

(Fig. 1) nach S; die Entfernung S R dieses Punktes S von der Geraden B B' ist gleich der Ordinate $s r$ des Kreises.

390. Bey der ersten Lösung unserer Aufgabe mittelst der Durchschnitte dreier Cylinder war es erforderlich, die Projektionen von wenigstens zwey Kurven von doppelter Krümmung zu konstruiren; die eben gegebene Auflösung ist weit einfacher, weil die Projektion einer einzigen von diesen Kurven und ein Kreis von gegebenem Halbmesser die gemeinschaftlichen Punkte der drey Cylinder bestimmen.

Hat man den Durchschnitt der zwey Cylinder A und B gefunden, und denselben auf die, der Axe des dritten Cylinders rechtwinklige Ebene (Fig. 2) projektirt, so kann man die Größe des Halbmessers dieses letzten Cylinders und die Stellung seines Mittelpunktes dergestalt einrichten, daß man die größte Anzahl von gemeinschaftlichen Punkten der drey Cylinderflächen erhalte.

F ü n f t e A u f g a b e.

Ein Ingenieur, welcher eine Gebirgsgegend durchwandert, um entweder die Formen des Terrains zu studiren, oder um einen Entwurf zu öffentlichen Arbeiten zu machen, die von diesen Formen abhängen, ist mit einer topographischen Karte versehen, auf welcher nicht allein die Projektionen der verschiedenen Punkte des Terrains genau angegeben sind, sondern auch die Höhen dieser Punkte über einer nemliche Niveauläche, mittelst zur Seite der respectiven Punkte gesetzter Zahlen, denen man die Benennung C o t e n zu geben pflegt. Er trifft auf einen merkwürdigen Punkt, welcher sich nicht auf der Karte befindet, entweder weil er vergessen, oder weil er erst seit Verfertigung der Karte merkwürdig wurde. Der Ingenieur führt kein anderes Beobachtungs-Instrument mit sich, als einen, zur Messung der Winkel geeigneten Graphometer, und dieses Instrument ist mit einem Senkel versehen.

Man verlangt, daß er, ohne den Standort zu verlassen, auf der Karte die Stellung des Punktes, wo er sich befindet, bestimme, und daß er die diesem Punkte zukommende Cote finde, das heißt, seine Höhe über der Niveauläche?

Mittel zur Konstruktion.

391. Unter den Punkten des Terrains, die genau auf der Karte angegeben, und welche die nächstliegenden sind, bemerke der Ingenieur drey, von denen zwey wenigstens nicht in gleicher Höhe mit ihm sind; er beobachte sodann die Winkel, welche von der

Vertikalen und den nach jenen drey Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen gebildet werden, und nach dieser einzigen Beobachtung ist er im Stande, die Aufgabe zu lösen.

In der That, benennen wir mit A, B, C die drey beobachteten Punkte, deren Horizontalprojektionen er auf der Karte hat, und deren Vertikalprojektionen er mittelst ihrer Coten konstruiren kann. Da er nun den Winkel kennt, der durch die Vertikale und durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl gebildet wird, so kennt er auch den Winkel, welcher durch denselben Strahl, und durch die, im Punkt A errichtete Vertikale gebildet wird, denn indem man die Krümmung der Erde außer Acht läßt, was hier zulässig ist, so sind jene Winkel Wechselwinkel, und folglich gleich. Wenn er daher eine gerade kreisförmige Regelfläche annimmt, deren Scheitel im Punkt A, deren Axe vertikal, und deren gerade Erzeugungslinie mit der Axe einen Winkel bildet, gleich dem beobachteten, was diese Fläche vollkommen bestimmt, so geht diese durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl, und folglich durch den Punkt des Standortes: er hat demnach eine erste krumme Fläche, als geometrischen Ort des verlangten Punktes. Indem man bey den zwey übrigen Punkten B, C das nemliche Raisonnement wie bey dem Ersten anwendet, so hat der verlangte Punkt als geometrische Orter noch zwey gerade kreisförmige Regelflächen, deren Axen vertikal sind, deren Scheitel in den Punkten B, C liegen, und bey deren jeglichen der Winkel den die Erzeugungslinie mit der Axe bildet, gleich ist dem von der Vertikalen und dem entsprechenden Gesichtsstrahl gebildeten Winkel. Der verlangte Punkt ist daher der Durchschnitt dreyer, nach Gestalt und Stellung bestimmte Regelflächen. Es handelt sich daher nur, nach den gegebenen Größen der Aufgabe, die Projektionen der Durchschnitte dieser drey Regelflächen zu zwey und zwey betrachtet zu konstruiren. Die Durchschnitte dieser Projektionen geben die Horizontal- und Vertikalprojektion des verlangten Punktes, und folglich die Stelle dieses Punktes auf der Karte und seine Höhe über oder unter den beobachteten Punkten, was seine Cote bestimmt.

Diese Auflösung muß im Allgemeinen vier Punkte hervorbringen, welche der Aufgabe genügen; aber der Beobachter wird unter diesen vier Punkten leicht denjenigen unterscheiden können, welcher mit dem Punkte des Standortes zusammenfällt. Vorerst kann er sich immer versichern, ob der Punkt des Standortes über oder unter der Ebene liegt, welche durch die drey beobachteten Punkte geht. Nehmen wir an, dieser Punkt sey ober der Ebene der Scheitel der Regel, so ist er befugt die Zweige der Durchschnitte der Regelflächen, welche sich unter jener Ebene befinden außer Acht zu lassen; hiedurch reducirt sich die Anzahl der möglichen Punkte auf zwey. Derselbe Fall wäre, wenn der Punkt des Standortes sich im Gegentheile unter der Ebene befände. Unter diesen Punkten endlich, wenn sie beyde existiren, kann er leicht denjenigen erkennen, dessen Stellung in Be-

zug auf die drey Scheitel, dieselbe ist, wie die Stellung des Punktes des Standortes in Bezug auf die beobachteten Punkte.

