zwey Fäden berührend an diese Fläche, und, nachdem man dieselben angespannt nach der Fläche gebogen hat, befestigt sie an ihren andern Endpunkten; so wird der Vereinigungspunkt der zwey Fäden, welcher die Fähigkeit hat sich mit der tangirenden Ebene zu der Fläche zu bewegen, ohne weder auf dem einen noch auf dem andern Faden zu gleiten, durch seine Bewegung die vorgelegte Kurve erzeugen.

423. Alles so eben über die Kurven von doppelter Krümmung Gesagte, kommt gleichmäßig den ebenen Kurven zu, nur mit dem Unterschiede, daß, da alle Normalebenen rechtwinklig auf die Ebene der Kurve sind, alle ihre aufeinanderfolgenden geraden Durchschnittslinien ebenfalls senkrecht auf dieselbe Ebene, und folglich parallel unter sich sind. Die von allen diesen Normalebenen berührte aufwickelbare Fläche ist daher eine Cylinderfläche, deren gerader Schnitt die gewöhnliche Evolute der Kurve ist. Aber diese Cylinderfläche enthält ebenfalls alle Evoluten von doppelter Krümmung der nemlichen Kurve; und jede von diesen Evoluten macht mit allen geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche einen unveränderlichen Winkel.

Die gewöhnliche Schraubenlinie ist eine von den Evoluten der Evolvente des Kreises, der die Basis der Cylinderfläche bildet, auf welcher sie sich befindet; und, welches auch die Höhe des Ganges der Schraube seyn mag, so ist, wenn der Durchmesser des Cylinders nicht wechselt, die Linie immer eine von den Evoluten der nemlichen Kurve.

Geometrische Konstruktion der oskulirenden Ebenen, Krümmungshalbmesser und der Evoluten der krummen Linien.

Aufgabe.

Es ist eine Linie von doppelter Krümmung gegeben, und ein Punkt dieser Linie, man soll die oskulirende Ebene der Kurve an diesem Punkt konstruiren?

424. Auflösung. Nebst dem gegebenen Punkte nehme man auf der vorgelegten Kurve eine beliebige Zahl anderer Punkte und ziehe die, diesen Punkten entsprechenden Tangenten, wodurch man eben so viele Erzeugungslinien der oskulirenden Fläche (Art. 417.) der gegebenen Kurve erhält. Man bestimme die Begegnungspunkte dieser Tangenten mit einer der Projektionsebenen, zum Beyspiel mit der Horizontalebene, und konstruire den Riß der oskulirenden Fäche, welcher der Ort jener Begegnungspunkt ist. An dem Punkt dieses Risses, wo derselbe von der Erzeugungslinie der oskulirende Fläche getroffen wird, die dem gegebenen Punkt der krummen Linie entspricht, ziehe man zu demselben eine Tangente, und führe durch diese Tangente und durch die genannte Erzeu-

gungslinie eine Ebene, so ist diese tangirend zu der Fläche und folglich die oskulirende Ebene an dem gegebenen Punkt der vorgelegten Kurve, welche die Rückkehrkante der Fläche ist.

Aufgabe.

Es ist eine krumme Linie gegeben und einer ihrer Punkte, man verlangt den Krümmungshalbmesser, welcher jenem Punkt entspricht?

425. Auflösung I. Man bestimme zuerst die oskulirende Ebene der Kurve, die dem gegebenen Punkt entspricht, und projektire sodann die Kurve auf diese Ebene. Ist dies geschehen, nehme man mehrere Punkte der Projektion und ziehe die entsprechenden Normalen dieser nemlichen Projektion; man zeichne die Evolute der Projektion, die durch diese Normalen bestimmt wird; endlich ziehe man durch den gegebenen Punkt eine Tangente zu der Evoluten und bestimme den Berührungspunkt, so ist das Stück dieser Tangente, was zwischen dem Berührungspunkt und dem gegebenen Punkt gefaßt ist, der verlangte Krümmungshalbmesser; denn dieses Stück der genannten Tangente ist offenbar der Krümmungshalbmesser an dem gegebenen Punkt, wenn man denselben als der Projektion der Kurve angehörig betrachtet; aber der Bogen, dessen Krümmung durch den gefundenen Halbmesser gemessen wird, gehört zugleich der gegebenen Linie und ihrer Projektion, und er ist folglich der Gesuchte. Bey einer gegebenen ebenen Kurve wäre man der Konstruktion ihrer Projektion auf die entsprechende Krümmungsebene überhoben.

426. II. Man konstruire bey einer beliebigen Zahl von Punkten der gegebenen Linie die entsprechenden oskulirenden Ebenen, und ziehe in jeder von diesen Ebenen eine Normale zu der Kurve. Der geometrische Ort dieser Normalen ist eine windische Fläche (Art. 416.), von welcher sie die Erzeugungslinien sind.

Durch den gegebenen Punkt führe man eine Normalebene zu der Kurve, so ist diese tangirend zu der windischen Fläche an einem Punkt der Normalen, die demselben gegebenen Punkte zugehört; man bestimme diesen Berührungspunkt, so hat man den gesuchten Krümmungsmittelpunkt. *)

Eine weitere Auflösung der vorgelegten Aufgabe ergiebt sich aus Art. 419.

*) Siehe Hachette, Eléments de géométrie à trois dimensions. Seite 79.

Aufgabe.

Es ist irgend eine krumme Linie gegeben; man verlangt eine oder mehrere ihrer Evoluten zu konstruiren?

