sten sphärischen Dreyecks, so bildet man ein zweytes Dreyeck A′ B′ C′, welches supplementirend zu dem Ersten ist. In der That bezeichnen wir, wie oben durch A, B, C, die Flächenwinkel des sphärischen Dreyecks, welche Winkel in senkrechten Ebenen auf die Halbmesser O A, O B, O C gemessen werden; und durch a, b, c, die, wechselsweise den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten C B, A C, A B; so sind die Flächenwinkel A′, B′, C′ des Dreyecks A′ B′ C′ die Supplemente der Seiten a, b, c des Dreyecks A B C; und wenn man mit a', b', c' die den Winkeln A′, B′, C′ gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks A′ B′ C′ benennt; so sind diese Seiten wechselsweise die Supplemente der Winkel A, B C. So zum Beyspiel, da die Seite a', die dem Winkel A′ gegenübersteht, zwischen den zwey Halbmessern O B′, O C′ gefaßt ist, welche senkrecht auf die Ebenen der Seiten b, c des primitiven Dreyecks A B C sind, so ist die Ebene dieser Seite a' senkrecht auf den Halbmesser O A, den Durchschnitt der Ebenen der Seiten b und c; man hat daher in dieser Ebene, wie in jener der Figur 1. ein Viereck A S B X von zwey rechten Winkeln A und B, und von zwey Winkeln S, X, wovon der Eine gleich ist der Seite a' des sphärischen Dreyecks A′ B′ C′, und der Andere gleich dem Flächenwinkel A des sphärischen Dreyecks A B C; woraus sich ergiebt, daß die Winkel a' und A Supplemente zu einander sind.

Drittes Kapitel.

Gebrauch der geometrischen Oerter zur Lösung verschiedener Aufgaben.

376. Man nennt bekanntlich geometrischen Ort eines Punkts diejenige Fläche oder Linie, welche zu Folge gewisser Bedingungen diesen Punkt enthalten muß, und geometrischen Ort einer Linie, die Fläche, welche der Bedingung unterliegt, durch diese Linie zu gehen. Wenn ein Punkt als geometrischen Ort eine Linie hat, so bestimmen zwey dieser Linien die Stellung desselben, sind hingegen krumme Flächen die geometrischen Oerter eines Punktes, so sind drey dieser Flächen zu seiner Bestimmung erfoderlich.

Die Elementar-Geometrie bietet sehr viele Beyspiele dar, von dem Gebrauche der geometrischen Oerter. Zum Beyspiel, die Lösung der Aufgabe: durch drey in einer Ebene gegebene Punkte einen Kreis zu führen, ist auf die Betrachtung gegründet, daß der Mittelpunkt des zu suchenden Kreises durch das Zusammentreffen dreyer Geraden bestimmt ist, welche senkrecht auf die drey Geraden, die die gegebenen Punkte zu zwey und zwey verbinden, und durch die Mitten derselben gezogen sind. Jede von diesen Senkrechten ist ein geometrischer Ort des Mittelpunkts.

Die folgenden Beyspiele werden zeigen, auf welche Art sich die Aufgaben der Geometrie von drey Dimensionen, mittelst der Anwendung der geometrischen Oerter behandeln lassen.

Es existirt in den drey Dimensionen eine analoge Aufgabe mit der eben genannten, welche die Elementar-Geometrie gleich jener aufzulösen lehrt, aber wobey sie nicht wie dort zugleich ein Mittel der Konstruktion giebt. Wir wollen mit dieser Aufgabe beginnen.

Erste Aufgabe.

Man soll den Mittelpunkt und den Halbmesser einer Kugel bestimmen, welche durch vier beliebig im Raume gegebene Punkte geht?

377. Auflösung. Man denke sich die vier gegebenen Punkte zu zwey durch gerade Linien verbunden. Diese Geraden müssen Sehnen der verlangten Kugel seyn, und wenn man durch die Mitte der einen von ihnen eine Ebene senkrecht auf dieselbe führt, so ist einleuchtend, daß diese Ebene alle ihre Punkte in gleichen Abständen von den zwey Punkten der Geraden habe, auf welche sie senkrecht ist, und daß sie folglich ein geometrischer Ort des Mittelpunktes der zu suchenden Kugel sey. Wendet man dieselben Bemerkungen sofort auf zwey von den anderen Geraden an, so findet man zwey andere Ebenen, geometrische Oerter jenes Mittelpunktes. Dieser Mittelpnnkt kann daher kein Anderer seyn, als der einzige Punkt, den jene drey Ebenen mit einander gemein haben und welcher selbst, durch das Zusammentreffen der drey Geraden bestimmt wird, nach welchen die drey Ebenen, zu zwey und zwey sich schneiden. Die Gerade, welche den gefundenen Mittelpunkt mit einem der vier gegebenen Punkte verbindet, ist offenbar der Halbmesser der Kugel.

Taf. XXXVI. Fig. 1.

378. Die erfoderlichen Konstruktionen zu vorstehender Auflösung vereinfachen sich bedeutend, wenn man über die Anordnung der Projektionsebenen beliebig verfügen kann. In der That, nehmen wir an, diejenige Projektionsebene, welche wir als horizontal betrachten, gehe durch drey von den vier gegebenen Punkten, und es seyen A, B, C, D die Horizontalprojektionen der vier gegebenen Punkte, wovon die drey ersten mit ihren respektiven Projektionen zusammenfallen. Nachdem man sodann die drey Geraden A B,

A C, A D gezogen hat, nehme man die vertikale Projektionsebene parallel zu der Geraden A D an, das heißt so, daß die Projektionsaxe L M und die Gerade A D parallel seyen; und es sey endlich der Punkt d auf der Vertikalen D d die Vertikalprojektion des vierten gegebenen Punkts.

Wenn man sofort durch die Mitte E der Geraden A B eine Senkrechte E G auf dieselbe Gerade errichtet, und durch die Mitte F der Geraden A C eine Senkrechte F G auf dieselbe, so hat man die unbestimmten Projektionen zweyer Vertikalebenen, welche den Mittelpunkt der verlangten Kugel enthalten; die Vertikale (G, $g\,g'$), nach welcher jene beyden Ebenen sich schneiden, ist daher ein geometrischer Ort dieses Mittelpunkts.

Da die aus A nach dem vierten Punkt gezogene Gerade (A D, $a\,d$) parallel zur vertikalen Projektionsebene ist, so ist auch jede auf sie senkrechte Ebene zugleich senkrecht auf dieselbe Projektionsebene; wenn man daher durch die Mitte k der Geraden $a\,d$ auf dieselbe eine unbestimmte Senkrechte $h'\,k\,h$ errichtet, so hat man die Projektion einer dritten Ebene, welche durch den Mittelpunkt der Kugel geht. Da die Vertikalprojektion dieses Mittelpunkts sich sonach zu gleicher Zeit auf der G g' und auf der $h'\,k\,h$ befinden muß, so ist sie in dem Durchschnittspunkt g' dieser zwey Geraden. Der Halbmesser der gesuchten Kugel ist gleich der Geraden (G A, $g'\,a$), welche den Mittelpunkt (G, g') mit einem gegebenen Punkt (A, a) verbindet. Trägt man daher A G auf der L M von g nach j, so ist die Gerade $j\,g'$ die Größe desselben Halbmessers. Aus den Punkten G und g' als Mittelpunkten, und mit dem Halbmesser J G = $g'\,j$ beschreibe man zwey Kreisumfänge, so hat man die Projektionen zweyer größten Kreise der Kugel, von denen der Eine horizontal, und der Andere vertikal ist; diese Kreisumfänge sind zugleich die Gränzen der Projektionen derselben Kugel.

Zweyte Aufgabe.

Man soll in eine dreyseitige Pyramide, deren Scheitel und Grundfläche gegeben sind, eine Kugel einschreiben; das heißt die Stellung des Mittelpunktes, und die Größe des Halbmessers finden?

379. **Auflösung.** Da die eingeschriebene Kugel die vier Seiten der Pyramide berühren soll, so ist einleuchtend, daß wenn man sich durch den Mittelpunkt der Kugel und durch jede der sechs Kanten eine Ebene denkt, diese Ebene den Winkel in zwey gleiche Theile theile, welchen die durch dieselbe Kante gehenden Seiten unter sich bilden. Wenn man daher unter den sechs Kanten drey wählt, die nicht alle durch den nemlichen Scheitel eines körperlichen Winkels gehen, und wenn man durch jede dieser Kanten eine Ebene

gehen läßt, welche den Winkel, den die entsprechenden Seiten unter sich bilden, in zwey gleiche Theile theilt, so erhält man drey Ebenen, geometrische Oerter, des Mittelpunkts der verlangten Kugel, welche Ebenen daher durch ihren gemeinsamen Durchschnitt die Stellung jenes Mittelpunktes bestimmen müssen.

Es ist hiebey zu bemerken, daß wenn die drey in gleiche Theile getheilten Flächenwinkel der Pyramide einen gemeinsamen Scheitel hätten, in diesem Falle die Theilungsebenen durch eine nemliche Gerade giengen, und daß die Stellung des Mittelpunktes der Kugel auf der geraden Durchschnittslinie dieser drey letzten Ebenen unbestimmt bliebe.

Taf. XXXVI. Fig. 2.

380. Um die Konstruktion zu vereinfachen, nehme man an, die horizontale Projektionsebene sey so gewählt, daß sie mit der Ebene einer Seite der Pyramide zusammen falle.

