Gestalt unserer Mühlsteine einer schnellen Zerstörung unterliegt; wodurch man genöthigt wird, diese Gestalt oft zu erneuern, oder wie man sagt, die Mühlsteine zu schärfen, damit sie wieder gut zu mahlen anfangen. Die Kunst ist also hier weit unter der Natur. Von dieser Idee ausgehend, hat Herr Molard, Mitglied des Instituts von Frankreich, sich damit beschäftigt, Maschinen zum Zermalmen zu bilden, bey welchen er die Mahlzähne der Pferde zum Muster nahm, und er hatte nicht mehr nöthig, diese mahlende Theile zu schärfen, um zu verhindern, daß die Zerreibung unvollkommen würde.

Die Industrie ist daher selbst dabey interessirt, daß die Anatomen, die Geometer und die Mechaniker gemeinsam die Dimensionen, die Krümmungen und die Verrichtungen der verschiedenen Theile der Thiere studieren.

442. Kehren wir nun von diesen allgemeinen Betrachtungen über die Wichtigkeit des Studiums der Krümmungen der Flächen *), zu unserm Gegenstand zurück. In dem Vorhergehenden haben wir die Krümmungen der Flächen nur in ihren verschiedenen Elementen examinirt, wir wollen die Krümmungen nun auf der ganzen Ausdehnung der Flächen betrachten.

Von den Krümmungslinien der Flächen.

443. Es sey (Taf. XLII. Fig. 7.) irgend ein krummes Flächenstück, auf welchem wir zuerst einen willkührlich genommenen Punkt L betrachten wollen. Denken wir uns die Normale zu der Fläche in L; so haben wir gesehen, daß man in zwey verschiedenen Richtungen, von dem Punkt L nach einem andern Punkt M oder L′ übergehen kann, bey welchem die neue Normale der Ersten begegnet, und daß diese zwey Richtungen im rechten Winkel auf der Fläche sind. Es seyen daher L M und L L′ diese zwey, in L rechtwinkligen Richtungen. Von dem Punkte M aus kann man sofort in zwey verschiedenen Richtungen nach einem andern Punkte N oder M′ übergehen, bey welchem die Normale der Normalen in M begegne, und es seyen M N, M M′ diese zwey in M rechtwinkligen Richtungen. Indem man auf dieselbe Weise bey dem Punkt N arbeitet, wird man die zwey Richtungen N O und O O′ erhalten u. s. w. fort. Die Reihe der Punkte L, M, N, O, P.... ꝛc., bey welchen zwey aufeinanderfolgende Normalen immer in einer Ebene sind, bildet auf der krummen Fläche eine krumme Linie, welche beständig die Richtung einer der zwey Krümmungen der Fläche anzeigt, und diese Kurve ist eine Linie der ersten Krümmung, welche durch den Punkt L geht. Wenn man eben

*) Siehe Dupin Géométrie des Arts et Métiers, Tom I. Leçon 15me.

so bey dem Punkte L′ arbeitet, wie wir es bey dem Punkt L gethan haben, so wird man zuerst nach zwey, unter sich rechtwinkligen Richtungen zu einem neuen Punkt M′ oder L″ übergehen können, bey welchem die neue Normale der Normalen in L′ begegnet, und man wird auf gleiche Weise eine neue Reihe von Punkten L′, M′, N′, O′, P′.... rc. finden, welche auf der krummen Fläche eine andere Linie der ersten Krümmmung bilden, die durch den Punkt L′ geht. Arbeitet man eben so bey der Folge von Punkten L″, L‴, L⁗......, die wie die L, L′ gefunden wurden, so erhält man neue Linien der ersten Krümmung L″ M″ N″ O″ P″, L‴ M‴ N‴ O‴ P‴.... rc., welche durch die respektiven Punkte L″, L‴, L⁗... rc. gehen, und welche die krumme Fläche in Zonen abtheilen. Aber die Reihe der Punkte L, L′, L″, L‴, bey denen je zwey aufeinanderfolgende Normalen ebenfalls in einer Ebene sind, bildet auf der krummen Fläche eine andere Kurve, welche beständig die Richtung der andern Krümmung der Fläche anzeigt, und diese Kurve ist die Linie der zweyten Krümmung. M, M′, M″, M‴,.... rc. bildet eben so eine andere Linie der zweyten Krümmung, welche durch den Punkt M geht; die Reihe der Punkte N, N′, N″, N‴... rc. bildet eine neue Linie der zweyten Krümmung, welche durch den Punkt *N* geht, u. s. w. fort; und alle diese Linien der zweyten Krümmung theilen die Fläche in andere Zonen.