Konstruktion. (Taf. XXXIX.)

392. Es seyen A, B, C , die auf der Karte genommenen Horizontalprojektionen der drey beobachteten Punkte; a, b, c die Vertikalprojektionen derselben Punkte, die konstruirt sind, indem man auf den Vertikalen $B b, C c$, und von der Horizontalen $X Y$ aus, welche durch den Punkt a geht, die Unterschiede der Coten der beyden andern Punkte aufträgt; es seyen A', B', C' (Fig. a) die Winkel, welche die, nach den respektiven Punkten $(A, a), (B, b), (C, c)$ gerichteten Gesichtsstrahlen mit der Vertikalen bilden.

Man ziehe die unbestimmten Vertikalen $a a', b b', c c'$, welches die Vertikalprojektionen der Axen der drey Regel sind; durch die Punkte a, b, c ziehe man die Geraden $a l, b m, c n$, welche mit den Vertikalen Winkel bilden, die wechselseitig gleich sind den gegebenen Winkeln A', B', C' (Fig. a). Jede dieser Geraden ist die Vertikalprojektion einer äußersten Kante der entsprechenden Regelfläche.

Nachdem dieses geschehen, konstruire man die Projektionen der wechselseitigen Durchschnittslinien dieser drey Regel nach der (Art. 296.) angewendeten Methode, indem man dieselben durch horizontale Ebenen schneidet, oder nach der (Art. 302.) vorgetragenen, indem man die durchschneidenden Ebenen durch zwey und zwey von den drey Scheiteln führt. Die erste Methode ist im vorliegenden Falle die einfachere. Da die Regel keine parallelen Kanten haben, so sind ihre Durchschnittslinien sämmtlich geschlossene Kurven. (Art. 316.)

Man findet die Kurve $(D P D', d p d')$ als Durchschnitt der beyden Regel, deren Scheitel A und B sind; die Kurve $(J P J', j p j')$ als Durchschnitt der Regel, deren Scheitel A und C sind, und die Kurve $(K P K', k p k')$ als Durchschnitt der Regel von den Scheiteln B und C . Die Horizontalprojektionen dieser drey Kurven begegnen sich in einem Punkt P , die Vertikalprojektionen derselben schneiden sich in einem Punkt p , welcher mit dem Punkt P in einer Senkrechten auf die Projektionsaxe $X Y$ liegt, daher ist (P, p) ein Punkt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genüge thut.

Wenn die drey genannten Kurven sich noch in einem weiteren Punkt wie (P, p) begegneten, so erhielte der Beobachter, nachdem er denjenigen erkannt hätte, welcher dem Standorte angehört, mittelst der Horizontalprojektion desselben, seine Stellung auf der Karte, und mittelst der Höhe des entsprechenden Punktes p über der Horizontalen $X Y$

fände er die Erhöhung des Standortes über dem beobachteten Punkt A, und folglich die, dem Standorte zukommende Cote.

393. Wir haben bey dieser Auflösung so wie in der vorhergehenden (Art. 386.) die Projektionen der drey Durchschnittslinien der Flächen konstruirt, während zwey genüget hätten. Wir rathen, immer so zu verfahren, weil die Projektionen zweyer Linien von doppelter Krümmung sich in Punkten schneiden können, welche keinen Durchschnittspunkten im Raume entsprechen, und um die Projektionen der Durchschnittspunkte zu erkennen, ist man genöthigt, den Zweigen der beyden Linien zu folgen, die sich auf dem nemlichen Netze einer der Flächen befinden; was eine mühsame Aufmerksamkeit erfordert, der man fast immer überhoben ist, wenn man die drey Linien konstruirt; die Punkte, wo sie sich alle drey schneiden, sind wirkliche Durchschnittspunkte.

S e c h s t e A u f g a b e.

Die Umstände seyen dieselben, wie in der vorstehenden Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß das Instrument mit keinem Senkel versehen ist, so daß die Winkel mit der Vertikalen nicht gemessen werden können; man verlangt aber, mals, daß der Ingenieur, ohne den Standort zu verlassen, auf der Karte die Stelle des Punkts bestimme, wo er sich befindet, und daß er die Cote dieses Punkts finde, das heißt, seine Höhe über der Niveaufläche, auf welche alle Punkte der Karte bezogen sind?

Mittel zur Konstruktion.

394. Der Ingenieur, nachdem er drey Punkte des Terrains ausgewählt hat, welche genau auf der Karte angegeben sind, und von der Art, daß der Punkt des Standortes mit ihnen nicht in einer nemlichen Ebene ist, messe die drey Winkel, welche die, nach jenen drey Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen untereinander bilden, und mittelst dieser einzigen Beobachtung ist er im Stande die Aufgabe zu lösen.

In der That, wenn wir mit A, B, C die drey beobachteten Punkte benennen, und wenn man dieselben durch die Geraden A B, B C, C A verbunden annimmt, so erhält der Ingenieur die Horizontalprojektionen dieser drey Geraden auf der Karte verzeichnet; überdies erhält er, mittelst der Coten der drey Punkte die Höhenunterschiede der Endpunkte jener Geraden; er kann daher die Größe einer jeglichen von ihnen finden.