Es sey das auf der Horizontalebene gegebene Dreyeck A B C der Basis der Pyramide; L M sey die Projektionsaxe, und (D, d') sey der Scheitel der Pyramide. Man errichte aus dem Punkte D auf die Seiten A C, C B, B A der Basis die respektiven Senkrechten D E, D F, D G und betrachte diese als die Risse dreyer, durch den Scheitel (D, d') und senkrecht auf die Seiten der Basis geführten Ebenen. Jede von diesen schneidet die Ebenen der durch die Kanten gehenden Seiten nach zwey Geraden, die einen Winkel untereinander einschließen, gleich jenem, welchen die Seite mit der Basis bildet. Wenn man daher auf der L M, von dem Punkt d der Vertikalen D $d\,d'$ aus, die Geraden D E, D F, D G nach e, f, g trägt, und durch d' die Gerade $d'\,e$, $d'\,f$, $d'\,g$ zieht, so sind die Winkel, welche diese Geraden mit der L M bilden, gleich den Winkeln, welche von den entsprechenden Seiten der Pyramide mit ihrer Basis gebildet werden; und wenn man jeden dieser Winkel durch die Geraden $e\,e'$, $f\,f'$, $g\,g'$ in zwey gleiche Theile theilt, so sind die von diesen letzten Geraden und der L M gebildeten Winkel gleich den Winkeln, welche mit der Basis die Seiten einer neuen Pyramide bilden würden, die mit der gegebenen Pyramide die gleiche Basis hätte, und deren Scheitel in dem Mittelpunkte der verlangten Kugel läge.

381. Um die Scheitel dieser neuen Pyramide zu finden, schneide man dieselbe durch eine, in beliebiger Höhe geführte Horizontalebene, deren Vertikalprojektion die willkührlich gezogene Horizontale $p\,n$ seyn soll. Diese Gerade schneidet die $e\,e'$, $f\,f'$, $g\,g'$ in den Punkten h', i', k', aus welchen man auf die L M die Vertikalen $h\,h'$, $i\,i'$, $k\,k'$ errichtet: und wenn man die drey Abstände $e\,h$, $f\,i$, $g\,k$ auf den entsprechenden Senkrechten von E nach H, von F nach J und von H nach K trägt, so hat man in H, J, K

die Horizontalprojektionen dreyer, auf den drey Seiten der zweyten Pyramide genommenen Punkte, welche auf der willkührlichen Horizontalebene $p\ n$ liegen. Wenn man daher durch die Punkte H, J, K zu den entsprechenden Seiten der Basis die Parallelen P N, N O, O P zieht, so ist das Dreyeck P O N die Projektion eines Schnittes der zweyten Pyramide durch die nemliche Horizontalebene, und wenn man die Scheitel der gleichen Winkel in den zwey ähnlichen Dreyecken A B C, P O N durch die Geraden A P, B O, C N verbindet, so sind dies die Projektionen dreyer Kanten der zweyten Pyramide; und endlich ist der einzige Punkt Q, in welchem sich jene Geraden begegnen, die Horizontalprojektion des Scheitels der zweyten Pyramide, und folglich des Mittelpunktes der verlangten Kugel.

382. Um die Vertikalprojektion dieses Mittelpunkts zu erhalten, ziehe man zuerst die unbestimmte projektirende Gerade Q $q\ q'$, auf welcher sie sich befinden muß; sodann projektire man die drey Punkte N, O, P, auf die Horizontale $n\ p$ nach n, o, p; durch die Projektionen a, b, c der Scheitel der entsprechenden Winkel der Basis ziehe man die Geraden $a\ p$, $b\ o$, $c\ n$. Diese sind die Vertikalprojektionen der drey Kanten, und der einzige Punkt q', in welchem diese drey letzten Geraden sich begegnen, und welcher zu gleicher Zeit auf der Geraden Q $q\ q'$ liegt, ist die Vertikalprojektion des Mittelpunktes der Kugel.

Ist dieser Mittelpunkt (Q, q') der Kugel bekannt, so ist der Halbmesser derselben gel gleich der aus dem Mittelpunktt auf eine der vier Seiten der Pyramide gefällten Senkrechten; zum Beyspiel, der auf die horizontale Seite (A B C, $a\ c$). Diese Senkrechte ist offenbar gleich $q'\ q$, dem Halbmesser der Kugel. Die aus den Punkten Q, q' als Mittelpunkten, und mit diesem Halbmesser $q\ q'$ beschriebenen Kreise sind die Gränzen der Horizontal- und der Vertikalprojektion, der in die gegebene Pyramide eingeschriebenen Kugel. Von den vier Berührungspunkten der Kugel und den Seiten der Pyramide, ist der auf der Horizontalebene befindliche (Q, q) bekannt. Um die drey andern zu erhalten, bemerke man, daß sie die Fußpunkte sind, der aus dem Mittelpunkt (Q, q') gefällten Senkrechten auf die Ebenen der drey Seiten der Pyramide, deren Risse auf der Horizontalebene die Geraden A B, A C, C B sind. Fällt man aus dem Punkt Q die Senkrechte Q R, Q S, Q T auf die Seiten A B, A C, B C, so enthalten diese Geraden die Horizontalprojektionen μ, π, ϱ der drey Berührungspunkte. Um die Vertikalprojektionen μ', π', ϱ', zum Beyspiel μ', zu konstruiren, denke man sich die Vertikalebene Q R nach Q R' parallel zur Projektionsaxe L M versetzt. Diese Vertikalebene schneidet die der Kante A B anliegende Seite der Pyramide nach einer Geraden $r'\ m$ parallel zu $g\ d'$. Fällt man aus dem Punkt q' die Senkrechte $q'\ m$ auf die $r'\ m$, und trägt die Entfernung $l\ m$ des Punkts m von der Vertikalen $q\ q'$ von Q nach μ, so ist die Horizontalprojektion μ eines Berührungspunktes bestimmt. Die projektirende Gerade $\mu\ \mu'$ und die Horizontale $m\ l$ schneiden sich in einem Punkte μ', der Vertikalprojektion desselben Berührungspunkts. Man konstruire auf dieselbe Weise die beyden andern Berührungspunkte (π, π'), (ϱ, ϱ').

Die aus dem Mittelpunkte der Kugel auf die Seiten der gegebenen Pyramide gefällten Senkrechten sind, als Halbmesser einer nemlichen Kugel, einander gleich; die Gerade $q'\ m$ ist sonach gleich $q'\ q$, und die Gerade $r'\ m$, welche man parallel zu $g\ d'$ gezogen hat, ist Tangente zu dem aus q' als Mittelpunkt mit dem Halbmesser $q'\ q$ beschriebenen Kreise.

Dritte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes bestimmen, dessen Entfernungen von drey, im Raume gegebenen Punkten bekannt sind?

383. Anmerkung. Wir haben bereits zu Folge der (Art. 3.) angestellten Betrachtungen gesehen, daß dieser Punkt als geometrische Oerter, drey aus den gegebenen Punkten, als Mittelpunkten, und mit den gegebenen Entfernungen, als respektiven Halbmessern, beschriebene Kugeln habe.

Zur Vereinfachung der Konstruktion nehmen wir an, die horizontale Projektionsebene gehe durch die drey gegebenen Punkte, und die vertikale Projektionsebene seye senkrecht auf die Gerade, welche zwey von jenen Punkten verbindet. Demnach seyen (Taf. XXXVI. Fig. 3.) A, B, C die drey gegebenen Punkte; A′, B′, C′ seyen die gegebenen Abstände dieser Punkte von dem zu suchenden. Man verbinde zwey dieser Punkte durch die Gerade A B, und errichte senkrecht auf dieselbe die Gerade L M, welche die Stellung der vertikalen Projektionsebene bestimmt. Aus den Punkten A, B, C als Mittelpunkten, und mit Halbmessern gleich den respektiven Entfernungen A′, B′, C′ beschreibe man sofort drey Kreisbögen, welche sich zu zwey und zwey in den Punken D, E, F, J, P, Q begegnen; man ziehe die Geraden D E, F J, P Q, welche die Horizontalprojektionen der Kreisumfänge sind, nach welchen die drey Kugeln sich schneiden; und der einzige Punkt N, in welchem jene drey Geraden sich schneiden, ist offenbar die Horizontalprojektion des verlangten Punkts.

Die Vertikalprojektion dieses nemlichen Punkts liegt einmal in der unbestimmten projektirenden Geraden N $n\ n'$; und da der in D E projektirte Kreis parallel zur Vertikalebene ist, so projektire man die Gerade A B auf die L M in den Punkt r, aus welchem man, als Mittelpunkt, und mit einem Abstande gleich D R oder der Hälfte von D E den Kreis $d\ n\ e\ n'$ beschreibe. Der Umfang dieses Kreises schneidet die Gerade N $n\ n'$ in zwey Punkte n, n', welche beyde als Vertikalprojektionen des verlangten Punkts genommen werden können, da die beyden, diesen Projektionen entsprechenden Punkte den Bedingungen der Aufgabe genügen.

Vierte Aufgabe.

Man soll die Stellung eines Punktes konstruiren, dessen Entfernungen von drey im Raume gegebenen geraden Linien bekannt sind?

384. Auflösung. Der gesuchte Punkt gehört (Art. 4.) als geometrischen Oertern, drey geraden Cylinderflächen an, welche als Axen die gegebenen Geraden haben, und als respektive Halbmesser ihrer kreisförmigen Grundlinien die gegebenen Entfernungen des Punktes von jenen drey Axen. Diese Cylinder schneiden sich zu zwey und zwey nach drey Kurven von doppelter Krümmung; die Punkte, in denen diese Kurven sich selbst durchschneiden, genügen sämmtlich den Bedingungen der Aufgabe. Man beweißt mittelst der Analysis, daß die Anzahl dieser Punkte höchstens acht und wenigstens zwey ist, aber immer gerade.

