descr. pag. 176 etc.), die Konstruktion der Evoluten einer Kurve, die aus dem Durchschnitte eines Cylinders und einer Kugel entsteht, so wie einer cylindrischen Spirallinie. Wir führen übrigens, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesen Beyspielen keine an, und verweisen deßhalb die Leser auf die genannten Werke.

Zweytes Kapitel.

Von den Krümmungen der Flächen.

429. Dieser Gegenstand kann seiner Natur nach, mit weit größerer Leichtigkeit mittelst der Analysis behandelt werden, als durch blose Betrachtung der Eigenschaften der Ausdehnung: da aber die Resultate, zu welchen dieselbe führt, den Künstlern sehr nützlich seyn kann, von welchen wir nicht voraussetzen dürfen, daß sie mit den analytischen Operationen vertraut seyen, so werden wir dieselbe darzustellen suchen, indem wir blos geometrische Betrachtungen anwenden. Diese Methode wird zwar die ihr eigene Klarheit mit sich führen, aber auch eine gewisse Langsamkeit in ihrem Gange.

Die Flächen können in Bezug auf ihre Krümmungen in drey große Klassen abgetheilt werden. Die erste umfaßt diejenigen, welche in allen ihren Punkten gar keine Krümmung haben: die Fläche dieses Geschlechtes reduziren sich auf die Ebene, die übrigens auf beliebige Art im Raume gelegen seyn kann. Die zweyte Klasse schließt alle diejenigen ein, die in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Krümmung haben; dies sind im Allgemeinen die aufwickelbaren Flächen, von denen zwey aufeinanderfolgende Elemente betrachtet werden können, als seyen sie Theile einer Kegelfläche, selbst wenn man die Größe dieser Elemente als unbestimmt in der Richtung der Kanten der Fächen betrachtet. Alle übrigen Flächen endlich bilden die dritte Klasse; sie haben in jedem ihrer Punkte zwey unterschiedene Krümmungen, die sich, unabhängig von einander, ändern können. Wir wollen damit anfangen, die einfachsten Flächen zu betrachten, und zuerst die Cylinderflächen.

430. Es sey A B F E (Taf. XLII. Fig. 4.) eine unbegränzte Cylinderfläche, von beliebiger Grundlinie, auf der man einen willkührlich genommenen Punkt L betrachte. Durch diesen Punkt denke man sich die gerade Erzeugungslinie C L G und einen Schnitt J L K, der durch eine auf die Erzeugungslinie rechtwinklige Ebene gemacht ist; dieser Schnitt ist parallel und ähnlich mit der Basis der Fläche. Endlich denken wir uns

durch den Punkt L zu der Fläche die Normale L P; diese Normale muß rechtwinklig auf die Erzeugungslinie C G seyn, und folglich in der Ebene des Schnittes J K L; überdies muß sie rechtwinklig seyn auf die Tangente des Schnittes am Punkt J, oder, was beyde Bedingungen zusammen einschließt, sie muß rechtwinklig seyn auf die tangirende Ebene zu der Fläche in L.

Dieses festgesetzt, wenn man auf der Fläche zwey andere, dem Punkt L unendlich nahe Punkte nimmt, den einen M auf der Erzeugungslinie C G, den andern N auf dem rechtwinkligen Schnitt, und wenn man durch jeden dieser Punkte eine neue Normale zu der Fläche führt, so ist jede dieser zwey neuen Normalen M Q, N P in einer Ebene mit der ersten Normale L P, aber diese Ebenen sind für die zwey letzten Normalen verschieden. In der That, da die tangirende Ebene zu der Fläche in L auch tangirend in M ist, so sind die zwey Geraden L P, M Q rechtwinklig auf die nemliche Ebene; sie sind daher parallel unter sich, und folglich in einer nemlichen Ebene. Diese parallelen Geraden können als im Unendlichen zusammenlaufend betrachtet werden. Was die Normalen L P, N P betrifft, so sind diese offenbar in der Ebene des rechtwinkligen Schnitter gelegen, sie werden daher in irgend einem Punkt P derselben Ebene zusammenlaufen: die Ebenen, welche die drey Normalen zu zwey und zwey enthalten, sind demnach nicht nur verschieden, sondern rechtwinklig aufeinander.

431. Welchen andern Punkt O man nun auf der Fläche, unendlich nahe bey dem ersten Punkte L nehmen möge, so ist, wenn man sich durch denselben Punkt zu der Fläche eine Normale O Q denkt, diese Normale nicht in einer Ebene mit der ersten Normale L P, und kann dieser folglich nicht begegnen: denn wenn man durch den Punkt O einen neuen Schnitt *i* O *k* rechtwinklig auf die Fläche annimmt, welcher die durch den Punkt L gehende gerade Erzeugungslinie in einem Punkt M schneidet, so wird die Normale O Q in der Ebene dieses Schnittes liegen. Die zwey Normalen L P und O Q, sind daher in zwey parallelen Ebenen, und können selbst nicht in einer nemlichen Ebene liegen, außer wenn sie parallel unter sich wären; dieses sind sie aber nicht. In der That, wenn man sich die Normale an dem Punkte M denkt, so haben wir gesehen, daß diese Normale M Q parallel zu L P seyn muß, aber sie ist nicht parallel zu O Q: daher sind die Normalen L P und O Q nicht parallel unter sich; daher sind sie nicht in einer nemlichen Ebene; daher können sie sich niemals begegnen.

432. Es ist sonach ersichtlich, daß wenn man, nachdem man durch einen beliebigen Punkt einer Cylinderfläche eine Normale zu der Fläche gezogen hat, zu einem andern, unendlich nahen Punkt übergehen will, bey welchem die neue Normale mit der vorhergehenden in einer nemlichen Ebene seyn soll, und ihr begegnen könne, selbst im

Unendlichen, wenn dieses nöthig ist, man dasselbe nur nach zwey verschiedenen Richtungen thun könne: 1tens, indem man der Richtung der geraden Erzeugungslinie der Fläche folgt, und alsdann begegnet die neue Normale der ersten im Unendlichen; 2tens, indem man dem rechtwinklichen Schnitt auf die Fläche folgt, und alsdann begegnet die neue Normale der Ersten in einem Punkt, dessen Entfernung von der Krümmung der Basis in dem entsprechenden Punkte abhängt; endlich, daß diese zwey Richtungen im rechten Winkel untereinander auf der Fläche sind.

Die zwey Begegnungspunkte der drey Normalen sind daher die einzigen möglichen Krümmungsmittelpunkte des auf der Fläche betrachteten Elementes; die zwey verschiedenen Ebenen, welche durch die erste Normale gehen, und durch jede der beyden Andern, zeigen die Richtungen jeder von diesen Krümmungen an; die Entfernungen des Punkts der Fläche von den zwey Begegnungspunkten der Normalen sind die Halbmesser der zwey Krümmungen; und man sieht, daß da bey den Cylinderflächen einer dieser Halbmesser immer unendlich ist, während die Größe des Andern von der Natur der Grundlinie der Fläche abhängt, es in jedem ihrer Punkte nur eine endliche Krümmung gebe; die Andere ist stets unendlich klein oder Null.

Das so eben Gesagte kann leicht auf alle aufwickelbaren Flächen angewendet werden, von denen zwey aufeinanderfolgende, und in der Richtunng der geraden Erzeugungslinie unbegränzte Elemente betrachtet werden können, als gehörten sie einer gewissen Cylinderfläche an. Wir wollen nun zu dem allgemeinen Falle beliebiger krummen Flächen übergehen.

433. Es sey A B C D (Taf. XLII. Fig. 5.) irgend eine krumme Fläche, auf welcher man einen beliebig genommenen Punkt L betrachte, und durch diesen Punkt L sey eine Gerade F L f tangirend an die Fläche geführt: die Stellung dieser Geraden ist nicht bestimmt; sie kann auf beliebige Art in der tangirenden Ebene zu der Fläche am Punkt L gezogen seyn.

Denken wir uns sofort die Gerade F f bewege sich dergestalt, daß sie immer parallel zu sich selbst, und immer tangirend zu der krummen Fläche bleibe; so wird sie durch ihre Bewegung nur gewisse Cylinderfläche beschreiben, deren Basis von der Gestalt der krummen Fläche abhängt, und welche diese krumme Fläche nach einer krummen Linie L C K A L berührt, die selbst durch die Bewegung des Berührungspunkts der geraden Erzeugungslinie mit der krummen Fläche erzeugt ist. Diese Berührungskurve L C K A L ist im Allgemeinen von doppelter Krümmung.

434. Bey dem besondern Fall der Fläche vom zweyten Grad, ist die Berührungs-

linie derselben mit einer sie umhüllenden Cylinderfläche eine ebene Kurve, welches übrigens auch die Richtung der Erzeugungslinie der Cylinderfläche seyn mag.

Bey dem etwas allgemeinen Falle, wo die krumme Fläche durch die Bewegung einer ebenen krummen Linie erzeugt ist, die fest in ihrer Ebene, aber beweglich mit ihr ist, wenn dieselbe auf zwey gegebenen krummen Flächen rollt, giebt es für jeden Punkt der Fläche eine, der geraden Erzeugungslinie zu gebende Richtung, damit die Cylinderfläche, welche durch die Bewegung dieser Geraden erzeugt ist, die Fläche nach einer ebenen Kurve berühre, und diese Richtung muß so seyn, daß die Gerade immer senkrecht auf die bewegliche Ebene ist, wenn diese durch den betrachteten Punkt geht. Die Umdrehungsflächen bilden hievon einen besondern Fall. Denn in der That, kann jeder Meridianschnitt eine Umdrehungsfläche als die Grundlinie eines Cylinders genommen werden, dessen Kanten senkrecht auf die Ebene des Meridianes sind, und welcher die Fläche nach eben diesem Meridiane, und folglich nach einer ebenen Linie berührt.

