale Projektionsebene annehmen, bestimme man den Viertelsbogen $a\ b\ c\ d$ einer mit $A' E' B' E$ konzentrischen Ellipse, wozu das Einzelne in der Figur 4 konstruirt ist, welche wir sogleich erklären werden. Aus irgend einem Punkte b dieser Hülfsellipse fälle man auf die, wenn es nöthig ist verlängerten Axen $A' B$, $E' E$ die Senkrechten $b\ t$, $b\ e$ so bestimmen die Fußpunkte t, e dieser Senkrechten auf den entsprechenden Axen die Scheitel und die halben Axen $K'\ t$, $K\ e$ einer Ellipse $e\ t\ e'\ x$. Diese Ellipse ist die Projektion einer Krümmungslinie, und die Reihe aller, auf die nemliche Weise konstruirten Ellipsen ist die Projektion der zwey Reihen von Krümmungslinien der ganzen Fläche des Ellipsoids.

457. Um die Vertikalprojektion einer Krümmungslinie zu finden, welche horizontal nach einer Hyperbel $R\ P\ R'$, $S\ P'\ S'$ projektirt ist, bringe man den Punkt R der Hauptellipse ($A\ B\ C\ D$, $A'\ B'$) in Vertikalprojektion nach r, und errichte aus r auf $A'\ B$ eine Senkrechte $r\ b$, welche die Hülfsellipse $a\ b\ c\ d$ in einem Punkt b schneidet. Indem man bey diesem Punkt b wie oben angegeben arbeitet, findet man die Ellipse $e\ x\ e'\ t$, welche die Vertikalprojektion derselben Krümmungslinie enthält, der als Horizontalprojektion die Hyperbel $R\ P\ P'$, $S\ P'\ S'$ entspricht.

Man erhält die Vertikalprojektion einer Krümmungslinie, welche auf der Horizontalebene nach einer Ellipse $M\ N\ M'\ N'$ projektirt ist, wenn man den Punkt dieser Ellipse, welcher sich nach M projekirt, und nach Z auf die Hauptellipse $E\ Z\ H$ zurückleget, mittelst des Kreisbogens $z\ m$ in Vertikalprojektion nach m bringt, und sodann durch diesen Punkt eine zu $A\ E\ B'\ E'$ koncentrische Ellipse führt, deren halbe Axen $K'\ m$, $K'\ i$ durch die Hülfsellipse $a\ b\ c\ d$ und durch die, wechselsweise auf $A'\ B'$ und auf $E'\ E$ senkrechten Geraden $m\ c$, $i\ c$ bestimmt werden. Die Bögen $n\ m\ n'$, $n''\ m'\ m'''$ dieser Ellipse $f\ m\ i\ m'$ sind die Vertikalprojektionen zweyer, horizontal in $M\ N\ M'\ N'$ projektirter Krümmungslinien des Ellipsoids.

458. Da die zwey Halbaxen $K'\ a$, $K\ d$ der Hülfsellipse größer sind als die korrespondirenden Halbaxen des mittleren Hauptschnittes $A'\ E\ B'\ E'$, so ist diese Letztere ganz in der Ersten eingeschlossen. Ueberdies ist die Ellipse $A'\ E\ B'\ E'$ selbst eine Krümmungslinie des Ellipsoids (Art. 452.); wenn man daher an den Endpunkten $E\ B'$ der zwey Axen dieser Ellipse zu ihr die Tangenten $E\ g$, $B'\ g$ zieht, so müssen diese Tangenten, welche außerdem senkrecht unter sich sind, in einem Punkte g der Hülfsellipse $a\ b\ c\ d$ zusammentreffen. Dieser Begegnungspunkt g theilt den Viertelsbogen $a\ b\ d$ der Hülfsellipse in zwey Theile, von denen der Eine zur Konstruktion der Linien der einen Krümmung dient, und der Andere zur Konstruktion der Linien der zweyten Krümmung.

In der That bringt das Stück $d\ g$ der Hülfsellipse, welches ihrer großen Axe anliegt, Ellipsen hervor, welche ihre großen Axen größer, und ihre kleinen Axen kleiner haben, als die entsprechenden Axen $A'\ B'$, $E\ E'$ der Hauptellipse.

