Es sey A B eine auf die Kante S B senkrechte Ebene, in welcher der Winkel C B D gegeben ist, den jene zwey Seiten einschließen. Da die Ebene (S B, B C) die gegebene Seite A S B enthält, so befindet sich der Punkt A der Kante S A in einer Höhe über der Horizontalebene, gleich der auf A B D senkrechten Geraden C D. Wenn man daher durch die Gerade (D, C D) eine Ebene D E senkrecht auf die Kante S E I führt, so enthält diese Ebene das Dreyeck C′ E D, in dem der Winkel, welcher der Seite D C′ = D C gegenüber steht, gleich ist dem Winkel der Ebene der dritten Seite, und der Ebene der Seite B S E. Verlängert man die Gerade D E um das Stück E F = E C′, und zieht die Gerade S F, so ist der Winkel E S F offenbar gleich der dritten gesuchten Seite.

Konstruirt man die Pyramide mit den drey Seiten A S B, B S E und E S F, so vereinigen sich die Punkte A, C, F in einen Einzigen, woraus sich ergiebt, daß die Geraden S A, S F Halbmesser eines nemlichen, aus S als Mittelpunkt beschriebenen Kreises sind.

Die Ebene A B D schneidet die Pyramide nach einem Dreyecke C B I, in welchem die Seite C B = B A, und die Seite C I = I F. Die zwey Geraden I F, E F, und die zwey aus den Mittelpunkten E und S beschriebenen Kreisbögen A F, C′ F laufen daher nach dem nemlichen Punkt F der Kante S F zusammen, und folglich bestimmen zwey beliebige von diesen Linien, durch ihren Schnitt die Kante S F der gesuchten Seite I S F.

Wenn man statt des Winkels C B D das Supplement A B C desselben als den zwischen den zwey Seiten A S B, B S E eingeschlossenen Winkel geommen hätte, so würde man nach derselben Konstruktion den Winkel I S F′ als dritte Seite der Pyramide gefunden haben.

## Dritte Aufgabe.

**Es sind in einer Pyramide zwey Seiten bekannt, und ein Winkel, welcher einer dieser Seiten gegenüber steht; man soll die dritte Seite bestimmen?**

368. Auflösung. Es seyen B S E und E S F (Taf. XXXV. Fig. 5.) die zwey gegebenen, und auf die Ebene des Winkels B S E aufgewickelten Seiten der Pyramide; es sey H′ *b* E der Winkel, welcher durch die Ebene, die die Seite B S E enthält, und durch die Ebene der zu suchenden Seite eingeschlossen wird. Die Geraden S *b* B und (*b* E, *b* H′) bestimmen die Stellung einer Ebene, welche die gesuchte Seite enthält. Denken wir uns nun, daß die Kante S F sich um die Kante S E als Schar-

nier drehe; so wird sie in dieser Bewegung eine Kegelfläche erzeugen, deren kreisförmige Basis (F D, F $a$ $f$ $f'$) in einer auf das Scharnier senkrechten Ebene F D enthalten ist. Nun aber schneidet diese Ebene die Ebene (S $b$ B, $b$ H') der gesuchten Seite nach der Geraden (G E, G H). Wenn daher die Kante S F in der Ebene der gesuchten Seite liegt, so befindet sich der Punkt F derselben in $f$ oder $f'$, und die Aufgabe ist also einer doppelten Lösung fähig.

Beschäftigen wir uns zuerst mit dem Punkt $f$: wenn man die Ebene (S B, $b$ H') sich um S B G als Scharnier drehen läßt, um sie auf die Ebene der bekannten Seite B S E zurückzulegen, so verändern sich die Abstände des Punkts $f$ von den Punkten G und S des Scharniers nicht; daher ist der Punkt A, der Durchschnittspunkt der aus den Mittelpunkten G und S und mit Halbmessern gleich G $f$ und S F beschriebenen Kreisbögen, die Stellung des Punkts $f$, wenn derselbe auf die Ebene der Seite B S E zurückgelegt ist, und A S B ist die, dem Punkt $f$ entsprechenden dritte Seite der Pyramide. Man findet auf gleiche Weise den Winkel A' S B als dritte Seite der Pyramide, welche dem Punkt $f'$ entspricht. Sind die drey Seiten bekannt, so sind auch die drey Winkel bestimmt. (Art. 364.)