435. In jedem andern Fall, wird eine, um irgend eine krumme Fläche umschriebene Cylinderfläche, diese Fläche nach einer krummen Linie L C K A L berühren, welche von doppelter Krümmung ist.

Da die Gerade F L *f* vorerst auf willkührliche Art in der tangirenden Ebene zu der Fläche am Punkt L gezogen war, so wird, wenn man sich durch den Punkt L die Tangente L U zu der Berührungslinie L C K A L denkt, diese Tangente mit der geraden Erzeugungslinie F L *f* einen Winkel F L U machen, welcher von der Beschaffenheit der krummen Fläche und von der Richtung, welche man der Geraden F L *f* nach Willkühr gegeben, abhängt. Nehmen wir an, daß, was in jedem besondern Fall immer möglich ist, die Richtung der Geraden F L *f* sich ändere, ohne daß diese Gerade aufhöre, am Punkt L tangirend zu der Fläche zu seyn, und daß sie sich nach dieser neuen Richtung parallel zu sich selbst bewege, indem sie beständig die Fläche berührt; so wird sie durch ihre Bewegung eine andere, um die Fläche umschriebene Cylinderfläche erzeugen, welche dieselbe nach einer andern Berührunglinie von doppelter Krümmung berührt; diese neue Berührungslinie wird abermals durch den Punkt L gehen, und ihre Tangente an diesem Punkt wird mit der neuen Richtung der geraden Erzeugungslinie einen, von dem ersten Winkel F L U verschiedenen Winkel bilden. Nehmen wir endlich an, man habe die Richtung der geraden Erzeugungslinie sich so lange ändern lassen, bis daß die, durch diese Gerade erzeugte Cylinderfläche, die Fläche nach einer Berührungslinie tangire, deren eigene Tangente in L rechtwinklig auf die gerade Erzeugungslinie sey.

Dieses festgesetzt, so sey (Taf. XLII. Fig. 6.) irgend eine krumme Fläche, auf welcher man zuerst einen Punkt L betrachte; es sey F L J eine die Fläche in L berührende Gerade, deren Richtung dergestalt genommen ist, daß, wenn man die Gerade parallel zu sich selbst bewegen läßt, und ohne daß sie aufhört die Fläche zu berühren, sie eine Cylinderfläche E F G H J K erzeuge, welche die Fläche in einer Kurve berühre, deren Tangente in L rechtwinklig auf F L J sey. Die Berührungslinie der Cylinderfläche mit der vorgelegten Fläche wird eine Kurve von doppelter Krümmung seyn; aber in dem Punkt L vermischt sich ihr Element mit dem Element L N, des in der Cylinderfläche gemachten Schnittes C N L D, dessen Ebene rechtwinklig auf die gerade Erzeugungslinie F L J ist. Die beyden Endpunkte L, N dieses Elementes, da sie der Berührungslinie angehören, liegen zu gleicher Zeit auf beyden Flächen: und wenn man durch diese Punkte L, N zu der Cylinderfläche zwey Normalen L P, N P zieht, so sind diese auch Normale zu der krummen Fläche. Nun aber sind diese zwey Normalen in einer nemlichen, auf die gerade Erzeugungslinie der Cylinderfläche rechtwinkligen Ebene, und müssen sich irgendwo in einem Punkte P begegnen, welcher der Krümmungsmittelpunkt des Bogens L N ist; wenn man daher auf irgend einer krummen Fläche zwey Punkte L, N nimmt, die auf der Berührungslinie dieser Fläche mit der Cylinderfläche gelegen sind, deren gerade Erzeugungslinie senkrecht auf das Element L N derselben Berührungslinie ist, so sind die, durch diese Punkte geführten Normalen zu der Fläche in einer nemlichen Ebene, und müssen sich in einem Punkte begegnen, welcher der Krümmungsmittelpunkt der Fläche ist, in der Richtnng der Ebene, welche die zwey Normalen enthält.

436. Wenn man auf der Geraden F L J einen Punkt m unendlich nahe bey dem Punkt L nimmt, und wenn man durch diesen Punkt m eine Normale zu der Cylinderfläche annimmt, so wird diese Normale parallel zu L P seyn, jedoch wird sie nicht normal seyn zu der krummen Fläche. Aber wenn man sich vorstellt, daß in der Ebene der Kurve A L M B, welche durch die Geraden F L und L P bestimmt ist, sich die Gerade F L J bewege, ohne aufzuhören die Fläche zu berühren, und die unendlich nahe Stellung f i nehme, so daß sie die Fläche in einem, dem Punkt L unendlich nahen Punkt M berühre; und wenn man annimmt, daß diese Gerade f M i sich parallel zu sich selbst bewege, indem sie beständig die Fläche berührt; so wird sie eine neue Cylinderfläche e f g h i k erzeugen, die, sowohl in der Gestalt, als in der Stellung unendlich wenig von der Ersten verschieden ist, und die Berührungslinie dieser neuen Cylinderfläche wird durch den Punkt M gehen. Die Normale M Q zu derselben Cylinderfläche an dem Punkt M wird auch Normale zu der krummen Fläche seyn; sie wird mit der ersten Normale L P in einer nemlichen Ebene seyn, weil sie beyde in der, durch die Geraden F L J, f M i bestimmten Ebenen sind; und diese Ebene wird rechtwinklig auf diejenige seyn, welche durch die zwey Normalen L P, N P geht. Die zwey Normalen L P und M Q begegnen

sich daher in einem gewissen Punkt R, welcher der Krümmungsmittelpunkt des Bogens L M ist, und folglich der Krümmungsmittelpunkt der Fläche in der Richtung der Ebene, welche durch die Geraden F L J, f M i geht.

Es ist daher ersichtlich, daß wenn man an einem, auf irgend einer krummen Fläche betrachteten Punkt L eine Normale zu der Fläche geführt annimmt, man immer nach zwey verschiedenen Richtungen zu einem andern Punkt M oder N übergehen könne, bey welchem die neue Normale mit der Ersten sich in einer nemlichen Ebene befindet, und daß diese zwey Richtungen, da sie in zwey unter sich rechtwinkligen Normalebenen sich befinden, selbst in rechten Winkeln auf der Fläche sind.

437. Diese zwey Richtungen sind nun im Allgemeinen die Einzigen, bey denen jene Begegnung statt finden kann; das heißt, daß wenn man auf der krummen Fläche in irgend einer andern Richtung zu einem bey dem Punkt L unendlich nahen Punkt O übergeht, und wenn man durch diesen Punkt die Normale O Q zu der Fläche führt, diese Normale nicht mehr in einer nemlichen Ebene mit der Normalen L P sey, und ihr folglich nicht begegnen könne.

In der That, denken wir uns, daß die zweyte Cylinderfläche dergestalt geneigt worden sey, daß ihre Berührungslinie mit der Fläche durch den Punkt O gehe, so wird der Bogen O M dieser Berührungslinie sich mit dem Bogen des senkrechten Schnittes C′ O M D′ der Cylinderfläche vermischen. Die zwey Normalen in O und M zu der Fläche sind auch normal zu der Cylinderfläche, sie sind daher in der Ebene des senkrechten Schnittes, und sie begegnen sich irgendwo in einem Punkt Q. Aber die Normale O Q wird der Normalen L P nicht gegegnen; denn damit diese zwey Normalen sich begegneten, müßte der Punkt Q der Normalen mit dem Punkt R zusammenfallen wo diese Normale auf die L P trifft, welches im Allgemeinen nicht geschieht, weil es eine Gleichheit zwischen den Krümmungen der zwey Bögen L M und L N voraussetzte, was im Allgemeinen nur bey gewissen Punkten einiger krummen Flächen statt findet. Zum Beyspiel, die Krümmung der Kugelfläche ist nach allen Seiten hin die gleiche, und in welcher Richtung man von irgend einem ihrer Punkte zu einem Andern, unendlich nahen übergehen mag, so sind die, durch diese Punkte geführten Normalen immer in einer nemlichen Ebene; und diese Fläche ist die Einzige, bey welcher diese Eigenthümlichkeit allen Punkten zukommt. In denjenigen Umdrehungsflächen, bey welcher die Erzeugungskurve die Axe rechtwinklig durchschneidet, ist die Krümmung am Scheitel ebenfalls nach allen Seiten hin die gleiche, und zwey aufeinanderfolgende Normalen sind immer in einer nemlichen Ebene: aber diese Eigenthümlichkeit findet nur bey dem Scheitel statt. Endlich giebt es krumme Flächen, bey denen diese Eigenthümlichkeit in einer gewissen Reihe von Punkten statt hat, welche auf der Fläche eine gewisse krumme Linie bilden: aber dieses geschieht nur allein bey den Punkten dieser Kurve; und bey allen andern Punkten der Fläche kann die neue Normale der Ersten nicht begegnen, wenn anders der Punkt der Fläche, durch welchen sie geht, nicht nach einer der zwey oben bestimmten Richtungen genommen ist.

