Fünftes Buch.

Theorie der krummen Linien und der krummen Flächen.

Erstes Kapitel.

Von der Krümmung der Kurven, von ihren Evoluten und ihren Evolventen.

411. Es ist bekannt, daß wenn eine gerade Linie, in einer Ebene betrachtet, sich um einen ihrer als fest angenommenen Punkte dreht, alle übrigen Punkte der Geraden um den festen Punkt konzentrische Kreisumfänge beschreiben. Es giebt keine krumme Linien, welche man nicht auf ähnliche Art erzeugt denken könnte.

(Taf. XLII. Fig. 1.) Es sey M N O irgend eine auf einer Ebene verzeichnete Kurve: wenn man sich vorstellt, daß eine Gerade A B sich so bewege, daß sie beständig tangirend zu der Kurve sey, ohne eine Bewegung in der Richtung ihrer Länge zu machen, so wird jeder Punkt P dieser Geraden eine krumme Linie G P P′ P″ H beschreiben, die offenbar folgende Eigenthümlichkeiten hat.

Jedes Element P Q der beschriebenen Linie ist senkrecht auf die entsprechende Richtung der Geraden A B; denn dieses Element hat dieselbe Richtung, die in P das Element eines Kreisbogens hätte, der aus dem Berührungspunkt M als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser gleich P M beschrieben würde. Demnach ist die Tangente in P der beschriebenen Linie senkrecht auf die Gerade, die durch den Punkt P tangirend an die gegebene Linie M N O gezogen ist.

Wenn der beschreibende Punkt P auf der Seite gelegen ist, nach welcher die Gerade A B sich der berührten Kurve nähert, so nimmt die Kurve G P ihre Richtung gegen die M N O bis sie denselben begegnet, was alsdann geschieht, wenn der beschreibende

Punkt selbst der Berührungspunkt der Geraden A B geworden ist, wobey diese nach C D versetzt angenommen wird. Aber diese Kurve verlängert sich nicht darüber hinaus, und wenn die Gerade ihre Bewegung fortsetzt, so wird der Punkt P, und folglich die Kurve die er beschreibt, in P′ zurückspringen. Da die beschriebene Linie immer senkrecht auf die bewegliche Gerade ist, so sind die Zweige G P P′ und P′ P″ H auch beyde senkrecht auf die Gerade C D, und folglich auf die Kurve M N O, welche diese Gerade in P′ berührt. Die beyden Zweige berühren sich daher selbst in P′.

Der Punkt P′, in welchem eine krumme Linie auf solche Art zurückspringt, daß ihre beyden Zweige sich in diesem Punkt berühren, heißt Rückkehrpunkt der Linie.

Die Krumme M N P′ O, auf welche sich die Gerade anlehnt, indem sie dieselbe beständig berührt, wird die Evolute, oder die Abgewickelte der Krummen G P P′ P″ H genannt; weil irgend einer ihrer Bogen M N P′ gleich ist dem entsprechenden Theile M P der beweglichen Geraden, und die Krumme G P P″ P H heißt die Evolvente der Krummen M N N O, oder die durch Abwicklung entstandene Linie.

Da man so viele auf die nemliche Weise beschriebene Kurven erhalten kann, als sich auf der als unbestimmt betrachteten Geraden A B Punkte P, p... denken lassen, so ist es einleuchtend, daß eine nemliche Evolute eine unendliche Menge verschiedener Evolventen haben könne, und daß alle diese Evolventen die Eigenthümlichkeit besitzen, gleiche Normalen zu haben.

Wir werden sogleich sehen, daß diese Eigenschaft auch allen Kurven von doppelter Krümmung zukomme.

412. Man bedient sich in den Künsten einiger durch Abwicklung entstandener Linien und besonders der Evolvente des Kreises; es ist dieses eine Spirallinie, deren Anzahl von Umwälzungen unendlich ist, und deren sämmtliche aufeinanderfolgende Zweige um eine beständige Größe voneinander entfernt sind, gleich dem Umfange des abgewickelten Kreises. Nach der Krümmung dieser Evolvente schneidet man die Kämme oder Zähne der Wellbäume, die, wie in den Pochwerken, Stämpfer aufzuheben haben; denn, da die Berührung des Zahnes mit dem Daumen des Stämpfers immer in der nemlichen Vertikalen bleibt, so ist der Kraftaufwand des Baumes um den Stämpfer zu heben beständig derselbe. Vaucanson wendete oft die abwickelnde Spirale des Kreises als Verzahnungsmittel an, um die Bewegung eines Wellbaumes auf einen Andern, zu demselben parallelen Baum überzutragen; hauptsächlich wenn die Verzahnung genau seyn, und die Bewegung ohne Zeitverlust von einem Baume auf den Andern übertragen werden sollte.

