ten a', b', c' gegenüberstehen; aber man hat nach der Eigenschaft der Supplementar-Pyramide:

$$A' = 180° - a; \quad B' = 180° - b; \quad C' = 180° - c;$$

woraus folgt, daß die drey gesuchten Seiten a, b, c die Supplemente der bekannten Winkel A', B', C' sind, was die Lösung der sechsten Aufgabe (Art. 360.) giebt.

Gehen wir zu der fünften Aufgabe über. Es sind zwey Winkel A, B gegeben, und eine Seite c, an welcher diese Winkel anliegen; zu suchen sind der unbekannte Winkel C und die zwey Seiten a, b.

Die Supplementar-Pyramide ist hier gebildet aus zwey Seiten $(180° - A)$, $(180° - B)$ und aus einem Winkel $(180° - c)$, der zwischen den Ebenen jener zwey Seiten gefaßt ist.

Wir haben diese drey Winkel oben nacheinander mit den Buchstaben a', b', C' bezeichnet. Konstruirt man die Supplementar-Pyramide, so erhält man die Seite c', und die zwey Winkel A', B'.

Aber man hat:

$$c' = 180° - C; \quad B' = 180° - b; \quad A' = 180° - a;$$

und es folgt daraus, daß die gesuchten Winkel C, b und a die Supplemente der bekannten Winkel c', B', A' sind.

Die letzte Aufgabe besteht darin, zwey Seiten a, b und den nicht eingeschlossenen Winkel A zu finden, wenn die Seite c und die zwey Winkel C und B bekannt sind. Die Supplementar-Pyramide hat somit als Seiten c', b' die zwey Supplemente $(180° - C)$, $(180° - B)$, und als den, der ersten dieser zwey Seiten entgegenstehenden Winkel C' das Supplement $(180° - c)$. Konstruirt man diese Pyramide, so findet man die Seite a', und die zwey Winkel A', B', welche folgende Werthe haben.

$$(180° - A), \quad (180° - a), \quad (180° - b);$$

das heißt die Supplemente der drey verlangten Winkel A, a, b.

Wir werden nun eine, von der Betrachtung der Supplementar-Pyramide unabhängige Lösung der drey letzten Aufgaben geben.

Vierte Aufgabe.

Es sind drey Winkel einer Pyramide gegeben, man verlangt die drey Seiten?

370. **Auflösung.** Wir wollen die drey Winkel mit A, B, C bezeichnen. Nachdem man zwey Ebenen geführt hat, die unter einem Winkel gegeneinander geneigt sind,

gleich einem der gegebenen, gleich A zum Beyspiel, so besteht die Aufgabe darin, eine Ebene zu bestimmen, welche durch einen beliebig im Raume genommenen Punkt geht, und welche mit jenen zwey ersten Ebenen Winkel bildet, gleich B und C.

Diese dritte Ebene wird die gerade Durchschnittslinie der beyden Ersten in einem Punkte treffen, welcher der Scheitel, der durch die drey Ebenen gebildeten Pyramide ist.

Es seyen A, B, C (Taf. XXXV. Fig. 6. *a*) die drey gegebenen Winkel. Nehmen wir die Ebene der einen zu suchenden Seite als horizontale Projektionsebene an. In dieser Ebene sey die Gerade S B (Fig. 6.) die Durchschnittslinie derselben und einer dergestalt geführten schiefen Ebene, daß ihr beyderseitiger Neigungswinkel gleich einem der gegebenen Winkel sey, gleich A, (Fig. 6. *a*) zum Beyspiel. Diese schiefe Ebene wird sich auf eine, auf S B senkrechte Vertikalebene F B C nach einer Geraden B *c* projektiren, so daß der Winkel F B *c* = A (Fig. 6. *a*). Ist dieses geschehen, so stellen wir uns vor, die noch zu bestimmende dritte Ebene sey geführt; denken wir uns aus irgend einem Punkt der Geraden S B, aus B zum Beyspiel eine Senkrechte auf die dritte Ebene gefällt, und suchen wir die Projektionen des Fußpunktes dieser Senkrechten auf der dritten Ebene.