438. Es folgt daraus, daß im Allgemeinen irgend eine krumme Fläche in jedem ihrer Punkte nur zwey Krümmungen hat; daß jede dieser Krümmungen ihren besondern Mittelpunkt hat, ihren besondern Halbmesser, und daß die zwey Bögen, auf welchen diese zwey Krümmungen zu nehmen sind sich im rechten Winkel auf der Fläche befinden. Die besondern Fälle, bey denen wie bey der Kugel, und bey den Scheiteln der Umdrehungsflächen, je zwey beliebige Normalen sich begegnen, sind keine Ausnahmen dieses Satzes. Es ergiebt sich daraus nur, daß in diesen Fällen die Krümmungen unter sich gleich, und daß die Richtungen, nach welchen sie zu schätzen sind, gleichgültig seyen.

439. Obschon die zwey Krümmangen einer krummen Fläche einander durch das Gesetz der Erzeugung der Fläche unterworfen sind, so erleiden sie doch von Einem Punkt der Fläche zu dem Andern Veränderungen, die entweder nach einerley Seiten, oder nach entgegengesetzten Seiten geschehen könne. Wir können uns in dieser Beziehung in keine zu großen Details einlassen; und wir begnügen uns nur zu bemerken: daß bey gewissen Flächen, wie die Sphäroide, die Ellipsoide, das elliptische Paraboloid, das Hyperboloid von zwey Netzen ꝛc. in jedem ihrer Punkte die beyden Krümmungen in der gleichen Richtung sind, das heißt, daß sie ihre Erhabenheiten (Convexitäten) nach derselben Seite wenden; daß bey einigen andern, in gewissen Punkten die beyden Krümmungen entgegengesetzte Richtungen haben, das heißt, daß die Eine ihre Höhlung und die Andere ihre Erhabenheit nach der nemlichen Seite kehrt, dieses findet zum Beyspiel statt bey den Kehlen der ringförmigen Flächen; daß bey einigen andern Flächen in jedem ihrer Punkte die beyden Krümmungen nach entgegengesetzten Seiten gewendet sind, wie bey dem Hyperboloid von einem Netz, dem hyperbolischen Paraboloid, und im Allgemeinen bey allen windischen Flächen; endlich daß bey einer besondern Fläche diese zwey entgegengesetzten Krümmungen in jedem Punkt gleich unter sich sind. Es ist dieses diejenige Fläche, deren Flächeninhalt ein Kleinstes ist.

440. Die abwechselnde Oberfläche des menschlichen Körpers zeigt alle diese angegebenen Arten von Krümmungen. So gehören die hervorstehenden Extremitäten, die Ferse, die Kniescheibe, das Knie, die Schulter, die Spitzen der Finger, unter diejenigen Flächen, welche ihre Krümmungen nach einerley Seiten gerichtet haben.

Ein Theil der Schenkel, der Beine und der Arme gehört zu den aufwickelbaren Flächen, welche nach einer Richtung gar keine Krümmung haben.

Endlich sehen wir solche Flächen, deren zwey Krümmungen nach entgegengesetzten Seiten gerichtet sind, wie in allen Gelenken der Arme, der Finger, der Achselhöle ꝛc. in der Anfügung des Kopfes und des Körpers mit dem Halse ꝛc.

Unter diesen allgemeinen Formen entdeckt das geübte Auge des Mahlers und des Bildners eine Menge von Nuancen in der Aufeinanderfolge, und in der Abstufung der Krümmungen eines jeden Theiles des Körpers. Je nachdem er diese Nuancen mit mehrerer oder minderer Treue wiedergiebt, bringt er Meisterwerke hervor, deren Wahrheit die Bewunderung der Kenner erregt, oder grobe Entwürfe, deren Unförmigkeit den aufgeklärten Beobachter zurückstößt.

Die Krümmungen der verschiedenen Theile der Oberfläche unseres Körpers hängen viel von der Gestalt der Knochen, der Nerven und der Muskeln ab, welche die Haut bedeckt. Der gründliche Zeichner soll sich demnach immer Rechenschaft geben von der Wahrheit der Formen, die er auszudrücken beabsichtigt, indem er dahin sieht, daß dieser Ausdruck die verborgenen aber bemerkbaren Formen errathen lasse.

Ein bemerkenswerther Fehler in den Werken mancher Künstler ist, daß sie gewisse Theile der Oberfläche unsres Körpers zu hervorspringend, zu gewölbt und gekrümmt machen, um damit bestimmter die anatomische Formen anzuzeigen. Diese Affektation ist nichts weiter, als ein, des Talentes großer Meister unwürdiger Charlatanismus.

Die Oberfläche unseres Antlitzes besitzt eine kostbare Beweglichkeit, welche viel von unserern inneren, vorübergehenden, oder beständigen Affekten abhängt. Die beständigen Affekte geben der Krümmung der beweglichen Theile, und selbst dem Ansehen der festen Theile dauernde Formen, welche durch fortgesetzte Beobachtung in ihren geringsten Abstufungen erkannt werden. Dieses sind die Charaktere der Physiognomien. Unsere vorübergehenden Affekte drücken unsern Zügen mehr oder minder ausgesprochene, mehr oder minder flüchtige Formveränderungen auf, und ihr Studium ist in dem Betrieb der schönen Künste ebenfalls von sehr großer Wichtigkeit; es bietet uns unendliche Mannigfaltigkeiten dar, unter denen der Mann von Genie die richtigen Formen zu wählen versteht, die dem lieblichen oder ernsten, dem erhabenen oder schrecklichen Charakter seiner Kompositionen am besten entsprechen.

Wir müssen hier von einem erst neuerlich erfundenen Studium, in Bezug auf die Formen des menschlichen Kopfes Erwähnung thun. Außer einer allgemeinen Anordnung der zwey Hauptkrümmungen der Hirnschale bemerkt man, Einbeugungen, Varietäten von lokalen Krümmungen, die bey den verschiedenen Individuen mehr oder minder stark ausgesprochen sind.

Man hat diese mehr oder weniger gekrümmten, mehr oder weniger gewölbten Theile, welche man Organe des Gehirnes zu nennen pflegt, betrachtet, als wären sie äußere Anzeigen unserer mehr oder weniger vermögenden Fähigkeiten und unserer mehr oder weniger ausgesprochenen Neigungen.

Es ist leicht auf derartige Studien einen Anstrich von Lächerlichkeit und Geringschätzung zu werfen; aber der vorsichtige Beobachter der Gesetze der Natur ist nie vorschnell im Ausspruch von Tadel, noch in Ueberschüttung mit Lobeserhebungen, sobald es sich um ernste Studien über neue Gegenstände handelt. Wenn es auch wahr wäre, daß die Begierde Alles zu erklären, die angenommenen Anzeigen unserer Neigungen und unserer Fähigkeiten sich zu sehr hätte vervielfältigen lassen, so ist es doch hinreichend, daß eine kleine Zahl intellektueller Verhältnisse, mehr oder minder entfernte Andeutungen in den Formen unseres Schädels habe, um aus dem gründlichen Studium der Varietäten seiner Krümmungen, einen der würdigsten Gegenstände des Nachdenkes der Gelehrten zu machen.

441. Die verschiedenen Theile, aus denen die Statur der Thiere zusammengesetzt ist, haben ein Volumen und gerade oder gekrümmte Formen, welche sie zu gewissen Bewegungen mehr oder minder geschickt machen. Dieses ist der Gegenstand einer noch neuen Wissenschaft, die unter dem Namen der vergleichenden Anatomie bekannt ist. Das Studium dieser Wissenschaft wird eine heilsame Schärfe annehmen, und sie wird ihren Resultaten viele Vervollkommnung geben, wenn man nicht nur die hauptsächlichsten Dimensionen eines jeden Theiles des Knochengestelles der Thiere auf geometrische Messungen bezieht, sondern auch die Größe und die Richtung der Krümmungen jedes Elementes dieses Gestelles; besonders bey den in Berührung stehenden Theilen, das heißt, bey den Gelenken.

In der gleichen Zeit wie dieses Studium das Fortschreiten der vergleichenden Anatomie begünstigt, wird es auch den Arbeiten der Industrie sehr nützliche Resultate liefern Die Thiere verrichten, um ihre Bedürfnisse zu befriedigen, mit einer seltenen Vollkommenheit viele Operationen, worin unsere Künste und Handwerke sich kaum über die Mittelmäßigkeit erheben. Diese werden in den Hülfsmitteln, welche die Natur den lebenden Wesen liefert, mannigfaltige und sehr sinnreiche Modelle finden.

Die pflanzenfressenden Thiere haben zum Zermalmen der vegetabilischen Stoffe vollkommen eingerichtete Zähne. Die Gestalt dieser Zähne erhält sich unerachtet der Abnutzung, die sie bey der Operation des Zermalmens der Nahrung erleiden, während die

Gestalt unserer Mühlsteine einer schnellen Zerstörung unterliegt; wodurch man genöthigt wird, diese Gestalt oft zu erneuern, oder wie man sagt, die Mühlsteine zu schärfen, damit sie wieder gut zu mahlen anfangen. Die Kunst ist also hier weit unter der Natur. Von dieser Idee ausgehend, hat Herr Molard, Mitglied des Instituts von Frankreich, sich damit beschäftigt, Maschinen zum Zermalmen zu bilden, bey welchen er die Mahlzähne der Pferde zum Muster nahm, und er hatte nicht mehr nöthig, diese mahlende Theile zu schärfen, um zu verhindern, daß die Zerreibung unvollkommen würde.

Die Industrie ist daher selbst dabey interessirt, daß die Anatomen, die Geometer und die Mechaniker gemeinsam die Dimensionen, die Krümmungen und die Verrichtungen der verschiedenen Theile der Thiere studieren.

442. Kehren wir nun von diesen allgemeinen Betrachtungen über die Wichtigkeit des Studiums der Krümmungen der Flächen *), zu unserm Gegenstand zurück. In dem Vorhergehenden haben wir die Krümmungen der Flächen nur in ihren verschiedenen Elementen examinirt, wir wollen die Krümmungen nun auf der ganzen Ausdehnung der Flächen betrachten.