413. Wir haben gezeigt, auf welche Weise die durch Abwicklung entstandene Linie nach der Abgewickelten gebildet werden könne, es ist leicht einzusehen, wie dagegen die abgewickelte Linie nach der Abwickelnden oder Evolvente gebildet werden könne. In der That haben wir gesehen, daß alle Normalen der Evolvente Tangenten sind zu der Evoluten; wenn man daher durch alle Punkten P, Q einer vorgelegten Kurve G P Q P′ sich Normallinien gezogen denkt, so ist die Kurve M N O, welche alle diese Normalen berührt, die Evolute. Ueberdies, wenn man durch zwey aufeinanderfolgende und unendlich nahe Punkte P, Q zwey Normalen P B, Q *b* zieht, so ist der Punkt M, worin sie sich schneiden, um sich jenseits zu kreuzen auf der Evoluten, und dieser Punkt kann als der Mittelpunkt eines kleinen Kreisbogens betrachtet werden, welcher mit dem Halbmesser P M beschrieben, dieselbe Krümmung hat, wie der Bogen P Q der betrachteten Kurve. Dieser Kreis, dessen Krümmung dieselbe ist, wie die des unendlich kleinen Bogens P Q einer krummen Linie, heißt der Krümmungskreis (circulus curvaturae, osculator) dieses Bogens; der Halbmesser P M desselben Kreises, und der Punkt M, in welchem sich die zwey aufeinanderfolgenden Normalen schneiden, sind wechselsweise der Krümmungshalbmesser (radius osculi) und der Krümmungsmittelpunkt desselben Bogens; und diese Krümmung ist bekannt, sobald der Punkt M bestimmt ist.

414. Um deutlich einzusehen, auf welche Art die Kreislinie dienen könne, um die Krümmung der verschiedenen Bögen irgend einer krummen Linie zu messen, müssen wir vor Allem den richtigen Begriff dessen, was man unter Krümmung einer Linie versteht, festzustellen suchen. Stellen wir uns zu dem Ende vor, man gehe auf einer krummen Linie vorwärts, indem man immer nach der Richtung der Tangente zu der Krummen an den Punkt, in welchem man sich befindet, blicke; so wird es nicht genug seyn nur gerade vor sich zu gehen, sondern man wird sich in jedem Augenblicke nach dem einwärtsgehenden Theil der Linie, der man folgt, drehen müssen. Die Krümmung dieser Linie ist proportional zu der Quantität, der auf diese Weise gemachten Drehung, dividirt durch jeden kleinen Raum, den man durchläuft. *)

Wenn man auf einem Kreise geht, so muß man, um gleiche Bögen zu durchlaufen, gleich große Drehungen machen, die Krümmung des Kreises ist daher in allen seinen Theilen die gleiche, und die Größe dieser Krümmung hängt blos von seinem Halbmesser ab.

---

*) Siehe Dupin, Géométrie des Arts et Métiers. XVme Leçon.

Wenn man nacheinander auf zwey ungleichen Kreisen geht, deren Halbmesser R und r sind; so ist $3{,}14\ldots \times 2\,R$ der Umfang des größeren, und $3{,}14\ldots \times 2\,r$ der Umfang des kleineren Kreises. Aber wenn man einen ganzen Kreis durchläuft, und immer auf dem Umfange geht, so dreht man sich um 360°, daher sind die Krümmungen der zwey Kreise unter sich wie

$$\frac{360^\circ}{3{,}14\ldots \times 2\,R} : \frac{360^\circ}{3{,}14\ldots \times 2\,r} \text{ oder } :: \frac{1}{R} : \frac{1}{r}$$

der Umfang des kleinen Kreises ist daher mehr gekrümmt als der des großen und zwar im umgekehrten Verhältnisse des großen Halbmessers zum kleinen.

Da nun aber die Krümmungskreise der verschiedenen Bögen einer krummen Linie dieselbe Krümmung haben, wie die Bögen mit denen sie zusammenfallen, so ergiebt sich nach dem obigen Grundsatze, daß die Krümmungen einer Linie in ihren verschiedenen Punkten, im umgekehrten Verhältnisse stehen mit der Größe der, diesen Punkten entsprechenden Krümmungshalbmesser.

415. Bisher haben wir angenommen, die krummen Linien seyen eben, und uns blos mit dem beschäftigt, was in ihrer Ebene vorgeht. Wir wollen nun zu den krummen Linien von doppelter Krümmung, wie diejenigen, welche durch den wechselseitigen Schnitt zweyer krummen Flächen hervorgebracht werden, übergehen.

