A C, A D gezogen hat, nehme man die vertikale Projektionsebene parallel zu der Geraden A D an, das heißt so, daß die Projektionsaxe L M und die Gerade A D parallel seyen; und es sey endlich der Punkt d auf der Vertikalen D d die Vertikalprojektion des vierten gegebenen Punkts.

Wenn man sofort durch die Mitte E der Geraden A B eine Senkrechte E G auf dieselbe Gerade errichtet, und durch die Mitte F der Geraden A C eine Senkrechte F G auf dieselbe, so hat man die unbestimmten Projektionen zweyer Vertikalebenen, welche den Mittelpunkt der verlangten Kugel enthalten; die Vertikale (G, $g\,g'$), nach welcher jene beyden Ebenen sich schneiden, ist daher ein geometrischer Ort dieses Mittelpunkts.

Da die aus A nach dem vierten Punkt gezogene Gerade (A D, $a\,d$) parallel zur vertikalen Projektionsebene ist, so ist auch jede auf sie senkrechte Ebene zugleich senkrecht auf dieselbe Projektionsebene; wenn man daher durch die Mitte k der Geraden $a\,d$ auf dieselbe eine unbestimmte Senkrechte $h'\,k\,h$ errichtet, so hat man die Projektion einer dritten Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Da die Vertikalprojektion dieses Mittelpunkts sich sonach zu gleicher Zeit auf der G g' und auf der $h'\,k\,h$ befinden muß, so ist sie in dem Durchschnittspunkt g' dieser zwey Geraden. Der Halbmesser der gesuchten Kugel ist gleich der Geraden (G A, $g'\,a$), welche den Mittelpunkt (G, g') mit einem gegebenen Punkt (A, a) verbindet. Trägt man daher A G auf der L M von g nach j, so ist die Gerade $j\,g'$ die Größe desselben Halbmessers. Aus den Punkten G und g' als Mittelpunkten, und mit dem Halbmesser J G $= g'\,j$ beschreibe man zwey Kreisumfänge, so hat man die Projektionen zweyer größten Kreise der Kugel, von denen der Eine horizontal, und der Andere vertikal ist; diese Kreisumfänge sind zugleich die Gränzen der Projektionen derselben Kugel.

Zweyte Aufgabe.

Man soll in eine dreyseitige Pyramide, deren Scheitel und Grundfläche gegeben sind, eine Kugel einschreiben; das heißt die Stellung des Mittelpunktes, und die Größe des Halbmessers finden?

379. **Auflösung.** Da die eingeschriebene Kugel die vier Seiten der Pyramide berühren soll, so ist einleuchtend, daß wenn man sich durch den Mittelpunkt der Kugel und durch jede der sechs Kanten eine Ebene denkt, diese Ebene den Winkel in zwey gleiche Theile theile, welchen die durch dieselbe Kante gehenden Seiten unter sich bilden. Wenn man daher unter den sechs Kanten drey wählt, die nicht alle durch den nemlichen Scheitel eines körperlichen Winkels gehen, und wenn man durch jede dieser Kanten eine Ebene

gehen läßt, welche den Winkel, den die entsprechenden Seiten unter sich bilden, in zwey gleiche Theile theilt, so erhält man drey Ebenen, geometrische Oerter, des Mittelpunkts der verlangten Kugel, welche Ebenen daher durch ihren gemeinsamen Durchschnitt die Stellung jenes Mittelpunktes bestimmen müssen.

Es ist hiebey zu bemerken, daß wenn die drey in gleiche Theile getheilten Flächenwinkel der Pyramide einen gemeinsamen Scheitel hätten, in diesem Falle die Theilungsebenen durch eine nemliche Gerade giengen, und daß die Stellung des Mittelpunktes der Kugel auf der geraden Durchschnittslinie dieser drey letzten Ebenen unbestimmt bliebe.

Taf. XXXVI. Fig. 2.

380. Um die Konstruktion zu vereinfachen, nehme man an, die horizontale Projektionsebene sey so gewählt, daß sie mit der Ebene einer Seite der Pyramide zusammen falle.

