Fünfte Aufgabe.

Es sind in einer Pyramide zwey Winkel gegeben, und die Seite, an welcher diese Winkel anliegen; man soll die zwey andern Seiten konstruiren?

372. Auflösung. (Taf. XXXV. Fig. 7.) Es sey B S E die gegebene Seite, C b d und C″ d' d'' die zwey bekannten Winkel, von denen der Eine an der Kante B S anliegt, und der Andere, an der Kante E S; zu bestimmen sind die zwey anderen Seiten.

Nachdem man durch einen beliebig genommenen Punkt C der Geraden C b eine Parallele C D zu B S geführt hat, und zu E S eine derartige Parallele C″ D, daß diese Parallelen als die Projektionen zwey anderen Geraden entsprechen, welche in einer zur Ebene der Seite B S E parallelen Ebene, in der Entfernung C d oder C″ d'' von dieser Ebene angenommen sind; so werden sich jene Parallelen in einem Punkte D schneiden, welcher die Projektion in eines Punkts der dritten Kante der Pyramide auf der Ebene der Seite B S E ist. Läßt man die zwey Ebenen (S B, b C) und (S E, d' C″), die Eine um die Gerade S B, die Andere um die Gerade S E sich drehen, so fällt dadurch der Punkt der Kante, von welchem D die Projektion ist, in der Ebene der Seite B S E auf eine der Geraden D B A und D E F, welche wechselseitig aus D senkrecht auf S B und S E gezogen sind. Ueberdies ist dieser Punkt in einem Abstande von dem Scheitel S der Pyramide, gleich der Hypothenuse eines rechtwinkligen Dreyecks, welches als anliegende Seiten an dem rechten Winkel die Geraden D S und d C oder d'' C″ hat. In der Aufwicklung liegt daher dieser Punkt auf dem Kreisbogen, welcher aus S als Mittelpunkt und mit jener Hypothenuse als Halbmesser beschrieben ist, und er liegt folglich in der Begegnung dieses Kreises mit der Geraden D A und D F; daher sind die Winkel E S F und A S B die zwey gesuchten Seiten.

Man würde die Punkte A und F auch konstruirt haben, wenn man bemerkt, daß A B = b C und daß E F = d' C″.

Sechste Aufgabe.

Es sind zwey Winkel gegeben, und die, einem derselben gegenüberstehende Seite, man verlangt die zwey anderen Seiten?

373. Auflösung. (Taf. XXXV. Fig. 8.) Es sey B S D die gegebene Seite; C B D der Winkel der Ebene dieser Seite, mit der Ebene (S B, B C), welche die zweyte Seite enthält, B C′ D′ der Winkel dieser letzten Ebene mit derjenigen, welche die dritte Seite enthält. Die Aufgabe besteht darin, durch die Gerade D S eine Ebene zu führen,

welche mit der Ebene (S B, B C) einen Winkel bilde gleich B C′ D′. Diese letzte Bedingung ist aber gleichbedeutend mit der, eine tangirende Ebene zu einem geraden kreisförmigen Kegel zu führen, dessen Axe senkrecht auf die Ebene (B S, B C) ist, und dessen Erzeugungslinie mit dieser Ebene den bestimmten Winkel macht.

374. Nachdem man daher den Punkt D als Scheitel eines geraden Kegels genommen, wovon die Senkrechte D L auf B C′ die Axe ist, und dessen Kante D C mit B C einen Winkel B C D gleich B C′ D′ macht, so lege man die Ebene (B S, B C) auf die Ebene der Seite B S D zurück; wodurch die in dieser Ebene enthaltene Basis des Kegels, deren Halbmesser L C ist, in den Kreis C″ A A′ versetzt wird, der als Halbmesser die Gerade C″ L′ = C L hat, und dessen Mittelpunkt ein Punkt L′ der Geraden B D ist, so daß L′ B = B L. Zieht man aus dem Punkt S an diesen Kreis die Tangente S A, so ist der Winkel A S B die an B S D anliegende Seite; denn die Ebene, welche durch S D und S A geht, ist offenbar tangirend zu dem Kegel, dessen Axe L D ist, und sie bildet daher mit der Ebene (S B, B C′) einen Winkel gleich dem gegebenen Winkel B C′ D′.

Hätte man die Tangente S A′ an den Kreis A C″ A′ gezogen und den Winkel B S A′ als die an S B anliegende Seite genommen, so würde die durch S D und S A′ geführte Ebene ebenfalls mit der Ebene (B S, C C′) einen Winkel gleich dem gegebenen B C′ D′ gebildet haben, allein der in der Pyramide eingeschlossene Winkel dieser beyden Ebenen wäre nicht mehr der Winkel B C′ D′ selbst, sondern seine Ergänzung.