Um die Projektionen der Durchschnitslinien der genannten Cylinder mittelst der (Art. 302.) vorgetragenen Methoden zu konstruiren, ist es zuerst erfoderlich, die Risse der drey Flächen auf der Horizontalebene zu bestimmen. Diese Risse sind drey Ellipsen, deren kleine Axen wechselseitig gleich sind den Entfernungen des zu bestimmenden Punkts von den drey gegebenen Geraden.

Erste Konstruktion. (Taf. XXXVII.)

385. Wir nehmen an, die drey Geraden seyen mittelst ihrer horizontalen und vertikalen Projektion gegeben, und es seyen A A′, B B′, C C′ (Taf. XXXVII) diese Horizontalprojektionen; A, B, C seyen die Punkte, in denen die gegebenen Geraden die Horizontalebene durchschneiden. Dieselben Geraden machen mit ihren Horizontalprojektionen die Winkel A′ A A″, B′ B B″, C′ C C″. Man errichte aus den Punkten A, B, C die Senkrechten A a, B b, C c auf die Geraden A A″, B B″, C C″ und trage auf diesen Senkrechten die Weiten A a, B b, C c wechselsweise gleich den bekannten Entfernungen a, b, c des gesuchten Punkts; durch ihre Endpunkte a, b, c ziehe man zu A A″, B B″, C C″ wechselsweise die Parallelen $a\ \alpha$, $b\ \beta$, $c\ \gamma$. Diese Parallelen schneiden die Horizontalebene in den Punkten α, β, γ, welche die halben großen Axen A α, B β, C γ der elliptischen Risse $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ der drey Cylinder auf der Horizontalebene bestimmen. Die halben kleinen Axen derselben Risse sind A $\alpha'' =$ A a, B $\beta' =$ B b, C $\gamma'' =$ C c.

386. Bezeichnen wir die drey Cylinder, deren Risse $\alpha\ \alpha'\ \alpha''$, $\beta\ \beta'\ \beta''$, $\gamma\ \gamma'\ \gamma''$ sind, mit den Buchstaben A, B, C, so erhält man:

1tens als Durchschnitt der Cylinder A und B eine Linie von zwey Zweigen, welche als Horizontalprojektion die Linien 1 R 2 E 4 3 E′ 1, 5 6 D′ 7 8 D 5 hat. Die Vertikalprojektionen derselben Zweige sind mit den gleichen Buchstaben und Ziffern bezeichnet.

2tens als Durchschnitt der Cylinder A und C ebenfalls eine Linie von zwey Zweigen, deren zwey, mit den gleichen Zahlen und Buchstaben bezeichneten Projektionen die Krummen 1 2 G 6 5 G′, 3 4 F′ 7 8 F sind.

3tens als Durchschnitt der Cylinder B und C die Linie von einem Zweige, deren Projektionen auf der Horizontal- und Vertikalebene die gleichen Zahlen und Buchstaben 12 K 4 H 3 T 8 7 0 6 H′ 5 S 1 haben.

In der Vertikalprojektion hat diese Linie zwey doppelte Punkte, und nur einen in der Horizontalprojektion.

Die drey Durchschnittslinien haben acht gemeinschaftliche Punkte, deren Projektionen auf beyden Projektionsebenen mit den Ziffern 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 bemerkt sind. Jeder von diesen Punkten entspricht der Bedingung, in den bekannten Abständen von den drey gegebenen Geraden zu seyn.

Die Anordnung der gegebenen Größen auf unserer Tafel ist von der Art, daß sie die größtmögliche Anzahl von Auflösungen giebt. Durch die Veränderung der Angaben, kann diese Anzahl sich auf 6, 4 und 2 beschränken.

Zweyte Konstruktion. *)

387. Die vorstehende Auflösung läßt sich durch eine passende Wahl der Projektionsebenen bedeutend vereinfachen; wie die Konstruktionen der Tafel XXXVIII. zeigen werden, welche wir erklären wollen.

Nehmen wir die horizontale Projektionsebene senkrecht auf eine der gegebenen Geraden an, so wird der erste Cylinder *A* sich auf dieselbe nach seiner kreisförmigen Grundlinie projektiren. Es sey A (Fig. 1. Taf. XXXVIII.) der Mittelpunkt dieser Grundlinie, deren Halbmesser A B (Fig. *a*) ist; die zwey anderen gegebenen Cylinder B und C haben wechselsweise zu Halbmessern die bekannten Geraden A C, A D (Fig. *a*).

Nehmen wir B B′ als Horizontalprojektion der Axe des Cylinders *B* und die Parallele X Y zu B B′ als Projektionsaxe, so wird die vertikale Projektionsebene parallel zu den Axen der zwey Cylinder A und B seyn. C C′, *c c′* (Fig. 1 et 2) seyen die Projektionen der Axe des dritten Cylinders. Aus den Projektionen der Axen der Cylinder

*) Traité de Géometrie descriptive par Hachette. Pag. 149.

B und C leite man die Projektionen $x' \beta''$, $\gamma''' \gamma$ (Fig. 3) dieser nemlichen Axen auf eine, zu Axe (C C', c c') des Cylinders C parallele Vertikalebene X' Y' ab. Denken wir uns diesen Cylinder durch eine Ebene (E F, F G) geschnitten, deren Risse E F, F G wechselsweise senkrecht auf die Projektionen C C', $\gamma''' \gamma \delta$ seiner Axe sind. Dieser Schnitt wird ein Kreis seyn, von dem gegebenen Halbmesser A D (Fig. *a*). Indem man diese Ebene um ihren Horizontalriß drehen läßt, und sie auf die Horizontalebene zurücklegt, fällt der Mittelpunkt (d, δ) (Fig. 1 et 3) des Kreises auf der Horizontalebene nach D (Fig. 4). Hat man aus diesem Punkt D, als Mittelpunkt, mit einem Halbmesser D O oder D P = A D (Fig. *a*), einen Kreis beschrieben, so sind die zu C C' parallelen Tangenten O N, P Q an diesen Kreisen die Gränzen der Horizontalprojektion des Cylinders C. Die Gränzen der Vertikalprojektion (Fig. 2) desselben Cylinders sind die zu c c' parallelen Geraden u v, u' v'. Der Cylinder B hat als Gränzen seiner Vertikalprojektion (Fig. 2) die zu b b' parallelen, und von dieser Geraden um b k' oder b l' = A C (Fig. *a*) entfernten Geraden k' k'', l' l''. Die Gränzen der Horizontalprojektion desselben Cylinders sind die Parallelen H H', I I' (Fig. 1) zu der Geraden B B', die von dieser um die Weite B H oder B I gleich dem Halbmesser A C (Fig. *a*) abstehen. Der Cylinder A hat als Gränzen seiner Vertikalprojektion die Vertikalen t ϑ, t' ϑ', welche parallel zu a a' sind, und sich in den Punkten T, T' auf die Horizontalebene (Fig. 1) projektiren.

Nachdem man die Projektionen der drey Cylinder A, B, C auf den vier Ebenen Fig. 1. 2, 3, 4 bestimmt hat, projektire man die Durchschnittslinie der Cylinder A und B auf die geneigte Ebene der Grundlinie des Cylinders C (Fig. 4). Um die Projektion dieser Kurve von doppelter Krümmung zu erhalten, ist es erfoderlich, einen kreisförmigen Schnitt des Cylinders B auf die Vertikalebene X' Y' (Fig. 3) zu projektiren. Man nehme als diesen Schnitt den Kreis vom Halbmesser k' b (Fig. 2), welcher sich auf die Horizontalebene (Fig. 1) nach der Ellipse K L I H projektirt, und auf die Vertikalebene (Fig. 3) nach der Ellipse k l i h, deren eine Hauptaxe die Richtung der Geraden $x' \beta''$, der Projektion der Axe des Cylinders B, hat.

383. Eine weitere vorläufige Operation, die nicht weniger nöthig ist, besteht darin, diese nemliche Axe des Cylinders B auf die geneigte Ebene der Figur 4 zu projektiren: man nehme auf dieser Axe zwey Punkte (B, β''), (N, n') (Fig. 1 et 3), aus jedem derselben fälle man einen Senkrechten auf die Ebene (E F, F G). Die Fußpunkte dieser Senkrechten β''', n'' (Fig. 3), die sich nach m und n auf der Parallelen B m, N n (Fig. 1) zu der Geraden C C' zurücklegen, bestimmen die Projektion m n der Axe des Cylinders B auf der Ebene der Figur 4. Ist dieses geschehen, so schneide man die Cylinder A und B durch eine Reihe von Vertikalebenen, die parallel zu ihren Axen, oder

zu der Geraden B B′ (Fig. 1.) sind, und man projektire die in diesen Ebenen enthaltenen Geraden auf die Ebene der Figur 4; diese Projektionen schneiden sich in einer Reihe von Punkten, und diese Punkte bilden die Kurve 1 2 3 . . . 8, welche den Kreis vom Durchmesser O D P in acht Punkten schneidet, den Projektionen der den drey Cylindern gemeinschaftlichen Punkten auf der Ebene (Fig. 4) der Grundlinie des Cylinders C. Die Projektionen der Geraden des Cylinders A auf dieser Ebene sind rechtwinklig auf die Gerade E F, und die Projektionen der Geraden des Cylinders B sind parallel zu der *m n*. Die Projektion 1 2 3 . . . 8 des Durchschnittes der Cylinder A, B auf der geneigte Ebene (Fig. 4) konstruirt sich sonach auf dieselbe Weise, welche wir (Art. 302) angewendet haben, um die Projektionen derselben Kurve auf einer horizontalen oder vertikalen Ebene zu finden.