Es sey das auf der Horizontalebene gegebene Dreyeck A B C der Basis der Pyramide; L M sey die Projektionsaxe, und (D, d') sey der Scheitel der Pyramide. Man errichte aus dem Punkte D auf die Seiten A C, C B, B A der Basis die respektiven Senkrechten D E, D F, D G und betrachte diese als die Risse dreyer, durch den Scheitel (D, d') und senkrecht auf die Seiten der Basis geführten Ebenen. Jede von diesen schneidet die Ebenen der durch die Kanten gehenden Seiten nach zwey Geraden, die einen Winkel untereinander einschließen, gleich jenem, welchen die Seite mit der Basis bildet. Wenn man daher auf der L M, von dem Punkt d der Vertikalen D $d\,d'$ aus, die Geraden D E, D F, D G nach e, f, g trägt, und durch d' die Gerade $d'\,e$, $d'\,f$, $d'\,g$ zieht, so sind die Winkel, welche diese Geraden mit der L M bilden, gleich den Winkeln, welche von den entsprechenden Seiten der Pyramide mit ihrer Basis gebildet werden; und wenn man jeden dieser Winkel durch die Geraden $e\,e'$, $f\,f'$, $g\,g'$ in zwey gleiche Theile theilt, so sind die von diesen letzten Geraden und der L M gebildeten Winkel gleich den Winkeln, welche mit der Basis die Seiten einer neuen Pyramide bilden würden, die mit der gegebenen Pyramide die gleiche Basis hatte, und deren Scheitel in dem Mittelpunkte der verlangten Kugel läge.

381. Um die Scheitel dieser neuen Pyramide zu finden, schneide man dieselbe durch eine, in beliebiger Höhe geführte Horizontalebene, deren Vertikalprojektion die willkührlich gezogene Horizontale $p\ n$ seyn soll. Diese Gerade schneidet die $e\,e'$, $f\,f'$, $g\,g'$ in den Punkten h', i', k', aus welchen man auf die L M die Vertikalen $h\,h'$, $i\,i'$, $k\,k'$ errichtet: und wenn man die drey Abstände $e\,h$, $f\,i$, $g\,k$ auf den entsprechenden Senkrechten von E nach H, von F nach J und von H nach K trägt, so hat man in H, J, K

die Horizontalprojektionen dreyer, auf den drey Seiten der zweyten Pyramide genommenen Punkte, welche auf der willkührlichen Horizontalebene $p\ n$ liegen. Wenn man daher durch die Punkte H, J, K zu den entsprechenden Seiten der Basis die Parallelen P N, N O, O P zieht, so ist das Dreyeck P O N die Projektion eines Schnittes der zweyten Pyramide durch die nemliche Horizontalebene, und wenn man die Scheitel der gleichen Winkel in den zwey ähnlichen Dreyecken A B C, P O N durch die Geraden A P, B O, C N verbindet, so sind dies die Projektionen dreyer Kanten der zweyten Pyramide; und endlich ist der einzige Punkt Q, in welchem sich jene Geraden begegnen, die Horizontalprojektion des Scheitels der zweyten Pyramide, und folglich des Mittelpunktes der verlangten Kugel.

382. Um die Vertikalprojektion dieses Mittelpunkts zu erhalten, ziehe man zuerst die unbestimmte projektirende Gerade $Q\ q\ q'$, auf welcher sie sich befinden muß; sodann projektire man die drey Punkte N, O, P, auf die Horizontale $n\ p$ nach n, o, p; durch die Projektionen a, b, c der Scheitel der entsprechenden Winkel der Basis ziehe man die Geraden $a\ p$, $b\ \ o$, $c\ n$. Diese sind die Vertikalprojektionen der drey Kanten, und der einzige Punkt q', in welchem diese drey letzten Geraden sich begegnen, und welcher zu gleicher Zeit auf der Geraden $Q\ q\ q'$ liegt, ist die Vertikalprojektion des Mittelpunktes der Kugel.