Von den Krümmungslinien der Flächen.

443. Es sey (Taf. XLII. Fig. 7.) irgend ein krummes Flächenstück, auf welchem wir zuerst einen willkührlich genommenen Punkt L betrachten wollen. Denken wir uns die Normale zu der Fläche in L; so haben wir gesehen, daß man in zwey verschiedenen Richtungen, von dem Punkt L nach einem andern Punkt M oder L′ übergehen kann, bey welchem die neue Normale der Ersten begegnet, und daß diese zwey Richtungen im rechten Winkel auf der Fläche sind. Es seyen daher L M und L L′ diese zwey, in L rechtwinkligen Richtungen. Von dem Punkte M aus kann man sofort in zwey verschiedenen Richtungen nach einem andern Punkte N oder M′ übergehen, bey welchem die Normale der Normalen in M begegne, und es seyen M N, M M′ diese zwey in M rechtwinkligen Richtungen. Indem man auf dieselbe Weise bey dem Punkt N arbeitet, wird man die zwey Richtungen N O und O O′ erhalten u. s. w. fort. Die Reihe der Punkte L, M, N, O, P.... ꝛc., bey welchen zwey aufeinanderfolgende Normalen immer in einer Ebene sind, bildet auf der krummen Fläche eine krumme Linie, welche beständig die Richtung einer der zwey Krümmungen der Fläche anzeigt, und diese Kurve ist eine Linie der ersten Krümmung, welche durch den Punkt L geht. Wenn man eben

*) Siehe Dupin Géométrie des Arts et Métiers, Tom I. Leçon 15me.

so bey dem Punkte L′ arbeitet, wie wir es bey dem Punkt L gethan haben, so wird man zuerst nach zwey, unter sich rechtwinkligen Richtungen zu einem neuen Punkt M′ oder L″ übergehen können, bey welchem die neue Normale der Normalen in L′ begegnet, und man wird auf gleiche Weise eine neue Reihe von Punkten L′, M′, N′, O′, P′.... ꝛc. finden, welche auf der krummen Fläche eine andere Linie der ersten Krümmmung bilden, die durch den Punkt L′ geht. Arbeitet man eben so bey der Folge von Punkten L″, L‴, L⁗......, die wie die L, L′ gefunden wurden, so erhält man neue Linien der ersten Krümmung L″ M″ N″ O″ P″, L‴ M‴ N‴ O‴ P‴.... ꝛc., welche durch die respektiven Punkte L″, L‴, L⁗.... ꝛc. gehen, und welche die krumme Fläche in Zonen abtheilen. Aber die Reihe der Punkte L, L′, L″, L‴, bey denen je zwey aufeinanderfolgende Normalen ebenfalls in einer Ebene sind, bildet auf der krummen Fläche eine andere Kurve, welche beständig die Richtung der andern Krümmung der Fläche anzeigt, und diese Kurve ist die Linie der zweyten Krümmung. M, M′, M″, M‴,.... ꝛc. bildet eben so eine andere Linie der zweyten Krümmung, welche durch den Punkt M geht; die Reihe der Punkte N, N′, N″, N‴... ꝛc. bildet eine neue Linie der zweyten Krümmung, welche durch den Punkt *N* geht, u. s. w. fort; und alle diese Linien der zweyten Krümmung theilen die Fläche in andere Zonen.

Endlich schneiden alle Linien der ersten Krümmung die Linien der zweyten Krümmung in rechten Winkeln, und diese zwey Systeme krummer Linien theilen die Fläche in rechtwinklige Elemente, und diese Wirkung findet nicht nur alsdann statt, wenn jene Linien unendlich nahe sind, wie wir es angenommen haben, sondern auch dann noch, wenn die Linien eines Systems in endlichen Entfernungen von einander sind. Wir wollen davon einige Beyspiele anführen, mit welchem wir schon vertraut sind.

444. Wenn man irgend eine Umdrehungsfläche mittelst einer Reihe, durch die Axe geführter Ebenen schneidet, so erhält man eine Reihe von Schnitten, welche die Linie der einen Krümmung der Fläche sind. Denn, damit eine Kurve Krümmungslinie einer Fläche sey, ist es erfoderlich, daß in jedem ihrer Punkte das Element der Cylinderfläche, welche die Fläche in dem Elemente der Kurve berührt, seine gerade Erzeugungslinie rechtwinklig auf die Kurve habe. Nun aber findet diese Bedingung hier nicht nur in jedem Punkt der Kurve für ein Element einer besondern Cylinderfläche statt, was hinreichend wäre, sondern in Bezug auf die ganze Kurve für eine nemliche Cylinderfläche.

Ueberdem, wenn man dieselbe Umdrehungsfläche durch eine Reihe auf die Axe senkrechter Ebenen schneidet, so erhält man eine zweyte Reihe von Schnitten, welche sämmtlich kreisförmig sind, und welches die Linien der andern Krümmung sind. Denn wenn man durch einen Punkt irgend eines dieser Schnitte sich die Tangente zu dem Meridian der Fläche denkt, und wenn man annimmt, daß diese Tangente sich parallel zu sich selbst bewege, um ein Element einer, die Fläche tangirenden Cylinderfläche zu erzeugen, so wird das Element der Cylinderfläche die Umdrehungsfläche nach dem Kreisbogen berühren, und dieser Bogen wird senkrecht auf die gerade Erzeugungslinie seyn.

Sonach sind bey irgend einer Umdrehungsfläche die Krümmungslinien der einen Art der Krümmung die Meridiane der Fläche, und die Linien der andern Krümmung die Parallelen, und es ist einleuchtend, daß diese zwey Reihen von Kurven sich sämmtlich senkrecht auf der Fläche durchschneiden.

445. In Betreff der aufwickelbaren Fläche, haben wir bereits (Art. 432) gesehen, daß bey denselben die aufeinanderfolgenden Normalen längs den Punkten einer ihrer geraden Erzeugungslinien immer in einer nemlichen Ebene sind. Die geraden Erzeugungslinien sind daher bey diesen Flächen zugleich auch die Linien der einen Krümmung, welche Krümmung in der Richtung derselben Geraden unendlich klein oder Null ist.

Die Linien der größten Krümmung der aufwickelbaren Flächen sind sofort leicht zu finden, weil diese Linien durch die Bedingung bestimmt sind, daß sie auf der Fläche das System der geraden Erzeugungslinien, als den Linien der kleinsten Krümmung in allen Punkten senkrecht durchschneiden. Bey den Cylindern sind daher die geraden Schnitte derselben, das heißt die Schnitte durch Ebenen, welche senkrecht auf die Erzeugungslinien sind, die Linien der größten Krümmung. Diese Linien der größten Krümmung sind bey den Kegelflächen die koncentrischen sphärischen Schnitte, nemlich die Schnitte der Fläche durch Reihen von Kugeln, welche ihren gemeinsamen Mittelpunkt in den Scheiteln der Kegel haben. Bey allen übrigen aufwickelbaren Flächen sind die auf den Flächen gezogenen Evolventen ihrer Rückkehrkanten, welche das System ihrer geraden Erzeugungslinien, überall unter rechten Winkeln durchschneiden (Art. 417) die Linien ihrer größten Krümmung.

Von den geometrischen Oertern der Normalen und der Krümmungsmittelpunkte der Flächen.

446. (Taf. XLII. Fig. 7.) Wenn man an allen Punkten einer von den Krümmungslinien L M N O P einer Fläche sich die Normalen zu der Fläche denkt, so haben wir gesehen, daß die zweyte Normale der Ersten in einem gewissen Punkte begegne; daß die Dritte der Zweyten in einem andern Punkte begegne, und so fort; das System dieser Normalen, deren zwey und zwey immer in einer nemlichen Ebene sind, bildet daher eine aufwickelbare Fläche, welche überall senkrecht auf die krumme Fläche ist, und dieselbe nach der Krümmungslinie schneidet. Diese Krümmungslinie, da sie selbst überall senk-

recht auf die Normalen ist, welche zusammen die aufwickelbare Fläche bilden, ist auch eine Krümmungslinie dieser letzten Fläche. Die Rückkehrkante der aufwickelbaren Fläche, welche Kante eine der Evoluten der Linie L M N O P ist, ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte derselben Kurve, und sie ist auch der Ort der Mittelpunkte einer Krümmung der Fläche, für die Punkte derselben nemlich, welche auf der Kurve L M N O P liegen. Wenn man diese nemliche Bemerkung bey allen andern Krümmungslinien derselben Reihe, wie L′ M′ N′ O′ P′, L″ M″ N″ O″ P″.... ꝛc. macht, so können alle Normalen der krummen Fläche betrachtet werden, als bildeten sie eine Reihe aufwickelbarer Flächen, die sämmtlich senkrecht auf die Fläch sind, und das System der Rückkehrkanten aller dieser aufwickelbaren Flächen wird eine krumme Fläche bilden, welche der Ort aller Mittelpunkte von einer der beyden Krümmungen der krummen Fläche ist.