Denken wir uns im Raume eine dieser Linien, und stellen wir uns dieselbe im unendlich kleine Elemente abgetheilt vor. Jedes dieser Elemente bestimmt die Richtung einer Tangente und alle diese Tangenten, unbegränzt verlängert gedacht, bilden eine aufwickelbare Fläche, welche zwey gleiche, entgegenstehende und durch die krumme Linie selbst getrennte Netze hat. Irgend eine tangirende Ebene zu dieser Fläche geht durch zwey aufeinanderfolgende Tangenten der krummen Linie, und da jede dieser zwey Tangenten mit der Krummen ein Element gemein hat, so liegt der unendlich kleine Bogen, welcher durch die aneinanderstoßenden Berührungselemente der Krummen und ihrer Tangenten gebildet wird, zu gleicher Zeit auf beyden Tangenten und auf der tangirenden Ebene. Diese Ebene, welche offenbar unter allen möglichen, an den genannten Bogen der krummen Linie streifenden Ebenen, die innigste Berührung mit der Linie hat, nennt man die oskulirende Ebene, oder auch die Krümmungsebene der Linie.

Wenn man in der oskulirenden Ebene einer Kurve und durch die Mitten der zwey Elemente, die sie enthält, wechselseitig zwey senkrechte Gerade auf diese Elemente führt, so schneiden sich diese Geraden in einem Punkte, welcher der Mittelpunkt eines Kreises ist, dem die genannten zwey Elemente angehören, und welcher, da er die Krümmung der Kurve in der Krümmungsebene mißt, der Krümmungskreis derselben ist.

416. Bey einer ebenen Kurve wird jeder Krümmungshalbmesser durch den unmittelbar vorhergehenden und den unmittelbar nachfolgenden in zwey Mittelpunkten der Krümmung geschnitten, die Reihe dieser Mittelpunkte ist die Evolute der ebenen Kurve. Bey einer doppelt gekrümmten Linie hingegen liegen zwey aufeinanderfolgende Krümmungsmittelpunkte in zwey verschiedenen oskulirenden Ebenen, und die Reihe der Normalen zu der Linie von doppelter Krümmung, die durch die aufeinanderfolgenden Mittelpunkte der Krümmungskreise gezogen sind, begegnen sich zu zwey und zwey nicht; denn diese Begegnung könnte nur in einem Punkte der geraden Durchschnittslinie der zwey Krümmungsebenen statt finden, in denen die zwey Normalen gezogen sind, diese gerade Durchschnittslinie ist aber Tangente zu der Kurve von doppelter Krümmung, auf welcher aber die zwey Normalen per hypoth. keinen gemeinschaftlichen Punkt haben. Der geometrische Ort jener aufeinanderfolgenden Normalen ist folglich eine windische Fläche.

Demzufolge haben alle krummen Linien in jedem ihrer Punkte wirklich nur eine einzige Krümmung, und in dieser Beziehung unterscheiden sich die ebenen krummen Linien von denen von doppelter Krümmung nur dadurch, daß die Ersten alle ihre Krümmungen in einer nemlichen Ebene haben, währenddem die Ebenen der Krümmungen der Letzten unaufhörlich wechseln.

Es wäre sonach sehr passend, wenn man den Kurven, deren sämmtliche Punkte nicht in einer nemlichen Ebene liegen, die Benennung windische Kurven gäbe, statt Kurven von doppelter Krümmung, so wie man windische Flächen diejenigen nennt, die durch eine gerade Linie hervorgebracht sind, deren je zwey aufeinanderfolgende Stellungen sich nicht in einerley Ebene befinden. *)

---

*) Schon der alte Maitre Blanchard, in seinem Traité de la coupe des piérres, gebraucht die Benennung courbes gauches für die, bey dem Durchschnitte zweyer Gewölbflächen erscheinenden nicht ebenen Kurven, obgleich er wohl nur durch einen wissenschaftlichen Instinkt dazu bestimmt wurde. L. L. Vallée in seiner géométrie descriptive pag. 269. schlägt diese Benennung neuerdings vor, und bemerkt dabey, daß der Ausdruck krumme Linie von doppelter Krümmung nicht allein lang, unangenehm und beschwerlich sey, sondern daß er noch überdem einen falschen Nebenbegriff von zwey Krümmungen gäbe, welche nicht existirten, und daß es daher wünschenswerth sey, sich desselben nicht mehr zu bedienen.

