dreyer Geraden bestimmt ist, welche senkrecht auf die drey Geraden, die die gegebenen Punkte zu zwey und zwey verbinden, und durch die Mitten derselben gezogen sind. Jede von diesen Senkrechten ist ein geometrischer Ort des Mittelpunkts.

Die folgenden Beyspiele werden zeigen, auf welche Art sich die Aufgaben der Geometrie von drey Dimensionen, mittelst der Anwendung der geometrischen Oerter behandeln lassen.

Es existirt in den drey Dimensionen eine analoge Aufgabe mit der eben genannten, welche die Elementar-Geometrie gleich jener aufzulösen lehrt, aber wobey sie nicht wie dort zugleich ein Mittel der Konstruktion giebt. Wir wollen mit dieser Aufgabe beginnen.

Erste Aufgabe.

Man soll den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel bestimmen, welche durch vier beliebig im Raume gegebene Punkte geht?

377. Auflösung. Man denke sich die vier gegebenen Punkte zu zwey durch gerade Linien verbunden. Diese Geraden müssen Sehnen der verlangten Kugel seyn, und wenn man durch die Mitte der einen von ihnen eine Ebene senkrecht auf dieselbe führt, so ist einleuchtend, daß diese Ebene alle ihre Punkte in gleichen Abständen von den zwey Punkten der Geraden habe, auf welche sie senkrecht ist, und daß sie folglich ein geometrischer Ort des Mittelpunktes der zu suchenden Kugel sey. Wendet man dieselben Bemerkungen sofort auf zwey von den anderen Geraden an, so findet man zwey andere Ebenen, geometrische Oerter jenes Mittelpunktes. Dieser Mittelpnnkt kann daher kein Anderer seyn, als der einzige Punkt, den jene drey Ebenen mit einander gemein haben und welcher selbst, durch das Zusammentreffen der drey Geraden bestimmt wird, nach welchen die drey Ebenen, zu zwey und zwey sich schneiden. Die Gerade, welche den gefundenen Mittelpunkt mit einem der vier gegebenen Punkte verbindet, ist offenbar der Halbmesser der Kugel.

Taf. XXXVI. Fig. 1.

378. Die erfoderlichen Konstruktionen zu vorstehender Auflösung vereinfachen sich bedeutend, wenn man über die Anordnung der Projektionsebenen beliebig verfügen kann. In der That, nehmen wir an, diejenige Projektionsebene, welche wir als horizontal betrachten, gehe durch drey von den vier gegebenen Punkten, und es seyen A, B, C, D die Horizontalprojektionen der vier gegebenen Punkte, wovon die drey ersten mit ihren respektiven Projektionen zusammenfallen. Nachdem man sodann die drey Geraden A B,

A C, A D gezogen hat, nehme man die vertikale Projektionsebene parallel zu der Geraden A D an, das heißt so, daß die Projektionsaxe L M und die Gerade A D parallel seyen; und es sey endlich der Punkt d auf der Vertikalen D d die Vertikalprojektion des vierten gegebenen Punkts.

Wenn man sofort durch die Mitte E der Geraden A B eine Senkrechte E G auf dieselbe Gerade errichtet, und durch die Mitte F der Geraden A C eine Senkrechte F G auf dieselbe, so hat man die unbestimmten Projektionen zweyer Vertikalebenen, welche den Mittelpunkt der verlangten Kugel enthalten; die Vertikale (G, $g\,g'$), nach welcher jene beyden Ebenen sich schneiden, ist daher ein geometrischer Ort dieses Mittelpunkts.

Da die aus A nach dem vierten Punkt gezogene Gerade (A D, $a\,d$) parallel zur vertikalen Projektionsebene ist, so ist auch jede auf sie senkrechte Ebene zugleich senkrecht auf dieselbe Projektionsebene; wenn man daher durch die Mitte k der Geraden $a\,d$ auf dieselbe eine unbestimmte Senkrechte $h'\,k\,h$ errichtet, so hat man die Projektion einer dritten Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Da die Vertikalprojektion dieses Mittelpunkts sich sonach zu gleicher Zeit auf der G g' und auf der $h'\,k\,h$ befinden muß, so ist sie in dem Durchschnittspunkt g' dieser zwey Geraden. Der Halbmesser der gesuchten Kugel ist gleich der Geraden (G A, $g'\,a$), welche den Mittelpunkt (G, g') mit einem gegebenen Punkt (A, a) verbindet. Trägt man daher A G auf der L M von g nach j, so ist die Gerade $j\,g'$ die Größe desselben Halbmessers. Aus den Punkten G und g' als Mittelpunkten, und mit dem Halbmesser J G $=$ $g'\,j$ beschreibe man zwey Kreisumfänge, so hat man die Projektionen zweyer größten Kreise der Kugel, von denen der Eine horizontal, und der Andere vertikal ist; diese Kreisumfänge sind zugleich die Gränzen der Projektionen derselben Kugel.

Zweyte Aufgabe.

Man soll in eine dreyseitige Pyramide, deren Scheitel und Grundfläche gegeben sind, eine Kugel einschreiben; das heißt die Stellung des Mittelpunktes, und die Größe des Halbmessers finden?

379. Auflösung. Da die eingeschriebene Kugel die vier Seiten der Pyramide berühren soll, so ist einleuchtend, daß wenn man sich durch den Mittelpunkt der Kugel und durch jede der sechs Kanten eine Ebene denkt, diese Ebene den Winkel in zwey gleiche Theile theile, welchen die durch dieselbe Kante gehenden Seiten unter sich bilden. Wenn man daher unter den sechs Kanten drey wählt, die nicht alle durch den nemlichen Scheitel eines körperlichen Winkels gehen, und wenn man durch jede dieser Kanten eine Ebene