Dieses festgesetzt, wenn man in irgend einer, durch A B geführten Ebene sich ein rechtwinkliges Dreyeck A B D (Taf XL. Fig 1) denkt, das über A B als Grundlinie konstruirt ist, und bey dem der Winkel in B gleich sey, dem Complement des Win-

Fels, unter welchen die Seite $A B$ beobachtet wurde, so wird der Winkel in D gleich seyn dem beobachteten Winkel, und der, durch die drey Punkte $A B D$ beschriebene Kreisumfang besitzt die Eigenschaft, daß wenn man aus irgend einem Punkte des Bogens $A D B$ zwey Gerade nach den Punkten A und B zieht, der Winkel, den diese einschließen, gleich sey dem Beobachteten. Wenn man daher annimmt, daß die Ebene des Kreises sich um $A B$ als Scharnier drehe, so wird der Bogen $A D B$ eine Umdrehungsfläche erzeugen, deren sämtliche Punkte die nemliche Eigenthümlichkeit besitzen; das heißt, wenn man aus irgend einem Punkt der Fläche zwey Gerade nach den Punkten A und B zieht, diese Geraden unter sich einen Winkel einschließen, gleich dem Beobachteten. Nun aber ist es einleuchtend, daß die Punkte dieser Umdrehungsfläche die einzigen sind, welche die genannte Eigenthümlichkeit besitzen, daher geht die Fläche durch den Punkt des Standortes, das heißt, sie ist ein geometrischer Ort dieses Punktes. Wenn man dieselbe Schlußart auf die zwey andern Geraden $B C$, $C A$ anwendet, so findet man zwey andere Umdrehungsflächen, geometrische Verter des Punktes des Standortes; dieser Punkt ist daher in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt jener drey, nach Gestalt und Stellung bestimmten Umdrehungsflächen. *)

Konstruktion. (Taf. XL.)

395. Man wähle die Stellung der beyden Projektionsebenen dergestalt, daß die Horizontale durch die drey beobachteten Punkte geht, und daß die vertikale rechtwinklig auf die Gerade ist, welche zwey von jenen drey Punkten verbindet. Es sey demnach $A B C$ (Fig. 1) das von den drey beobachteten Punkten gebildete Dreyeck, in seiner Ebene beobachtet; und A', B', C' (Fig. a) die drey durch die Beobachtung gegebenen Winkel. Man ziehe senkrecht auf die Seite $A B$ die Gerade $X Y$, welche die Stellung der vertikalen Projektionsebene bezeichnet; und man konstruire, wie angegeben (Art. 394) die Erzeugungskreisbögen $A D B$, $B G C$, $C L A$ der drey Umdrehungsflächen, von denen die Seiten $A B$, $B C$, $A C$ die Axen sind. Die Gränzen der Horizontalprojektion jeglicher von diesen Flächen sind aus zwey Halbkreisen und aus zwey, auf die respektiven Axen $A B$, $B C$, $A C$ senkrechten Tangenten zu diesen Halbkreisen zusammengesetzt.

*) Es ist leicht einzusehen, daß nach dieser Behandlung, die Aufgabe sich auch so ausdrücken läßt: in einer dreyseitigen Pyramide, wobey die Basis, und die den Seiten dieser Basis gegenüberstehenden Winkel der Kanten gegeben sind, soll der Scheitel der Pyramide konstruirt werden.

396. Die Methode, welche wir (Art. 322.) vorgetragen haben, um den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu finden, deren Axen sich begegnen, läßt sich auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden, da die Axen der drey betrachteten Umdrehungsflächen, die drey Seiten eines Dreyecks $A B C$ (Fig. 1) sind. Mittelt dieser Methode findet man, daß die Flächen, deren Axen $A B$ und $B C$ sich in B kreuzen, sich nach einer Linie durchschneiden, deren Horizontalprojektion man durch eine punktirte Linie angegeben hat, die durch die Punkte $B, 1, 2, E', d, 3, 4, B, \alpha'', \alpha, 3, 5, \alpha' 6, \beta, F', e, B$ geht. Die fünf Punkte A, E', g, F', e sind bestimmt, durch die Durchschnitte der Erzeugungskreise der zwey Umdrehungsflächen. α, α' sind die zwey Berührungspunkte, der Krümmen mit der Begrenzungslinie $G E' P$; ein weiterer Punkt α'' , nahe bey α , liegt auf der Begrenzungslinie $D p F' e$ der Fläche, deren Axe $A B$ ist. Die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind die Horizontalprojektionen der Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen.

397. Jede der vorgelegten Umdrehungsflächen, kann betrachtet werden, als aus zwey Netzen zusammengesetzt, welche beyde durch Umdrehung entstanden sind, und welche als Erzeugungslinien die zwey Segmente eines Kreises haben, die durch eine Sehne dieses Kreises getrennt sind.

Um das, von dem kleineren Segmente erzeugte Netz von dem Netze, was durch das größere Segment erzeugt ist, zu unterscheiden, wollen wir das erste innere Netz, und das andere äußere Netz nennen. Der Durchschnitt zweyer Flächen entsteht aus den Durchschnitten der verschiedenen Netze, die sich untereinander verbinden lassen. Die äußeren Netze, einerseits, und die inneren Netze, andererseits, schneiden sich nach einem geschlossenen Kurvenzweig, dessen Projektionen in stetiger Bewegung durch einen mobilen Punkt erzeugt werden können. Derselbe Fall ist bey dem Kurvenzweige, welcher aus der Verbindung des äußeren oder inneren Netzes einer Fläche, mit dem inneren oder äußeren der andern Fläche entsteht. Diese beyden Kombinationen geben eine einzige Kurve, der ein beweglicher Punkt ohne Unterbrechung folgen kann; es folgt daraus, daß die Durchschnittslinie der zwey Flächen aus zwey geschlossenen Zweigen zusammengesetzt ist, deren Projektionen auf einer Ebene $X Y$ (Fig. 2) die rechtwinklig auf eine der Axen ist, auf $A B$, zum Beyspiel abgesondert sind: die Projektionen dieser zwey Zweige auf der Ebene des beobachteten Dreyecks $A B C$ (Fig. 1) vereinigen sich in eine einzige Kurve.