Diese Ellipsen, welche immer enger werden, nach Maasgabe als ihre große Axe sich verlängert, und welche mit der Linie $A'\ B'$ zusammenfallen, so wie ihre große Axe gleich jener der Hülfsellipse $a\ b\ c\ d$ geworden ist, theilen den Flächenraum der Hauptellipse $A'\ E\ B'\ E'$ in Zonen, deren Lage die Richtung der Axe $A'\ B'$ hat. Derjenige Theil der Viertelsellipse $a\ b\ c\ d$, welcher an ihre kleinen Axe $a\,a'$ anliegt, erzeugt Ellipsen, bey denen sämmtlich ihre nach A′ B′ gerichteten Axen kleiner, und ihre nach $a\,a'$ gerichteten Axen größer sind, als die korrespondirenden Axen der Hauptellipse A′ E B′ E′. Diese Ellipsen, welche immer enger werden, nach Maasgabe als ihre Axe in der Richtung von E E′ wächst, und welche mit der Linie E′ E zusammenfallen, wenn diese Axe gleich jener der Hülfsellipse geworden ist, theilen den Flächenraum der Hauptellipse in Zonen, die nach der Linie $a\,a'$ gerichtet sind; und jede von ihnen schneidet alle Ellipsen der ersten Art in vier von der Hauptellipse eingeschlossenen Punkten. O″, O‴, O⁗, O′⁗ sind die vier Näbel, welche in dieser Projektion auf der Begränzungslinie der Fläche liegen.

459. Wenn man durch die Endpunkte der Axen der Hülfsellipse vier Gerade $d\,a$, $a\,d'$, $d'\,a'$, $a'\,d$ zieht, welche zu zwey und zwey parallel sind, so berührt jede von ihnen alle Projektionen der Linien der zwey Krümmungen, so daß alle Ellipsen, welche diese Projektionen bilden, in einen Rhombus eingeschrieben sind.

460. In Betreff der Endpunkte d, a der Axen der Hülfsellipse $a\,b\,c\,d$ Fig. 3, so sind die erfoderlichen Konstruktionen in der Figur 4 angegeben. Es sey A′ B′ die große Axe des Ellipsoids, K′ D′ die Hälfte der mittleren, und K′ E die Hälfte der kleinen Axe, F, F die Brennpunkte der großen Ellipse, von welcher A′ S D ein Viertelsbogen ist, f, f die Brennpunkte der mittleren Ellipse A′ O E, und f ein Brennpunkt der kleinen Ellipse D U e. Um den Scheitel d der Hülfsellipse $a\,c\,d$ zu konstruiren, trage man K′ F und K′ f auf der andern Axe von K′ nach F′ und f′. Man ziehe F′ B′, und durch den Punkt f′ die Parallale f′ d welche durch ihr Zusammentreffen mit der verlängerten Axe A′ B′ den Punkt d bestimmt. Auf gleiche Weise trage man für den andern Endpunkt a, die K′ f auf der A′ B′ von K′ nach f'; ziehe die Gerade f' E, und durch den Punkt f die Parallele f a, welche durch ihre Begegnung mit der verlängerten Axe K′ E den Punkt a bestimmt.

461. Wenn ein in Horizontalprojektion durch eine Ellipse umschriebener Raum überwölbt werden sollte, so würde man dem Gewölbe keine passendere Oberfläche geben können, als die Hälfte eines Ellipsoides, dessen eine Hauptellipse mit der Ellipse des Ursprungs zusammenfiele; und wenn man annimmt, daß das Gewölbe aus Werkstücken aufgeführt werden sollte, so müßte die Abtheilung in Gewölbsteine nach den Krümmungslinien geschehen, wovon wir die Konstruktion gegeben haben, und die Fugen müßten die, auf das Gewölbe normalen aufwickelbaren Flächen seyn. Die Abtheilungslinie in Gewölbsteine würden auf der Oberfläche rechtwinklige, und der Verzierung fähige Felder zeichnen, und diese Felder selbst hätten nichts fantastisches, weil sie nur eine nothwendige Folge der ersten Angabe wären, welche eine Ellipse ist; aber die Bestimmung dieses Gebäudes könnte Einfluß haben auf die Wahl derjenige von den drey Axen, welche vertikal zu stellen wäre.