Diese so eben bey einer der zwey Krümmungen der Fläche gemachten Bemerkungen gelten gleichmäßig bey der andern Krümmung. In der That, wenn man an allen Punkten L, L′, L″, L‴.... ꝛc. einer Linie der andern Krümmung sich die Normalen zu der Fläche denkt, so sind diese Geraden aufeinanderfolgend zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene, ihr System bildet eine aufwickelbare Fläche, die überall senkrecht auf die Fläche ist, und die derselben in der Krümmungslinie L L′ L″ L‴...... begegnet, welche selbst auch eine Krümmungslinie der aufwickelbaren Fläche ist. Die Rückkehrkante dieser letzten Fläche ist der Ort der Krümmungsmittelpunkte der Linie L L′ L″ L‴...., und zugleich der Ort der Mittelpunkte der zweyten Krümmung der krummen Fläche, für alle Punkte der Linie L L′ L″ L‴..... Dasselbe findet statt bey den übrigen, durch die Punkte der anderen Krümmungslinien M M′ M″ M‴, N N′ N″ N‴.... geführten Normalen, so daß alle Normalen der krummen Fläche wiederum betrachtet werden können, als bildeten sie eine zweyte Reihenfolge aufwickelbarer Flächen, die sämmtlich senkrecht auf die Fläche sind, und das System der Rückkehrkanten aller dieser neuen aufwickelbaren Flächen, wird eine zweyte krumme Fläche bilden, welche der Ort der Mittelpunkte der zweyten Krümmung der Fläche ist.

447. In einigen besondern Fällen sind die Flächen der Mittelpunkte der zwey Krümmungen einer nemlichen krummen Fläche, unter einander verschieden; das heißt, sie können auf abgesonderte Weise erzeugt werden, oder sie haben ihre Gleichungen abgesondert. Ein Beyspiel hievon sieht man bey den Umdrehungsflächen, bey denen eine jener Flächen sich auf die Rotationsaxe selbst reduzirt, während die Andere ebenfalls eine Umdrehungsfläche ist, die durch die Rotation der ebenen Evoluten des Meridianes um dieselbe Axe erzeugt ist.

Aber am öftesten, und im Allgemeinen, sind jene zwey Flächen nicht verschieden; sie können nicht abgesondert erzeugt werden; sie haben die nemliche Gleichung, und sie sind nur zwey verschiedene Netze einer nemlichen krummen Fläche.

Man sieht hieraus, daß alle Normalen einer krummen Fläche, als die Durchschnitte von zwey Reihen solcher aufwickelbaren Flächen betrachtet werden können, daß jede dieser aufwickelbaren Flächen der krummen Fläche rechtwinklig begegnet, und sie nach einer Kurve schneidet, welche zu gleicher Zeit Krümmungslinie der krummen Fläche, und Krümmungslinie der aufwickelbaren Flächen ist; und daß jede von den aufwickelbaren Flächen der ersten Reihe alle jene der zweyten Reihe nach geraden Linien und in rechten Winkeln durchschneidet.

448. Die folgenden Beyspiele, wovon das erste aus der Baukunst genommen ist, zeigen, welche Anwendungen verschiedene Künste von den eben vorgetragenen Eigenschaften machen können.

Die aus behauenen Steinen aufgeführten Gewölbe bestehen aus abgesonderten Stücken, denen man die Geschlechtsbenennung der Gewölbsteine oder auch Werkstücke gegeben hat. Jeder Gewölbstein hat mehrere Seitenflächen, welche die größte Aufmerksamkeit bey ihrer Verfertigung erfodern; 1tens die Seite, welche einen Theil der sichtbaren Oberfläche des Gewölbes (Intrados) bildet, und welche deßhalb mit der größten Präzision ausgeführt werden muß; man nennt diese Seite die Bogenfläche (douelle) 2tens die Seiten, mittelst welcher die aufeinanderfolgenden Gewölbsteine sich aneinander anlehnen, man nennt sie im Allgemeinen die Fugen oder Fugenschnitte. Die Fugen erfodern ebenfalls die größte Genauigkeit in ihrer Verfertigung; denn da der Druck sich von einem Gewölbsteine auf den andern senkrecht auf die Fugenfläche überpflanzt, so ist es nothwendig, daß die zwey Steine sich in der größt möglichen Anzahl von Punkten berühren, damit der Druck bey jedem Berührungspunkte der geringste sey, und daß er bey Allen die möglichste Gleichförmigkeit habe. Bey jedem Gewölbsteine müssen daher die Fugen sich so viel als möglich der wahren Gestalt der Fläche nähern, von der sie einen Theil ausmachen sollen, und damit dieser Zweck am leichtesten zu erfüllen ist, so müssen die Fugenflächen von der einfachsten Beschaffenheit, und ihre Verfertigungsart der größten Präzision fähig seyn. Aus diesem Grunde macht man die Fugenflächen gewöhnlich eben; aber nicht alle Gewölbflächen lassen diese Anordnung zu, und bey einigen würde man die nothwendigen Rücksichten, von denen wir im Augenblicke reden werden, zu sehr verletzen, wenn man den Fugen keine krumme Oberfläche gäbe. In diesem Falle sind unter allen krummen Flächen, welche außerdem auch noch den andern Bedingungen entsprechen können, diejenigen zu wählen, deren Erzeugung die einfachste ist und deren

Verfertigung die größte Genauigkeit zuläßt. Nun aber sind es unter allen krummen Flächen, diejenigen, welche durch die gerade Linie erzeugt sind, und besonders die aufwickelbaren, welche am leichtesten ausgeführt werden können. Wenn es sonach erfoderlich ist, daß die Fugen der Gewölbsteine krumme Flächen seyen, so bildet man dieselben, so viel als möglich aus aufwickelbaren Flächen.

Eine der hauptsächlichsten Bedingungen, denen die Gestalt der Fugen der Gewölbsteine genügen muß, ist, daß sie überall senkrecht auf Oberfläche des Gewölbes aufstehen, das jene Gewölbsteine bilden. Denn wenn die zwey Winkel, welche eine nemliche Fuge mit der Oberfläche des Gewölbes macht, merklich ungleich wären, so würde derjenige von diesen Winkeln, welcher den rechten Winkel überstiege, eines größeren Widerstandes fähig seyn als der Andere; und bey der Wirkung, welche zwey aufeinanderfolgende Gewölbsteine gegen einander äußern, würde der Kleinere als ein rechter Winkel dem Zerspringen ausgesetzt seyn, was aufs Wenigste das Gewölbe verunstaltete, und was selbst seine Festigkeit gefährden, und die Dauer des Gebäudes vermindern könnte. Sobald daher die Fläche einer Fuge krumm seyn muß, so ist es nöthig, dieselbe durch eine Gerade zu erzeugen, welche überall senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes ist; und wenn man noch weiter verlangt, daß die Fläche der Fuge aufwickelbar seyn soll, so ist es erfoderlich, daß alle Normalen zu der Oberfläche des Gewölbes, und welche, um sich so auszudrücken, die Fuge bilden, zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene liegen.

Nun aber haben wir gesehen, daß diese Bedingung nicht erfüllt werden kann, außer wenn alle Normalen durch eine nemliche Krümmungslinie der Oberfläche des Gewölbes gehen; wenn daher die Fugenschnitte der Werkstücke eines Gewölbes aufwickelbar seyn müssen, so ist nothwendig erfoderlich, daß diese Flächen die Oberfläche des Gewölbes nach seinen Krümmungslinien durchschneiden.

Außerdem noch, mit welcher Genauigkeit die Gewölbsteine eines Gewölbes verfertigt seyn mögen, so ist ihre Eintheilung immer auf der Oberfläche des Gewölbes sichtlich; sie zeichnet daselbst sehr bemerkbare Linien, diese Linien müssen allgemeinen Gesetzen unterliegen, und, je nach der Beschaffenheit der Oberfläche des Gewölbes, besondern Rücksichten entsprechen. Unter den allgemeinen Gesetzen beziehen sich die Einen auf die Festigkeit des Gebäudes, und die Andern, auf die Dauerhaftigkeit desselben. Von dieser letztern Zahl ist die Regel, welche vorschreibt, daß die Fugenflächen eines nemlichen Gewölbsteines, rechtwinklich unter sich seyen, aus demselben Grunde, aus welchem sie selbst senkrecht auf die Gewölbfläche seyn müssen. Auch müssen die Abtheilungslinien der Gewölbsteine, so beschaffen seyn, daß diejenigen, welche das Gewölbe in Schichten theilen, sämmtlich senkrecht auf diejenigen sind, welche eine nemliche Schichte in Gewölbsteine abtheilen.

Was die besonderen Bedingungen betrifft, so giebt es derselben von mehreren Arten, deren Aufzählung jedoch hier unser Gegenstand nicht ist; aber eine hauptsächliche, unter denselben besteht darinn, daß die Abtheilungslinien der Gewölbsteine, welche, wie wir gesehen haben, von zweyerley Art sind, und welche sich sämmtlich rechtwinklig begegnen müssen, auch den Charakter der Fläche, zu der sie gehören, haben müssen. Nun aber giebt es auf der krummen Fläche keine Linie, welche zu gleicher Zeit alle diese Bedingungen erfüllen könnte, als die zwey Reihen der Krümmungslinien, und diese erfüllen sie vollständig.

Demnach muß die Abtheilung eines Gewölbes in Gewölbsteine immer durch die Krümmungslinien der Oberfläche des Gewölbes gemacht werden, und die Fugen müssen Stücke aufwickelbarer Flächen seyn, gebildet durch die Reihe der Normalen zu der Fläche, welche, aufeinanderfolgend betrachtet, zu zwey und zwey in einer nemlichen Ebene sind; dergestalt, daß bey jedem Gewölbstein die Oberflächen der vier Fugen, und die des Gewölbes sämmtlich rechtwinklig seyen.