398. Die zwey innern Netze (Fig. 1), welche als Axen die Seiten $A B, B C$ haben, schneiden sich nach einer Linie, deren Horizontalprojektion das Kurvenstück $B 4 3 d E'$ ist; nun aber liegt der Theil $E' d g$ dieser Kurve, der durch die Punkte E', g begrenzt ist, außerhalb der Gränzen der Horizontalprojektion der innern Netze; daher

entspricht dieses letzte Kurvenstück keinem wirklichen Theile der Durchschnittslinie der zwey Flächen. Eben so verhält es sich mit dem Kurvenstücke $F' \beta e$, das außerhalb der Gränze der Horizontalprojektion eines äußeren Netzes der Umdrehungsfläche liegt, welche die Seite $A B$ zur Axe hat; und in der That, wenn man die Durchschnittslinie der zwey Umdrehungsflächen, welche als Axen die Geraden $A B, B C$ haben, auf die Vertikalebene $X Y$ projektirt, so erhält man die Kurve von den sechs Punkten $1, 2, 3, 4, 5, 6$, die wie in der Horizontalprojektion durch eine punktirte Linie angegeben ist. Diese Kurve besteht aus zwey abgesonderten Zweigen, von denen jeglicher einen Knoten hat. Der erste Zweig ist $1 2 \varepsilon v^2 v^1 a e' a 1$; der zweyte Zweig ist $a 4 3 \gamma v^3 v^4 a 5 6 v^5 v^5 a 4$, und es giebt keinen Theil dieser zwey Zweige, der den Stücken $E' \delta g, F' \beta e$ der Horizontalprojektion entspräche. *)

Man wird eben so finden, daß die beyden Umdrehungsflächen, die als Axen die Seiten $A B, A C$ haben, sich nach einer Linie schneiden, deren Horizontalprojektion zwey Theile $H \lambda p, o \mu g'$ (Fig. 1) einschließt, die keine Vertikalprojektion haben.

Alles was sich auf den Durchschnitt dieser zwey Flächen bezieht, ist mit einer gemischten Linie angegeben, die aus Strichen durch einen Punkt unterbrochen zusammengesetzt ist $-\cdot-\cdot-$, und dasjenige was sich auf den Durchschnitt der zwey Umdrehungsflächen bezieht, welche als Axen die Geraden $A C, C B$ haben, ist durch gemischte Linien angegeben, die aus Strichen, durch drey Punkte unterbrochen $-\dots-\dots-$ bestehen. Auch die Horizontalprojektion dieses letzten Durchschnittes schließt zwey Stücke $E \phi f, P \psi P'$ (Fig. 1) ein, die keine Vertikalprojektion haben (Fig. 2).

399. Die drey Linien, welche aus den Durchschnitten der drey Umdrehungsflächen, zu zwey und zwey genommen, entstehen, bezegnen sich in Punkten, die in der Horizontal- und Vertikalprojektion mit den Buchstaben $1, 2, 3, 4, 5, 6$ bezeichnet sind. Jeder von den Punkten der Horizontalprojektion entspricht zweyen Punkten der Vertikalprojektion, welche in gleicher Entfernung von der Ebene $X Y$ der drey beobachteten Punkte liegen.

*) Es besteht zwischen dem vorliegenden, und dem (Art. 323.) untersuchten Falle nur der Unterschied, daß hier die Projektion des Durchschnittes der zwey Umdrehungsflächen auf die Ebene ihrer Axen Theil einer geschlossenen Linie ist, und daß dieselben Konstruktionen, mittelst deren diese Projektion erhalten wurden, sich auf die ganze Linie anwenden lassen; während die Projektion des Durchschnittes der beyden Flächen (Taf. XXXI.) auf der Ebene der Axen einer Linie von unendlichen Zweigen angehörte, deren Umfang sich durch die angewendeten Konstruktionen nicht über eine gewisse Gränze bestimmen ließe.

400. Wenn man die vorliegende Aufgabe mittelst der Analysis behandelte, indem man als Unbekannte *), eine der drey Coordinaten des Scheitels der Pyramide nähme, so würde die reduzirte Gleichung, auf welche man käme, im Allgemeinen vom sechszehnten Grade seyn, woraus folgt, daß die drey Umdrehungsflächen sich in sechszehn Punkten schneiden können. Nach den Annahmen der gegebenen Größen auf der Tafel haben wir nur zwölf Punkte erhalten. Diese Punkte leisten aber nicht alle der Aufgabe Genüge, und man kann die Lösung derselben bedeutend vereinfachen. In der That, wenn man aus irgend einem Punkte des Bogens $A E' B$ (Fig. 1) zwey Grade nach den Endpunkten der $A B$ zieht, so ist der Winkel den sie einschließen, nicht gleich dem beobachteten, er ist dessen Ergänzung. Das durch den Bogen $A E' B$ erzeugte innere Netz und die analogen Netze der andern Umdrehungsflächen können daher nicht zur Lösung der Aufgabe dienen, und alle Durchschnittspunkte, die irgend einem dieser Netze angehören, haben keinen Bezug auf das Problem.

