von D E den Kreis $d\,n\,e\,n'$ beschreibe. Der Umfang dieses Kreises schneidet die Gerade N $n\,n'$ in zwey Punkte n, n', welche beyde als Vertikalprojektionen des verlangten Punkts genommen werden können, da die beyden, diesen Projektionen entsprechenden Punkte den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Vierte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes konstruiren, dessen Entfernungen von drey im Raume gegebenen geraden Linien bekannt sind?

384. Auflösung. Der gesuchte Punkt gehört (Art. 4.) als geometrischen Oertern, drey geraden Cylinderflächen an, welche als Axen die gegebenen Geraden haben, und als respektive Halbmesser ihrer kreisförmigen Grundlinien die gegebenen Entfernungen des Punktes von jenen drey Axen. Diese Cylinder schneiden sich zu zwey und zwey nach drey Kurven von doppelter Krümmung; die Punkte, in denen diese Kurven sich selbst durchschneiden, genügen sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe. Man beweißt mittelst der Analysis, daß die Anzahl dieser Punkte höchstens acht und wenigstens zwey ist, aber immer gerade.

Um die Projektionen der Durchschnitslinien der genannten Cylinder mittelst der (Art. 302.) vorgetragenen Methoden zu konstruiren, ist es zuerst erfoderlich, die Risse der drey Flächen auf der Horizontalebene zu bestimmen. Diese Risse sind drey Ellipsen, deren kleine Axen wechselseitig gleich sind den Entfernungen des zu bestimmenden Punkts von den drey gegebenen Geraden.

Erste Konstruktion. (Taf. XXXVII.)

385. Wir nehmen an, die drey Geraden seyen mittelst ihrer horizontalen und vertikalen Projektion gegeben, und es seyen A A′, B B′, C C′ (Taf. XXXVII) diese Horizontalprojektionen; A, B, C seyen die Punkte, in denen die gegebenen Geraden die Horizontalebene durchschneiden. Dieselben Geraden machen mit ihren Horizontalprojektionen die Winkel A′ A A″, B′ B B″, C′ C C″. Man errichte aus den Punkten A, B, C die Senkrechten A a, B b, C c auf die Geraden A A″, B B″, C C″ und trage auf diesen Senkrechten die Weiten A a, B b, C c wechselsweise gleich den bekannten Entfernungen a, b, c des gesuchten Punkts; durch ihre Endpunkte a, b, c ziehe man zu A A″, B B″, C C″ wechselsweise die Parallelen $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$. Diese Parallelen schneiden die Horizontalebene in den Punkten α, β, γ, welche die halben großen Axen A α, B β, C γ der elliptischen Risse $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$ der drey Cylinder auf der Horizontalebene bestimmen. Die halben kleinen Axen derselben Risse sind A $\alpha'' =$ A a, B $\beta' =$ B b, C $\gamma'' =$ C c.

386. Bezeichnen wir die drey Cylinder, deren Risse $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ sind, mit den Buchstaben A, B, C, so erhält man:

1tens als Durchschnitt der Cylinder A und B eine Linie von zwey Zweigen, welche als Horizontalprojektion die Linien 1 R 2 E 4 3 E′ 1, 5 6 D′ 7 8 D 5 hat. Die Vertikalprojektionen derselben Zweige sind mit den gleichen Buchstaben und Ziffern bezeichnet.

2tens als Durchschnitt der Cylinder A und C ebenfalls eine Linie von zwey Zweigen, deren zwey, mit den gleichen Zahlen und Buchstaben bezeichneten Projektionen die Krummen 1 2 G 6 5 G′, 3 4 F′ 7 8 F sind.

3tens als Durchschnitt der Cylinder B und C die Linie von einem Zweige, deren Projektionen auf der Horizontal- und Vertikalebene die gleichen Zahlen und Buchstaben 12 K 4 H 3 T 8 7 0 6 H′ 5 S 1 haben.

In der Vertikalprojektion hat diese Linie zwey doppelte Punkte, und nur einen in der Horizontalprojektion.