427. Auflösung. Man bestimme zuerst die aufwickelbare Fläche, welche der Ort der Evoluten der gegebenen Kurve ist. Zu diesem Ende führe man eine hinreichende Anzahl von Normalebenen zu der Kurve, und nachdem man den Horizontal- und Vertikalriß einer jeden bestimmt hat, ziehe man eine horizontale Kurve tangirend an die Reihe der ersten Risse und eine vertikale Kurve, tangirend an die Reihe der zweyten, so hat man die Risse der verlangten oskulirenden Fläche. (Art. 417.)

Sind diese Risse bekannt, so bestimme man die Berührungspunkte, in welchen sie je zwey Risse einer nemlichen Normalebene berühren, und verbinde diese Punkte durch eine Gerade, so hat man eben so viele Erzeugungslinien derselben Fläche.

Ist dieses geschehen, so nehme man irgend einen Punkt der gegebenen Kurve, und führe durch denselben eine Tangente an die aufwickelbare Fläche; der Berührungspunkt dieser Tangente gehört einer von den Evoluten der gegebenen Kurve an, und wir wollen annehmen, diese Evolute sey die zu konstruirende. Nachdem man sofort die Aufwicklung der Fläche, welche der Ort der Pole der gegebenen Kurve ist, konstruirt hat, trage man auf diese Aufwicklung die oben genannte Tangente über, so ist die unbestimmte Verlängerung dieser übergetragenen Tangente auch zugleich die verlangte, auf die Aufwicklung übergetragene Evolute; denn jede Evolute einer Kurve ist auf der Aufwicklung des Ortes der Pole dieser Linie, eine Gerade. Es bleibt daher nur diese übergetragene und unbestimmt verlängerte Tangente wieder auf die aufwickelbare Fläche, welche alle Evoluten der gegebenen Linie enthält, zurückzutragen, um die verlangte Evolute zu erhalten.

428. Wie aus dem Vorgetragenen ersichtlich ist, haben alle Kurven mit ihren oskulirenden Ebenen und ihren Krümmungskreisen zwey aneinanderstoßende Elemente, oder drey unendlich nahe liegende Punkte an dem Berührungsorte gemein, während eine Kurve und eine gewöhnliche Tangente, oder zwey sich einfach berührende Kurven nur ein Element oder zwey aufeinanderfolgende, unendlich nahe liegende Punkte gemein haben. Man theilt deßhalb die Berührungen in verschiedene Klassen ein. Die Tangenten bilden die Berührungen der ersten Ordnung, die Krümmungskreise die Berührungen der zweyten Ordnung, und es ist hieraus leicht zu entnehmen, was man sich unter Berührungen einer höheren Ordnung zu denken habe.

Beyspiele über die Konstruktion der oskulirenden Ebenen und der Krümmungskreise finden sich in Hachette's zweytem Supplemente zu Monge; auch giebt Vallée (géom.

descr. pag. 176 etc.), die Konstruktion der Evoluten einer Kurve, die aus dem Durchschnitte eines Cylinders und einer Kugel entsteht, so wie einer cylindrischen Spirallinie. Wir führen übrigens, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesen Beyspielen keine an, und verweisen deßhalb die Leser auf die genannten Werke.

Zweytes Kapitel.

Von den Krümmungen der Flächen.

---

429. Dieser Gegenstand kann seiner Natur nach, mit weit größerer Leichtigkeit mittelst der Analysis behandelt werden, als durch blose Betrachtung der Eigenschaften der Ausdehnung: da aber die Resultate, zu welchen dieselbe führt, den Künstlern sehr nützlich seyn kann, von welchen wir nicht voraussetzen dürfen, daß sie mit den analytischen Operationen vertraut seyen, so werden wir dieselbe darzustellen suchen, indem wir blos geometrische Betrachtungen anwenden. Diese Methode wird zwar die ihr eigene Klarheit mit sich führen, aber auch eine gewisse Langsamkeit in ihrem Gange.

Die Flächen können in Bezug auf ihre Krümmungen in drey große Klassen abgetheilt werden. Die erste umfaßt diejenigen, welche in allen ihren Punkten gar keine Krümmung haben: die Fläche dieses Geschlechtes reduziren sich auf die Ebene, die übrigens auf beliebige Art im Raume gelegen seyn kann. Die zweyte Klasse schließt alle diejenigen ein, die in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Krümmung haben; dies sind im Allgemeinen die aufwickelbaren Flächen, von denen zwey aufeinanderfolgende Elemente betrachtet werden können, als seyen sie Theile einer Kegelfläche, selbst wenn man die Größe dieser Elemente als unbestimmt in der Richtung der Kanten der Fächen betrachtet. Alle übrigen Flächen endlich bilden die dritte Klasse; sie haben in jedem ihrer Punkte zwey unterschiedene Krümmungen, die sich, unabhängig von einander, ändern können. Wir wollen damit anfangen, die einfachsten Flächen zu betrachten, und zuerst die Cylinderflächen.

430. Es sey A B F E (Taf. XLII. Fig. 4.) eine unbegränzte Cylinderfläche, von beliebiger Grundlinie, auf der man einen willkührlich genommenen Punkt L betrachte. Durch diesen Punkt denke man sich die gerade Erzeugungslinie C L G und einen Schnitt J L K, der durch eine auf die Erzeugungslinie rechtwinklige Ebene gemacht ist; dieser Schnitt ist parallel und ähnlich mit der Basis der Fläche. Endlich denken wir uns