Wenn man daher den Bogen $A E' B$ und seine analogen auf den beyden andern Flächen ausschließt, so behält jede von diesen Flächen nur noch ein Netz; wodurch die Anzahl der Punkte, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten können, vermindert wird. Die Durchschnittspunkte der drey beybehaltenen Netze liegen, wie wir gesehen haben, zu zwey und zwey auf Geraden, die senkrecht auf die Ebene der drey Arcen sind, und in gleichen Abständen von dieser Ebene.

Da der Beobachter immer weiß, auf welcher Seite der gesuchte Punkt in Bezug auf diese Ebene liegt, so wird er keine der auf der entgegengesetzten Seite gelegenen Durchschnittspunkte konstruiren, und er wird nur noch unter den übrig behaltenen Punkten denjenigen auszusuchen haben, der in Bezug auf die drey Punkte A, B, C eben so gele-

*) Anstatt eine der drey Coordinaten des Scheitels als Unbekannte zu nehmen, kann man sich bekannter Gleichungen bedienen, welche die Werthe der drey Kanten einer Pyramide geben, in Funktionen der drey Seiten der Basis und der Cosinuse der Winkel der Kanten, die diesen Seiten gegenüberstehen. Nennt man a, b, c die drey Seiten der Basis, und p, q, r die Cosinuse der diesen Seiten entgegenstehenden Winkel; endlich x, y, z die drey Kanten; so hat man in dem Dreyecke, das durch die Seite a , und durch die zwey Kanten x, y gebildet wird; $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy p$; man erhält desgleichen $b^2 = y^2 + z^2 - 2yz q$, $c^2 = z^2 + x^2 - 2xz r$; woraus man den Werth einer der drey Kanten von z zum Beispiel ziehe, welcher durch eine Gleichung vom achten Grad gegeben seyn wird. Da eine Pyramide, und diejenige, welche mit ihr symmetrisch ist, Kanten von gleicher Länge haben, so entspricht ein Werth von z zwey verschiedenen Stellungen des Scheitels der Pyramide.

gen ist, wie der Punkt des Standortes in Bezug auf die drey beobachteten Punkte des Terrains.

Endlich müssen wir noch bemerken, daß die gefundenen Projektionen 1, 2, 3, 4, 5, 6, (Fig. 1 u. 2.) weder unmittelbar die Stelle des Punktes des Standortes auf der Karte, noch seine Höhe geben; aber es ist leicht, diese Punkte auf die wahren Projektionsebenen überzutragen.

401. Da die drey geometrischen Verter des Scheitels der gesuchten Pyramide Umdrehungsflächen sind, so findet man ebenfalls die Stellung dieses Scheitels, indem man unmittelbar die Begegnungspunkte der einen Umdrehungsfläche mit der Durchschnittslinie der beyden Andern aufsucht. Nachdem man zu diesem Zwecke über den drey Seiten des Dreyecks, welches der Pyramide zur Basis dient, die Erzeugungskreise der drey Umdrehungsflächen konstruirt hat, welche durch ihre wechselseitigen Schnitte den Scheitel der Pyramide bestimmen, denke man sich die Durchschnittslinie von zweyen jener drey Flächen, von denjenigen zum Beyspiel, die als Umdrehungsaxen die zwey Seiten A und B der Basis haben; C sey die dritte Seite. Diese Linie, indem sie sich um die dritte Seite C dreht, erzeugt eine vierte Umdrehungsfläche, auf der sich die gemeinschaftlichen Punkte der drey ersten Flächen befinden. Aber zwey Umdrehungsflächen, welche eine und dieselbe Axe haben, können sich nur nach Kreisen schneiden; daher müssen sich die dritte und die vierte Umdrehungsfläche nach einem Kreise schneiden, welcher den Scheitel der Pyramide enthält. Um einen Punkt dieses Kreises zu erhalten, ist es hinreichend, diese beyden Flächen durch irgend eine Meridianebene zu schneiden, dieses kann zum Beyspiel die Ebene der Basis der Pyramide seyn. Die gemeinschaftlichen Punkte der in dieser Ebene enthaltenen Erzeugungsmeridiane bestimmen die gemeinschaftlichen Kreise der zwey Flächen. Der Erzeugungsmeridian der dritten Fläche ist der Kreis, welcher durch die Endpunkte der Seite C geht, und dessen eines Segment einen Winkel mißt, gleich dem doppelten gegebenen, und dieser Seite C gegenüberstehenden Winkel. Was den Erzeugungsmeridian der vierten Fläche betrifft, so bestimmt man denselben, indem man bemerkt, daß jeder Punkt der Durchschnittskurve der beyden ersten Flächen der Scheitel einer Pyramide ist, welche als Basis, das, durch die drey Scheitel A, B, C gebildete Dreyeck hat, und als Kanten solche Sehnen der Erzeugungskreise der zwey Umdrehungsflächen, welche durch die Endpunkte der zwey Geraden A und B gehen.

402. In der Voraussetzung, daß man sich aufgegeben habe, alle Punkte des Art. 400. zu bestimmen, ist die eben vorgetragene Auflösungsart der Erstgegebenen vorzuziehen; weil die zwey Kurven von doppelter Krümmung, welche dort erforderlich waren, hier durch zwey ebene Linien ersetzt sind, von denen die eine aus zwey gleichem

Kreisen besteht, die als gemeinschaftliche Sehne eine Seite des beobachteten Dreyecks, der Basis der Pyramide haben. Betrachtet man den Halbmesser dieser Kreise als eine unbestimmte Größe, so kann man dieselben vergrößern oder verkleinern, bis daß diese Kreise den Meridianschnitt der vierten Umdrehungsfläche in sechszehn Punkten schneiden. Die auf diese Betrachtungen gegründeten Konstruktionen sind der Gegenstand der Taf. XLI., deren Erklärung wir geben wollen.