389. Die Horizontalprojektionen, der den drey Cylindern gemeinschaftlichen Punkte liegen nothwendig auf dem Kreise vom Durchmesser T A T′ (Fig. 1), der Basis des Cylinders A, und auf den Senkrechten, die aus den Punkten 1, 2, 3, ... 8, (Fig. 4), auf die Gerade E F errichtet sind, welche Senkrechten den Kreis T A T′ in acht, gleichfalls mit den Ziffern 1, 2, 3, ... 8, bezeichneten Punkten durchschneiden. Die acht Punkte des Raumes, welche durch ihre Projektionen (Fig. 1 et 4) bestimmt sind, genügen den Bedingungen der Aufgabe, in gegebenen Entfernungen von drey Geraden zu seyn, deren Stellungen ebenfalls gegeben sind. Wenn man die Projektionen dieser Punkte auf einer der Vertikalebenen (Fig. 2 et 3) erhalten will, so verrichte man bey einem jeden dieselbe Operation, welche wir für den Punkt (4, 4) (Fig. 1 et 4) angeben wollen.

Man trage 4 φ (Fig. 4) die Entfernung des Punkts 4 von dem Horizontalrisse E F der Ebene (E F, F G) auf der F G (Fig. 3) von F nach 4′; die Parallele 4′ 4″ zu β''' β'' und die Senkrechte 4 ψ' 4″ auf X′ Y′ (Fig. 3) schneiden sich in einem Punkt 4″ (Fig. 3), welcher von der Horizontalen X′ Y′ um eine vertikale Höhe ψ' 4″ entfernt ist. Trägt man diese Höhe auf der Senkrechten 4 ψ 4‴ auf X Y (Fig. 2) von ψ nach 4‴, so sind die Punkte 4‴ und 4″ (Fig. 2 et 3) die Vertikalprojektionen des Punkts (4, 4) (Fig. 1 et 4).

Die Kanten der drey Cylinder, welche sich in dem Punkt (4, 4‴) (Fig. 1 et 2) begegnen, haben als Vertikalprojektionen (Fig. 2) die wechselsweise parallelen Geraden 4‴ ψ, 4‴ *r* 4‴ π zu den Vertikalprojektionen *a a′*, *b b′*, *c c′* der Axen der drey Cylinder. Die Parallele 4‴ *r* zu *b b′* schneidet den Kreis vom Durchmesser *k′ l′* in dem Punkt *s*, welcher sich auf der Vertikalen (Fig. 2) nach *r*, und auf der Honrizontalebene

(Fig. 1) nach S; die Entfernung S R dieses Punkts S von der Geraden B B′ ist gleich der Ordinate *s r* des Kreises.

390. Bey der ersten Lösung unserer Aufgabe mittelst der Durchschnitte dreyer Cylinder war es erfoderlich, die Projektionen von wenigstens zwey Kurven von dopelter Krümmung zu konstruiren; die eben gegebene Auflösung ist weit einfacher, weil die Projektion einer einzigen von diesen Kurven und ein Kreis von gegebenem Halbmesser die gemeinschaftlichen Punkte der drey Cylinder bestimmen.

Hat man den Durchschnitt der zwey Cylinder A und B gefunden, und denselben auf die, der Axe des dritten Cylinders rechtwinklige Ebene (Fig. 2) projektirt, so kann man die Größe des Halbmessers dieses letzten Cylinders und die Stellung seines Mittelpunkts dergestalt einrichten, daß man die größte Anzahl von gemeinschaftlichen Punkten der drey Cylinderflächen erhalte.

Fünfte Aufgabe.

Ein Ingenieur, welcher eine Gebirgsgegend durchwandert, um entweder die Formen des Terrains zu studieren, oder um einen Entwurf zu öffentlichen Arbeiten zu machen, die von diesen Formen abhängen, ist mit einer topographischen Karte versehen, auf welcher nicht allein die Projektionen der verschiedenen Punkte des Terrains genau angegeben sind, sondern auch die Höhen dieser Punkte über einer nemliche Niveaufläche, mittelst zur Seite der respektiven Punkte gesetzter Zahlen, denen man die Benennung Coten zu geben pflegt. Er trifft auf einen merkwürdigen Punkt, welcher sich nicht auf der Karte befindet, entweder weil er vergessen, oder weil er erst seit Verfertigung der Karte merkwürdig wurde. Der Ingenieur führt kein anderes Beobachtungs-Instrument mit sich, als einen, zur Messung der Winkel geeigneten Graphometer, und dieses Instrument ist mit einem Senkel versehen.

Man verlangt, daß er, ohne den Standort zu verlassen, auf der Karte die Stellung des Punkts, wo er sich befindet, bestimme, und daß er die, diesem Punkte zukommende Cote finde, das heißt, seine Höhe über der Niveaufläche?

Mittel zur Konstruktion.

391. Unter den Punkten des Terrains, die genau auf der Karte angegeben, und welche die nächstliegenden sind, bemerke der Ingenieur drey, von denen zwey wenigstens nicht in gleicher Höhe mit ihm sind; er beobachte sodann die Winkel, welche von der

Vertikalen und den nach jenen drey Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen gebildet werden, und nach dieser einzigen Beobachtung ist er im Stande, die Aufgabe zu lösen.

In der That, benennen wir mit A, B, C die drey beobachteten Punkte, deren Horizontalprojektionen er auf der Karte hat, und deren Vertikalprojektionen er mittelst ihrer Coten konstruiren kann. Da er nun den Winkel kennt, der durch die Vertikale und durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl gebildet wird, so kennt er auch den Winkel, welcher durch denselben Strahl, und durch die, im Punkt A errichtete Vertikale gebildet wird, denn indem man die Krümmung der Erde außer Acht läßt, was hier zuläßig ist, so sind jene Winkel Wechselwinkel, und folglich gleich. Wenn er daher eine gerade kreisförmige Kegelfläche annimmt, deren Scheitel im Punkt A, deren Axe vertikal, und deren gerade Erzeugungslinie mit der Axe einen Winkel bildet, gleich dem beobachteten, was diese Fläche vollkommen bestimmt, so geht diese durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl, und folglich durch den Punkt des Standortes: er hat demnach eine erste krumme Fläche, als geometrischen Ort des verlangten Punkts. Indem man bey den zwey übrigen Punkten B, C das nemliche Raisonnement wie bey dem Ersten anwendet, so hat der verlangte Punkt als geometrische Oerter noch zwey gerade kreisförmige Kegelflächen, deren Axen vertikal sind, deren Scheitel in den Punken B, C liegen, und bey deren jeglichen der Winkel den die Erzeugungslinie mit der Axe bildet, gleich ist dem von der Vertikalen und dem entsprechenden Gesichtsstrahl gebildeten Winkel. Der verlangte Punkt ist daher der Durchschnitt dreyer, nach Gestalt und Stellung bestimmte Kegelflächen. Es handelt sich daher nur, nach den gegebenen Größen der Aufgabe, die Projektionen der Durchschnitte dieser drey Kegelflächen zu zwey und zwey betrachtet zu konstruiren. Die Durchschnitte dieser Projektionen geben die Horizontal- und Vertikalprojektion des verlangten Punkts, und folglich die Stelle dieses Punkts auf der Karte und seine Höhe über oder unter den beobachteten Punkten, was seine Cote bestimmt.

Diese Auflösung muß im Allgemeinen vier Punkte hervorbringen, welche der Aufgabe genügen; aber der Beobachter wird unter diesen vier Punkten leicht denjenigen unterscheiden können, welcher mit dem Punkte des Standortes zusammenfällt. Vorerst kann er sich immer versichern, ob der Punkt des Standortes über oder unter der Ebene liegt, welche durch die drey beobachteten Punkte geht. Nehmen wir an, dieser Punkt sey ober der Ebene der Scheitel der Kegel, so ist er befugt die Zweige der Durchschnitte der Kegelflächen, welche sich unter jener Ebene befinden außer Acht zu lassen; hiedurch reducirt sich die Anzahl der möglichen Punkte auf zwey. Derselbe Fall wäre, wenn der Punkt des Standortes sich im Gegentheile unter der Ebene befände. Unter diesen Punkten endlich, wenn sie beyde existiren, kann er leicht denjenigen erkennen, dessen Stellung in Bezug auf die drey Scheitel, dieselbe ist, wie die Stellung des Punktes des Standortes in Bezug auf die beobachteten Punkte.

Konstruktion. (Taf. XXXIX.)

392. Es seyen A, B, C, die auf der Karte genommenen Horizontalprojektionen der drey beobachteten Punkte; *a*, *b*, *c* die Vertikalprojektionen derselben Punkte, die konstruirt sind, indem man auf den Vertikalen B *b*, C *c*, und von der Horizontalen X Y aus, welche durch den Punkt *a* geht, die Unterschiede der Coten der beyden andern Punkte aufträgt; es seyen A′, B′, C′ (Fig. *a*) die Winkel, welche die, nach den respektiven Punkten (A, *a*), (B, *b*), (C, *c*) gerichteten Gesichtsstrahlen mit der Vertikalen bilden.