So richtig gewiß diese Einwürfe sind, so ist doch Vallée selbst bey dem Vorschlage stehen geblieben, und wir haben uns, wahrscheinlich mit ihm übereinstimmend, nicht für com-

417. Betrachten wir eine doppelt gekrümmte Linie, und die aufwickelbare Fläche, welche diese Linie als Rückkehrkante hat, und welche wir als den Ort der aufeinanderfolgenden Durchschnitte der oskulirenden Ebenen der Linie, die oskulirende Fläche derselben nennen wollen. Die geraden Erzeugungslinien dieser Fläche sind die Tangenten zu ihrer Rückkehrkante, das heißt, zu der Linie von doppelter Krümmung; denken wir uns sofort einen biegsamen und unausdehnbaren Faden in zwey Theile getheilt, den Einen fest, und nach der Rückkehrkante der oskulirenden Fläche gebogen, den Andern beweglich, und auf eine Tangente zu jener Kante aufgelegt. Dieser zweyte Theil des Fadens, welcher in gerader Linie ist, wird, indem er nacheinander durch alle Tangenten zu jeder Rückkehrkante geht, sich so bewegen können, daß seine ganze Länge sich nicht ändert. Alle Punkte des sich bewegenden Fadens, werden dadurch auf der oskulirenden Fläche solche Linien beschreiben, welche die Kanten der Fläche rechtwinklig durchschneiden; und da der geradlinige Theil des Fadens sich in jedem Augenblick um das von der Rückkehrkante abgewickelten Stück verlängert, so ist einleuchtend: daß alle durch die Punkte des beweglichen Fadens auf der oskulirenden Fläche beschriebenen Linien, welche die Tangenten zu der Rückkehrkante rechtwinklig durchschneiden, Evolventen zu jener Kante sind. (Art. 411.) Alle diese Evolventen haben offenbar an den Punkten, wo sie von einer nemlichen Tangente geschnitten werden, einen gemeinschaftlichen Krümmungsmittelpunkt, welcher zugleich der Berührungspunkt der Tangente und der Rückkehrkante ist. Die Längen der Tangenten zwischen der Rückkehrkante und der Evolventen messen die Größe der Krümmungshalbmesser dieser Evolventen.

Da es nun keine krumme Linie giebt, die nicht als eine Evolute, und als die Rückkehrkante einer aufwickelbaren Fläche betrachtet werden könnte, so folgt daraus, daß jede ebene, oder doppelt gekrümmte Linie eine unendliche Menge verschiedener Evolventen habe, und daß diese Evolventen sämmtlich auf ihrer oskulirenden Fläche liegen.

Wenn die vorgelegte Krumme eine ebene Linie ist, so fällt die oskulirende Fläche und die Ebene der Linie, in eines zusammen, und diese Ebene ist der geometrische Ort aller Evolventen der Linie. Wir werden nun die krummen Linien als Evolventen betrachten, und zeigen, daß umgekehrt, jede derselben eine unendliche Menge von Evoluten habe.

---

petent gehalten, einen, einmal eingebürgerten Terminus gegen einen neuen zu vertauschen. Uebrigens gebraucht man ziemlich allgemein das Beywort, windisch für jede nicht in einer Ebene enthaltene lineare Figur.

418. Wenn man sich durch den Mittelpunkt eines Kreises eine Gerade senkrecht auf seine Ebene geführt, und nach beyden Seiten unbestimmt verlängert denkt, so ist bekannt, daß jeder Punkt dieser Geraden in gleichen Abständen von allen Punkten des Umfanges ist, und folglich, wenn man annimmt, daß eine zweyte Gerade, die eines Theils an einem Punkt des Umfanges, und andern Theils an irgend einem Punkte der Senkrechten beendigt ist; sich um diese letztere als Axe drehe; indem sie beständig den nemlichen Winkel mit ihr macht, ihr beweglicher Endpunkt den Umfang des Kreises mit der nemlichen Genauigkeit beschreiben wird, als wenn man den Halbmesser sich um den Mittelpunkt hätte drehen lassen. Die Beschreibung des Kreises mittelst des Halbmessers, welche nur ein besonderer Fall der Ersteren ist, dient eigentlich durch ihre Einfachheit mehr dazu, einen Begriff von der Ausdehnung des Kreises zu geben: aber wenn es sich blos um die Beschreibung handelt, so kann die erste Art in gewissen Fällen den Vorzug haben; denn wenn man auf der Axe zwey, auf beyden Seiten der Ebene gelegene Pole nimmt, sodann durch diese zwey Punkte zwey Geraden führt, die sich in einem Punkte des Umfanges schneiden, und alsdann das System dieser zwey Geraden sich dergestalt um die Axe drehen läßt, daß ihr Durchschnittpunkt auf beyden Geraden fest ist, so beschreibt dieser Punkt den Umfang des Kreises, ohne daß es nöthig wäre, vorher die Ebene, in der er sich befindet, zu verfertigen.