Zweyte Konstruktion. (Taf. XLI.)

403. Nachdem man die Ebene des Dreyecks $A B C$ (Fig. 1.) als Projektionsebene genommen, beschreibe man wie Art. 394 angegeben, über den Seiten $A C$, $C B$ die Kreise, deren Segmente die doppelten Winkel messen, unter denen diese Seiten beobachtet wurden. Diese indem sie sich um die entsprechenden Seiten als Rotationsaxe drehen, erzeugen zwey Flächen, deren Durchschnittslinie man nach der (Art. 322.) vorgetragenen Methode konstruirt. Dieser Durchschnitt ist die Erzeugungslinie der vierten Umdrehungsfläche, welche als Axe die dritte Seite $A B$ des Dreyecks $A B C$ hat. Sie ist aus zwey Zweigen zusammengesetzt, (Art. 397) einem der aus dem Durchschnitte der, durch die großen Segmente $B F C$, $C O A$ erzeugten Flächenneze entsteht, mit dem, durch die kleinen Segmente $A f C$, $C o A$ erzeugten Neze, und dem Andern, der aus dem Durchschnitte der Neze entsteht, welche durch ein großes Segment $B F C$, und durch ein kleines Segment $C o A$; oder durch ein großes Segment $C O A$ und durch ein kleines Segment $B f C$ erzeugt sind.

Die genannten zwey Zweige, indem sie sich um die Axe $A B$ drehen, erzeugen zwey Neze der vierten Umdrehungsfläche, deren Schnitte durch die Ebene des Dreyecks $A B C$, die Kurven $L M N C$, oder $1 2 3 4 5 6 7 8$, und $L' M' N' C$, oder $1' 2' 3' 4' 5' 6' 7' 8'$ sind. Diese Kurven werden von der Axe $A B$, die sie in rechten Winkeln durchschneidet, in gleiche Theile getheilt.

Der Meridianschnitt der dritten Umdrehungsfläche besteht aus zwey Kreisen $A B G g$, $A B G' g'$, deren Segmente den doppelten Winkel messen, unter dem die Seite $A B$ beobachtet wurde, oder den doppelten Winkel der Kanten der Pyramide, welcher der Seite $A B$ der Basis $A B C$ gegenüber steht. Nun aber schneiden sich die Meridiane der dritten und vierten Umdrehungsfläche in sechszehn Punkten, die mit den Ziffern $1 \dots 8$ auf der Kurve $L M N C$, und mit den Ziffern $1' \dots 8'$ auf der Kurve $L' M' N' C$ bemerkt sind: daher begegnen sich die drey Umdrehungsflächen, welche als Axen die Seiten $A B$, $A C$, $B C$ haben, in sechszehn, auf denjenigen Kreisen der dritten Fläche gelegenen Punkten, die als Durchmesser die Geraden $1.8, 2.7, 3.6, 4.5,$

1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5' haben, welche rechtwinklig auf die Axe A B dieser Fläche sind, und von dieser Axe in gleiche Theile getheilt werden. Jeder von diesen Kreisen, wie zum Beispiel derjenige, dessen Durchmesser 1.8 ist, enthält zwey Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen, welche sich nach einem einzigen Punkt α der Geraden 1.8 projektiren, so daß die sechszehn Durchschnittspunkte sich auf die horizontale Ebene des Dreyecks A B C nach acht Punkten $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha', \beta', \gamma', \delta'$ projektiren, die auf den acht Durchmessern 1.8, 2.7, 4.5' gelegen sind.

404. Es ist hier vorerst zu bemerken, daß man den Meridianschnitt L M N C, L' M' N' C der vierten Umdrehungsfläche finden könne ohne nöthig zu haben, die Projektionen des Durchschnittes der zwey ersten Flächen zu konstruiren, welche als Axen die Seiten C B, C A des Dreyecks A B C haben. In der That, irgend ein Punkt dieser Durchschnittsfläche, welchen wir P nennen wollen, wird sich nach seiner Drehung um die Axen B C, C A, auf den Kreisen A O C, C F B (Fig. 1) in zwey Punkten a', a'' auslegen, welche gleichweit von dem Ende C der Seiten B C, C A abstehen; so daß $a' C = a'' C$: nun aber werden die Abstände des Punktes P von den Enden B, A der Seite A B durch die Sehnen B a' , A a'' gemessen, daher wird dieser Punkt P, nachdem er sich um die Axe A B gedreht hat, sich in dem Punkte 1, oder in dem Punkte 8, den gemeinsamen Durchschnitten der zwey aus B und A, als Mittelpunkten und mit den Halbmessern B a' , A a'' beschriebenen Kreisen, auslegen. Die beyden Punkte 1 und 8 sind gleich weit von der Umdrehungsaxe A B entfernt.

Auf dieselbe Art findet man weitere Punkte der Krümmen L M N C, L' M' N' C, dem Meridianschnitte der vierten Umdrehungsfläche. Da dieser Schnitt, und die Erzeugungskreise der dritten Umdrehungsfläche symmetrisch gelegen sind, in Bezug auf die gemeinschaftliche Axe A B, so sieht man, warum die acht Begegnungspunkte der zwey Meridianschnitte, welche auf einer Seite der Axe A B mit 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' bezeichnet sind, die acht übrigen, auf der andern Seite der Axe gelegenen Punkte bestimmen; diese Punkte sind zu zwey und zwey auf Senkrechten auf die Axe A B, in gleichen Abständen von dieser Axe gelegen, und auf folgende Art zusammengehörig:

$$1.8, 2.7, 3.6, 4.5, 1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5'.$$

Den Punkten irgend eines dieser Paare wie 1.8, entspricht ein gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt der drey Umdrehungsflächen, dessen Horizontal- und Vertikalprojektionen wir konstruiren wollen.