Ist dieser Mittelpunkt (Q, q') der Kugel bekannt, so ist der Halbmesser derselben gel gleich der aus dem Mittelpunktt auf eine der vier Seiten der Pyramide gefällten Senkrechten; zum Beyspiel, der auf die horizontale Seite (A B C, $a\ c$). Diese Senkrechte ist offenbar gleich $q'\ q$, dem Halbmesser der Kugel. Die aus den Punkten Q, q' als Mittelpunkten, und mit diesem Halbmesser $q\ q'$ beschriebenen Kreise sind die Gränzen der Horizontal- und der Vertikalprojektion, der in die gegebene Pyramide eingeschriebenen Kugel. Von den vier Berührungspunkten der Kugel und den Seiten der Pyramide, ist der auf der Horizontalebene befindliche (Q, q) bekannt. Um die drey andern zu erhalten, bemerke man, daß sie die Fußpunkte sind, der aus dem Mittelpunkt (Q, q') gefällten Senkrechten auf die Ebenen der drey Seiten der Pyramide, deren Risse auf der Horizontalebene die Geraden A B, A C, C B sind. Fällt man aus dem Punkt Q die Senkrechte Q R, Q S, Q T auf die Seiten A B, A C, B C, so enthalten diese Geraden die Horizontalprojektionen μ, π, ϱ der drey Berührungspunkte. Um die Vertikalprojektionen μ', π', ϱ', zum Beyspiel μ', zu konstruiren, denke man sich die Vertikalebene Q R nach Q R′ parallel zur Projektionsaxe L M versetzt. Diese Vertikalebene schneidet die der Kante A B anliegende Seite der Pyramide nach einer Geraden $r'\ m$ parallel zu $g\ d'$. Fällt man aus dem Punkt q' die Senkrechte $q'\ m$ auf die $r'\ m$, und trägt die Entfernung $l\ m$ des Punkts m von der Vertikalen $q\ q'$ von Q nach μ, so ist die Horizontalprojektion μ eines Berührungspunktes bestimmt. Die projektirende Gerade $\mu\ \mu'$ und die Horizontale $m\ l$ schneiden sich in einem Punkte μ', der Vertikalprojektion desselben Berührungspunkts. Man konstruire auf dieselbe Weise die beyden andern Berührungspunkte (π, π'), (ϱ, ϱ').

Die aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Seiten der gegebenen Pyramide gefällten Senkrechten sind, als Halbmesser einer nemlichen Kugel, einander gleich; die Gerade $q'\ m$ ist sonach gleich $q'\ q$, und die Gerade $r'\ m$, welche man parallel zu $g\ d'$ gezogen hat, ist Tangente zu dem aus q' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $q'\ q$ beschriebenen Kreise.

Dritte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von drey, im Raume gegebenen Punkten bekannt sind?

383. Anmerkung. Wir haben bereits zu Folge der (Art. 3.) angestellten Betrachtungen gesehen, daß dieser Punkt als geometrische Oerter, drey aus den gegebenen Punkten, als Mittelpunkten, und mit den gegebenen Entfernungen, als respektiven Halbmessern, beschriebene Kugeln habe.

Zur Vereinfachung der Konstruktion nehmen wir an, die horizontale Projektionsebene gehe durch die drey gegebenen Punkte, und die vertikale Projektionsebene seye senkrecht auf die Gerade, welche zwey von jenen Punkten verbindet. Demnach seyen (Taf. XXXVI. Fig. 3.) A, B, C die drey gegebenen Punkte; A′, B′, C′ seyen die gegebenen Abstände dieser Punkte von dem zu suchenden. Man verbinde zwey dieser Punkte durch die Gerade A B, und errichte senkrecht auf dieselbe die Gerade L M, welche die Stellung der vertikalen Projektionsebene bestimmt. Aus den Punkten A, B, C als Mittelpunkten, und mit Halbmessern gleich den respektiven Entfernungen A′, B′, C′ beschreibe man sofort drey Kreisbögen, welche sich zu zwey und zwey in den Punken D, E, F, J, P, Q begegnen; man ziehe die Geraden D E, F J, P Q, welche die Horizontalprojektionen der Kreisumfänge sind, nach welchen die drey Kugeln sich schneiden; und der einzige Punkt N, in welchem jene drey Geraden sich schneiden, ist offenbar die Horizontalprojektion des verlangten Punkts.

Die Vertikalprojektion dieses nemlichen Punkts liegt einmal in der unbestimmten projektirenden Geraden N $n\ n'$; und da der in D E projektirte Kreis parallel zur Vertikalebene ist, so projektire man die Gerade A B auf die L M in den Punkt r, aus welchem man, als Mittelpunkt, und mit einem Abstande gleich D R oder der Hälfte