419. (Taf. XLII. Fig. 2) Es sey K A *d* D irgend eine, im Raum verzeichnete Kurve von doppelter Krümmung. Durch einen Punkt A dieser Kurve denke man sich eine Ebene M N O P senkrecht auf die Tangente in A; durch den unendlich nahen Punkt *a* sey gleichfalls eine Ebene *m n* O P senkrecht auf die Tangente in *a* angenommen; diese beyden Ebenen werden sich nach einer Geraden O P schneiden, welche die Axe des Kreises ist, von dem der unendlich kleine Bogen A *a* der Kurve als ein Theil angesehen werden kann: so daß, wenn man aus den Punkten A, *a* zwey Senkrechte auf diese Gerade fällt, diese unter sich gleichen Senkrechten dieselbe in einem nemlichen Punkt G treffen werden, welcher der Mittelpunkt jenes Kreises ist. Von allen andern Punkten g, g', g''.... derselben Geraden ist jeder in gleichem Abstande von allen Punkten des unendlich kleinen Bogens A *a*, und sie können folglich als die Pole desselben betrachtet werden. Wenn man demnach aus irgend einem Punkt *g* dieser Axe zwey Gerade nach den Punkten A, *a* führt, so sind diese Geraden gleich unter sich, und sie bilden mit der Axe, die unter sich gleichen Winkel A *g* O, *a g* O: so daß wenn man die Krümmung der Kurve im Punkt A erklären wollte, man die Länge des Krümmungshalbmessers G A geben mußte, und wenn es darum zu thun wäre, die Richtung der Krümmung

zu bezeichnen, man die Stellung des Mittelpunktes G im Raume angeben müßte. Aber wenn blos davon die Rede ist, den kleinen Bogen zu beschreiben, so wäre es gleichermaßen hinreichend, entweder die Gerade A g sich um die Axe drehen zu lassen, ohne den Winkel A g O, den sie mit ihr macht, zu ändern, oder den Krümmungshalbmesser A G rechtwinklig auf diese Axe umzudrehen.

Sonach kann die Gerade O P als die Linie der Pole des Elementes A a betrachtet werden; der Krümmungsmittelpunkt dieses Elements ist derjenige von diesen Polen, dessen Entfernung von dem Elemente ein Kleinstes ist; sein Krümmungshalbmesser endlich ist die aus dem Elemente auf die Pollinie gefällte Senkrechte A G.

420. Sofort verrichte man bey allen Punkten der Kurve von doppelter Krümmung dieselbe Operation, welche wir so eben bey einem ihrer Elemente gemacht haben; das heißt, man führe durch alle aufeinanderfolgenden Punkte A, A′, A″, A‴ ꝛc. (Taf. XLII. Fig. 3.) Ebenen M N O P, jegliche senkrecht auf die Tangente zu der krummen Linie, an dem Punkte wo sie dieselbe schneidet. Die erste dieser Ebenen, wird der Zweyten in einer Geraden O P begegnen, welche der geometrische Ort der Pole des Bogens A A′ ist; die Zweyte wird der Dritten in einer Geraden O′ P′, dem Orte der Pole des Bogens A′ A″ begegnen; und so weiter fort. Es ist einleuchtend, daß das System aller geraden Durchschnitte, oder die krumme Fläche, welche sie durch ihre Vereinigung bilden, der geometrische Ort der Pole der Krummen K A D sey; denn diese Krumme hat keinen Pol der nicht auf der Fläche läge, und diese Fläche hat keinen Punkt, welcher nicht der Pol irgend eines Elementes der Krummen wäre.

421. Durch den Punkt A der Krummen, durch welchen die erste Normalebene geht, werde nun in der Ebene und nach beliebiger Richtung eine Gerade A g gezogen, bis sie den Schnitt O P irgendwo in einen Punkt g trifft; durch die Punkte A′, g werde in der zweyten Normalebene die Gerade A′ g gezogen und verlängert, bis sie den Schnitt O′ P′ in einem Punkte g' trifft; es werde gleicherweise die A″ g' g'' gezogen, und so weiter fort.

Die krumme Linie, welche durch alle Punkte g, g', g''.... ꝛc. geht, ist eine Evolute der Krummen K A D; denn alle Geraden A g, A′ g', A″ g'', sind Tangenten zu der Krummen $g\,g'\,g''$, weil sie die Verlängerungen der Elemente dieser Linie sind. Nimmt man nun überdies an, die erste Gerade A g drehe sich um die O P als Axe, um sich auf die folgende A′ g aufzulegen, so wird sie nicht aufhören Tangente zu der Krummen $g\,g'\,g''$ zu seyn; und ihr Endpunkt A wird, nachdem er den Bogen A A′ durchlaufen hat, mit dem Endpunkt A′ der Zweyten zusammenfallen.