405. Da die Punkte 1 und 8 durch die Begegnungen der Krümmen L M N C und der zwey gleichen Segmente A g' B, A g B bestimmt ist, so schneidet der, aus B

als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser $B 1$ beschriebene Kreisbogen, das Segment des Kreises $B F C$ in dem Punkt a' , aus welchem man die Senkrechte $a' \alpha$ auf $C B$ falle. Dieser Senkrechte trifft die auf $A B$ senkrechte Gerade $1 8$ in dem Punkte α , der Horizontalprojektion eines Durchschnittspunktes der drey Umdrehungsflächen. Wenn man aus dem Punkt A , als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $A 1$ oder $A 8$ den Kreisbogen beschrieben hat, welcher das Segment $A O C$ in dem Punkt a'' schneidet, so trafe die Senkrechte $a'' \alpha$ auf $A C$ ebenfalls die Gerade $1 8$ in dem Punkte α , dem Durchschnitte der drey Senkrechten Geraden 1α , $a' \alpha$, $a'' \alpha$ auf die drey Seiten $A B$, $B C$, $A C$ des Dreyecks $A B C$.

406. Hat man die Projektion α eines der sechszehn Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen auf der, als horizontale Projektionsebene angenommenen Ebene des beobachteten Dreyecks $A B C$, so wird man daraus leicht die Projektion auf einer Vertikalebene $X X'$ (Fig. 2.) ableiten, welche senkrecht auf die Seite $A B$ des gegebenen Dreyecks ist. In der That, hat die Seite $A B$ als Projektion auf dieser Ebene den Punkt a ; beschreibt man aus diesem Punkt als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $a k$, (Fig. 2.) der Hälfte von $1 \alpha 8$ (Fig. 1.), so schneidet die projektirende Gerade $a \alpha$ diesen Kreis in zwey Punkten α , (α) (Fig. 2.), den Vertikalprojektionen von zwey Durchschnittspunkten, welche dieselbe Horizontalprojektion α (Fig. 1.) haben. Auf diese Art findet man als Vertikalprojektionen der gemeinschaftlichen Punkte der drey Umdrehungsflächen, die sechszehn mit den Buchstaben α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' , (α) , (β) , (γ) , (δ) , (α') , (β') , (γ') , (δ') , bezeichneten Punkte. Die acht ersten, welche über der Horizontalen $X X'$ liegen, und die acht andern, unter dieser Horizontalen gelegenen sind mit den gleichen Buchstaben zwischen Parenthesen bezeichnet; sie liegen sämmtlich zu zwey und zwey in Senkrechten auf die Projektionsaxe $X X'$ und in gleicher Entfernung von derselben. Die auf diese Art zu zwey und zwey zusammengehörigen Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen haben daher immer nur eine und dieselbe Horizontalprojektion, wodurch diese Projektionen der sechszehn genannten Durchschnittspunkte sich auf die acht Punkte α , β , γ , δ , α' , β' , γ' , δ' (Fig. 1) reduzieren.

407. Betrachtet man die sechszehn gemeinschaftlichen Punkte der drey Umdrehungsflächen, als die Scheitel von Pyramiden, welche zur Basis das beobachtete Dreyeck $A B C$ (Fig. 1.) haben, und als den Seiten dieser Basis gegenüberstehende Winkel der Kanten, diejenigen, unter welchen die Seiten der Basis beobachtet wurden, oder die Complemente derselben (Art. 394.); so sind diese Pyramiden zu zwey und zwey symmetrisch miteinander, in Bezug auf die Ebene des Dreyecks $A B C$; die Scheitel eines jeden Paares dieser symmetrischen Pyramiden liegen in einer Senkrechten auf die Ebene der Fig. 1.,

und sie haben daher als gemeinsame Projektion auf dieser Ebene einen der acht Punkte $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \delta$. (Fig. 1.)

Siebente Aufgabe.

Der General einer Armee im Angesichte des Feindes hat keine Karte der von demselben besetzten Gegend, und er bedarf einer, um den Plan zu einem von ihm beabsichtigten Angriffe zu machen. Er hat einen Luftballon. Er beauftragt einen Ingenieur, sich mit dem Luftballon zu erheben, und alle nöthigen Maaße zu nehmen, um die Karte zu verfertigen, und ein annäherndes Nivellement zu geben: allein er hat Ursache zu vermuthen, daß, wenn der Luftballon den Standort auf der Erde veränderte, der Feind seine Absicht wahrnehmen könnte; er erlaubt folglich dem Ingenieur, sich, wenn es nöthig ist, auf verschiedene Höhen in der Atmosphäre zu erheben, aber er verbietet ihm den Standort auf dem Boden zu verändern. Der Ingenieur hat ein Instrument zum Winkelmessen bey sich, und dieses Instrument ist mit einem Senkel versehen: man fragt wie der Ingenieur die Befehle des Feldherrn vollziehen könne?

Mittel zur Lösung.

408. Der Ingenieur nehme zwey Standorte in der nemlichen Vertikalen, deren Entfernung er kennen wird, indem er die Leine messen läßt, die man ablaufen ließ, um ihn von Einem zum Andern zu erheben. In einem dieser Standorte, in dem untern zum Beyspiel, messe er die Winkel, welche die Vertikale mit den Gesichtsstrahlen macht, die nach den Punkten gerichtet sind, deren Stellung er auf der Karte bestimmen will; sodann wähle er unter allen diesen Punkten einen, welchen er als Ersten betrachte, und den wir mit A benennen wollen, und er messe überdies nacheinander die Winkel, welche durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl, und die, nach den übrigen Punkten gerichteten Strahlen gebildet werden. In dem andern Standorte messe er die Winkel, welche von der Vertikalen, und den, nach allen Punkten des Terrains gerichteten Gesichtsstrahlen gebildet werden. Nach diesen Beobachtungen ist er im Stande, die verlangte Karte zu konstruiren.