Die drey Durchschnittslinien haben acht gemeinschaftliche Punkte, deren Projektionen auf beyden Projektionsebenen mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bemerkt sind. Jeder von diesen Punkten entspricht der Bedingung, in den bekannten Abständen von den drey gegebenen Geraden zu seyn.

Die Anordnung der gegebenen Größen auf unserer Tafel ist von der Art, daß sie die größtmögliche Anzahl von Auflösungen giebt. Durch die Veränderung der Angaben, kann diese Anzahl sich auf 6, 4 und 2 beschränken.

Zweyte Konstruktion. *)

387. Die vorstehende Auflösung läßt sich durch eine passende Wahl der Projektionsebenen bedeutend vereinfachen; wie die Konstruktionen der Tafel XXXVIII. zeigen werden, welche wir erklären wollen.

Nehmen wir die horizontale Projektionsebene senkrecht auf eine der gegebenen Geraden an, so wird der erste Cylinder *A* sich auf dieselbe nach seiner kreisförmigen Grundlinie projektiren. Es sey A (Fig. 1. Taf. XXXVIII.) der Mittelpunkt dieser Grundlinie, deren Halbmesser A B (Fig. *a*) ist; die zwey anderen gegebenen Cylinder B und C haben wechselsweise zu Halbmessern die bekannten Geraden A C, A D (Fig. *a*).

Nehmen wir B B′ als Horizontalprojektion der Axe des Cylinders *B* und die Parallele X Y zu B B′ als Projektionsaxe, so wird die vertikale Projektionsebene parallel zu den Axen der zwey Cylinder A und B seyn. C C′, *c c′* (Fig. 1 et 2) seyen die Projektionen der Axe des dritten Cylinders. Aus den Projektionen der Axen der Cylinder

*) Traité de Géometrie descriptive par Hachette. Pag. 149.

B und C leite man die Projektionen $x' \beta''$, $\gamma''' \gamma$ (Fig. 3) dieser nemlichen Axen auf eine, zu Axe (C C', c c') des Cylinders C parallele Vertikalebene X' Y' ab. Denken wir uns diesen Cylinder durch eine Ebene (E F, F G) geschnitten, deren Risse E F, F G wechselsweise senkrecht auf die Projektionen C C', $\gamma''' \gamma \delta$ seiner Axe sind. Dieser Schnitt wird ein Kreis seyn, von dem gegebenen Halbmesser A D (Fig. *a*). Indem man diese Ebene um ihren Horizontalriß drehen läßt, und sie auf die Horizontalebene zurücklegt, fällt der Mittelpunkt (d, δ) (Fig. 1 et 3) des Kreises auf der Horizontalebene nach D (Fig. 4). Hat man aus diesem Punkt D, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser D O oder D P = A D (Fig. *a*), einen Kreis beschrieben, so sind die zu C C' parallelen Tangenten O N, P Q an diesen Kreisen die Gränzen der Horizontalprojektion des Cylinders C. Die Gränzen der Vertikalprojektion (Fig. 2) desselben Cylinders sind die zu $c\ c'$ parallelen Geraden $u\ v$, $u'\ v'$. Der Cylinder B hat als Gränzen seiner Vertikalprojektion (Fig. 2) die zu $b\ b'$ parallelen, und von dieser Geraden um $b\ k'$ oder $b\ l'$ = A C (Fig. *a*) entfernten Geraden $k'\ k''$, $l'\ l''$. Die Gränzen der Horizontalprojektion desselben Cylinders sind die Parallelen H H', I I' (Fig. 1) zu der Geraden B B', die von dieser um die Weite B H oder B I gleich dem Halbmesser A C (Fig. *a*) abstehen. Der Cylinder A hat als Gränzen seiner Vertikalprojektion die Vertikalen $t\ \vartheta$, $t'\ \vartheta'$, welche parallel zu $a\ a'$ sind, und sich in den Punkten T, T' auf die Horizontalebene (Fig. 1) projektiren.