Vor der Erfindung der geometrischen Betrachtungen, auf welche alles eben Gesagte gegründet ist, hatten die Künstler verworrene Begriffe von den Gesetzen, zu welchen sie führen, und nur in einigen einfachen Fällen hatten sie die Lösung der Aufgabe erreicht. So, zum Beyspiele, wenn die Oberfläche des Gewölbes durch Umdrehung erzeugt war, sey es ein Kuppelgewölbe in Form eines Sphäroids, oder ein umlaufendes Tonnengewölbe, so theilten sie ihre Gewölbsteine nach Meridianen und Parallelen ab, das heißt nach den Krümmungslinien der Oberfläche des Gewölbes.

Die Fugenschnitte, welche den Meridianen entsprachen, waren die, durch die Umdrehungsaxe geführten Ebenen; diejenigen Fugen, welche den Parallelen entsprachen, waren Kegelflächen, durch Umdrehung um dieselbe Axe erzeugt; und diese zwey Arten von Fugen waren rechtwinklig unter sich, und senkrecht auf die Oberfläche des Gewölbes.

Aber, wenn die Oberflächen der Gewölbe keine so einfache Erzeugung hatten, und wenn ihre Krümmunglinien sich auf keine so ausgeprägte Art darstellten, wie bey den Gewölben in Form länglichter Sphäroide, und bey vielen Andern, so konnten die Künstler nicht mehr allen Bedingungen zugleich Genüge leisten, und sie opferten in jedem einzelnen Falle diejenigen auf, welche ihnen die größten Schwierigkeiten entgegensetzen.

Es wäre daher nöthig, daß man in jeder Schule der darstellenden Geometrie sich mit der Bestimmung und der Konstruktion der Krümmungslinien derjenigen Flächen beschäftigte, welche in den Künsten gewöhnlich angewendet werden, damit die Künstler, welchen zu derartigen Untersuchungen nicht viele Zeit bleibt, hier im benöthigten Falle um Rath fragen, und die erhaltenen Resultate benutzen könnten.

449. Das zweyte Beyspiel, das wir anführen wollen, ist aus der Kupferstecherkunst entlehnt.

In der Kupferstecherey werden die Töne der verschiedenen Theile der Oberfläche der vorgestellten Gegenstände durch Schraffirungen ausgedrückt, welche man um so stärker und um so dichter macht, je dunkler man den Ton haben will.

Wenn die Entfernung, aus welcher ein Kupferstich betrachtet werden soll, groß genug ist, damit die einzelnen Striche der Schraffirung nicht mehr erkannt werden können, so ist die Art der Schraffirung ziemlich gleichgültig, und, welches auch der Kontur dieser Striche seyn mag, so kann der Künstler sie immer dergestalt verstärken und vervielfältigen, daß er den Ton erhält, den er wünscht, und somit die verlangte Wirkung hervorbringt. Wenn aber, wie es am gewöhnlichsten der Fall ist, der Kupferstich die Bestimmung hat, in solcher Nähe betrachtet zu werden, daß die Umrisse der Striche der Schraffirung zu erkennen sind, so ist die Gestalt jener Konturen nicht mehr gleichgültig. Für einen jeden Gegenstand, und für einen jeden Theil der Oberfläche eines Gegenstandes, giebt es Umrisse der Schraffirungen, die mehr als andere dazu geeignet sind, einen Begriff von der Krümmung der Fläche zu geben. Diese besonderen Konturen sind immer zwey an der Zahl, und manchmal wenden die Kupferstecher beyde zugleich an, wenn sie, um ihre Töne leichter zu verstärken die Schraffirungen kreuzen.

Diese Konturen, wovon die Künstler bis jetzt noch ein nur sehr dunkeles Gefühl haben, sind die Projektionen der Krümmungslinien der Oberfläche, welche sie ausdrücken wollen.

Da die Oberflächen der meisten Gegenstände keiner strengen Definition fähig sind, so sind auch ihre Krümmungslinien nicht von der Beschaffenheit, um entweder durch Rechnung oder durch zeichnende Konstruktionen bestimmt werden zu können. Aber wenn die Künstler in ihrer Jugend gewöhnt worden wären, die Krümmungslinien einer großen Zahl, genauer Definition fähiger krummer Flächen aufzusuchen, so würden sie, selbst bey weniger bestimmten Gegenständen viel empfänglicher für die Gestalt und die Stellung dieser Linien seyn; sie würden dieselben mit mehr Richtigkeit auffassen, und ihre Werke würden mehr Ausdruck haben.

450. Wir halten uns nicht länger bey diesem Gegenstande auf, welcher wohl nur den kleinsten Vortheil zeigt, den die Künste und die Industrie von der Errichtung einer Schule der darstellenden Geometrie in jeder bedeutenden Stadt zögen.

Unsere Leser finden in Dupin's Développements de Géométrie die vollständige Theorie der Krümmung der Linien und Flächen, und insbesondere jener der zweyten Ordnung. Uebrigens können wir uns nicht versagen, die Konstruktion der Krümmungslinien des Ellipsoides aus Monge's feuilles d'analyse appliquée à la géométrie hier anzuführen.

Konstruktion der Krümmungslinien des Ellipsoids.

451. Es sey A B C D (Taf. XLIII. Fig. 1) der elliptische Hauptschnitt des Ellipsoids, dessen Ebene durch die größte Axe A B der Fläche und durch die mittlere Axe C D geht. (Art. 215 und 216.) C E D sey die Hälfte des Hauptschnittes der durch die mittlere Axe und durch die kleinste Axe = 2 K E geht, und dessen Ebene auf die Horizontalebene zurückgelegt angenommen ist.

Man konstruire einen Viertelsbogen einer Ellipse O L G, und ein Stück eines hyperbolischen Bogens O H J, welche konzentrisch mit der Ellipse A B C D sind, und deren gemeinschaftliche halbe Axen K O, K G, welche mit den Axen der Ellipse A B C D einerley Richtung haben, wir sogleich bestimmen werden. Wir nennen diese Kurven Hülfs-Hyperbel und Hülfs-Ellipse. Wenn man sofort von einem Punkt H der Hyperbel zwey Senkrechte H M, H N auf die entsprechenden Axen C D und A B fällt, und eine mit A B C D konzentrische Ellipse M N M' N' konstruirt, welche die Geraden K M und K N als halbe Axen hat, so hat man die Projektion einer Krümmungslinie des Ellipsoids, auf der Ebene der größten und mittleren Axe. Konstruirt man auf dieselbe Weise so viele Ellipsen als man will, so erhält man die Projektionen der ganzen Reihe von Linien der einen Krümmung des Ellipsoids.

Eben so, wenn man aus einem Punkte L der Hülfsellipse zwey Senkrechte L P, L Q auf die Axen A B, C D fällt, und eine mit der Ellipse A B C D konzentrische Hyperbel P R R', P' S S' konstruirt, welche die Geraden K P, K Q zu halben Axen hat, so hat man eine Linie der andern Krümmung. Jede auf diese Art konstruirte Hyperbel durchschneidet alle Ellipsen, und umgekehrt.

452. Da die gemeinschaftliche Axe O O' der Hülfsellipse und die Hülfshyperbel immer kleiner ist als die große Axe A B des Ellipsoids, und folglich der gemeinschaftliche Scheitel O immer ins Innere der Hauptellipse A B C D fällt, so folgt daraus, daß die kleinste Ellipse, welche die Projektion einer Krümmungslinie ist, als halbe große Axe diese gemeinschaftliche halbe Axe K O habe, und daß ihre kleine Axe Null sey. Sie vermischt sich daher mit der Linie A B, woraus sich ergiebt, daß der elliptische Hauptschnitt, welcher durch die größte und die kleinste Axe des Ellipsoids geht, selbst eine Krümmungslinie der Fläche sey. Nach Maasgabe als die große Axe der Ellipsen wächst, nimmt auch die kleine Axe derselben zu, und wenn die erste dieser Axen gleich der großen Axe des Ellipsoids ist, so fällt die entsprechende Ellipse mit dem elliptischen Hauptschnitte A B C D zusammen, welche folglich ebenfalls eine Krümmungslinie des Ellipsoids ist. Es wäre überflüssig größere Ellipsen zu konstruiren als diese Letztere, sie fielen sämmtlich außerhalb des Ellipsoides, und haben demnach keinen Bezug auf unsern Gegenstand.

Man sieht hieraus, daß jeder der zwey Scheitel O, O' der Hülfsellipse und der Hülfshyperbel von derselben Seite durch alle Ellipsen umfaßt wird, welche sich immer mehr verengen, so wie ihre Scheitel sich denselben nähern, und welche ihre kleine Axe dann verlieren, wenn sie dieselben erreichen.

Was die Hyperbeln betrifft, so ist klar, daß keine derselben in der Richtung von A B eine größere Axe haben kann, als die Axe O O′. Diejenige, bey welcher die Axe diese Größe hat, hat ihre andere Axe Null, und fällt mit A B zusammen. Nach Maasgabe als diese Axe abnimmt, wächst die Andere, so daß, sobald diese Letztere die größt möglichste geworden ist, die Erstere ihrer Seits Null wird, und alsdann fallen die beyden Zweige der Hyperbel mit der Linie C D zusammen. Sonach ist der dritte elliptische Hauptschnitt ebenfalls, gleich den beyden Andern, eine Krümmungslinie des Ellipsoides. Jeder der gemeinschaftlichen Scheitel O, O′ der Hülfsellipse und Hülfshyperbel wird von allen Hyperbeln umfaßt, aber von der entgegengesetzten Seite, von welcher die Ellipsen dieselben umfassen. Die Hyperbeln verengen sich nach dem Maaße, als sie sich jenen Punkten nähern, und sie verlieren ihre kleine Axe, so wie ihr Scheitel dieselben erreicht.