Sind zwey Seiten B S D und A S B oder A′ S B bekannt, und der von ihnen eingeschlossene Winkel, so vollende man die Auflösung wie bereits angegeben. (Art. 367.)

375. Die sechs so eben gelösten Aufgaben über die dreyseitige Pyramide schließen die ganze sphärische Trigonometrie ein. Der Mittelpunkt der Kugel, auf welcher ein sphärisches Dreyeck verzeichnet ist, kann als der Scheitel einer dreyseitigen Pyramide betrachtet werden, welche als Kanten die drey durch die Scheitel des sphärischen Dreyecks geführten Halbmesser der Kugel hat. Die Winkel, welche diese Halbmesser unter sich bilden, und welche zu Maaßen die Seite des Dreyecks haben, sind die Seiten der Pyramide. Dasjenige, was man einen W i n k e l des sphärischen Dreyecks nennt, ist ein Flächenwinkel der Pyramide.

Es sey O (Fig. 9. Taf. XXXV.) der Mittelpunkt einer Kugel; die drey Halbmesser O A, O B, O C bestimmen das sphärische Dreyeck A B C, welches als Seiten die Bögen größter Kreise A B, A C, B C hat, welche zwischen diesen Halbmessern gefaßt sind. Zieht man durch den Mittelpunkt O der Kugel drey andere Halbmesser O A′, O B′, O C′, wechselsweise senkrecht auf die Ebenen der Seiten C B, A C, A B des ersten sphärischen Dreyecks, so bildet man ein zweytes Dreyeck A′ B′ C′, welches supplementirend zu dem Ersten ist. In der That bezeichnen wir, wie oben durch A, B, C, die Flächenwinkel des sphärischen Dreyecks, welche Winkel in senkrechten Ebenen auf die Halbmesser O A, O B, O C gemessen werden; und durch *a*, *b*, *c*, die, wechselsweise den Winkeln A, B, C gegenüberstehenden Seiten C B, A C, A B; so sind die Flächenwinkel A′, B′, C′ des Dreyecks A′ B′ C′ die Supplemente der Seiten *a*, *b*, *c* des Dreyecks A B C; und wenn man mit *a*′, *b*′, *c*′ die den Winkeln A′, B′, C′ gegenüberstehenden Seiten des Dreyecks A′ B′ C′ benennt; so sind diese Seiten wechselsweise die Supplemente der Winkel A, B C. So zum Beyspiel, da die Seite *a*′, die dem Winkel A′ gegenübersteht, zwischen den zwey Halbmessern O B′, O C′ gefaßt ist, welche senkrecht auf die Ebenen der Seiten *b*, *c* des primitiven Dreyecks A B C sind, so ist die Ebene dieser Seite *a*′ senkrecht auf den Halbmesser O A, den Durchschnitt der Ebenen der Seiten *b* und *c*; man hat daher in dieser Ebene, wie in jener der Figur 1. ein Viereck A S B X von zwey rechten Winkeln A und B, und von zwey Winkeln S, X, wovon der Eine gleich ist der Seite *a*′ des sphärischen Dreyecks A′ B′ C′, und der Andere gleich dem Flächenwinkel A des sphärischen Dreyecks A B C; woraus sich ergiebt, daß die Winkel *a*′ und A Supplemente zu einander sind.

Drittes Kapitel.

Gebrauch der geometrischen Oerter zur Lösung verschiedener Aufgaben.

376. Man nennt bekanntlich geometrischen Ort eines Punkts diejenige Fläche oder Linie, welche zu Folge gewisser Bedingungen diesen Punkt enthalten muß, und geometrischen Ort einer Linie, die Fläche, welche der Bedingung unterliegt, durch diese Linie zu gehen. Wenn ein Punkt als geometrischen Ort eine Linie hat, so bestimmen zwey dieser Linien die Stellung desselben, sind hingegen krumme Flächen die geometrischen Oerter eines Punktes, so sind drey dieser Flächen zu seiner Bestimmung erfoderlich.

Die Elementar-Geometrie bietet sehr viele Beyspiele dar, von dem Gebrauche der geometrischen Oerter. Zum Beyspiel, die Lösung der Aufgabe: durch drey in einer Ebene gegebene Punkte einen Kreis zu führen, ist auf die Betrachtung gegründet, daß der Mittelpunkt des zu suchenden Kreises durch das Zusammentreffen