In der That, da man die Winkel kennt, die von der Vertikalen mit den zwey Gesichtsstrahlen gebildet werden, welche aus den zwey Standorten nach einem nemlichen Punkte gerichtet sind, so befindet sich dieser Punkt zu gleicher Zeit auf zwey bestimmten und bekannten Kegelflächen; denn diese Flächen sind von kreisförmigen Grundlinien, sie

haben ihre Axen in der nemlichen Vertikalen, die Entfernung ihrer Scheitel ist gleich dem Unterschiede der Höhen der zwey Standorte, und die Winkel, welche ihre geraden Erzeugungslinien mit der gemeinschaftlichen Axe machen, sind gleich den beobachteten Winkeln. Da man überdem den Winkel kennt, der durch den Gesichtsstrahl, welcher aus dem ersten Standorte nach demselben Punkte gerichtet ist, mit demjenigen gebildet wird, welcher nach dem Punkt A gerichtet ist, so befindet sich der beobachtete Punkt auch noch auf einer dritten geraden kreisförmigen Regelfläche, deren geneigte Axe, der aus dem ersten Standorte nach dem Punkt A gerichtete Gesichtsstrahl ist, deren Scheitel in dem ersten Standorte liegt, und bey welcher der Winkel der Axe und der Erzeugungslinie gleich ist dem beobachteten Winkel. Der beobachtete Punkt hat daher als geometrische Orter drey gerade kreisförmige Regelflächen. *) Er ist daher ein Punkt ihres gemeinsamen Durchschnittes, und wenn man die beyden Projektionen dieses Durchschnittes konstruirt, so erhält man die Stelle des Punktes auf der Karte, und seine Erhöhung über oder unter den übrigen.

409. Ohne die Betrachtungen zu verändern, kann die Konstruktion, mittelst einiger schon bekannten Methoden weit einfacher werden: denn da man die Winkel kennt, welche in dem ersten Standorte, von dem nach A gerichteten Gesichtsstrahl und den nach allen Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen gebildet werden, und da man bey jedem dieser Winkel noch die Winkel kennt, die seine Seiten mit der Vertikalen bilden, so kann man sie auf den Horizont reduzieren, das heißt ihre Horizontalprojektionen konstruiren. Wenn man daher auf der Karte einen willkürlichen Punkt nimmt, um die Projektion der Vertikalen des Luftballons vorzustellen, und wenn man durch diesen Punkt eine willkürliche Gerade zieht, welche die Projektion des nach dem Punkt A gerichteten Gesichtstrahls vorstellen soll; wenn man endlich durch denselben Punkt Gerade zieht, die mit der Projektion des nach dem Punkt A gerichteten Strahles Winkel bilden gleich den auf den Horizont reduzirten Winkeln, so ist einleuchtend, daß jede dieser Geraden die Horizontalprojektion des Punktes des Terrains enthalten müsse, der ihr entspricht.

Nun aber, wenn man in der Vertikalprojektion, und auf der Projektion der Vertikalen des Luftballons zwey Punkte nimmt, welche in Theilen des Maasstabes um eine

*) Zwey von diesen geraden kreisförmigen Kegeln, haben als Scheitel den Punkt des ersten Standortes, sie schneiden sich daher nach zwey Geraden. Man bestimmt einen Punkt einer jeden von diesen Geraden, durch den Durchschnitt zweyer Kreise, indem man die Kegel als Umdrehungsflächen betrachtet, deren Axen sich begegnen.

Größe von einander entfernt sind, gleich der gemessenen Entfernung der beyden Standorte, und wenn man durch diese Punkte zwey Gerade zieht, die mit der Vertikalen Winkel machen, gleich denen, welche bey einem nemlichen Punkt des Terrains beobachtet wurden, so müssen diese Geraden sich in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung von der Vertikalen, die verlangte Entfernung ist. Trägt man daher diese Entfernung von der Projektion des Luftballons aus, auf dem entsprechenden Strahle auf, so erhält man auf der Karte die Stelle des Punkts des Terrains. Die beyden nemlichen Geraden bestimmen in der Vertikalprojektion, durch ihren Durchschnitt die Höhe des Punkts des Terrains; nimmt man daher auf der Vertikalprojektion die Höhen aller Punkte des Terrains über einer nemlichen Horizontalebene, so bestimmt man die Coten, welche allen Punkten der Karte zukommen, und man hat das Nivellement des Terrains.

Diese Konstruktion ist so einfach, daß sie keiner Figur bedarf.

410. Da die von der Projektion der Vertikalen des Luftballons nach der Projektion des beobachteten Punkts A gezogene Gerade zuerst willkührlich auf der Karte gezogen wurde, so folgt daraus, daß die Karte nicht orientirt ist, und in der That liegt in den von uns angegebenen Beobachtungen Nichts, was die Stellung der Gegenstände in Bezug auf die vier Kardinalpunkte des Horizonts bestimmen könnte. Aber wenn der Ingenieur zur Erde den Winkel beobachtet, den der, von dem Fuße der Vertikalen nach irgend einem auf der Karte gelegenen Punkte gerichtete Sehestrahl mit dem Meridian bildet, und wenn er diesen Winkel auf seine Projektion überträgt, so hat er die Richtung des Meridians, und die Karte ist orientirt.