Man ziehe die unbestimmten Vertikalen *a a′*, *b b′*, *c c′*, welches die Vertikalprojektionen der Axen der drey Kegel sind; durch die Punkte *a*, *b*, *c* ziehe man die Geraden *a l*, *b m*, *c n*, welche mit den Vertikalen Winkel bilden, die wechselseitig gleich sind den gegebenen Winkeln A′, B′, C′ (Fig. *a*). Jede dieser Geraden ist die Vertikalprojektion einer äußersten Kante der entsprechenden Kegelfläche.

Nachdem dieses geschehen, konstruire man die Projektionen der wechselseitigen Durchschnittslinien dieser drey Kegel nach der (Art. 296.) angewendeten Methode, indem man dieselben durch horizontale Ebenen schneidet, oder nach der (Art. 302.) vorgetragenen, indem man die durchschneidenden Ebenen durch zwey und zwey von den drey Scheiteln führt. Die erste Methode ist im vorliegenden Falle die einfachere. Da die Kegel keine parallelen Kanten haben, so sind ihre Durchschnittslinien sämmtlich geschlossene Kurven. (Art. 316.)

Man findet die Kurve (D P D′, *d p d′*) als Durchschnitt der beyden Kegel, deren Scheitel A und B sind; die Kurve (J P J′, *j p j′*) als Durchschnitt der Kegel, deren Scheitel A und C sind, und die Kurve (K P K′, *k p k′*) als Durchschnitt der Kegel von den Scheiteln B und C. Die Horizontalprojektionen dieser drey Kurven begegnen sich in einem Punkt P, die Vertikalprojektionen derselben schneiden sich in einem Punkt *p*, welcher mit dem Punkt P in einer Senkrechten auf die Projektionsaxe X Y liegt, daher ist (P, *p*) ein Punkt, welcher den Bedingungen der Aufgabe genüge thut.

Wenn die drey genannten Kurven sich noch in einem weiteren Punkt wie (P, *p*) begegneten, so erhielte der Beobachter, nachdem er denjenigen erkannt hätte, welcher dem Standorte angehört, mittelst der Horizontalprojektion desselben, seine Stellung auf der Karte, und mittelst der Höhe des entsprechenden Punkts *p* über der Horizontalen X Y fände er die Erhöhung des Standortes über dem beobachteten Punkt A, und folglich die, dem Standorte zukommende Cote.

393. Wir haben bey dieser Auflösung so wie in der vorhergehenden (Art. 386.) die Projektionen der drey Durchschnittslinien der Flächen konstruirt, während zwey genüget hätten. Wir rathen, immer so zu verfahren, weil die Projektionen zweyer Linien von doppelter Krümmung sich in Punkten schneiden können, welche keinen Durchschnittspunkten im Raume entsprechen, und um die Projektionen der Durchschnittspunkte zu erkennen, ist man genöthigt, den Zweigen der beyden Linien zu folgen, die sich auf dem nemlichen Netze einer der Flächen befinden; was eine mühsame Aufmerksamkeit erfodert, der man fast immer überhoben ist, wenn man die drey Linien konstruirt; die Punkte, wo sie sich alle drey schneiden, sind wirklige Durchschnittspunkte.

Sechste Aufgabe.

Die Umstände seyen dieselben, wie in der vorstehenden Aufgabe, nur mit dem Unterschiede, daß das Instrument mit keinem Senkel versehen ist, so daß die Winkel mit der Vertikalen nicht gemessen werden können; man verlangt abermals, daß der Ingenieur, ohne den Standort zu verlassen, auf der Karte die Stelle des Punkts bestimme, wo er sich befindet, und daß er die Cote dieses Punkts finde, das heißt, seine Höhe über der Niveaufläche, auf welche alle Punkte der Karte bezogen sind?

Mittel zur Konstruktion.

394. Der Ingenieur, nachdem er drey Punkte des Terrains ausgewählt hat, welche genau auf der Karte angegeben sind, und von der Art, daß der Punkt des Standortes mit ihnen nicht in einer nemlichen Ebene ist, messe die drey Winkel, welche die, nach jenen drey Punkten gerichteten Gesichtsstrahlen untereinander bilden, und mittelst dieser einzigen Beobachtung ist er im Stande die Aufgabe zu lösen.

In der That, wenn wir mit A, B, C die drey beobachteten Punkte benennen, und wenn man dieselben durch die Geraden A B, B C, C A verbunden annimmt, so erhält der Ingenieur die Horizontalprojektionen dieser drey Geraden auf der Karte verzeichnet; überdies erhält er, mittelst der Coten der drey Punkte die Höhenunterschiede der Endpunkte jener Geraden; er kann daher die Größe einer jeglichen von ihnen finden.

Dieses festgesetzt, wenn man in irgend einer, durch A B geführten Ebene sich ein rechtwinkliges Dreyeck A B D (Taf XL. Fig 1) denkt, das über A B als Grundlinie konstruirt ist, und bey dem der Winkel in B gleich sey, dem Complement des Winkels, unter welchen die Seite A B beobachtet wurde, so wird der Winkel in D gleich seyn dem beobachteten Winkel, und der, durch die drey Punkte A B D beschriebene Kreisumfang besitzt die Eigenschaft, daß wenn man aus irgend einem Punkte des Bogens A D B zwey Gerade nach den Punkten A und B zieht, der Winkel, den diese einschließen, gleich sey dem Beobachteten. Wenn man daher annimmt, daß die Ebene des Kreises sich um A B als Scharnier drehe, so wird der Bogen A D B eine Umdrehungsfläche erzeugen, deren sämmtliche Punkte die nemliche Eigenthümlichkeit besitzen; das heißt, wenn man aus irgend einem Punkt der Fläche zwey Gerade nach den Punkten A und B zieht, diese Geraden unter sich einen Winkel einschließen, gleich dem Beobachteten. Nun aber ist es einleuchtend, daß die Punkte dieser Umdrehungsfläche die einzigen sind, welche die genannte Eigenthümlichkeit besitzen, daher geht die Fläche durch den Punkt des Standortes, das heißt, sie ist ein geometrischer Ort dieses Punkts. Wenn man dieselbe Schlußart auf die zwey andern Geraden B C, C A anwendet, so findet man zwey andere Umdrehungflächen, geometrische Oerter des Punktes des Standortes; dieser Punkt ist daher in dem gemeinschaftlichen Durchschnitt jener drey, nach Gestalt und Stellung bestimmten Umdrehungsflächen. *)

Konstruktion. (Taf. XL.)

395. Man wähle die Stellung der beyden Projektionsebenen dergestalt, daß die horizontale durch die drey beobachteten Punkte geht, und daß die vertikale rechtwinklig auf die Gerade ist, welche zwey von jenen drey Punkten verbindet. Es sey demnach A B C (Fig. 1) das von den drey beobachteten Punkten gebildete Dreyeck, in seiner Ebene beobachtet; und A′, B′, C′ (Fig. *a*) die drey durch die Beobachtung gegebenen Winkel. Man ziehe senkrecht auf die Seite A B die Gerade X Y, welche die Stellung der vertikalen Projektionsebene bezeichnet; und man konstruire, wie angegeben (Art. 394) die Erzeugungskreisbögen A D B, B G C, C L A der drey Umdrehungsflächen, von denen die Seiten A B, B C, A C die Axen sind. Die Gränzen der Horizontalprojektion jeglicher von diesen Flächen sind aus zwey Halbkreisen und aus zwey, auf die respektiven Axen A B, B C, A C senkrechten Tangenten zu diesen Halbkreisen zusammengesetzt.

---

*) Es ist leicht einzusehen, daß nach dieser Behandlung, die Aufgabe sich auch so ausdrücken läßt: in einer dreyseitigen Pyramide, wobey die Basis, und die den Seiten dieser Basis gegenüberstehenden Winkel der Kanten gegeben sind, soll der Scheitel der Pyramide konstruirt werden.

396. Die Methode, welche wir (Art. 322.) vorgetragen haben, um den Durchschnitt zweyer Umdrehungsflächen zu finden, deren Axen sich begegnen, läßt sich auch auf den gegenwärtigen Fall anwenden, da die Axen der drey betrachteten Umdrehungsflächen, die drey Seiten eines Dreyeckes A B C (Fig. 1) sind. Mittelst dieser Methode findet man, daß die Flächen, deren Axen A B und B C sich in B kreuzen, sich nach einer Linie durchschneiden, deren Horizontalprojektion man durch eine punktirte Linie angegeben hat, die durch die Punkte B, 1, 2, E′, δ, 3, 4, B, α'', α, 3, 5, α' 6, β, F′, e, B geht. Die fünf Punkte A, E′, g, F′, e sind bestimmt, durch die Durchschnitte der Erzeugungskreise der zwey Umdrehungsflächen. α, α' sind die zwey Berührungspunkte, der Krummen mit der Begränzungslinie G E′ P; ein weiterer Punkt α'', nahe bey α, liegt auf der Begränzungslinie D p F′ e der Fläche, deren Axe A B ist. Die Punkte 1, 2, 3, 4, 5, 6 sind die Horizontalprojektionen der Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen.

397. Jede der vorgelegten Umdrehungsflächen, kann betrachtet werden, als aus zwey Netzen zusammengesetzt, welche beyde durch Umdrehung entstanden sind, und welche als Erzeugungslinien die zwey Segmente eines Kreises haben, die durch eine Sehne dieses Kreises getrennt sind.