Es ist kein Grund vorhanden, um die vertikale Axe mit einer der zwey horizontalen Axen gleich zu machen; die drey Axen wären also ungleich. In dieser Hypothese könnte die vertikale Axe größer als die beyden Andern seyn, und alsdann wäre das Gewölbe ein überhobenes, sie könnte kleiner seyn, und das Gewölbe wäre ein gedrücktes, sie könnte zwischen den beyden Andern gefaßt seyn, und das Gewölbe wäre ein mittleres. Das überhobene Gewölbe hat im All.

gemeinen mehr Kühnheit und Würde, und wenn der Ursprung selbst schon in einer bedeutenden Höhe läge, so müßte man, welches außerdem auch die Bestimmung des Gebäudes seyn möchte, das überhobene Gewölbe wählen, weil die große Erhöhung desselben, da sie seine vertikalen Dimensionen kleiner scheinen macht, als sie wirklich sind, ein Gewölbe anderer Art zu sehr erdrücken würde. Das gedrückte Gewölbe, indem es die in dem Platze eingeschlossene Luftmasse vermindert, wäre viel günstiger für die Stimme eines Redners. Wenn das Gebäude durch zwey, an dem Gewölbe aufgehängte große Leuchter erhellt werden sollte, so müßte dieses Gewölbe entweder überhoben oder gedrückt seyn, weil seine Oberfläche in diesem Falle zwey Näbel hätte, die symetrisch über der großen Axe der horizontalen Ellipse gelegen wären, und weil diese, durch die um sie her vertheilten Felder sehr hervorstechend gemachten Näbel, die natürlichen Aufhängepunkte wären. Man könnte alsdann das Verhältniß unter den drey Axen so einrichten, daß diese Punkte in den gehörigen Abstand voneinander gesetzt würden.

Wenn dagegen das Gebäude vier große Oeffnungen haben, oder wenn das Gewölbe durch vier Gruppen von Säulen getragen werden sollte, oder endlich, wenn man zu der innern Verzierung vier symetrisch gestellte große Unterstützungen anbringen wollte, so müßte man das mittlere Gewölbe erwählen, bey welchem die vier Näbel immer in dem Ursprunge liegen, und man müßte die vier Grundmauern, oder Unterstützungen an die vier Endpunkte der Axen versetzen, weil in der Umgebung dieser Punkte und entfernt von den Näbeln, die durch die Verzierungen des Gewölbes hervorstechend gemachten Krümmungslinien, welche übrigens sämmtlich senkrecht auf den Ursprung treffen, sich langsamer von der Linie des größten Falles der Oberfläche entfernen.

Man beschäftigt sich gegenwärtig mit der Erbauung der Säle für die zwey Räthe der Gesetzgebung *): diejenigen Plätze, worüber man bisher für dergleichen Säle disponiren konnte, zwangen dazu dem Amphitheater weniger Tiefe, vorwärts des Redners zu geben, als auf den Seiten; da aber die Erfahrung bewiesen hat, daß die Stimme sich nach vorwärts auf eine größere Weite verbreitet, so scheint es, daß man eine gerade entgegengesetzte Einrichtung annehmen müsse. Von allen länglichten Formen, welche man dem Amphitheater geben könnte, giebt es keine, deren Gesetz einfacher und gefälliger wäre, als die Ellipse. Der Saal müßte daher elliptisch seyn, und durch ein Gewölbe in Form eines gedrückten Ellipsoids bedeckt werden.