Nachdem man die Projektionen der drey Cylinder A, B, C auf den vier Ebenen Fig. 1. 2, 3, 4 bestimmt hat, projektire man die Durchschnittslinie der Cylinder A und B auf die geneigte Ebene der Grundlinie des Cylinders C (Fig. 4). Um die Projektion dieser Kurve von doppelter Krümmung zu erhalten, ist es erfoderlich, einen kreisförmigen Schnitt des Cylinders B auf die Vertikalebene X' Y' (Fig. 3) zu projektiren. Man nehme als diesen Schnitt den Kreis vom Halbmesser $k'\ b$ (Fig. 2), welcher sich auf die Horizontalebene (Fig. 1) nach der Ellipse K L I H projektirt, und auf die Vertikalebene (Fig. 3) nach der Ellipse $k\ l\ i\ h$, deren eine Hauptaxe die Richtung der Geraden $x'\ \beta''$, der Projektion der Axe des Cylinders B, hat.

383. Eine weitere vorläufige Operation, die nicht weniger nöthig ist, besteht darin, diese nemliche Axe des Cylinders B auf die geneigte Ebene der Figur 4 zu projektiren: man nehme auf dieser Axe zwey Punkte (B, β''), (N, n') (Fig. 1 et 3), aus jedem derselben fälle man einen Senkrechten auf die Ebene (E F, F G). Die Fußpunkte dieser Senkrechten β''', n'' (Fig. 3), die sich nach m und n auf der Parallelen B m, N n (Fig. 1) zu der Geraden C C' zurücklegen, bestimmen die Projektion $m\ n$ der Axe des Cylinders B auf der Ebene der Figur 4. Ist dieses geschehen, so schneide man die Cylinder A und B durch eine Reihe von Vertikalebenen, die parallel zu ihren Axen, oder

zu der Geraden B B′ (Fig. 1.) sind, und man projektire die in diesen Ebenen enthaltenen Geraden auf die Ebene der Figur 4; diese Projektionen schneiden sich in einer Reihe von Punkten, und diese Punkte bilden die Kurve 1 2 3 ... 8, welche den Kreis vom Durchmesser O D P in acht Punkten schneidet, den Projektionen der den drey Cylindern gemeinschaftlichen Punkten auf der Ebene (Fig. 4) der Grundlinie des Cylinders C. Die Projektionen der Geraden des Cylinders A auf dieser Ebene sind rechtwinklig auf die Gerade E F, und die Projektionen der Geraden des Cylinders B sind parallel zu der $m\ n$. Die Projektion 1 2 3... 8 des Durchschnittes der Cylinder A, B auf der geneigte Ebene (Fig. 4) konstruirt sich sonach auf dieselbe Weise, welche wir (Art. 302) angewendet haben, um die Projektionen derselben Kurve auf einer horizontalen oder vertikalen Ebene zu finden.

389. Die Horizontalprojektionen, der den drey Cylindern gemeinschaftlichen Punkte liegen nothwendig auf dem Kreise vom Durchmesser T A T′ (Fig. 1), der Basis des Cylinders A, und auf den Senkrechten, die aus den Punkten 1, 2, 3, ... 8, (Fig. 4), auf die Gerade E F errichtet sind, welche Senkrechten den Kreis T A T′ in acht, gleichfalls mit den Ziffern 1, 2, 3, ... 8, bezeichneten Punkten durchschneiden. Die acht Punkte des Raumes, welche durch ihre Projektionen (Fig. 1 et 4) bestimmt sind, genügen den Bedingungen der Aufgabe, in gegebenen Entfernungen von drey Geraden zu seyn, deren Stellungen ebenfalls gegeben sind. Wenn man die Projektionen dieser Punkte auf einer der Vertikalebenen (Fig. 2 et 3) erhalten will, so verrichte man bey einem jeden dieselbe Operation, welche wir für den Punkt (4, 4) (Fig. 1 et 4) angeben wollen.