Eben so lasse man die zweyte Linie A′ g' um die O′ P′ als Axe drehen, um sich auf Dritte A″ g' aufzulegen, so wird sie nicht aufhören die Kurve $g\,g'\,g''$ zu berühren, und ihr Endpunkt A′ wird den Bogen A′ A″ nicht verlassen, und so weiter fort. Die Krumme $g\,g'\,g''$ ist daher von der Beschaffenheit, daß wenn man annimmt, eine ihrer Tangenten drehe sich um diese Krumme, ohne aufzuhören sie zu berühren und ohne eine Bewegung nach der Richtung ihrer Länge zu machen, ein Punkt dieser Tangente die Krumme K A D beschreiben wird; sie ist daher eine ihrer Evoluten. Aber die Direktion der ersten Geraden A g war willkührlich genommen, und nach welcher andern Richtung man dieselbe in der Normalebene gezogen haben würde, so hätte man eine andere Kurve $g\,g'\,g''$ gefunden, welche ebenfalls eine Evolute der Kurve K A D gewesen wäre. Irgend eine krumme Linie hat demnach eine unendliche Zahl von Evoluten, die alle auf einer nemlichen krummen Fläche gelegen sind.

Die Geraden A′ g' und A″ g' machen gleiche Winkel mit der Geraden O′ P′; und da das Element $g'\,g''$ die Verlängerung der Geraden A″ g' ist, so ergiebt sich daraus, daß die zwey aufeinanderfolgenden Elemente $g\,g'$, $g'\,g''$ der Evoluten $g\,g'\,g''$ gleiche Winkel mit der Geraden O′ P′ bilden, welche durch ihren Begegnungspunkt geht. Wenn man aber die Fläche aufwickelt, um dieselbe auf eine Ebene aufzulegen, so hören dadurch die Elemente der Evoluten nicht auf, gleiche Winkel mit den Geraden O P zu machen; zwey aufeinanderfolgende Elemente der Krummen $g\,g'\,g''$ in der, auf eine Ebene ausgedehnten Fläche betrachtet, machen daher gleiche Winkel mit einer nemlichen geraden Linie, und sie liegen folglich, jede in der Verlängerung der Andern. Es folgt daraus, daß jede Evolute einer Kurve von doppelter Krümmung eine gerade Linie wird, wenn die Fläche, welche sie alle enthält, auf eine Ebene aufgerollt wird. Jede dieser Evoluten ist daher die kürzeste Linie, die man zwischen ihren zwey Endpunkten ziehen kann.

Man erhält hieraus ein leichtes Mittel um irgend eine Evolute einer Linie von doppelter Krümmung zu finden, wenn man die aufwickelbare Fläche hat, die sie alle enthält. Es ist dazu hinreichend, durch einen Punkt der Kurve einen Faden berührend an die Fläche zu führen und sodann diesen Faden nach der Fläche zu biegen, indem man ihn anzieht; denn vermöge der Spannung wird er die Richtung der kürzesten Kurve zwischen seinen Endpunkten nehmen, und er wird sich folglich nach einer von den Evoluten biegen.

422. Es ist hieraus ersichtlich, wie es möglich sey, durch eine stetige Bewegung irgend eine krumme Linie von doppelter Krümmung zu erzeugen: denn, wenn man die, durch alle Normalebenen der Kurve berührte aufwickelbare Fläche verfertigt hat; und man leitet aus dem gegebenen Punkt des Raumes, durch welchen die Kurve gehen muß,

zwey Fäden berührend an diese Fläche, und, nachdem man dieselben angespannt nach der Fläche gebogen hat, befestigt sie an ihren andern Endpunkten; so wird der Vereinigungspunkt der zwey Fäden, welcher die Fähigkeit hat sich mit der tangirenden Ebene zu der Fläche zu bewegen, ohne weder auf dem einen noch auf dem andern Faden zu gleiten, durch seine Bewegung die vorgelegte Kurve erzeugen.

423. Alles so eben über die Kurven von doppelter Krümmung Gesagte, kommt gleichmäßig den ebenen Kurven zu, nur mit dem Unterschiede, daß, da alle Normalebenen rechtwinklig auf die Ebene der Kurve sind, alle ihre aufeinanderfolgenden geraden Durchschnittslinien ebenfalls senkrecht auf dieselbe Ebene, und folglich parallel unter sich sind. Die von allen diesen Normalebenen berührte aufwickelbare Fläche ist daher eine Cylinderfläche, deren gerader Schnitt die gewöhnliche Evolute der Kurve ist. Aber diese Cylinderfläche enthält ebenfalls alle Evoluten von doppelter Krümmung der nemlichen Kurve; und jede von diesen Evoluten macht mit allen geraden Erzeugungslinien der Cylinderfläche einen unveränderlichen Winkel.

Die gewöhnliche Schraubenlinie ist eine von den Evoluten der Evolvente des Kreises, der die Basis der Cylinderfläche bildet, auf welcher sie sich befindet; und, welches auch die Höhe des Ganges der Schraube seyn mag, so ist, wenn der Durchmesser des Cylinders nicht wechselt, die Linie immer eine von den Evoluten der nemlichen Kurve.