Der Dienst der gesetzgebenden Versammlungen, erfodert ein Emplacement für das Bureau, vor welchem sich die Tribune des Redners befindet. Legt man das Bureau an einen Scheitel der Ellipse, so kann man demselben einen, zur Bequemlichkeit des Dienstes hinreichenden Raum widmen, und der Redner fände seine Stelle ganz natürlich unter einem Nabel des Gewölbes: das Amphitheater näme nur den vorwärts befindlichen Raum ein. Eine Gallerie, die um den ganzen Saal liefe, und welche hinreichend erhöht wäre, um von dem Amphitheater durchaus unterschieden zu seyn, lieferte Plätze für das Publikum. Der Saal, welcher weder Tribunen, noch irgend eine Art von Unregelmäßigkeit hätte, könnte durch Säulen geschmückt werden, deren jeder eine Rippe des Gewölbes entspräche, welche nach der aufsteigenden Krümmungslinie gebogen wäre. Alle diese, in ihrem Ursprunge vertikalen Rippen, krümmten sich um den einen oder den andern Nabel,

*) Diese Stelle wurde im Jahre III. (1794) der französischen Republick geschrieben.

um sodann lothrecht auf die gegenüberstehenden Säulen herabzufallen; und sie würden von andern Rippen, die nach den Linien der andern Krümmung gebogen waren, rechtwinklig durchkreuzt. Die Zwischenräume dieser Rippen könnten durchbrochen seyn, um entweder den Saal zu erhellen, oder um der Luft Ausgang zu verschaffen, und sie würden ein weniger fantastisches Fensterwerk bilden, als die Rosen unserer gothischen Kirchen. Zwey an den Näbeln des Gewölbes aufgehängte große Leuchter, zu deren Aufhängung das ganze Gewölbe beyzutragen schiene, dienten zur Erleuchtung des Saales bey Nacht.

Wir wollen in dieser Hinsicht in keine größeren Einzelnheiten eingehen, indem es uns genügt, den Künstlern einen einfachen Gegenstand angegeben zu haben, dessen, obgleich sehr reiche Verzierung nichts Willkührliches haben kann, weil sie hauptsächlich darin besteht, vor allen Augen eine sehr gefällige Anordnung zu entfalten, die in der Natur des Gegenstandes selbst liegt.

462. Es bleiben uns noch einige Details der Fig 1 zu erklären, die sich auf obige Ideen beziehen.

Indem wir diejenigen Krümmungslinien, welche sich auf der Horizontalebene als Ellipsen, wie M N M′ N′ projektiren, als solche betrachteten, welche die Oberfläche des Gewölbes in Gewölbsteine abtheilten, war es erforderlich, daß die Höhen der aufeinanderfolgenden Schichten so wenig als möglich von einander differirten. Zu diesem Zwecke halben wir den haben Umfang der vertikalen Ellipse C D E in eine ungerade Anzahl merkbar gleicher Theile getheilt, und diese Theilpunkte, wie L auf die Axe C D projektirt, wodurch für jede entsprechende Krümmungslinie der Punkt M bestimmt wurde. Um sodann den andern Scheitel N der nemlichen Ellipse zu finden, braucht man nur M H parallel zu A B zu ziehen, dieselbe bis zu ihrer Begegnung mit der Hülfshyperbel zu verlängern, und durch den Begegnungspunkt H, auf A B die Senkrechte H N zu fällen, welche den Punkt N bestimmt.

463. Bey der Annahme, daß das Gewölbe verziert werden soll, und daß daher die aufsteigenden Krümmungslinien, welche nach den Hyperbeln projektirt sind, hervorstechend gemacht werden müssen, um entweder die Gurthen zu markiren, welche den Säulen der griechischen Architektur entsprechen, oder um die Rippen zu zeichnen, welche den Pfeilern der gothischen Architektur angehören, so müssen jene Säulen in dem einen Falle, oder diese Pfeiler, in dem Andern, in gleiche Abstände gestellt, und die Hyperbeln müssen die Ellipse A D B C des Ursprungs in merkbare gleiche Theile theilen; alsdann ist der Punkt R dieser Ellipse, durch welchen jede Hyperbel gehen muß, im Voraus bestimmt. Um in diesem Fall den Scheitel P derselben Hyperbel zu finden, fälle man aus dem Punkt R, Fig 2, auf A B die Senkrechte R T, man ziehe die Gerade F′ T, und durch den Punkt F′ führe man zu dieser Letzten die Parallele F′ P, welche die Axe A B in dem Punkt P schneidet. Was den Endpunkt Q der andern Axe betrifft, so bestimmt man denselben, indem man O L senkrecht auf A B errichtet, und durch L die L Q senkrecht auf die andere Axe K D zieht: der Fußpunkt Q dieser Senkrechten ist der gesuchte.