Zu diesem Ende denken wir uns durch die Senkrechte eine Ebene senkrecht auf den Durchschnitt der Horizontalebene und der dritten Ebene geführt. Die zwey Geraden, nach welchen diese Ebene die beyden genannten schneidet, werden mit der Senkrechten ein rechtwinkliges Dreyeck bilden, in welchem der, der Senkrechten entgegenstehende Winkel gleich einem der beyden Winkel B, C (Fig. 6. *a*) ist; wir wollen ihn gleich B annehmen. Wenn man die Größe des Stückes der Senkrechten, was zwischen dem Punkt B (Fig. 6.) und ihrem Fußpunkte auf der dritten Ebene gefaßt ist, als bekannt annimmt, gleich $\beta\ \alpha$ (Fig. 6. *b*) zum Beyspiel, so sind alle übrigen Stücke jenes Dreyecks bestimmt; $\beta\ \gamma$ wäre demnach die Basis, $\alpha\ \alpha'$ die Höhe, und der Winkel $\beta\,\gamma\,\alpha = B$ (Fig. 6. *a*). Es ist aber auch ersichtlich, daß $\alpha'\ \beta$ gleich ist dem Abstande der Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten von dem Punkt B (Fig. 6.). Wenn man daher aus diesem Punkt B als Mittelpunkt, und mit einem Halbmesser B A = $\beta\ \alpha'$ (Fig. 6. *b*) einen Kreisbogen beschreibt, so muß irgendwo in diesem Kreisbogen die Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene gelegen seyn.

Sofort denke man sich durch die nemliche Senkrechte eine zweyte Ebene senkrecht auf den Durchschnitt der beyden geneigten Ebenen der Pyramide geführt; so wird diese die beyden geneigten Ebenen nach zwey Geraden schneiden, die mit der Senkrechten ein zweytes rechtwinkliges Dreyeck bilden, in welchem der Winkel gegenüber der Senkrechten gleich ist, dem Winkel C (Fig. 6. *a*). Da nun die Größe der Senkrechten bekannt ist, so läß sich dieses Dreyeck $\beta\,\alpha\,\delta$ (Fig. 6. *c*) konstruiren. Es wird hieraus ersichtlich, daß der Abstand des Fußes der Senkrechten von der Ebene (S B, B *c*) (Fig. 6.) gleich seyn muß, der Höhe $\alpha\,\alpha''$ des Dreyeckes $\beta\,\alpha\,\delta$ (Fig. 6. *c*). Wenn man daher auf der vertikalen Projektionsebene (Fig. 6.) zu der B *c* eine Parallele zieht, die um eine Weite $a'\,a'' = \alpha\,\alpha''$ (Fig. 6. *c*) von ihr entfernt ist, so muß in dieser Paralle, le, indem man sie als die Projektion einer zu (S B, B *c*) parallelen Ebene betrachtet, die Vertikalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene enthalten seyn. Da aber dieser Fußpunkt in einer Höhe über der Horizontalebene liegt, gleich der Höhe $\alpha\,\alpha'$ des Dreyeckes $\beta\,\alpha\,\gamma$ (Fig. 6. *b*), so muß seine Projektion auf der Vertikalebene F B C (Fig. 6.) in der Horizontalen *m m* liegen, deren Entfernung von F C gleich ist der Höhe $\alpha\,\alpha'$ (Fig. 6. *b*). Diese Projektion ist daher in *a*, dem Begegnungspunkte der Geraden *a a'*, *m m* (Fig. 6).

Aus dem Punkte *a* errichte man auf F C die Senkrechte *a* A, welche verlängert den Kreisbogen A M A' in zwey Punkten A, A' schneidet, und man hat in A oder A' die Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten auf der dritten Ebene. Nimmt man den Punkt A, so sind A B, B *a* die Projektionen des Stückes der Senkrechten zwischen der dritten Ebene und dem Punkt B.

Um nun die Durchschnitte dieser dritten Ebene mit den beyden andern zu erhalten, mache man B G = $\beta\,\gamma$ (Fig. 6. *b*) und ziehe G S senkrecht auf A B, so ist dieses die zweyte Kante der gesuchten Pyramide, und der Scheitel derselben ist in S. Die verlängerte Gerade G S trifft die Projektionsaxe in F; man ziehe F *c* senkrecht auf B *a* und man hat den Vertikalriß der dritten Ebene. Dieser und der Riß B c schneiden sich in dem Punkt (C, *c*); man ziehe die Gerade S C, so ist (S C, B *c*) die Durchschnittslinie der beyden geneigten Ebenen, oder die dritte Kante der Pyramide, welche somit ganz bestimmt ist.

371. Hätte man den Punkt A' als Horizontalprojektion des Fußes der Senkrechten angenommen, so würde man eine Pyramide erhalten haben, die mit der erstgefundenen symetrisch wäre, in Bezug auf die Ebene F B C.

Die drey Ebenen, welche die Pyramide bilden, deren Winkel gleich A, B, C sind, theilen den ganzen Raum in acht Pyramiden. Diese Pyramiden sind zu zwey und zwey symetrisch, aber nur ein Paar von ihnen hat Winkel gleich den drey gegebenen A, B, C. Von den drey andern Paaren hat jegliche Pyramide nur einen Winkel gleich einem der gegebenen, die beyden andern Winkel sind die Supplemente der beyden übrigen gegebenen Winkel.