Geometrische Konstruktion der oskulirenden Ebenen, Krümmungshalbmesser und der Evoluten der krummen Linien.

A u f g a b e.

Es ist eine Linie von doppelter Krümmung gegeben, und ein Punkt dieser Linie, man soll die oskulirende Ebene der Kurve an diesem Punkt konstruiren?

424. Auflösung. Nebst dem gegebenen Punkte nehme man auf der vorgelegten Kurve eine beliebige Zahl anderer Punkte und ziehe die, diesen Punkten entsprechenden Tangenten, wodurch man eben so viele Erzeugungslinien der oskulirenden Fläche (Art. 417.) der gegebenen Kurve erhält. Man bestimme die Begegnungspunkte dieser Tangenten mit einer der Projektionsebenen, zum Beyspiel mit der Horizontalebene, und konstruire den Riß der oskulirenden Fäche, welcher der Ort jener Begegnungspunkt ist. An dem Punkt dieses Risses, wo derselbe von der Erzeugungslinie der oskulirende Fläche getroffen wird, die dem gegebenen Punkt der krummen Linie entspricht, ziehe man zu demselben eine Tangente, und führe durch diese Tangente und durch die genannte Erzeu-

gungslinie eine Ebene, so ist diese tangirend zu der Fläche und folglich die oskulirende Ebene an dem gegebenen Punkt der vorgelegten Kurve, welche die Rückkehrkante der Fläche ist.

Aufgabe.

Es ist eine krumme Linie gegeben und einer ihrer Punkte, man verlangt den Krümmungshalbmesser, welcher jenem Punkt entspricht?

425. Auflösung I. Man bestimme zuerst die oskulirende Ebene der Kurve, die dem gegebenen Punkt entspricht, und projektire sodann die Kurve auf diese Ebene. Ist dies geschehen, nehme man mehrere Punkte der Projektion und ziehe die entsprechenden Normalen dieser nemlichen Projektion; man zeichne die Evolute der Projektion, die durch diese Normalen bestimmt wird; endlich ziehe man durch den gegebenen Punkt eine Tangente zu der Evoluten und bestimme den Berührungspunkt, so ist das Stück dieser Tangente, was zwischen dem Berührungspunkt und dem gegebenen Punkt gefaßt ist, der verlangte Krümmungshalbmesser; denn dieses Stück der genannten Tangente ist offenbar der Krümmungshalbmesser an dem gegebenen Punkt, wenn man denselben als der Projektion der Kurve angehörig betrachtet; aber der Bogen, dessen Krümmung durch den gefundenen Halbmesser gemessen wird, gehört zugleich der gegebenen Linie und ihrer Projektion, und er ist folglich der Gesuchte. Bey einer gegebenen ebenen Kurve wäre man der Konstruktion ihrer Projektion auf die entsprechende Krümmungsebene überhoben.

426. II. Man konstruire bey einer beliebigen Zahl von Punkten der gegebenen Linie die entsprechenden oskulirenden Ebenen, und ziehe in jeder von diesen Ebenen eine Normale zu der Kurve. Der geometrische Ort dieser Normalen ist eine windische Fläche (Art. 416.), von welcher sie die Erzeugungslinien sind.

Durch den gegebenen Punkt führe man eine Normalebene zu der Kurve, so ist diese tangirend zu der windischen Fläche an einem Punkt der Normalen, die demselben gegebenen Punkte zugehört; man bestimme diesen Berührungspunkt, so hat man den gesuchten Krümmungsmittelpunkt. *)

Eine weitere Auflösung der vorgelegten Aufgabe ergiebt sich aus Art. 419.

---

*) Siehe Hachette, Eléments de géométrie à trois dimensions. Seite 79.

Aufgabe.

Es ist irgend eine krumme Linie gegeben; man verlangt eine oder mehrere ihrer Evoluten zu konstruiren?

427. Auflösung. Man bestimme zuerst die aufwickelbare Fläche, welche der Ort der Evoluten der gegebenen Kurve ist. Zu diesem Ende führe man eine hinreichende Anzahl von Normalebenen zu der Kurve, und nachdem man den Horizontal- und Vertikalriß einer jeden bestimmt hat, ziehe man eine horizontale Kurve tangirend an die Reihe der ersten Risse und eine vertikale Kurve, tangirend an die Reihe der zweyten, so hat man die Risse der verlangten oskulirenden Fläche. (Art. 417.)

Sind diese Risse bekannt, so bestimme man die Berührungspunkte, in welchen sie je zwey Risse einer nemlichen Normalebene berühren, und verbinde diese Punkte durch eine Gerade, so hat man eben so viele Erzeugungslinien derselben Fläche.

