und trägt die Entfernung $l\,m$ des Punkts m von der Vertikalen $q\,q'$ von Q nach μ, so ist die Horizontalprojektion μ eines Berührungspunktes bestimmt. Die projektirende Gerade $\mu\,\mu'$ und die Horizontale $m\,l$ schneiden sich in einem Punkte μ', der Vertikalprojektion desselben Berührungspunkts. Man konstruire auf dieselbe Weise die beyden andern Berührungspunkte (π, π'), (ϱ, ϱ').

Die aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Seiten der gegebenen Pyramide gefällten Senkrechten sind, als Halbmesser einer nemlichen Kugel, einander gleich; die Gerade $q'\,m$ ist sonach gleich $q'\,q$, und die Gerade $r'\,m$, welche man parallel zu $g\,d'$ gezogen hat, ist Tangente zu dem aus q' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $q'\,q$ beschriebenen Kreise.

Dritte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von drey, im Raume gegebenen Punkten bekannt sind?

383. Anmerkung. Wir haben bereits zu Folge der (Art. 3.) angestellten Betrachtungen gesehen, daß dieser Punkt als geometrische Oerter, drey aus den gegebenen Punkten, als Mittelpunkten, und mit den gegebenen Entfernungen, als respektiven Halbmessern, beschriebene Kugeln habe.

Zur Vereinfachung der Konstruktion nehmen wir an, die horizontale Projektionsebene gehe durch die drey gegebenen Punkte, und die vertikale Projektionsebene seye senkrecht auf die Gerade, welche zwey von jenen Punkten verbindet. Demnach seyen (Taf. XXXVI. Fig. 3.) A, B, C die drey gegebenen Punkte; A', B', C' seyen die gegebenen Abstände dieser Punkte von dem zu suchenden. Man verbinde zwey dieser Punkte durch die Gerade A B, und errichte senkrecht auf dieselbe die Gerade L M, welche die Stellung der vertikalen Projektionsebene bestimmt. Aus den Punkten A, B, C als Mittelpunkten, und mit Halbmessern gleich den respektiven Entfernungen A', B', C' beschreibe man sofort drey Kreisbögen, welche sich zu zwey und zwey in den Punken D, E, F, J, P, Q begegnen; man ziehe die Geraden D E, F J, P Q, welche die Horizontalprojektionen der Kreisumfänge sind, nach welchen die drey Kugeln sich schneiden; und der einzige Punkt N, in welchem jene drey Geraden sich schneiden, ist offenbar die Horizontalprojektion des verlangten Punkts.

Die Vertikalprojektion dieses nemlichen Punkts liegt einmal in der unbestimmten projektirenden Geraden N $n\,n'$; und da der in D E projektirte Kreis parallel zur Vertikalebene ist, so projektire man die Gerade A B auf die L M in den Punkt r, aus welchem man, als Mittelpunkt, und mit einem Abstande gleich D R oder der Hälfte von D E den Kreis $d\,n\,e\,n'$ beschreibe. Der Umfang dieses Kreises schneidet die Gerade N $n\,n'$ in zwey Punkte n, n', welche beyde als Vertikalprojektionen des verlangten Punkts genommen werden können, da die beyden, diesen Projektionen entsprechenden Punkte den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Vierte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes konstruiren, dessen Entfernungen von drey im Raume gegebenen geraden Linien bekannt sind?

384. Auflösung. Der gesuchte Punkt gehört (Art. 4.) als geometrischen Oertern, drey geraden Cylinderflächen an, welche als Axen die gegebenen Geraden haben, und als respektive Halbmesser ihrer kreisförmigen Grundlinien die gegebenen Entfernungen des Punktes von jenen drey Axen. Diese Cylinder schneiden sich zu zwey und zwey nach drey Kurven von doppelter Krümmung; die Punkte, in denen diese Kurven sich selbst durchschneiden, genügen sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe. Man beweißt mittelst der Analysis, daß die Anzahl dieser Punkte höchstens acht und wenigstens zwey ist, aber immer gerade.

Um die Projektionen der Durchschnitslinien der genannten Cylinder mittelst der (Art. 302.) vorgetragenen Methoden zu konstruiren, ist es zuerst erfoderlich, die Risse der drey Flächen auf der Horizontalebene zu bestimmen. Diese Risse sind drey Ellipsen, deren kleine Axen wechselseitig gleich sind den Entfernungen des zu bestimmenden Punkts von den drey gegebenen Geraden.

Erste Konstruktion. (Taf. XXXVII.)

385. Wir nehmen an, die drey Geraden seyen mittelst ihrer horizontalen und vertikalen Projektion gegeben, und es seyen A A', B B', C C' (Taf. XXXVII) diese Horizontalprojektionen; A, B, C seyen die Punkte, in denen die gegebenen Geraden die Horizontalebene durchschneiden. Dieselben Geraden machen mit ihren Horizontalprojektionen die Winkel A' A A'', B' B B'', C' C C''. Man errichte aus den Punkten A, B, C die Senkrechten A a, B b, C c auf die Geraden A A'', B B'', C C'' und trage auf diesen Senkrechten die Weiten A a, B b, C c wechselsweise gleich den bekannten Entfernungen a, b, c des gesuchten Punkts; durch ihre Endpunkte a, b, c ziehe man zu A A'', B B'', C C'' wechselsweise die Parallelen $a\,\alpha$, $b\,\beta$, $c\,\gamma$. Diese Parallelen schneiden die Horizontalebene in den Punkten α, β, γ, welche die halben großen Axen A α, B β, C γ der elliptischen Risse $\alpha\,\alpha'\,\alpha''$, $\beta\,\beta'\,\beta''$, $\gamma\,\gamma'\,\gamma''$ der drey Cylinder auf der Horizontalebene bestimmen. Die halben kleinen Axen derselben Risse sind A $\alpha'' =$ A a, B $\beta' =$ B b, C $\gamma'' =$ C c.