Man trage 4 φ (Fig. 4) die Entfernung des Punkts 4 von dem Horizontalrisse E F der Ebene (E F, F G) auf der F G (Fig. 3) von F nach 4′; die Parallele 4′ 4″ zu $\beta''' \beta''$ und die Senkrechte 4 ψ' 4″ auf X′ Y′ (Fig. 3) schneiden sich in einem Punkt 4″ (Fig. 3), welcher von der Horizontalen X′ Y′ um eine vertikale Höhe ψ' 4″ entfernt ist. Trägt man diese Höhe auf der Senkrechten 4 ψ 4‴ auf X Y (Fig. 2) von ψ nach 4‴, so sind die Punkte 4‴ und 4″ (Fig. 2 et 3) die Vertikalprojektionen des Punkts (4, 4) (Fig. 1 et 4).

Die Kanten der drey Cylinder, welche sich in dem Punkt (4, 4‴) (Fig. 1 et 2) begegnen, haben als Vertikalprojektionen (Fig. 2) die wechselsweise parallelen Geraden 4‴ ψ, 4‴ r 4‴ π zu den Vertikalprojektionen $a\ a'$, $b\ b'$, $c\ c'$ der Axen der drey Cylinder. Die Parallele 4‴ r zu $b\ b'$ schneidet den Kreis vom Durchmesser $k'\ l'$ in dem Punkt s, welcher sich auf der Vertikalen (Fig. 2) nach r, und auf der Honrizontalebene

(Fig. 1) nach S; die Entfernung S R dieses Punkts S von der Geraden B B′ ist gleich der Ordinate *s r* des Kreises.

390. Bey der ersten Lösung unserer Aufgabe mittelst der Durchschnitte dreyer Cylinder war es erfoderlich, die Projektionen von wenigstens zwey Kurven von dopelter Krümmung zu konstruiren; die eben gegebene Auflösung ist weit einfacher, weil die Projektion einer einzigen von diesen Kurven und ein Kreis von gegebenem Halbmesser die gemeinschaftlichen Punkte der drey Cylinder bestimmen.

Hat man den Durchschnitt der zwey Cylinder A und B gefunden, und denselben auf die, der Axe des dritten Cylinders rechtwinklige Ebene (Fig. 2) projektirt, so kann man die Größe des Halbmessers dieses letzten Cylinders und die Stellung seines Mittelpunkts dergestalt einrichten, daß man die größte Anzahl von gemeinschaftlichen Punkten der drey Cylinderflächen erhalte.

Fünfte Aufgabe.

Ein Ingenieur, welcher eine Gebirgsgegend durchwandert, um entweder die Formen des Terrains zu studieren, oder um einen Entwurf zu öffentlichen Arbeiten zu machen, die von diesen Formen abhängen, ist mit einer topographischen Karte versehen, auf welcher nicht allein die Projektionen der verschiedenen Punkte des Terrains genau angegeben sind, sondern auch die Höhen dieser Punkte über einer nemliche Niveaufläche, mittelst zur Seite der respektiven Punkte gesetzter Zahlen, denen man die Benennung **Coten** zu geben pflegt. Er trifft auf einen merkwürdigen Punkt, welcher sich nicht auf der Karte befindet, entweder weil er vergessen, oder weil er erst seit Verfertigung der Karte merkwürdig wurde. Der Ingenieur führt kein anderes Beobachtungs-Instrument mit sich, als einen, zur Messung der Winkel geeigneten Graphometer, und dieses Instrument ist mit einem Senkel versehen.

Man verlangt, daß er, ohne den Standort zu verlassen, auf der Karte die Stellung des Punkts, wo er sich befindet, bestimme, und daß er die, diesem Punkte zukommende Cote finde, das heißt, seine Höhe über der Niveaufläche?

Mittel zur Konstruktion.

391. Unter den Punkten des Terrains, die genau auf der Karte angegeben, und welche die nächstliegenden sind, bemerke der Ingenieur drey, von denen zwey wenigstens nicht in gleicher Höhe mit ihm sind; er beobachte sodann die Winkel, welche von der