Um das, von dem kleineren Segmente erzeugte Netz von dem Netze, was durch das größere Segment erzeugt ist, zu unterscheiden, wollen wir das erste inneres Netz, und das andere äußeres Netz nennen. Der Durchschnitt zweyer Flächen entsteht aus den Durchschnitten der verschiedenen Netze, die sich untereinander verbinden lassen. Die äußeren Netze, einerseits, und die inneren Netze, andererseits, schneiden sich nach einem geschlossenen Kurvenzweig, dessen Projektionen in stetiger Bewegung durch einen mobilen Punkt erzeugt werden können. Derselbe Fall ist bey dem Kurvenzweige, welcher aus der Verbindung des äußeren oder inneren Netzes einer Fläche, mit dem inneren oder äußeren der andern Fläche entsteht. Diese beyden Kombinationen geben eine einzige Kurve, der ein beweglicher Punkt ohne Unterbrechung folgen kann; es folgt daraus, daß die Durchschnittslinie der zwey Flächen aus zwey geschlossenen Zweigen zusammengesetzt ist, deren Projektionen auf einer Ebene X Y (Fig. 2) die rechtwinklig auf eine der Axen ist, auf A B, zum Beyspiel abgesondert sind: die Projektionen dieser zwey Zweige auf der Ebene des beobachteten Dreyecks A B C (Fig. 1) vereinigen sich in eine einzige Kurve.

398. Die zwey innern Netze (Fig. 1), welche als Axen die Seiten A B, B C haben, schneiden sich nach einer Linie, deren Horizontalprojektion das Kurvenstück B 4 3 δ E′ ist; nun aber liegt der Theil E′ δ g dieser Kurve, der durch die Punkte E′, g begränzt ist, außerhalb der Gränzen der Horizontalprojektion der innern Netze; daher

entspricht dieses letzte Kurvenstück keinem wirklichen Theile der Durchschnittslinie der zwey Flächen. Eben so verhält es sich mit dem Kurvenstücke F′ β e, das außerhalb der Gränze der Horizontalprojektion eines äußeren Netzes der Umdrehungsfläche liegt, welche die Seite A B zur Axe hat; und in der That, wenn man die Durchschnittslinie der zwey Umdrehungsflächen, welche als Axen die Geraden A B, B C haben, auf die Vertikalebene X Y projektirt, so erhält man die Kurve von den sechs Punkten 1, 2, 3, 4, 5, 6, die wie in der Horizontalprojektion durch eine punktirte Linie angegeben ist. Diese Kurve besteht aus zwey abgesonderten Zweigen, von denen jeglicher einen Knoten hat. Der erste Zweig ist 1 2 ε v^2 v^1 a e' a 1; der zweyte Zweig ist a 4 3 γ v^3 v^4 a 5 6 v^6 v^5 a 4, und es giebt keinen Theil dieser zwey Zweige, der den Stücken E′ δ g, F′ β e der Horizontalprojektion entspräche. *)

Man wird eben so finden, daß die beyden Umdrehungsflächen, die als Axen die Seiten A B, A C haben, sich nach einer Linie schneiden, deren Horizontalprojektion zwey Theile H λ p, o μ g' (Fig. 1) einschließt, die keine Vertikalprojektion haben.

Alles was sich auf den Durchschnitt dieser zwey Flächen bezieht, ist mit einer gemischten Linie angegeben, die aus Strichen durch einen Punkt unterbrochen zusammengesetzt ist —•—•—, und dasjenige was sich auf den Durchschnitt der zwey Umdrehungsflächen bezieht, welche als Axen die Geraden A C, C B haben, ist durch gemischte Linien angegeben, die aus Strichen, durch drey Punkte unterbrochen —...—...— bestehen. Auch die Horizontalprojektion dieses letzten Durchschnittes schließt zwey Stücke E φ f, P ψ P′ (Fig. 1) ein, die keine Vertikalprojektion haben (Fig. 2).

399. Die drey Linien, welche aus den Durchschnitten der drey Umdrehungsflächen, zu zwey und zwey genommen, entstehen, begegnen sich in Punkten, die in der Horizontal- und Vertikalprojektion mit den Buchstaben 1, 2, 3, 4, 5, 6 bezeichnet sind. Jeder von den Punkten der Horizontalprojektion entspricht zweyen Punkten der Vertikalprojektion, welche in gleicher Entfernung von der Ebene X Y der drey beobachteten Punkte liegen.

---

*) Es besteht zwischen dem vorliegenden, und dem (Art. 323.) untersuchten Falle nur der Unterschied, daß hier die Projektion des Durchschnittes der zwey Umdrehungsflächen auf die Ebene ihrer Axen Theil einer geschlossenen Linie ist, und daß dieselben Konstruktionen, mittelst deren diese Projektion erhalten wurden, sich auf die ganze Linie anwenden lassen; während die Projektion des Durchschnittes der beyden Flächen (Taf. XXXI.) auf der Ebene der Axen einer Linie von unendlichen Zweigen angehörte, deren Umfang sich durch die angewendeten Konstruktionen nicht über eine gewisse Gränze bestimmen ließe.

400. Wenn man die vorliegende Aufgabe mittelst der Analysis behandelte, indem man als Unbekannte *), eine der drey Coordinaten des Scheitels der Pyramide nähme, so würde die reduzirte Gleichung, auf welche man käme, im Allgemeinen vom sechszehnten Grade seyn, woraus folgt, daß die drey Umdrehungsflächen sich in sechszehn Punkten schneiden können. Nach den Annahmen der gegebenen Größen auf der Tafel haben wir nur zwölf Punkte erhalten. Diese Punkte leisten aber nicht alle der Aufgabe Genüge, und man kann die Lösung derselben bedeutend vereinfachen. In der That, wenn man aus irgend einem Punkte des Bogens A E′ B (Fig. 1) zwey Grade nach den Endpunkten der A B zieht, so ist der Winkel den sie einschließen, nicht gleich dem beobachteten, er ist dessen Ergänzung. Das durch den Bogen A E′ B erzeugte innere Netz und die analogen Netze der andern Umdrehungsflächen können daher nicht zur Lösung der Aufgabe dienen, und alle Durchschnittspunkte, die irgend einem dieser Netze angehören, haben keinen Bezug auf das Problem.

Wenn man daher den Bogen A E′ B und seine analogen auf den beyden andern Flächen ausschließt, so behält jede von diesen Flächen nur noch ein Netz; wodurch die Anzahl der Punkte, die den Bedingungen der Aufgabe Genüge leisten können, vermindert wird. Die Durchschnittspunkte der drey beybehaltenen Netze liegen, wie wir gesehen haben, zu zwey und zwey auf Geraden, die senkrecht auf die Ebene der drey Axen sind, und in gleichen Abständen von dieser Ebene.

Da der Beobachter immer weiß, auf welcher Seite der gesuchte Punkt in Bezug auf diese Ebene liegt, so wird er keine der auf der entgegengesetzten Seite gelegenen Durchschnittspunkte konstruiren, und er wird nur noch unter den übrig behaltenen Punkten denjenigen auszusuchen haben, der in Bezug auf die drey Punkte A, B, C eben so gele-

---

*) Anstatt eine der drey Coordinaten des Scheitels als Unbekannte zu nehmen, kann man sich bekannter Gleichungen bedienen, welche die Werthe der drey Kanten einer Pyramide geben, in Funktionen der drey Seiten der Basis und der Cosinuße der Winkel der Kanten, die diesen Seiten gegenüberstehen. Nennt man a, b, c die drey Seiten der Basis, und p, q, r die Cosinuße der diesen Seiten entgegenstehenden Winkel; endlich x, y, z, die drey Kanten; so hat man in dem Dreyecke, das durch die Seite a, und durch die zwey Kanten x, y gebildet wird; $a^2 = x^2 + y^2 - 2xyp$; man erhält desgleichen $b^2 = y^2 + z^2 - 2yzq$, $c^2 = z^2 + x^2 - 2xzr$; woraus man den Werth einer der drey Kanten von z zum Beyspiel ziehe, welcher durch eine Gleichung vom achten Grad gegeben seyn wird. Da eine Pyramide, und diejenige, welche mit ihr symetrisch ist, Kanten von gleicher Länge haben, so entspricht ein Werth von z zwey verschiedenen Stellungen des Scheitels der Pyramide.

gen ist, wie der Punkt des Standortes in Bezug auf die drey beobachteten Punkte des Terrains.

Endlich müssen wir noch bemerken, daß die gefundenen Projektionen 1, 2, 3, 4, 5, 6, (Fig. 1 u. 2.) weder unmittelbar die Stelle des Punkts des Standortes auf der Karte, noch seine Höhe geben; aber es ist leicht, diese Punkte auf die wahren Projektionsebenen überzutragen.