369. Wir haben schon (Art. 306.) bewiesen, daß die drey letzten Aufgaben, (Art. 360.) über die Winkel der dreyseitigen Pyramide, sich auf die drey ersten zurückbringen lassen, was sich auf die folgende Weise noch mit mehr Ausführlichkeit thun läßt. Bezeichnen wir mit A, B, C, die Flächenwinkel der Pyramide, und mit $a$, $b$, $c$, die Seiten, welche diesen Winkeln gegenüberstehen; so haben wir so eben folgende Aufgaben gelößt:

1tens Wenn die drey Seiten $a$, $b$, $c$ bekannt sind, die drey Winkel A, B, C zu finden?

2tens Wenn die zwey Seiten $a$, $b$ bekannt sind, und der zwischen inne liegende Winkel C, die drey anderen Winkel $c$, A, B zu finden?

3tens Wenn die zwey Seiten $a$, $b$ bekannt sind, und der nicht zwischenliegende Winkel A oder B, die drey Winkel $c$, C, B oder A zu finden.

Nehmen wir nun an, man gebe die drey Winkel A, B, C einer Pyramide, und es sollten die drey Seiten $a$, $b$, $c$ gefunden werden, so kennt man in der Supplementar-Pyramide die drey Seiten $a'$, $b'$, $c'$, welche nach einander gleich sind

$$180° - A, \quad 180° - B, \quad 180° - C.$$

Man leitet daraus drey Winkel A', B', C' ab, welche wechselsweise den drey Seiten $a'$, $b'$, $c'$ gegenüberstehen; aber man hat nach der Eigenschaft der Supplementar-Pyramide:

$$A' = 180° - a; \quad B' = 180° - b; \quad C' = 180° - c;$$

woraus folgt, daß die drey gesuchten Seiten $a$, $b$, $c$ die Supplemente der bekannten Winkel $A'$, $B'$, $C'$ sind, was die Lösung der sechsten Aufgabe (Art. 360.) giebt.

Gehen wir zu der fünften Aufgabe über. Es sind zwey Winkel $A$, $B$ gegeben, und eine Seite $c$, an welcher diese Winkel anliegen; zu suchen sind der unbekannte Winkel $C$ und die zwey Seiten $a$, $b$.

Die Supplementar-Pyramide ist hier gebildet aus zwey Seiten $(180° - A)$, $(180° - B)$ und aus einem Winkel $(180° - c)$, der zwischen den Ebenen jener zwey Seiten gefaßt ist.

Wir haben diese drey Winkel oben nacheinander mit den Buchstaben $a'$, $b'$, $C'$ bezeichnet. Konstruirt man die Supplementar-Pyramide, so erhält man die Seite $c'$, und die zwey Winkel $A'$, $B'$.

Aber man hat:

$$c' = 180° - C; \quad B' = 180° - b; \quad A' = 180° - a;$$

und es folgt daraus, daß die gesuchten Winkel $C$, $b$ und $a$ die Supplemente der bekannten Winkel $c'$, $B'$, $A'$ sind.

Die letzte Aufgabe besteht darin, zwey Seiten $a$, $b$ und den nicht eingeschlossenen Winkel $A$ zu finden, wenn die Seite $c$ und die zwey Winkel $C$ und $B$ bekannt sind. Die Supplementar-Pyramide hat somit als Seiten $c'$, $b'$ die zwey Supplemente $(180° - C)$, $(180° - B)$, und als den, der ersten dieser zwey Seiten entgegenstehenden Winkel $C'$ das Supplement $(180° - c)$. Konstruirt man diese Pyramide, so findet man die Seite $a'$, und die zwey Winkel $A'$, $B'$, welche folgende Werthe haben.

$$(180° - A), \quad (180° - a), \quad (180° - b);$$

das heißt die Supplemente der drey verlangten Winkel $A$, $a$, $b$.

Wir werden nun eine, von der Betrachtung der Supplementar-Pyramide unabhängige Lösung der drey letzten Aufgaben geben.

## Vierte Aufgabe.

*Es sind drey Winkel einer Pyramide gegeben, man verlangt die drey Seiten?*

370. Auflösung. Wir wollen die drey Winkel mit $A$, $B$, $C$ bezeichnen. Nachdem man zwey Ebenen geführt hat, die unter einem Winkel gegeneinander geneigt sind,