Endlich schneiden alle Linien der ersten Krümmung die Linien der zweyten Krümmung in rechten Winkeln, und diese zwey Systeme krummer Linien theilen die Fläche in rechtwinklige Elemente, und diese Wirkung findet nicht nur alsdann statt, wenn jene Linien unendlich nahe sind, wie wir es angenommen haben, sondern auch dann noch, wenn die Linien eines Systems in endlichen Entfernungen von einander sind. Wir wollen davon einige Beyspiele anführen, mit welchem wir schon vertraut sind.

444. Wenn man irgend eine Umdrehungsfläche mittelst einer Reihe, durch die Axe geführter Ebenen schneidet, so erhält man eine Reihe von Schnitten, welche die Linie der einen Krümmung der Fläche sind. Denn, damit eine Kurve Krümmungslinie einer Fläche sey, ist es erfoderlich, daß in jedem ihrer Punkte das Element der Cylinderfläche, welche die Fläche in dem Elemente der Kurve berührt, seine gerade Erzeugungslinie rechtwinklig auf die Kurve habe. Nun aber findet diese Bedingung hier nicht nur in jedem Punkt der Kurve für ein Element einer besondern Cylinderfläche statt, was hinreichend wäre, sondern in Bezug auf die ganze Kurve für eine nemliche Cylinderfläche.

Ueberdem, wenn man dieselbe Umdrehungsfläche durch eine Reihe auf die Axe senkrechter Ebenen schneidet, so erhält man eine zweyte Reihe von Schnitten, welche sämmtlich kreisförmig sind, und welches die Linien der andern Krümmung sind. Denn wenn man durch einen Punkt irgend eines dieser Schnitte sich die Tangente zu dem Meridian der Fläche denkt, und wenn man annimmt, daß diese Tangente sich parallel zu sich selbst bewege, um ein Element einer, die Fläche tangirenden Cylinderfläche zu erzeugen, so wird das Element der Cylinderfläche die Umdrehungsfläche nach dem Kreisbogen berühren, und dieser Bogen wird senkrecht auf die gerade Erzeugungslinie seyn.

Sonach sind bey irgend einer Umdrehungsfläche die Krümmungslinien der einen Art der Krümmung die Meridiane der Fläche, und die Linien der andern Krümmung die Parallelen, und es ist einleuchtend, daß diese zwey Reihen von Kurven sich sämmtlich senkrecht auf der Fläche durchschneiden.

445. In Betreff der aufwickelbaren Fläche, haben wir bereits (Art. 432) gesehen, daß bey denselben die aufeinanderfolgenden Normalen längs den Punkten einer ihrer geraden Erzeugungslinien immer in einer nemlichen Ebene sind. Die geraden Erzeugungslinien sind daher bey diesen Flächen zugleich auch die Linien der einen Krümmung, welche Krümmung in der Richtung derselben Geraden unendlich klein oder Null ist.

Die Linien der größten Krümmung der aufwickelbaren Flächen sind sofort leicht zu finden, weil diese Linien durch die Bedingung bestimmt sind, daß sie auf der Fläche das System der geraden Erzeugungslinien, als den Linien der kleinsten Krümmung in allen Punkten senkrecht durchschneiden. Bey den Cylindern sind daher die geraden Schnitte derselben, das heißt die Schnitte durch Ebenen, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien sind, die Linien der größten Krümmung. Diese Linien der größten Krümmung sind bey den Kegelflächen die koncentrischen sphärischen Schnitte, nemlich die Schnitte der Fläche durch Reihen von Kugeln, welche ihren gemeinsamen Mittelpunkt in den Scheiteln der Kegel haben. Bey allen übrigen aufwickelbaren Flächen sind die auf den Flächen gezogenen Evolventen ihrer Rückkehrkanten, welche das System ihrer geraden Erzeugungslinien, überall unter rechten Winkeln durchschneiden (Art. 417) die Linien ihrer größten Krümmung.

Von den geometrischen Oertern der Normalen und der Krümmungsmittelpunkte der Flächen.

446. (Taf. XLII. Fig. 7.) Wenn man an allen Punkten einer von den Krümmungslinien L M N O P einer Fläche sich die Normalen zu der Fläche denkt, so haben wir gesehen, daß die zweyte Normale der Ersten in einem gewissen Punkte begegne; daß die Dritte der Zweyten in einem andern Punkte begegne, und so fort; das System dieser Normalen, deren zwey und zwey immer in einer nemlichen Ebene sind, bildet daher eine aufwickelbare Fläche, welche überall senkrecht auf die krumme Fläche ist, und dieselbe nach der Krümmungslinie schneidet. Diese Krümmungslinie, da sie selbst überall senk-