401. Da die drey geometrischen Oerter des Scheitels der gesuchten Pyramide Umdrehungsflächen sind, so findet man ebenfalls die Stellung dieses Scheitels, indem man unmittelbar die Begegnungspunkte der einen Umdrehungsfläche mit der Durchschnittslinie der beyden Andern aufsucht. Nachdem man zu diesem Zwecke über den drey Seiten des Dreyecks, welches der Pyramide zur Basis dient, die Erzeugungskreise der drey Umdrehungsflächen konstruirt hat, welche durch ihre wechselseitigen Schnitte den Scheitel der Pyramide bestimmen, denke man sich die Durchschnittlinie von zweyen jener drey Flächen, von denjenigen zum Beyspiel, die als Umdrehungsaxen die zwey Seiten A und B der Basis haben; C sey die dritte Seite. Diese Linie, indem sie sich um die dritte Seite C dreht, erzeugt eine vierte Umdrehungsfläche, auf der sich die gemeinschaftlichen Punkte der drey ersten Flächen befinden. Aber zwey Umdrehungsflächen, welche eine und dieselbe Axe haben, können sich nur nach Kreisen schneiden; daher müssen sich die dritte und die vierte Umdrehungsfläche nach einem Kreise schneiden, welcher den Scheitel der Pyramide enthält. Um einen Punkt dieses Kreises zu erhalten, ist es hinreichend, diese beyden Flächen durch irgend eine Meridianebene zu schneiden, dieses kann zum Beyspiel die Ebene der Basis der Pyramide seyn. Die gemeinschaftlichen Punkte der in dieser Ebene enthaltenen Erzeugungsmeridiane bestimmen die gemeinschaftlichen Kreise der zwey Flächen. Der Erzeugungsmeridian der dritten Fläche ist der Kreis, welcher durch die Endpunkte der Seite C geht, und dessen eines Segment einen Winkel mißt, gleich dem doppelten gegebenen, und dieser Seite C gegenüberstehenden Winkel. Was den Erzeugungsmeridian der vierten Fläche betrifft, so bestimmt man denselben, indem man bemerkt, daß jeder Punkt der Durchschnittskurve der beyden ersten Flächen der Scheitel einer Pyramide ist, welche als Basis, das, durch die drey Scheitel A, B, C gebildete Dreyeck hat, und als Kanten solche Sehnen der Erzeugungskreise der zwey Umdrehungsflächen, welche durch die Endpunkte der zwey Geraden A und B gehen.

402. In der Voraussetzung, daß man sich aufgegeben habe, alle Punkte des Art. 400. zu bestimmen, ist die eben vorgetragene Auflösungsart der Erstgegebenen vorzuziehen; weil die zwey Kurven von doppelter Krümmung, welche dort erfoderlich waren, hier durch zwey ebene Linien ersetzt sind, von denen die eine aus zwey gleichen

Kreisen besteht, die als gemeinschaftliche Sehne eine Seite des beobachteten Dreyecks, der Basis der Pyramide haben. Betrachtet man den Halbmesser dieser Kreise als eine unbestimmte Größe, so kann man dieselben vergrößern oder verkleinern, bis daß diese Kreise den Meridianschnitt der vierten Umdrehungsfläche in sechszehn Punkten schneiden. Die auf diese Betrachtungen gegründeten Konstruktionen sind der Gegenstand der Taf. XLI., deren Erklärung wir geben wollen.

Zweyte Konstruktion. (Taf. XLI.)

403. Nachdem man die Ebene des Dreyecks A B C (Fig. 1.) als Projektionsebene genommen, beschreibe man wie Art. 394 angegeben, über den Seiten A C, C B die Kreise, deren Segmente die doppelten Winkel messen, unter denen diese Seiten beobachtet wurden. Diese indem sie sich um die entsprechenden Seiten als Rotationsaxe drehen, erzeugen zwey Flächen, deren Durchschnittslinie man nach der (Art. 322.) vorgetragenen Methode konstruirt. Dieser Durchschnitt ist die Erzeugungslinie der vierten Umdrehungsfläche, welche als Axe die dritte Seite A B des Dreyecks A B C hat. Sie ist aus zwey Zweigen zusammengesetzt, (Art. 397) einem der aus dem Durchschnitte der, durch die großen Segmente B F C, C O A erzeugten Flächennetze entsteht, mit dem, durch die kleinen Segmente A *f* C, C *o* A erzeugten Netze, und dem Andern, der aus dem Durchschnitte der Netze entsteht, welche durch ein großes Segment B F C, und durch ein kleines Segment C *o* A; oder durch ein großes Segment C O A und durch ein kleines Segment B *f* C erzeugt sind.

Die genannten zwey Zweige, indem sie sich um die Axe A B drehen, erzeugen zwey Netze der vierten Umdrehungsfläche, deren Schnitte durch die Ebene des Dreyecks A B C, die Kurven L M N C, oder 1 2 3 4 5 6 7 8, und L′ M′ N′ C, oder 1′ 2′ 3′ 4′ 5′ 6′ 7′ 8′ sind. Diese Kurven werden von der Axe A B, die sie in rechten Winkeln durchschneidet, in gleiche Theile getheilt.

Der Meridianschnitt der dritten Umdrehungsfläche besteht aus zwey Kreisen A B G *g*, A B G′ *g*′, deren Segmente den doppelten Winkel messen, unter dem die Seite A B beobachtet wurde, oder den doppelten Winkel der Kanten der Pyramide, welcher der Seite A B der Basis A B C gegenüber steht. Nun aber schneiden sich die Meridiane der dritten und vierten Umdrehungsfläche in sechszehn Punkten, die mit den Ziffern 1...... 8 auf der Kurve L M N C, und mit den Ziffern 1′...... 8′ auf der Kurve L′ M′ N′ C bemerkt sind: daher begegnen sich die drey Umdrehungsflächen, welche als Axen die Seiten A B, A C, B C haben, in sechszehn, auf denjenigen Kreisen der dritten Fläche gelegenen Punkten, die als Durchmesser die Geraden 1.8, 2.7, 3.6, 4.5, 1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5' haben, welche rechtwinklig auf die Axe A B dieser Fläche sind, und von dieser Axe in gleiche Theile getheilt werden. Jeder von diesen Kreisen, wie zum Beyspiel derjenige, dessen Durchmesser 1.8 ist, enthält zwey Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen, welche sich nach einem einzigen Punkt α der Geraden 1.8 projektiren, so daß die sechszehn Durchschnittspunkte sich auf die horizontale Ebene des Dreyecks A B C nach acht Punkten α, β, γ, δ, α' β, γ' δ' projektiren, die auf den acht Durchmessern 1.8, 2.7......4'.5' gelegen sind.

404. Es ist hier vorerst zu bemerken, daß man den Meridianschnitt L M N C, L' M' N' C der vierten Umdrehungsfläche finden könne ohne nöthig zu haben, die Projektionen des Durchschnittes der zwey ersten Flächen zu konstruiren, welche als Axen die Seiten C B, C A des Dreyeckes A B C haben. In der That, irgend ein Punkt dieser Durchschnittslinie, welchen wir P nennen wollen, wird sich nach seiner Drehung um die Axen B C, C A, auf den Kreisen A O C, C F B (Fig. 1) in zwey Punkten a', a'' auflegen, welche gleichweit von dem Ende C der Seiten B C, C A abstehen; so daß a' C = a'' C: nun aber werden die Abstände des Punkts P von den Enden B, A der Seite A B durch die Sehnen B a', A a'' gemessen, daher wird dieser Punkt P, nachdem er sich um die Axe A B gedreht hat, sich in dem Punkte 1, oder in dem Punkte 8, den gemeinsamen Durchschnitten der zwey aus B und A, als Mittelpunkten und mit den Halbmessern B a' A a'' beschriebenen Kreisen, auflegen. Die beyden Punkte 1 und 8 sind gleich weit von der Umdrehungsaxe A B entfernt.

Auf dieselbe Art findet man weitere Punkte der Krummen L M N C, L' M' N' C, dem Meridianschnitte der vierten Umdrehungsfläche. Da dieser Schnitt, und die Erzeugungskreise der dritten Umdrehungsfläche symetrisch gelegen sind, in Bezug auf die gemeinschaftliche Axe A B, so sieht man, warum die acht Begegnungspunkte der zwey Meridianschnitte, welche auf einer Seite der Axe A B mit 1, 2, 3, 4, 1', 2', 3', 4' bezeichnet sind, die acht übrigen, auf der andern Seite der Axe gelegenen Punkte bestimmen; diese Punkte sind zu zwey und zwey auf Senkrechten auf die Axe A B, in gleichen Abständen von dieser Axe gelegen, und auf folgende Art zusammengehörig:

1.8, 2.7, 3.6, 4.5, 1'.8', 2'.7', 3'.6', 4'.5'.

Den Punkten irgend eines dieser Paare wie 1.8, entspricht ein gemeinschaftlicher Durchschnittspunkt der drey Umdrehungsflächen, dessen Horizontal- und Vertikalprojektionen wir konstruiren wollen.

405. Da die Punkte 1 und 8 durch die Begegnungen der Krummen L M N C und der zwey gleichen Segmente A g' B, A g B bestimmt ist, so schneidet der, aus B

als Mittelpunkt und mit dem Halbmesser B 1 beschriebene Kreisbogen, das Segment des Kreises B F C in dem Punkt a', aus welchem man die Senkrechte a' α auf C B fälle. Dieser Senkrechte trifft die auf A B senkrechte Gerade 1 8 in dem Punkte α, der Horizontalprojektion eines Durchschnittspunktes der drey Umdrehungsflächen. Wenn man aus dem Punkt A, als Mittelpunkt mit dem Halbmesser A 1 oder A 8 den Kreisbogen beschrieben hat, welcher das Segment A O C in dem Punkt a'' schneidet, so träfe die Senkrechte a'' α auf A C ebenfalls die Gerade 1.8 in dem Punkte α, dem Durchschnitte der drey Senkrechten Geraden 1 α, a' α, a'' α auf die drey Seiten A B, B C, A C des Dreyeckes A B C.