453. Diese Punkte O, O′, gegen welche die Ellipsen und die Hyperbeln ihre Höhlung drehen, sind die Projektionen von vier merkwürdigen Punkten der Fläche; zwey derselben liegen oberhalb der Ebene der Axen A B, C D, und zwey unterhalb derselben. Es sind dieses vier Näbel, um welche die Linien der zwey Krümmungen gebogen sind, und zwar die des einen Systems von der einen, und die des andern Systems von der entgegengesetzten Seite. Diese Linien verengen sich, nach dem Maaße, als sie sich denselben nähern, und so wie sie sie erreicht haben, wechseln sie ihre Art.

Die meisten andern Flächen haben solche Näbel, ähnlich den so eben auf dem Ellipsoide bemerkten. Es sind dieses diejenigen Punkte, in denen die Linien der zwey Krümmungsarten sich ineinander umändern, und bey denen folglich die zwey Krümmungslinien zusammenfallen.

454. Die Konstruktionen der Punkte O, G, der Endpunkte der gemeinschaftlichen Axen der Hülfsellipse und der Hülfshyperbel sind in der Fig. 2 angegeben. Es sey A D die Hälfte des ersten Hauptschnittes, durch die größte und mittlere Axe, F, F seine Brennpunkte; A V e ein Viertel der vertikalen Ellipse, welche durch die größte und kleinste Axe geht, f, f ihre Brennpunkte. D U E die Ellipse, welche durch die mittlere und kleinste Axe geht, und *f*, *f* ihre Brennpunkte. Um den Punkt O zu konstruiren, trage man K f und K F auf die andere Axe von K nach f′ und F′, man ziehe die Gerade f B, und durch den Punkt F′ zu ihr die Parallele F′ O, welche durch ihr Zusammentreffen mit der Axe A B den Punkt O bestimmt. Eben so trage man K *f* auf der andern Axe von K nach *f*′; man ziehe die Gerade *f*′ D, und durch den Punkt F zu ihr die Parallele F G, welche durch ihren Durchschnitt mit der verlängerten Axe K D den Punkt G bestimmt.

455. Die Projektionen der Krümmungslinien des Ellipsoids auf der Ebene der großen und mittleren Axe, welche Ebene wir als horizontal angenommen haben, sind krumme Linien von zweyerley Art, nemlich Ellipsen und Hyperbeln. Der gleiche Fall, und die ganz analogen Konstruktionen finden bey der Projektion dieser Linien auf der Ebene der kleinsten und mittleren Axe statt. Wählt man aber die Ebene, welche durch die größte und die kleinste Axe geht, so sind die Projektionen aller Krümmungslinien von der gleichen Art, und ihre Konstruktion eignet sich besser zur Anwendung in den Künsten.

456. Nachdem man daher über A′ B′ Fig. 3. als größter, und über E′ E als kleinster Axe des Ellipsoids den mittleren elliptischen Hauptschnitt A′ E′ B′ E konstruirt hat, dessen Ebene wir als vertikale Projektionsebene annehmen, bestimme man den Viertelsbogen *a b c d* einer mit A′ E′ B′ E konzentrischen Ellipse, wozu das Einzelne in der Figur 4 konstruirt ist, welche wir sogleich erklären werden. Aus irgend einem Punkte *b* dieser Hülfsellipse fälle man auf die, wenn es nöthig ist verlängerten Axen A′ B, E′ E die Senkrechten *b t*, *b e* so bestimmen die Fußpunkte *t*, *e* dieser Senkrechten auf den entsprechenden Axen die Scheitel und die halben Axen K′ *t*, K *e* einer Ellipse *e t e′ x*. Diese Ellipse ist die Projektion einer Krümmungslinie, und die Reihe aller, auf die nemliche Weise konstruirten Ellipsen ist die Projektion der zwey Reihen von Krümmungslinien der ganzen Fläche des Ellipsoids.

457. Um die Vertikalprojektion einer Krümmungslinie zu finden, welche horizontal nach einer Hyperbel R P R′, S P′ S′ projektirt ist, bringe man den Punkt R der Hauptellipse (A B C D, A′ B′) in Vertikalprojektion nach *r*, und errichte aus *r* auf A′ B eine Senkrechte *r b*, welche die Hülfsellipse *a b c d* in einem Punkt *b* schneidet. Indem man bey diesem Punkt *b* wie oben angegeben arbeitet, findet man die Ellipse *e x e′ t*, welche die Vertikalprojektion derselben Krümmungslinie enthält, der als Horizontalprojektion die Hyperbel R P P′, S P′ S′ entspricht.

Man erhält die Vertikalprojektion einer Krümmungslinie, welche auf der Horizontalebene nach einer Ellipse M N M′ N′ projektirt ist, wenn man den Punkt dieser Ellipse, welcher sich nach M projekirt, und nach Z auf die Hauptellipse E Z H zurückleget, mittelst des Kreisbogens *z m* in Vertikalprojektion nach *m* bringt, und sodann durch diesen Punkt eine zu A E B′ E′ koncentrische Ellipse führt, deren halbe Axen K′ *m*, K′ *i* durch die Hülfsellipse *a b c d* und durch die, wechselsweise auf A′ B′ und auf E′ E senkrechten Geraden *m c*, *i c* bestimmt werden. Die Bögen *n m n′*, *n″ m′ m‴* dieser Ellipse *f m i m′* sind die Vertikalprojektionen zweyer, horizontal in M N M′ N′ projektirter Krümmungslinien des Ellipsoids.

458. Da die zwey Halbaxen K′ *a*, K *d* der Hülfsellipse größer sind als die korrespondirenden Halbaxen des mittleren Hauptschnittes A′ E B′ E′, so ist diese Letztere ganz in der Ersten eingeschlossen. Ueberdies ist die Ellipse A′ E B′ E′ selbst eine Krümmungslinie des Ellipsoids (Art. 452.); wenn man daher an den Endpunkten E B′ der zwey Axen dieser Ellipse zu ihr die Tangenten E *g*, B′ *g* zieht, so müssen diese Tangenten, welche außerdem senkrecht unter sich sind, in einem Punkte *g* der Hülfsellipse *a b c d* zusammentreffen. Dieser Begegnungspunkt *g* theilt den Viertelsbogen *a b d* der Hülfsellipse in zwey Theile, von denen der Eine zur Konstruktion der Linien der einen Krümmung dient, und der Andere zur Konstruktion der Linien der zweyten Krümmung.

In der That bringt das Stück *d g* der Hülfsellipse, welches ihrer großen Axe anliegt, Ellipsen hervor, welche ihre großen Axen größer, und ihre kleinen Axen kleiner haben, als die entsprechenden Axen A′ B′, E E′ der Hauptellipse.

Diese Ellipsen, welche immer enger werden, nach Maasgabe als ihre große Axe sich verlängert, und welche mit der Linie A′ B′ zusammenfallen, so wie ihre große Axe gleich jener der Hülfsellipse *a b c d* geworden ist, theilen den Flächenraum der Hauptellipse A′ E B′ E′ in Zonen, deren Lage die Richtung der Axe A′ B′ hat. Derjenige Theil der Viertelsellipse *a b c d*, welcher an ihre kleinen Axe $a\,a'$ anliegt, erzeugt Ellipsen, bey denen sämmtlich ihre nach $A'\,B'$ gerichteten Axen kleiner, und ihre nach $a\,a'$ gerichteten Axen größer sind, als die korrespondirenden Axen der Hauptellipse $A'\,E\,B'\,E'$. Diese Ellipsen, welche immer enger werden, nach Maasgabe als ihre Axe in der Richtung von $E\,E'$ wächst, und welche mit der Linie $E'\,E$ zusammenfallen, wenn diese Axe gleich jener der Hülfsellipse geworden ist, theilen den Flächenraum der Hauptellipse in Zonen, die nach der Linie $a\,a'$ gerichtet sind; und jede von ihnen schneidet alle Ellipsen der ersten Art in vier von der Hauptellipse eingeschlossenen Punkten. O'', O''', O'''', O''''' sind die vier Näbel, welche in dieser Projektion auf der Begränzungslinie der Fläche liegen.

459. Wenn man durch die Endpunkte der Axen der Hülfsellipse vier Gerade $d\,a$, $a\,d'$, $d'\,a'$, $a'\,d$ zieht, welche zu zwey und zwey parallel sind, so berührt jede von ihnen alle Projektionen der Linien der zwey Krümmungen, so daß alle Ellipsen, welche diese Projektionen bilden, in einen Rhombus eingeschrieben sind.

460. In Betreff der Endpunkte d, a der Axen der Hülfsellipse $a\,b\,c\,d$ Fig. 3, so sind die erfoderlichen Konstruktionen in der Figur 4 angegeben. Es sey $A'\,B'$ die große Axe des Ellipsoids, $K'\,D'$ die Hälfte der mittleren, und $K'\,E$ die Hälfte der kleinen Axe, F, F die Brennpunkte der großen Ellipse, von welcher $A'\,S\,D$ ein Viertelsbogen ist, f, f die Brennpunkte der mittleren Ellipse $A'\,O\,E$, und f ein Brennpunkt der kleinen Ellipse $D\,U\,e$. Um den Scheitel d der Hülfsellipse $a\,c\,d$ zu konstruiren, trage man $K'\,F$ und $K'\,f$ auf der andern Axe von K' nach F' und f'. Man ziehe $F'\,B'$, und durch den Punkt f' die Parallale $f'\,d$ welche durch ihr Zusammentreffen mit der verlängerten Axe $A'\,B'$ den Punkt d bestimmt. Auf gleiche Weise trage man für den andern Endpunkt a, die $K'\,f$ auf der $A'\,B'$ von K' nach f'; ziehe die Gerade $f'\,E$, und durch den Punkt f die Parallele $f\,a$, welche durch ihre Begegnung mit der verlängerten Axe $K'\,E$ den Punkt a bestimmt.