Ist dieses geschehen, so nehme man irgend einen Punkt der gegebenen Kurve, und führe durch denselben eine Tangente an die aufwickelbare Fläche; der Berührungspunkt dieser Tangente gehört einer von den Evoluten der gegebenen Kurve an, und wir wollen annehmen, diese Evolute sey die zu konstruirende. Nachdem man sofort die Aufwicklung der Fläche, welche der Ort der Pole der gegebenen Kurve ist, konstruirt hat, trage man auf diese Aufwicklung die oben genannte Tangente über, so ist die unbestimmte Verlängerung dieser übergetragenen Tangente auch zugleich die verlangte, auf die Aufwicklung übergetragene Evolute; denn jede Evolute einer Kurve ist auf der Aufwicklung des Ortes der Pole dieser Linie, eine Gerade. Es bleibt daher nur diese übergetragene und unbestimmt verlängerte Tangente wieder auf die aufwickelbare Fläche, welche alle Evoluten der gegebenen Linie enthält, zurückzutragen, um die verlangte Evolute zu erhalten.

428. Wie aus dem Vorgetragenen ersichtlich ist, haben alle Kurven mit ihren oskulirenden Ebenen und ihren Krümmungskreisen zwey aneinanderstoßende Elemente, oder drey unendlich nahe liegende Punkte an dem Berührungsorte gemein, während eine Kurve und eine gewöhnliche Tangente, oder zwey sich einfach berührende Kurven nur ein Element oder zwey aufeinanderfolgende, unendlich nahe liegende Punkte gemein haben. Man theilt deßhalb die Berührungen in verschiedene Klassen ein. Die Tangenten bilden die Berührungen der ersten Ordnung, die Krümmungskreise die Berührungen der zweyten Ordnung, und es ist hieraus leicht zu entnehmen, was man sich unter Berührungen einer höheren Ordnung zu denken habe.

Beyspiele über die Konstruktion der oskulirenden Ebenen und der Krümmungskreise finden sich in Hachette's zweytem Supplemente zu Monge; auch giebt Vallée (géom.

descr. pag. 176 etc.), die Konstruktion der Evoluten einer Kurve, die aus dem Durchschnitte eines Cylinders und einer Kugel entsteht, so wie einer cylindrischen Spirallinie. Wir führen übrigens, um nicht zu weitläufig zu werden, von diesen Beyspielen keine an, und verweisen deßhalb die Leser auf die genannten Werke.

Zweytes Kapitel.

Von den Krümmungen der Flächen.

429. Dieser Gegenstand kann seiner Natur nach, mit weit größerer Leichtigkeit mittelst der Analysis behandelt werden, als durch blose Betrachtung der Eigenschaften der Ausdehnung: da aber die Resultate, zu welchen dieselbe führt, den Künstlern sehr nützlich seyn kann, von welchen wir nicht voraussetzen dürfen, daß sie mit den analytischen Operationen vertraut seyen, so werden wir dieselbe darzustellen suchen, indem wir blos geometrische Betrachtungen anwenden. Diese Methode wird zwar die ihr eigene Klarheit mit sich führen, aber auch eine gewisse Langsamkeit in ihrem Gange.

Die Flächen können in Bezug auf ihre Krümmungen in drey große Klassen abgetheilt werden. Die erste umfaßt diejenigen, welche in allen ihren Punkten gar keine Krümmung haben: die Fläche dieses Geschlechtes reduziren sich auf die Ebene, die übrigens auf beliebige Art im Raume gelegen seyn kann. Die zweyte Klasse schließt alle diejenigen ein, die in jedem ihrer Punkte nur eine einzige Krümmung haben; dies sind im Allgemeinen die aufwickelbaren Flächen, von denen zwey aufeinanderfolgende Elemente betrachtet werden können, als seyen sie Theile einer Kegelfläche, selbst wenn man die Größe dieser Elemente als unbestimmt in der Richtung der Kanten der Fächen betrachtet. Alle übrigen Flächen endlich bilden die dritte Klasse; sie haben in jedem ihrer Punkte zwey unterschiedene Krümmungen, die sich, unabhängig von einander, ändern können. Wir wollen damit anfangen, die einfachsten Flächen zu betrachten, und zuerst die Cylinderflächen.

430. Es sey A B F E (Taf. XLII. Fig. 4.) eine unbegränzte Cylinderfläche, von beliebiger Grundlinie, auf der man einen willkührlich genommenen Punkt L betrachte. Durch diesen Punkt denke man sich die gerade Erzeugungslinie C L G und einen Schnitt J L K, der durch eine auf die Erzeugungslinie rechtwinklige Ebene gemacht ist; dieser Schnitt ist parallel und ähnlich mit der Basis der Fläche. Endlich denken wir uns