406. Hat man die Projektion α eines der sechszehn Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen auf der, als horizontale Projektionsebene angenommenen Ebene des beobachteten Dreyecks A B C, so wird man daraus leicht die Projektion auf einer Vertikalebene X X′ (Fig. 2.) ableiten, welche senkrecht auf die Seite A B des gegebenen Dreyecks ist. In der That, hat die Seite A B als Projektion auf dieser Ebene den Punkt a; beschreibt man aus diesem Punkt als Mittelpunkt einen Kreis vom Halbmesser $a\ k$, (Fig. 2.) der Hälfte von 1 α 8 (Fig. 1.), so schneidet die projektirende Gerade $a\ \alpha$ diesen Kreis in zwey Punkten α, (α) (Fig. 2.), den Vertikalprojektionen von zwey Durchschnittspunkten, welche dieselbe Horizontalprojektion α (Fig. 1.) haben. Auf diese Art findet man als Vertikalprojektionen der gemeinschaftlichen Punkte der drey Umdrehungsflächen, die sechszehn mit den Buchstaben α, β, γ, δ, α', β', γ', δ', (α), (β), (γ), (δ), (α'), (β'), (γ'), (δ'), bezeichneten Punkte. Die acht ersten, welche über der Horizontalen X X′ liegen, und die acht andern, unter dieser Horizontalen gelegenen sind mit den gleichen Buchstaben zwischen Parenthesen bezeichnet; sie liegen sämmtlich zu zwey und zwey in Senkrechten auf die Projektionsaxe X X′ und in gleicher Entfernung von derselben. Die auf diese Art zu zwey und zwey zusammengehörigen Durchschnittspunkte der drey Umdrehungsflächen haben daher immer nur eine und dieselbe Horizontalprojektion, wodurch diese Projektionen der sechszehn genannten Durchschnittspunkte sich auf die acht Punkte α, β, γ δ, α', β', γ', δ' (Fig. 1) reduziren.

407. Betrachtet man die sechszehn gemeinschaftlichen Punkte der drey Umdrehungsflächen, als die Scheitel von Pyramiden, welche zur Basis das beobachtete Dreyeck A B C (Fig. 1.) haben, und als den Seiten dieser Basis gegenüberstehende Winkel der Kanten, diejenigen, unter welchen die Seiten der Basis beobachtet wurden, oder die Complemente derselben (Art. 394.); so sind diese Pyramiden zu zwey und zwey symetrisch miteinander, in Bezug auf die Ebene des Dreyeckes A B C; die Scheitel eines jeden Paares dieser symetrischen Pyramiden liegen in einer Senkrechten auf die Ebene der Fig. 1.,

und sie haben daher als gemeinsame Projektion auf dieser Ebene einen der acht Punkte $\alpha, \beta, \gamma \ldots\ldots \delta$. (Fig. 1.)

Siebente Aufgabe.

Der General einer Armee im Angesichte des Feindes hat keine Karte der von demselben besetzten Gegend, und er bedarf einer, um den Plan zu einem von ihm beabsichtigten Angriffe zu machen. Er hat einen Luftballon. Er beauftragt einen Ingenieur, sich mit dem Luftballon zu erheben, und alle nöthigen Maaße zu nehmen, um die Karte zu verfertigen, und ein annäherndes Nivellement zu geben: allein er hat Ursache zu vermuthen, daß, wenn der Luftballon den Standort auf der Erde veränderte, der Feind seine Absicht wahrnehmen könnte; er erlaubt folglich dem Ingenieur, sich, wenn es nöthig ist, auf verschiedene Höhen in der Atmosphäre zu erheben, aber er verbietet ihm den Standort auf dem Boden zu verändern. Der Ingenieur hat ein Instrument zum Winkelmessen bey sich, und dieses Instrument ist mit einem Senkel versehen: man fragt wie der Ingenieur die Befehle des Feldherrn vollziehen könne?

Mittel zur Lösung.

408. Der Ingenieur nehme zwey Standorte in der nemlichen Vertikalen, deren Entfernung er kennen wird, indem er die Leine messen läßt, die man ablaufen ließ, um ihn von Einem zum Andern zu erheben. In einem dieser Standorte, in dem unteren zum Beyspiel, messe er die Winkel, welche die Vertikale mit den Gesichtsstrahlen macht, die nach den Punkten gerichtet sind, deren Stellung er auf der Karte bestimmen will; sodann wähle er unter allen diesen Punkten einen, welchen er als Ersten betrachte, und den wir mit A benennen wollen, und er messe überdies nacheinander die Winkel, welche durch den, nach dem Punkt A gerichteten Gesichtsstrahl, und die, nach den übrigen Punkten gerichteten Strahlen gebildet werden. In dem andern Standorte messe er die Winkel, welche von der Vertikalen, und den, nach allen Punkten des Terrains gerichteten Gesichtsstrahlen gebildet werden. Nach diesen Beobachtungen ist er im Stande, die verlangte Karte zu konstruiren.

In der That, da man die Winkel kennt, die von der Vertikalen mit den zwey Gesichtsstrahlen gebildet werden, welche aus den zwey Standorten nach einem nemlichen Punkte gerichtet sind, so befindet sich dieser Punkt zu gleicher Zeit auf zwey bestimmten und bekannten Kegelflächen; denn diese Flächen sind von kreisförmigen Grundlinien, sie haben ihre Axen in der nemlichen Vertikalen, die Entfernung ihrer Scheitel ist gleich dem Unterschiede der Höhen der zwey Standorte, und die Winkel, welche ihre geraden Erzeugungslinien mit der gemeinschaftlichen Axe machen, sind gleich den beobachteten Winkeln. Da man überdem den Winkel kennt, der durch den Gesichtsstrahl, welcher aus dem ersten Standorte nach demselben Punkte gerichtet ist, mit demjenigen gebildet wird, welcher nach dem Punkt A gerichtet ist, so befindet sich der beobachtete Punkt auch noch auf einer dritten geraden kreisförmigen Kegelfläche, deren geneigte Axe, der aus dem ersten Standorte nach dem Punkt A gerichtete Gesichtsstrahl ist, deren Scheitel in dem ersten Standorte liegt, und bey welcher der Winkel der Axe und der Erzeugungslinie gleich ist dem beobachteten Winkel. Der beobachtete Punkt hat daher als geometrische Oerter drey gerade kreisförmige Kegelflächen. *) Er ist daher ein Punkt ihres gemeinsamen Durchschnittes, und wenn man die beyden Projektionen dieses Durchschnittes konstruirt, so erhält man die Stelle des Punkts auf der Karte, und seine Erhöhung über oder unter den übrigen.

409. Ohne die Betrachtungen zu verändern, kann die Konstruktion, mittelst einiger schon bekannten Methoden weit einfacher werden: denn da man die Winkel kennt, welche in dem ersten Standorte, von dem nach A gerichteten Gesichtsstrahl und den nach allen Punkten gerichteteten Gesichtsstrahlen gebildet werden, und da man bey jedem dieser Winkel noch die Winkel kennt, die seine Seiten mit der Vertikalen bilden, so kann man sie auf den Horizont reduziren, das heißt ihre Horizontalprojektionen konstruiren. Wenn man daher auf der Karte einen willkührlichen Punkt nimmt, um die Projektion der Vertikalen des Luftballons vorzustellen, und wenn man durch diesen Punkt eine willkührliche Gerade zieht, welche die Projektion des nach dem Punkt A gerichteten Gesichtstrahls vorstellen soll; wenn man endlich durch denselben Punkt Gerade zieht, die mit der Projektion des nach dem Punkt A gerichteten Strahles Winkel bilden gleich den auf den Horizont reduzirten Winkeln, so ist einleuchtend, daß jede dieser Geraden die Horizontalerojektion des Punktes des Terrains enthalten müsse, der ihr entspricht.

Nun aber, wenn man in der Vertikalprojektion, und auf der Projektion der Vertikalen des Luftballons zwey Punkte nimmt, welche in Theilen des Maasstabes um eine

*) Zwey von diesen geraden kreisförmigen Kegeln, haben als Scheitel den Punkt des ersten Standortes, sie schneiden sich daher nach zwey Geraden. Man bestimmt einen Punkt einer jeden von diesen Geraden, durch den Durchschnitt zweyer Kreise, indem man die Kegel als Umdrehungsflächen betrachtet, deren Axe sich begegnen.

Größe von einander entfernt sind, gleich der gemessenen Entfernung der beyden Standorte, und wenn man durch diese Punkte zwey Gerade zieht, die mit der Vertikalen Winkel machen, gleich denen, welche bey einem nemlichen Punkt des Terrains beobachtet wurden, so müssen diese Geraden sich in einem Punkte schneiden, dessen Entfernung von der Vertikalen, die verlangte Entfernung ist. Trägt man daher diese Entfernung von der Projektion des Luftballons aus, auf dem entsprechenden Strahle auf, so erhält man auf der Karte die Stelle des Punkts des Terrains. Die beyden nemlichen Geraden bestimmen in der Vertikalprojektion, durch ihren Durchschnitt die Höhe des Punkts des Terrains; nimmt man daher auf der Vertikalprojektion die Höhen aller Punkte des Terrains über einer nemlichen Horizontalebene, so bestimmt man die Coten, welche allen Punkten der Karte zukommen, und man hat das Nivellement des Terrains.

Diese Konstruktion ist so einfach, daß sie keiner Figur bedarf.

410. Da die von der Projektion der Vertikalen des Luftballons nach der Projektion des beobachteten Punkts A gezogene Gerade zuerst willkührlich auf der Karte gezogen wurde, so folgt daraus, daß die Karte nicht orientirt ist, und in der That liegt in den von uns angegebenen Beobachtungen Nichts, was die Stellung der Gegenstände in Bezug auf die vier Kardinalpunkte des Horizonts bestimmen könnte. Aber wenn der Ingenieur zur Erde den Winkel beobachtet, den der, von dem Fuße der Vertikalen nach irgend einem auf der Karte gelegenen Punkte gerichtete Sehestrahl mit dem Meridian bildet, und wenn er diesen Winkel auf seine Projektion überträgt, so hat er die Richtung des Meridians, und die Karte ist orientirt.