461. Wenn ein in Horizontalprojektion durch eine Ellipse umschriebener Raum überwölbt werden sollte, so würde man dem Gewölbe keine passendere Oberfläche geben können, als die Hälfte eines Ellipsoides, dessen eine Hauptellipse mit der Ellipse des Ursprungs zusammenfiele; und wenn man annimmt, daß das Gewölbe aus Werkstücken aufgeführt werden sollte, so müßte die Abtheilung in Gewölbsteine nach den Krümmungslinien geschehen, wovon wir die Konstruktion gegeben haben, und die Fugen müßten die, auf das Gewölbe normalen aufwickelbaren Flächen seyn. Die Abtheilungslinie in Gewölbsteine würden auf der Oberfläche rechtwinklige, und der Verzierung fähige Felder zeichnen, und diese Felder selbst hätten nichts fantastisches, weil sie nur eine nothwendige Folge der ersten Angabe wären, welche eine Ellipse ist; aber die Bestimmung dieses Gebäudes könnte Einfluß haben auf die Wahl derjenige von den drey Axen, welche vertikal zu stellen wäre.

Es ist kein Grund vorhanden, um die vertikale Axe mit einer der zwey horizontalen Axen gleich zu machen; die drey Axen wären also ungleich. In dieser Hypothese könnte die vertikale Axe größer als die beyden Andern seyn, und alsdann wäre das Gewölbe ein überhobenes, sie könnte kleiner seyn, und das Gewölbe wäre ein gedrücktes, sie könnte zwischen den beyden Andern gefaßt seyn, und das Gewölbe wäre ein mittleres. Das überhobene Gewölbe hat im Allgemeinen mehr Kühnheit und Würde, und wenn der Ursprung selbst schon in einer bedeutenden Höhe läge, so müßte man, welches außerdem auch die Bestimmung des Gebäudes seyn möchte, das überhobene Gewölbe wählen, weil die große Erhöhung desselben, da sie seine vertikalen Dimensionen kleiner scheinen macht, als sie wirklich sind, ein Gewölbe anderer Art zu sehr erdrücken würde. Das gedrückte Gewölbe, indem es die in dem Platze eingeschlossene Luftmasse vermindert, wäre viel günstiger für die Stimme eines Redners. Wenn das Gebäude durch zwey an dem Gewölbe aufgehängte große Leuchter erhellt werden sollte, so müßte dieses Gewölbe entweder überhoben oder gedrückt seyn, weil seine Oberfläche in diesem Falle zwey Näbel hätte, die symetrisch über der großen Axe der horizontalen Ellipse gelegen wären, und weil diese, durch die um sie her vertheilten Felder sehr hervorstechend gemachten Näbel, die natürlichen Aufhängepunkte wären. Man könnte alsdann das Verhältniß unter den drey Axen so einrichten, daß diese Punkte in den gehörigen Abstand voneinander gesetzt würden.

Wenn dagegen das Gebäude vier große Oeffnungen haben, oder wenn das Gewölbe durch vier Gruppen von Säulen getragen werden sollte, oder endlich, wenn man zu der innern Verzierung vier symetrisch gestellte große Unterstützungen anbringen wollte, so müßte man das mittlere Gewölbe erwählen, bey welchem die vier Näbel immer in dem Ursprunge liegen, und man müßte die vier Grundmauern, oder Unterstützungen an die vier Endpunkte der Axen versetzen, weil in der Umgebung dieser Punkte und entfernt von den Näbeln, die durch die Verzierungen des Gewölbes hervorstechend gemachten Krümmungslinien, welche übrigens sämmtlich senkrecht auf den Ursprung treffen, sich langsamer von der Linie des größten Falles der Oberfläche entfernen.

Man beschäftigt sich gegenwärtig mit der Erbauung der Säle für die zwey Räthe der Gesetzgebung *): diejenigen Plätze, worüber man bisher für dergleichen Säle disponiren konnte, zwangen dazu dem Amphitheater weniger Tiefe, vorwärts des Redners zu geben, als auf den Seiten; da aber die Erfahrung bewiesen hat, daß die Stimme sich nach vorwärts auf eine größere Weite verbreitet, so scheint es, daß man eine gerade entgegengesetzte Einrichtung annehmen müsse. Von allen länglichten Formen, welche man dem Amphitheater geben könnte, giebt es keine, deren Gesetz einfacher und gefälliger wäre, als die Ellipse. Der Saal müßte daher elliptisch seyn, und durch ein Gewölbe in Form eines gedrückten Ellipsoids bedeckt werden.

Der Dienst der gesetzgebenden Versammlungen, erfodert ein Emplacement für das Bureau, vor welchem sich die Tribune des Redners befindet. Legt man das Bureau an einen Scheitel der Ellipse, so kann man demselben einen, zur Bequemlichkeit des Dienstes hinreichenden Raum widmen, und der Redner fände seine Stelle ganz natürlich unter einem Nabel des Gewölbes: das Amphitheater näme nur den vorwärts befindlichen Raum ein. Eine Gallerie, die um den ganzen Saal liefe, und welche hinreichend erhöht wäre, um von dem Amphitheater durchaus unterschieden zu seyn, lieferte Plätze für das Publikum. Der Saal, welcher weder Tribunen, noch irgend eine Art von Unregelmäßigkeit hätte, könnte durch Säulen geschmückt werden, deren jeder eine Rippe des Gewölbes entspräche, welche nach der aufsteigenden Krümmungslinie gebogen wäre. Alle diese, in ihrem Ursprunge vertikalen Rippen, krümmten sich um den einen oder den andern Nabel,

*) Diese Stelle wurde im Jahre III. (1794) der französischen Republick geschrieben.

um sodann lothrecht auf die gegenüberstehenden Säulen herabzufallen; und sie würden von andern Rippen, die nach den Linien der andern Krümmung gebogen waren, rechtwinklig durchkreuzt. Die Zwischenräume dieser Rippen könnten durchbrochen seyn, um entweder den Saal zu erhellen, oder um der Luft Ausgang zu verschaffen, und sie würden ein weniger fantastisches Fensterwerk bilden, als die Rosen unserer gothischen Kirchen. Zwey an den Näbeln des Gewölbes aufgehängte große Leuchter, zu deren Aufhängung das ganze Gewölbe beyzutragen schiene, dienten zur Erleuchtung des Saales bey Nacht.

Wir wollen in dieser Hinsicht in keine größeren Einzelnheiten eingehen, indem es uns genügt, den Künstlern einen einfachen Gegenstand angegeben zu haben, dessen, obgleich sehr reiche Verzierung nichts Willkührliches haben kann, weil sie hauptsächlich darin besteht, vor allen Augen eine sehr gefällige Anordnung zu entfalten, die in der Natur des Gegenstandes selbst liegt.

462. Es bleiben uns noch einige Details der Fig 1 zu erklären, die sich auf obige Ideen beziehen.

Indem wir diejenigen Krümmungslinien, welche sich auf der Horizontalebene als Ellipsen, wie M N M′ N′ projektiren, als solche betrachteten, welche die Oberfläche des Gewölbes in Gewölbsteine abtheilten, war es erforderlich, daß die Höhen der aufeinanderfolgenden Schichten so wenig als möglich von einander differirten. Zu diesem Zwecke halben wir den haben Umfang der vertikalen Ellipse C D E in eine ungerade Anzahl merkbar gleicher Theile getheilt, und diese Theilpunkte, wie L auf die Axe C D projektirt, wodurch für jede entsprechende Krümmungslinie der Punkt M bestimmt wurde. Um sodann den andern Scheitel N der nemlichen Ellipse zu finden, braucht man nur M H parallel zu A B zu ziehen, dieselbe bis zu ihrer Begegnung mit der Hülfshyperbel zu verlängern, und durch den Begegnungspunkt H, auf A B die Senkrechte H N zu fällen, welche den Punkt N bestimmt.

463. Bey der Annahme, daß das Gewölbe verziert werden soll, und daß daher die aufsteigenden Krümmungslinien, welche nach den Hyperbeln projektirt sind, hervorstechend gemacht werden müssen, um entweder die Gurthen zu markiren, welche den Säulen der griechischen Architektur entsprechen, oder um die Rippen zu zeichnen, welche den Pfeilern der gothischen Architektur angehören, so müssen jene Säulen in dem einen Falle, oder diese Pfeiler, in dem Andern, in gleiche Abstände gestellt, und die Hyperbeln müssen die Ellipse A D B C des Ursprungs in merkbare gleiche Theile theilen; alsdann ist der Punkt R dieser Ellipse, durch welchen jede Hyperbel gehen muß, im Voraus bestimmt. Um in diesem Fall den Scheitel P derselben Hyperbel zu finden, fälle man aus dem Punkt R, Fig 2, auf A B die Senkrechte R T, man ziehe die Gerade F′ T, und durch den Punkt F′ führe man zu dieser Letzten die Parallele F′ P, welche die Axe A B in dem Punkt P schneidet. Was den Endpunkt Q der andern Axe betrifft, so bestimmt man denselben, indem man O L senkrecht auf A B errichtet, und durch L die L Q senkrecht auf die andere Axe K D zieht: der Fußpunkt Q dieser Senkrechten ist der gesuchte.